Problema 1

Parte 1

Per bosoni, due o più particelle possono trovarsi nello stesso stato energetico.

E	stato (degenerazione)	degenerazione complessiva (g)
0	$\|0,0,0\rangle$ (1)	1
ε	$\|\varepsilon,0,0\rangle$ $\left(\binom{3}{1}=3\right)$	3
2ε	$\|\varepsilon,\varepsilon,0\rangle$ $\left(\binom{3}{2}=3\right)$, $\|2\varepsilon,0,0\rangle$ $\left(\binom{3}{1}=3\right)$	6
3ε	$\|2\varepsilon,\varepsilon,0\rangle$ $(3!=6)$, $\|\varepsilon,\varepsilon,\varepsilon\rangle$ (1)	7
4ε	$\|2\varepsilon,2\varepsilon,0\rangle$ $\left(\binom{3}{2}=3\right)$, $\|2\varepsilon,\varepsilon,\varepsilon\rangle$ $\left(\binom{3}{2}=3\right)$	6
5ε	$\|2\varepsilon,2\varepsilon,\varepsilon\rangle$ $\left(\binom{3}{2}=3\right)$	3
6ε	$\|2\varepsilon,2\varepsilon,2\varepsilon\rangle$ (1)	1

Parte 2

Per fermioni, le tre particelle devono tutte occupare necessariamente stati energetici diversi. Dato che ci sono solo 3 livelli energetici, ciascuna deve trovarsi in uno di questi.

E	stato (degenerazione)	degenerazione complessiva (g)
3ε	$\|0,\varepsilon,2\varepsilon\rangle$ $(3!=6)$	6

Problema 2

Parte 1

Sappiamo che per l'operatore $\hat{a}^\dagger$ vale

$$\hat{a}^\dagger |n\rangle = \sqrt(n+1)\,|n+1\rangle$$

Questo significa che possiamo trovare un qualunque stato $|n\rangle$ applicando ripetutamente $\hat{a}^\dagger$

$$|n\rangle = \frac{\left(\hat{a}^\dagger\right)^n}{\sqrt{n!}}|0\rangle$$

Il corrispondente bra risulta essere

$$\langle n| = \langle 0| \left[\frac{\left(\hat{a}^\dagger\right)^n}{\sqrt{n!}}\right]^\dagger = \langle 0| \frac{\hat{a}^n}{\sqrt{n!}} \tag{1}$$

Attraverso la relazione di completezza possiamo scrivere $|\alpha\rangle$ come

$$|\alpha\rangle = \sum_n |n\rangle \langle n|\alpha\rangle$$

Sfruttando (1) troviamo

$$|\alpha\rangle = \sum_n |n\rangle \left\langle 0 \,\middle|\, \frac{\hat{a}^n}{\sqrt{n!}} \,\middle|\, \alpha \right\rangle = \sum_n |n\rangle \left\langle 0 \,\middle|\, \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \,\middle|\, \alpha \right\rangle = \sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \langle 0\,|\,\alpha\rangle = \langle 0\,|\,\alpha\rangle \sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle$$

In questa espressione rimane da determinare $\langle 0 \,|\, \alpha \rangle$. Lo possiamo fare usando il fatto che $|\alpha\rangle$ deve essere necessariamente normalizzato, cioè

$$\langle \alpha \,|\, \alpha \rangle = 1$$

Il bra $\langle \alpha |$ è

$$\langle \alpha | = \langle 0 \,|\, \alpha \rangle^* \sum_{n'} \frac{(\alpha^*)^{n'}}{\sqrt{n'!}} \langle n' |$$

Ora imponendo la condizione troviamo

$$\begin{aligned}
1 = \langle \alpha \,|\, \alpha \rangle = \langle 0 \,|\, \alpha \rangle^* \langle 0 \,|\, \alpha \rangle \sum_n \sum_{n'} \frac{(\alpha^*)^{n'} \alpha^n}{\sqrt{n'!}\sqrt{n!}} \langle n' \,|\, n \rangle &= \\
= |\langle 0 \,|\, \alpha \rangle|^2 \sum_n \sum_{n'} \frac{(\alpha^*)^{n'} \alpha^n}{\sqrt{n'!}\sqrt{n!}} \delta_{n'n} &= \\
= |\langle 0 \,|\, \alpha \rangle|^2 \sum_n \frac{(\alpha^*)^{n} \alpha^n}{\sqrt{n!}\sqrt{n!}} &= \\
= |\langle 0 \,|\, \alpha \rangle|^2 \sum_n \frac{\left(|\alpha|^2\right)^n}{n!} &= \\
= |\langle 0 \,|\, \alpha \rangle|^2 \exp\left(|\alpha|^2\right) & \\
\implies \quad |\langle 0 \,|\, \alpha \rangle| = \exp\left(-\frac{|\alpha|^2}{2}\right) &
\end{aligned}$$

