

Problema 1

Parte 1

Partiamo calcolando il commutatore

$$\left[\left[\hat{H}, \hat{x} \right], \hat{x} \right] \quad (1)$$

Il commutatore interno $\left[\hat{H}, \hat{x} \right]$ vale

$$\begin{aligned} \left[\hat{H}, \hat{x} \right] &= \left[\frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{x}), \hat{x} \right] = \left[\frac{\hat{p}^2}{2m}, \hat{x} \right] + [V(\hat{x}), \hat{x}] = \\ &= \frac{1}{2m} (\hat{p}^2 \hat{x} - \hat{x} \hat{p}^2) = \frac{1}{2m} (\hat{p} \hat{p} \hat{x} - \hat{x} \hat{p} \hat{p}) = \\ &= \frac{1}{2m} (\hat{p} \hat{p} \hat{x} - \hat{p} \hat{x} \hat{p} + \hat{p} \hat{x} \hat{p} - \hat{x} \hat{p} \hat{p}) = \\ &= \frac{1}{2m} (\hat{p} [\hat{p}, \hat{x}] + [\hat{p}, \hat{x}] \hat{p}) = \\ &= \frac{1}{2m} (\hat{p} (-i\hbar) + (-i\hbar) \hat{p}) = \\ &= -\frac{i\hbar}{m} \hat{p} \end{aligned}$$

Quindi (1) diventa

$$\left[\left[\hat{H}, \hat{x} \right], \hat{x} \right] = \left[-\frac{i\hbar}{m} \hat{p}, \hat{x} \right] = -\frac{i\hbar}{m} [\hat{p}, \hat{x}] = -\frac{i\hbar}{m} (-i\hbar) = -\frac{\hbar^2}{m} \quad (2)$$

In alternativa, possiamo scrivere (1) esplicitamente e otteniamo

$$\left[\left[\hat{H}, \hat{x} \right], \hat{x} \right] = \left[\hat{H} \hat{x} - \hat{x} \hat{H}, \hat{x} \right] = \hat{H} \hat{x}^2 - \hat{x} \hat{H} \hat{x} - \hat{x} \hat{H} \hat{x} + \hat{x}^2 \hat{H} = \hat{H} \hat{x}^2 - 2\hat{x} \hat{H} \hat{x} + \hat{x}^2 \hat{H} \quad (3)$$

Calcoliamo il valore di aspettazione di (1) usando un generico autostato $|a\rangle$ di \hat{H} . Esistono due modi per farlo, il primo sfruttando l'identità (2)

$$\langle a | \left[\left[\hat{H}, \hat{x} \right], \hat{x} \right] | a \rangle = \left\langle a \left| -\frac{\hbar^2}{m} \right| a \right\rangle = -\frac{\hbar^2}{m} \langle a | a \rangle = -\frac{\hbar^2}{m} \quad (4)$$

Il secondo invece consiste nell'utilizzare il doppio commutatore scritto esplicitamente come in (3)

$$\begin{aligned} \langle a | \left[\left[\hat{H}, \hat{x} \right], \hat{x} \right] | a \rangle &= \langle a | \hat{H} \hat{x}^2 - 2\hat{x} \hat{H} \hat{x} + \hat{x}^2 \hat{H} | a \rangle = \\ &= \langle a | \hat{H} \hat{x}^2 | a \rangle - 2 \langle a | \hat{x} \hat{H} \hat{x} | a \rangle + \langle a | \hat{x}^2 \hat{H} | a \rangle = \\ &= E_a \langle a | \hat{x}^2 | a \rangle - 2 \langle a | \hat{x} \hat{H} \hat{x} | a \rangle + E_a \langle a | \hat{x}^2 | a \rangle = \\ &= 2E_a \langle a | \hat{x}^2 | a \rangle - 2 \langle a | \hat{x} \hat{H} \hat{x} | a \rangle \end{aligned} \quad (5)$$

Il primo valore di aspettazione in (5) si può riscrivere come

$$\begin{aligned} \langle a | \hat{x}^2 | a \rangle &= \sum_b \langle a | \hat{x} | b \rangle \langle b | \hat{x} | a \rangle = \sum_b \langle b | \hat{x} | a \rangle^* \langle b | \hat{x} | a \rangle = \\ &= \sum_b |\langle b | \hat{x} | a \rangle|^2 \end{aligned}$$

mentre per il secondo

$$\begin{aligned} \langle a | \hat{x} \hat{H} \hat{x} | a \rangle &= \sum_b \langle a | \hat{x} | b \rangle \langle b | \hat{H} \hat{x} | a \rangle = \sum_b E_b \langle a | \hat{x} | b \rangle \langle b | \hat{x} | a \rangle = \\ &= \sum_b E_b \langle b | \hat{x} | a \rangle^* \langle b | \hat{x} | a \rangle = \sum_b E_b |\langle b | \hat{x} | a \rangle|^2 \end{aligned}$$

Ora possiamo sostituire i due risultati in (5) e troviamo

$$\begin{aligned} 2E_a \sum_b |\langle b | \hat{x} | a \rangle|^2 - 2 \sum_b E_b |\langle b | \hat{x} | a \rangle|^2 &= \\ &= 2 \sum_b (E_a - E_b) |\langle b | \hat{x} | a \rangle|^2 \end{aligned} \quad (6)$$

