Problema 1

Parte 1
Per dimostrare che $U(t,t') = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}H_0(t-t')\right)$ soddisfa l'equazione di Schrödinger data un'Hamiltoniana $H(t) = H_0$ indipendente dal tempo, iniziamo sostituendo $H(t)$ e $U(t,t')$ nell'equazione.

$$\begin{aligned} i\hbar\frac{\partial}{\partial t}U(t,t') &= H_0 U(t,t') \\ i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\exp\left(-\frac{i}{\hbar}H_0(t-t')\right) &= H_0 U(t,t') \end{aligned} \tag{1}$$

Calcoliamo la derivata parziale rispetto al tempo dell'esponenziale di matrice usando la sua definizione, cioè

$$\exp(A) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}A^n = \mathbb{1} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}A^n \tag{2}$$

Considerando solo la derivata parziale e applicando (2) si ottiene

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t}\left[\mathbb{1} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(-\frac{i}{\hbar}H_0(t-t')\right)^n\right] = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(-\frac{i}{\hbar}H_0\right)^n\frac{\partial}{\partial t}(t-t')^n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(-\frac{i}{\hbar}H_0\right)^n n(t-t')^{n-1} \\ &= -\frac{i}{\hbar}H_0\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}\left(-\frac{i}{\hbar}H_0\right)^{n-1}(t-t')^{n-1} \\ &= -\frac{i}{\hbar}H_0\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(-\frac{i}{\hbar}H_0\right)^n(t-t')^n \\ &= -\frac{i}{\hbar}H_0\exp\left(-\frac{i}{\hbar}H_0(t-t')\right) = -\frac{i}{\hbar}H_0U(t,t') \end{aligned}$$

Sostituendo questo risultato in (1) troviamo

$$\begin{aligned} i\hbar(-\frac{i}{\hbar}H_0)U(t,t') &= H_0U(t,t') \\ H_0U(t,t') &= H_0U(t,t') \end{aligned}$$

e quindi abbiamo dimostrato che l'eq. di Schrödinger è soddisfatta.

Parte 2
Possiamo sfruttare l'identità $\exp(A)\exp(B) = \exp(A+B)$, che vale però solo quando A e B commutano.

Nel nostro caso questa condizione è soddisfatta.

$$\begin{aligned}
&U(t,t')U(t',t'') = \\
&= \exp\left(-\frac{i}{\hbar}H_0(t-t')\right)\exp\left(-\frac{i}{\hbar}H_0(t'-t'')\right) \\
&= \exp\left(-\frac{i}{\hbar}H_0(t-t') - \frac{i}{\hbar}H_0(t'-t'')\right) \\
&= \exp\left(-\frac{i}{\hbar}H_0[(t-t')+(t'-t'')]\right) \\
&= \exp\left(-\frac{i}{\hbar}H_0(t-t'')\right) = U(t,t'')
\end{aligned}$$

Parte 3

$$\begin{aligned}
&U(t,t) = \\
&= \exp\left(-\frac{i}{\hbar}H_0(t-t)\right) \\
&= \exp\left(-\frac{i}{\hbar}H_0\cdot 0\right) = \mathbb{1}
\end{aligned}$$

Parte 4
Per quest'ultima identità possiamo sfruttare la seguente proprietà dell'esponenziale di matrice: $(\exp A)^\dagger = \exp\left(A^\dagger\right)$. Inoltre sfruttiamo il fatto che l'operatore Hamiltoniano H_0 è necessariamente hermitiano, quindi vale $H_0^\dagger = H_0$.

$$\begin{aligned}
&U(t,t')U(t,t')^\dagger = \\
&= \exp\left(-\frac{i}{\hbar}H_0(t-t')\right)\exp\left(-\frac{i}{\hbar}H_0(t-t')\right)^\dagger \\
&= \exp\left(-\frac{i}{\hbar}H_0(t-t')\right)\exp\left(\left(-\frac{i}{\hbar}H_0(t-t')\right)^\dagger\right) \\
&= \exp\left(-\frac{i}{\hbar}H_0(t-t')\right)\exp\left(\frac{i}{\hbar}H_0^\dagger(t-t')\right) \\
&= \exp\left(-\frac{i}{\hbar}H_0(t-t')\right)\exp\left(\frac{i}{\hbar}H_0(t-t')\right) \\
&= \exp(\mathbf{0}) = \mathbb{1}
\end{aligned}$$