Abbiamo determinato $\langle 0 \,|\, \alpha \rangle$ a meno di un segno, ma questo non è fisicamente rilevante quindi possiamo assumere che

$$\langle 0 \,|\, \alpha \rangle = \exp\left(-\frac{|\alpha|^2}{2}\right)$$

e infine troviamo che

$$|\alpha\rangle = \exp\left(-\frac{|\alpha|^2}{2}\right) \sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle$$

Parte 2

$$\begin{aligned}
\langle 0 \,|\, \alpha \rangle = \exp\left(-\frac{|\alpha|^2}{2}\right) \sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \langle 0 \,|\, n \rangle &= \\
= \exp\left(-\frac{|\alpha|^2}{2}\right) \frac{\alpha^0}{\sqrt{0!}} &= \exp\left(-\frac{|\alpha|^2}{2}\right) \\
\implies \quad |\langle 0 \,|\, \alpha \rangle|^2 &= \exp\left(-|\alpha|^2\right)
\end{aligned}$$

Parte 3

$$\begin{aligned}
\langle n \,|\, \alpha \rangle = \exp\left(-\frac{|\alpha|^2}{2}\right) \sum_{n'} \frac{\alpha^{n'}}{\sqrt{n'!}} \langle n \,|\, n' \rangle &= \\
= \exp\left(-\frac{|\alpha|^2}{2}\right) \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} & \\
\implies \quad |\langle n \,|\, \alpha \rangle|^2 = \exp\left(-|\alpha|^2\right) \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} &
\end{aligned}$$

Parte 4

$$
\begin{aligned}
\langle \beta \mid \alpha \rangle = \exp\left(-\frac{|\alpha|^2}{2}\right)\left(-\frac{|\beta|^2}{2}\right)\sum_n \sum_{n'} \frac{(\beta^*)^{n'}\alpha^n}{\sqrt{n'!}\sqrt{n!}}\langle n' \mid n \rangle = \\
= \exp\left(-\frac{|\alpha|^2}{2}-\frac{|\beta|^2}{2}\right)\sum_n \sum_{n'} \frac{(\beta^*)^{n'}\alpha^n}{\sqrt{n'!}\sqrt{n!}}\delta_{n'n} = \\
= \exp\left(-\frac{|\alpha|^2}{2}-\frac{|\beta|^2}{2}\right)\sum_n \frac{(\beta^*\alpha)^n}{n!} = \\
= \exp\left(-\frac{|\alpha|^2}{2}-\frac{|\beta|^2}{2}\right)\exp\left(\beta^*\alpha\right) = \\
= \exp\left(-\frac{|\alpha|^2}{2}-\frac{|\beta|^2}{2}+\beta^*\alpha\right) \\
\implies \quad |\langle \beta \mid \alpha \rangle|^2 = \exp\left(-|\alpha|^2-|\beta|^2+\beta^*\alpha+\beta\alpha^*\right)
\end{aligned}
$$

Problema 3

Parte 1

In questo caso la dimensione dello spazio di Fock equivale a trovare il numero di possibili M-tuple di interi la cui somma è pari a N. Si può dimostrare che questo numero è dato da

$$\binom{N+M-1}{M}$$

Parte 2

Assumendo che $N = M$ la dimensione dello spazio di Fock diventa

$$\binom{N+M-1}{M} = \binom{2N-1}{N} \tag{2}$$

Possiamo manipolare questa espressione, trovando

$$\binom{2N-1}{N} = \frac{(2N-1)!}{N!(2N-1-N)!} = \frac{(2N-1)!}{N!(N-1)!} = \frac{(2N-1)!2N}{N!(N-1)!2N} = \frac{(2N)!}{2N!N!} = \frac{(2N)!}{2(N!)^2}$$

