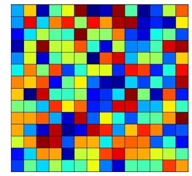
Sandro Wimberger
Dipartimento di Scienze Matematiche, Fisiche e Informatiche
Università di Parma
Parco Area delle Scienze 7/a, I-43124 Parma
Email: sandromarcel.wimberger@unipr.it



Particelle identiche e seconda quantizzazione – 2

Particelle in un box – 1

La Hamiltoniana per particelle identiche (per bosoni e fermioni se non specificato altrimenti) in un box di volume $\Omega = L^3$ con condizioni al contorno periodiche in seconda quantizzazione è

$$H \;=\; \sum_\sigma \int_\Omega dr^3\, \hat{\psi}^\dagger_\sigma(\vec{r}) \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\right) \hat{\psi}_\sigma(\vec{r}) + \hat{V} \tag{1}$$

con il potenziale di interazione a due corpi

$$\hat{V} \;=\; \frac{1}{2}\sum_{\sigma,\sigma'} \int_\Omega dr^3 \int_\Omega dr'^3\, v(\vec{r}-\vec{r}\,')\hat{\psi}^\dagger_\sigma(\vec{r})\hat{\psi}^\dagger_{\sigma'}(\vec{r}\,')\hat{\psi}_{\sigma'}(\vec{r}\,')\hat{\psi}_\sigma(\vec{r}) \tag{2}$$

$$\;=\; \frac{1}{2} \int_\Omega dr^3 \int_\Omega dr'^3\, v(\vec{r}-\vec{r}\,')\left(\hat{n}(\vec{r})\hat{n}(\vec{r}\,') - \hat{n}(\vec{r})\delta(\vec{r}-\vec{r}\,')\right) . \tag{3}$$

1 a) Confermare che per l'operatore di numero nella rappresentazione di Heisenberg

$$\hat{n}(\vec{r},t) = \sum_\sigma \hat{\psi}^\dagger_\sigma(\vec{r},t)\hat{\psi}_\sigma(\vec{r},t) \tag{4}$$

sia soddisfatta la relazione

$$[\hat{n}(\vec{r},t), \hat{n}(\vec{r}\,',t)]_- = 0\,. \tag{5}$$

1 b) Confermare l'equazione di continuità

$$\partial_t \hat{n} + \vec{\nabla}\cdot\hat{j} = 0\,. \tag{6}$$

Quale sarebbe quindi la definizione della densità della corrente $\hat{j}(\vec{r},t)$?

Suggerimento: usare le relazioni $[\hat{\psi}_\sigma(\vec{r}), \hat{\psi}^\dagger_{\sigma'}(\vec{r}\,')]_\mp = \delta_{\sigma,\sigma'}\delta(\vec{r}-\vec{r}\,')$ e le equazioni di Heisenberg per gli operatori $\hat{\psi}^{(\dagger)}_\sigma(\vec{r},t)$: $\partial_t\hat{\psi}^{(\dagger)}_\sigma(\vec{r},t) = \frac{i}{\hbar}[\hat{H}, \hat{\psi}^{(\dagger)}_\sigma(\vec{r},t)]_-$.

1 c) Per il cambio di base da $(\vec{r})$ a $(\vec{p} = \hbar\vec{k})$ vale

$$\hat{\psi}^{(\dagger)}_\sigma(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{\Omega}} \sum_{\vec{k}} \exp(\pm i\vec{k}\cdot\vec{r})\, \hat{c}^{(\dagger)}_{\vec{k},\sigma}\,, \tag{7}$$

con $\vec{k} = \frac{2\pi}{L}\vec{n}$ dove $\vec{n} \in \mathbb{Z}^3$. Verificare che

i)

$$\int_\Omega dr^3 \, \exp\Big(i(\vec{k} - \vec{k}\,') \cdot \vec{r}\Big) = \Omega \, \delta_{\vec{k},\vec{k}\,'} \,. \tag{8}$$

ii)

$$\hat{N} \equiv \sum_\sigma \int_\Omega dr^3 \, \psi^\dagger_\sigma(\vec{r})\psi_\sigma(\vec{r}) = \sum_{\vec{k},\sigma} \hat{n}_{\vec{k},\sigma} \tag{9}$$

con $\hat{n}_{\vec{k},\sigma} = \hat{c}^\dagger_{\vec{k},\sigma}\hat{c}_{\vec{k},\sigma}$.

iii)

$$[\hat{c}_{\vec{k},\sigma}, \hat{c}^\dagger_{\vec{k}\,',\sigma'}]_\mp = \delta_{\sigma,\sigma'}\delta_{\vec{k},\vec{k}\,'} \,. \tag{10}$$

iv) lo stato fondamentale

$$|SF\rangle = \prod_{|\vec{k}|\le k_\mathrm{F}} c^\dagger_{\vec{k},\uparrow} c^\dagger_{\vec{k},\downarrow} \, |\mathrm{vac}\rangle \ . \tag{11}$$

sia normalizzato per fermioni con un spin 1/2.

1d) esprimere la Hamiltoniana $\hat{H}$ con gli operatori di creazione $c^\dagger_{\vec{k},\sigma'}$ e distruzione $\hat{c}_{\vec{k},\sigma}$ usando l'espansione di Fourier del potenziale a due corpi

$$v(\vec{r} - \vec{r}\,') = \sum_{\vec{q}} v_{\vec{q}} \, \exp(i\vec{q} \cdot (\vec{r} - \vec{r}\,')) \,. \tag{12}$$

Funzione di correlazione – 2

Seguendo l'esercizio precedente guardiamo $N \gg 1$ fermioni non-interagenti (spin 1/2) in un box di volume $\Omega = L^3$ con condizioni al contorno periodiche.

2 a) Calcolare la funzione di correlazione

$$C_{\sigma,\sigma'}(|\vec{r} - \vec{r}\,'|) = \langle SF| \, \psi^\dagger_\sigma(\vec{r})\hat{\psi}_{\sigma'}(\vec{r}\,') \, |SF\rangle \tag{13}$$

per lo stato fondamentale normalizzato $|SF\rangle$ e $\sigma \in \{1/2, -1/2\}$.

Indicazioni: Introdurre gli operatori di creazione e distruzione nello spazio di Fourier. La somma sui vettori d'onda può essere sostituita da un integrale continuo sulla sfera di Fermi.

2 b) Come si comporta $C_{\sigma,\sigma'}(|\vec{r} - \vec{r}\,'|)$ nei limiti $|\vec{r} - \vec{r}\,'| \to 0$ e $|\vec{r} - \vec{r}\,'| \to \infty$? Esprimere il risultato per $|\vec{r} - \vec{r}\,'| \to 0$ usando la densità di particelle $n \equiv N/L^3$.