Problema 2

$$\exp\left(-\frac{i}{2}\phi\vec{n}\cdot\vec{\sigma}\right) = \mathbb{1}\cos(\phi/2) - i\vec{n}\cdot\vec{\sigma}\sin(\phi/2)$$

Per dimostrare questa identità è utile la seguente proprietà delle matrici di Pauli

$$(\vec{n}\cdot\vec{\sigma})^2 = \mathbb{1} \tag{3}$$

È evidente che se vale (3) valgono anche le seguenti due proprietà:

$$\begin{aligned}
(\vec{n}\cdot\vec{\sigma})^{2n} &= \mathbb{1} \\
(\vec{n}\cdot\vec{\sigma})^{2n+1} &= \vec{n}\cdot\vec{\sigma}
\end{aligned} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Dimostro (3) prima scrivendo in maniera esplicita il prodotto $\vec{n}\cdot\vec{\sigma}$. Chiamo n_x, n_y e n_z le componenti di $\vec{n}$, quindi $\vec{n}=(n_x,n_y,n_z)$.

$$n_x\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}+n_y\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix}+n_z\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}n_z & nx-in_y\\ n_x+in_y & -n_z\end{pmatrix}$$

Elevando al quadrato si ottiene

$$\begin{pmatrix}n_z & nx-in_y\\ n_x+in_y & -n_z\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}n_x^2+n_y^2+n_z^2 & 0\\ 0 & n_x^2+n_y^2+n_z^2\end{pmatrix}$$

Siccome $\vec{n}$ è unitario per ipotesi, significa che $n_x^2+n_y^2+n_z^2=1$. Quindi l'ultima matrice è $\mathbb{1}$. Se ora applichiamo (2) a $\exp\left(-\frac{i}{2}\phi\vec{n}\cdot\vec{\sigma}\right)$ troviamo

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(-\frac{i}{2}\phi\vec{n}\cdot\vec{\sigma}\right)^n$$

Possiamo separare la sommatoria in due sommatorie dove la prima contiene solo potenze pari mentre la seconda solo quelle dispari

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n)!}\left(-\frac{i}{2}\phi\vec{n}\cdot\vec{\sigma}\right)^{2n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)!}\left(-\frac{i}{2}\phi\vec{n}\cdot\vec{\sigma}\right)^{2n+1}$$

Con alcuni passaggi algebrici si ottiene

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n)!}\left(-\frac{i}{2}\phi\vec{n}\cdot\vec{\sigma}\right)^{2n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)!}\left(-\frac{i}{2}\phi\vec{n}\cdot\vec{\sigma}\right)^{2n+1}=\\
&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n)!}\left(-\frac{i}{2}\phi\right)^{2n}(\vec{n}\cdot\vec{\sigma})^{2n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)!}\left(-\frac{i}{2}\phi\right)^{2n+1}(\vec{n}\cdot\vec{\sigma})^{2n+1}\\
&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n)!}\left(\frac{\phi}{2}\right)^{2n}\mathbb{1}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{-i}{(2n+1)!}\left(\frac{\phi}{2}\right)^{2n+1}\vec{n}\cdot\vec{\sigma}\\
&=\mathbb{1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n)!}\left(\frac{\phi}{2}\right)^{2n}-i\vec{n}\cdot\vec{\sigma}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)!}\left(\frac{\phi}{2}\right)^{2n+1}
\end{aligned}$$

Le due sommatorie rimaste sono le serie di Taylor di $\cos(\phi/2)$ e $\sin(\phi/2)$ rispettivamente, quindi l'identità è dimostrata.