Problema 1

Parte 1

Partiamo calcolando il commutatore

$$\left[\left[\hat{H},\hat{x}\right],\hat{x}\right]. \tag{1}$$

Il commutatore interno $\left[\hat{H},\hat{x}\right]$ vale

$$\begin{aligned}
\left[\hat{H},\hat{x}\right] &= \left[\frac{\hat{p}^2}{2m}+V(\hat{x}),\hat{x}\right] = \left[\frac{\hat{p}^2}{2m},\hat{x}\right] + \left[V(\hat{x}),\hat{x}\right] = \\
&= \frac{1}{2m}\left(\hat{p}^2\hat{x}-\hat{x}\hat{p}^2\right) = \frac{1}{2m}\left(\hat{p}\hat{p}\hat{x}-\hat{x}\hat{p}\hat{p}\right) = \\
&= \frac{1}{2m}\left(\hat{p}\hat{p}\hat{x}-\hat{p}\hat{x}\hat{p}+\hat{p}\hat{x}\hat{p}-\hat{x}\hat{p}\hat{p}\right) = \\
&= \frac{1}{2m}\left(\hat{p}\left[\hat{p},\hat{x}\right]+\left[\hat{p},\hat{x}\right]\hat{p}\right) = \\
&= \frac{1}{2m}\left(\hat{p}\left(-i\hbar\right)+\left(-i\hbar\right)\hat{p}\right) = \\
&= -\frac{i\hbar}{m}\hat{p}
\end{aligned}$$

Quindi (1) diventa

$$\left[\left[\hat{H},\hat{x}\right],\hat{x}\right] = \left[-\frac{i\hbar}{m}\hat{p},\hat{x}\right] = -\frac{i\hbar}{m}\left[\hat{p},\hat{x}\right] = -\frac{i\hbar}{m}(-i\hbar) = -\frac{\hbar^2}{m} \tag{2}$$

In alternativa, possiamo scrivere (1) esplicitamente e otteniamo

$$\left[\left[\hat{H},\hat{x}\right],\hat{x}\right] = \left[\hat{H}\hat{x}-\hat{x}\hat{H},\hat{x}\right] = \hat{H}\hat{x}^2-\hat{x}\hat{H}\hat{x}-\hat{x}\hat{H}\hat{x}+\hat{x}^2\hat{H} = \hat{H}\hat{x}^2-2\hat{x}\hat{H}\hat{x}+\hat{x}^2\hat{H} \tag{3}$$

Calcoliamo il valore di aspettazione di (1) usando un generico autostato $|a\rangle$ di $\hat{H}$. Esistono due modi per farlo, il primo sfruttando l'identità (2)

$$\left\langle a \left| \left[\left[\hat{H},\hat{x}\right],\hat{x}\right] \right| a \right\rangle = \left\langle a \left| -\frac{\hbar^2}{m} \right| a \right\rangle = -\frac{\hbar^2}{m}\langle a \,|\, a\rangle = -\frac{\hbar^2}{m} \tag{4}$$

Il secondo invece consiste nell'utilizzare il doppio commutatore scritto esplicitamente come in (3)

$$\begin{aligned}
\left\langle a \left| \left[\left[\hat{H},\hat{x}\right],\hat{x}\right] \right| a \right\rangle &= \left\langle a \left| \hat{H}\hat{x}^2-2\hat{x}\hat{H}\hat{x}+\hat{x}^2\hat{H} \right| a \right\rangle = \\
&= \left\langle a \left| \hat{H}\hat{x}^2 \right| a \right\rangle - 2\left\langle a \left| \hat{x}\hat{H}\hat{x} \right| a \right\rangle + \left\langle a \left| \hat{x}^2\hat{H} \right| a \right\rangle = \\
&= E_a \left\langle a \,|\, \hat{x}^2 \,|\, a \right\rangle - 2\left\langle a \left| \hat{x}\hat{H}\hat{x} \right| a \right\rangle + E_a \left\langle a \,|\, \hat{x}^2 \,|\, a \right\rangle = \\
&= 2E_a \left\langle a \,|\, \hat{x}^2 \,|\, a \right\rangle - 2\left\langle a \left| \hat{x}\hat{H}\hat{x} \right| a \right\rangle
\end{aligned} \tag{5}$$