Se $N \gg 1$ possiamo sfruttare l'approssimazione di Stirling e otteniamo

$$\frac{(2N)!}{2(N!)^2} \simeq \frac{\sqrt{4\pi N}\left(\frac{2N}{e}\right)^{2N}}{2\cdot 2\pi N\left(\frac{N}{e}\right)^{2N}} = \frac{2\sqrt{\pi N}\left(\frac{2N}{e}\right)^{2N}}{4\pi N\left(\frac{N}{e}\right)^{2N}} = \frac{(2N)^{2N}}{2\sqrt{\pi N}\,(N)^{2N}} = \frac{2^{2N}}{2\sqrt{\pi N}} = \frac{2^{2N-1}}{\sqrt{\pi N}} \tag{3}$$

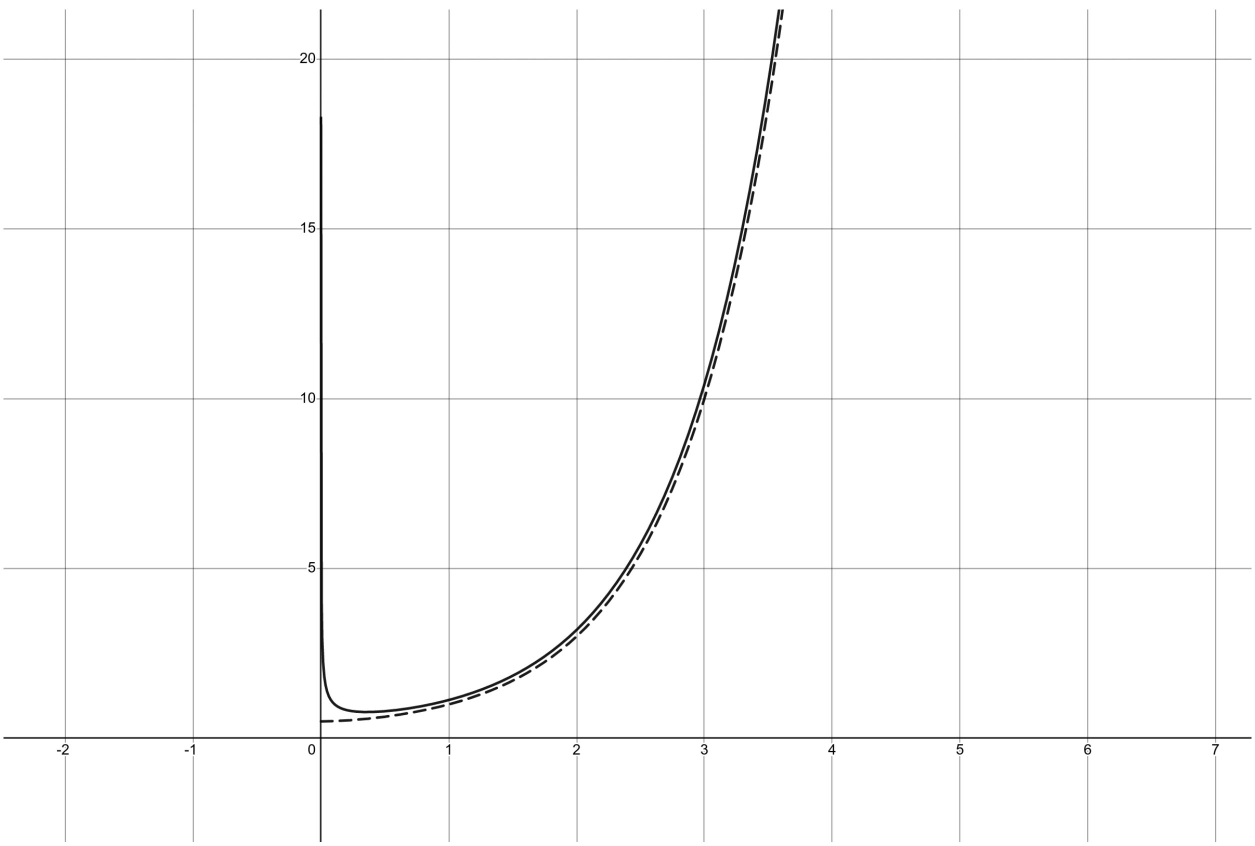

Figure 1: La linea continua è il grafico di (3) mentre quella tratteggiata è il grafico di (2)