Il primo valore di aspettazione in (5) si può riscrivere come

$$\begin{aligned}
\left\langle a \,|\, \hat{x}^2 \,|\, a \right\rangle &= \sum_b \langle a \,|\, \hat{x} \,|\, b\rangle \langle b \,|\, \hat{x} \,|\, a\rangle = \sum_b \langle b \,|\, \hat{x} \,|\, a\rangle^* \langle b \,|\, \hat{x} \,|\, a\rangle = \\
&= \sum_b \left|\langle b \,|\, \hat{x} \,|\, a\rangle\right|^2
\end{aligned}$$

mentre per il secondo

$$\begin{aligned}
\left\langle a \left| \hat{x}\hat{H}\hat{x} \right| a \right\rangle &= \sum_b \langle a|\hat{x}|b\rangle \langle b|\hat{H}\hat{x}|a\rangle = \sum_b E_b \langle a|\hat{x}|b\rangle \langle b|\hat{x}|a\rangle = \\
&= \sum_b E_b \langle b|\hat{x}|a\rangle^* \langle b|\hat{x}|a\rangle = \sum_b E_b \left|\langle b|\hat{x}|a\rangle\right|^2
\end{aligned}$$

Ora possiamo sostituire i due risultati in (5) e troviamo

$$\begin{aligned}&2E_a \sum_b |\langle b \,|\, \hat{x} \,|\, a\rangle|^2 - 2\sum_b E_b \, |\langle b|\hat{x}|a\rangle|^2 = \\ &= 2\sum_b (E_a - E_b)\, |\langle b \,|\, \hat{x} \,|\, a\rangle|^2 \end{aligned} \tag{6}$$

Siccome (4) e (6) devono essere uguali troviamo

$$\sum_b (E_a - E_b)\, |\langle b \,|\, \hat{x} \,|\, a\rangle|^2 = -\frac{\hbar^2}{2m}$$

Problema 2

Calcoliamo esplicitamente il commutatore

$$\left[\hat{\vec{J}}^2, \hat{A}_i\right] = \left[\hat{J}_x^2 + \hat{J}_y^2 + \hat{J}_z^2, \hat{A}_i\right] = \hat{J}_x^2\hat{A}_i + \hat{J}_y^2\hat{A}_i + \hat{J}_z^2\hat{A}_i - \hat{A}_i\hat{J}_x^2 - \hat{A}_i\hat{J}_y^2 - \hat{A}_i\hat{J}_z^2$$

Per scrivere il commutatore in maniera più sintetica possiamo sostituire i pedici x, y, z con gli indici $1, 2, 3$ e trasformarlo in una sommatoria.

$$\begin{aligned}&\sum_j \hat{J}_j^2\hat{A}_i - \hat{A}_i\hat{J}_j^2 = \\ &= \sum_j \hat{J}_j\hat{J}_j\hat{A}_i - \hat{A}_i\hat{J}_j\hat{J}_j = \\ &= \sum_j \hat{J}_j\hat{J}_j\hat{A}_i - \hat{J}_j\hat{A}_i\hat{J}_j + \hat{J}_j\hat{A}_i\hat{J}_j - \hat{A}_i\hat{J}_j\hat{J}_j = \\ &= \sum_j \hat{J}_j\left[\hat{J}_j, \hat{A}_i\right] + \left[\hat{J}_j, \hat{A}_i\right]\hat{J}_j\end{aligned}$$

Dato che l'operatore $\hat{\vec{A}}$ è un vettore vale

$$\left[\hat{J}_i, \hat{A}_j\right] = i\hbar\epsilon_{ijk}\hat{A}_k$$

Quindi troviamo

$$\begin{aligned}&\sum_j \hat{J}_j\left(\sum_k i\hbar\epsilon_{jik}\hat{A}_k\right) + \left(\sum_k i\hbar\epsilon_{jik}\hat{A}_k\right)\hat{J}_j = \\ &= i\hbar\sum_{j,k}\epsilon_{jik}\hat{J}_j\hat{A}_k + i\hbar\sum_{j,k}\epsilon_{jik}\hat{A}_k\hat{J}_j\end{aligned}$$

Nella seconda sommatoria possiamo scambiare gli indici j e k e otteniamo

$$i\hbar\sum_{j,k}\epsilon_{jik}\hat{J}_j\hat{A}_k + i\hbar\sum_{j,k}\epsilon_{jik}\hat{A}_k\hat{J}_j = i\hbar\sum_{j,k}\epsilon_{jik}\hat{J}_j\hat{A}_k + i\hbar\sum_{j,k}\epsilon_{kij}\hat{A}_j\hat{J}_k$$

Ora vogliamo portare gli indici del tensore di Levi-Civita nell'ordine ijk. Per farlo dobbiamo effettuare uno scambio nel tensore della prima sommatoria e due in quello della seconda sommatoria. Infatti

$$\begin{aligned}&jik \longrightarrow ijk \\ &kij \longrightarrow ikj \longrightarrow ijk\end{aligned}$$

Per ciascuno scambio di una coppia di indici il tensore di Levi-Civita cambia di segno, quindi

$$\begin{aligned} i\hbar\sum_{j,k}(-1)^1\epsilon_{ijk}\hat{J}_j\hat{A}_k + i\hbar\sum_{j,k}(-1)^2\epsilon_{ijk}\hat{A}_j\hat{J}_k = \\ = i\hbar\sum_{j,k}\epsilon_{ijk}\hat{A}_j\hat{J}_k - i\hbar\sum_{j,k}\epsilon_{ijk}\hat{J}_j\hat{A}_k \\ = i\hbar\left(\hat{\vec{A}}\times\hat{\vec{J}} - \hat{\vec{J}}\times\hat{\vec{A}}\right)_i \end{aligned}$$

Tutti questi passaggi sono stati necessari per fare in modo che la sommatoria rispecchiasse la definizione di prodotto vettoriale.

Problema 3

Sappiamo che nell'addizione dei momenti angolari, per il numero quantico di spin totale s vale che $|s_2 - s_1| \leq s \leq s_1 + s_2$. Nel caso di due particelle aventi entrambe spin $s_1, s_2 = 1/2$ otteniamo che $0 \leq s \leq 1$. Naturalmente il numero quantico magnetico m deve essere sempre compreso tra i valori $-s$ e s, cioè $-s \leq m \leq s$. Quindi nel nostro caso, per il numero quantico $s = 1$ avremo tre valori possibili per m, ovvero $m \in \{-1, 0, 1\}$, mentre per il numero quantico $s = 0$, m può essere solo 0. Indichiamo i quattro autostati di $\hat{\vec{S}}^2$ e $\hat{S}_z$ con $|s, m\rangle$, e questi sono $|1, -1\rangle$, $|1, 0\rangle$, $|1, 1\rangle$ e $|0, 0\rangle$.
Gli autostati che formano la base dello spazio ottenuto dal prodotto tensoriale dei due spazi degli spin singoli sono

$$\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle\otimes\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle,\quad \left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle\otimes\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle,\quad \left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle\otimes\left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle,\quad \left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle\otimes\left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle$$

dove ciascun ket rappresenta uno degli autostati di $\hat{\vec{S}}_1^2$ e $\hat{S}_{1z}$ o $\hat{\vec{S}}_2^2$ e $\hat{S}_{2z}$. Siccome questa notazione è scomoda e i due numeri quantici s_1 e s_2 sono sempre gli stessi, introduciamo la notazione semplificata

$$|m_1, m_2\rangle \equiv |s_1, m_1\rangle \otimes |s_2, m_2\rangle$$

Un'altra proprietà utile è

$$m = m_1 + m_2$$

Questa proprietà ci serve per dedurre che l'autostato $|1, 1\rangle$. Infatti quest'ultimo, che ha numero quantico $m = 1$, non può che corrispondere all'autostato $\left|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle$ della base originale, poiché è l'unica per cui vale $m_1 = m_2 = 1/2$. Quindi sappiamo già in partenza che

$$|1, 1\rangle = \left|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle \tag{7}$$

A questo autostato possiamo applicare l'operatore di scala $\hat{S}_-$ per trovare $|1, 0\rangle$ e $|1, -1\rangle$. Per $\hat{S}_-$ vale che

$$\hat{S}_- |s, m\rangle = \hbar\sqrt{(s+m)(s-m+1)}\,|s, m-1\rangle$$

Quindi troviamo

$$\hat{S}_- |1, 1\rangle = \hbar\sqrt{(1+1)(1-1+1)}\,|1, 0\rangle = \hbar\sqrt{2}\,|1, 0\rangle$$

Facciamo lo stesso con l'altro membro di (7)

$$
\begin{aligned}
\hat{S}_- \left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle = \left(\hat{S}_{1-}+\hat{S}_{2-}\right)\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle = \\
\hbar\sqrt{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+1\right)}\left|-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle + \hbar\sqrt{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+1\right)}\left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle = \\
\hbar\left(\left|-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle + \left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle\right)
\end{aligned}
$$

Quindi abbiamo scoperto che

$$
|1,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle + \left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle\right)
$$

Ripetendo lo stesso procedimento con $|1,0\rangle$ troviamo

$$
\hat{S}_-\,|1,0\rangle = \hbar\sqrt{(1+0)(1-0+1)}\,|1,-1\rangle = \hbar\sqrt{2}\,|1,-1\rangle
$$

e

$$
\begin{aligned}
\left(\hat{S}_{1-}+\hat{S}_{2-}\right)\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle + \left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle\right) = \\
\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cancel{\hat{S}_{1-}\left|-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle} + \hat{S}_{1-}\left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle + \hat{S}_{2-}\left|-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle + \cancel{\hat{S}_{2-}\left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle}\right) = \\
\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{S}_{1-}\left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle + \hat{S}_{2-}\left|-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle\right) = \\
\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hbar\left|-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle + \hbar\left|-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle\right) = \\
\frac{2}{\sqrt{2}}\hbar\left|-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle = \sqrt{2}\hbar\left|-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle
\end{aligned}
$$

Infine abbiamo scoperto che $|1,-1\rangle$

$$
|1,-1\rangle = \left|-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle
$$

In realtà avremmo potuto arrivare a quest'ultimo risultato con lo stesso ragionamento con cui abbiamo dedotto (7). Rimane da determinare $|0,0\rangle$. Se vogliamo esprimere questo autostato come combinazione lineare della base originale abbiamo quattro coefficienti da determinare

$$
|0,0\rangle = \alpha\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle + \beta\left|-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle + \gamma\left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle + \delta\left|-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle
$$

Tuttavia possiamo dedurre a priori che due di questi coefficienti devono essere 0. Infatti Se applichiamo l'operatore $\hat{S}_z$ ad entrambi i membri, ci accorgiamo che l'uguaglianza può valere solo se α e δ sono 0. Quindi possiamo assumere che $|0,0\rangle$ sia della forma

$$
|0,0\rangle = \alpha\left|-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle + \beta\left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle
$$

Siccome i 4 autostati dello spin totale sono autostati di operatori hermitiani, sono certamente ortogonali tra di loro. Sfruttando questa proprietà imponiamo

$$
\langle 1,1\,|\,0,0\rangle = 0 \tag{8}
$$
$$
\langle 1,0\,|\,0,0\rangle = 0 \tag{9}
$$
$$
\langle 1,-1\,|\,0,0\rangle = 0 \tag{10}
$$

Eseguendo i calcoli ci accorgiamo che (8) e (10) non producono nessuna condizione utile, perché da entrambe si ottiene $\alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 = 0$. Da (9) invece otteniamo

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\left\langle -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right| + \left\langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right| \right) \left(\alpha \left| -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle + \beta \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \right) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\alpha \cdot 1 + \beta \cdot 0 + \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 1) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\alpha + \beta) \end{aligned}$$

$$\implies \quad \alpha = -\beta \tag{11}$$

L'altra condizione che possiamo sfruttare per determinare α e β è la condizione di normalizzazione

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$$

Siccome possiamo sempre assumere che i coefficienti di Clebsch-Gordan siano reali, l'equazione si riduce a

$$\alpha^2 + \beta^2 = 1 \tag{12}$$

Mettendo in sistema le equazioni (11) e (12) le soluzioni possibili sono

$$\alpha = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \; \beta = \mp \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Siccome i fattori di fase non hanno alcuna rilevanza dal punto di vista fisico possiamo scegliere a piacere una delle due soluzioni, e otteniamo

$$|0, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\left| -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle - \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \right)$$