Siccome (4) e (6) devono essere uguali troviamo

$$\sum_b (E_a - E_b) |\langle b | \hat{x} | a \rangle|^2 = -\frac{\hbar^2}{2m}$$

Problema 2

Calcoliamo esplicitamente il commutatore

$$[\hat{J}^2, \hat{A}_i] = [\hat{J}_x^2 + \hat{J}_y^2 + \hat{J}_z^2, \hat{A}_i] = \hat{J}_x^2 \hat{A}_i + \hat{J}_y^2 \hat{A}_i + \hat{J}_z^2 \hat{A}_i - \hat{A}_i \hat{J}_x^2 - \hat{A}_i \hat{J}_y^2 - \hat{A}_i \hat{J}_z^2$$

Per scrivere il commutatore in maniera più sintetica possiamo sostituire i pedici x, y, z con gli indici $1, 2, 3$ e trasformarlo in una sommatoria.

$$\begin{aligned} \sum_j \hat{J}_j^2 \hat{A}_i - \hat{A}_i \hat{J}_j^2 &= \\ &= \sum_j \hat{J}_j \hat{J}_j \hat{A}_i - \hat{A}_i \hat{J}_j \hat{J}_j = \\ &= \sum_j \hat{J}_j \hat{J}_j \hat{A}_i - \hat{J}_j \hat{A}_i \hat{J}_j + \hat{J}_j \hat{A}_i \hat{J}_j - \hat{A}_i \hat{J}_j \hat{J}_j = \\ &= \sum_j \hat{J}_j [\hat{J}_j, \hat{A}_i] + [\hat{J}_j, \hat{A}_i] \hat{J}_j \end{aligned}$$

Dato che l'operatore \hat{A} è un vettore vale

$$[\hat{J}_i, \hat{A}_j] = i\hbar \epsilon_{ijk} \hat{A}_k$$

Quindi troviamo

$$\begin{aligned} \sum_j \hat{J}_j \left(\sum_k i\hbar \epsilon_{jik} \hat{A}_k \right) + \left(\sum_k i\hbar \epsilon_{jik} \hat{A}_k \right) \hat{J}_j &= \\ &= i\hbar \sum_{j,k} \epsilon_{jik} \hat{J}_j \hat{A}_k + i\hbar \sum_{j,k} \epsilon_{jik} \hat{A}_k \hat{J}_j \end{aligned}$$

Nella seconda sommatoria possiamo scambiare gli indici j e k e otteniamo

$$i\hbar \sum_{j,k} \epsilon_{jik} \hat{J}_j \hat{A}_k + i\hbar \sum_{j,k} \epsilon_{jik} \hat{A}_k \hat{J}_j = i\hbar \sum_{j,k} \epsilon_{jik} \hat{J}_j \hat{A}_k + i\hbar \sum_{j,k} \epsilon_{kij} \hat{A}_j \hat{J}_k$$

Ora vogliamo portare gli indici del tensore di Levi-Civita nell'ordine ijk . Per farlo dobbiamo effettuare uno scambio nel tensore della prima sommatoria e due in quello della seconda sommatoria. Infatti

$$\begin{aligned} jik &\longrightarrow ijk \\ kij &\longrightarrow ikj \longrightarrow ijk \end{aligned}$$

Per ciascuno scambio di una coppia di indici il tensore di Levi-Civita cambia di segno, quindi

$$\begin{aligned}
 & i\hbar \sum_{j,k} (-1)^1 \epsilon_{ijk} \hat{J}_j \hat{A}_k + i\hbar \sum_{j,k} (-1)^2 \epsilon_{ijk} \hat{A}_j \hat{J}_k = \\
 & = i\hbar \sum_{j,k} \epsilon_{ijk} \hat{A}_j \hat{J}_k - i\hbar \sum_{j,k} \epsilon_{ijk} \hat{J}_j \hat{A}_k \\
 & = i\hbar \left(\hat{A} \times \hat{J} - \hat{J} \times \hat{A} \right)_i
 \end{aligned}$$

Tutti questi passaggi sono stati necessari per fare in modo che la sommatoria rispecchiasse la definizione di prodotto vettoriale.

Problema 3

Sappiamo che nell'addizione dei momenti angolari, per il numero quantico di spin totale s vale che $|s_2 - s_1| \leq s \leq s_1 + s_2$. Nel caso di due particelle aventi entrambe spin $s_1, s_2 = 1/2$ otteniamo che $0 \leq s \leq 1$. Naturalmente il numero quantico magnetico m deve essere sempre compreso tra i valori $-s$ e s , cioè $-s \leq m \leq s$. Quindi nel nostro caso, per il numero quantico $s = 1$ avremo tre valori possibili per m , ovvero $m \in \{-1, 0, 1\}$, mentre per il numero quantico $s = 0$, m può essere solo 0. Indichiamo i quattro autostati di \hat{S}^2 e \hat{S}_z con $|s, m\rangle$, e questi sono

$$|1, -1\rangle, \quad |1, 0\rangle, \quad |1, 1\rangle, \quad |0, 0\rangle$$

La base di autostati che si ottengono dal prodotto tensoriale degli autostati di \hat{S}_1^2 e \hat{S}_{1z} o \hat{S}_2^2 e \hat{S}_{2z} sono

$$\left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \otimes \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle, \quad \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \otimes \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle, \quad \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \otimes \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle, \quad \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \otimes \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle$$

Siccome questa notazione è scomoda e i due numeri quantici s_1 e s_2 sono sempre gli stessi, introduciamo la notazione semplificata

$$|m_1, m_2\rangle \equiv |s_1, m_1\rangle \otimes |s_2, m_2\rangle$$

Un'altra proprietà utile che mette in relazione il numero quantico m di spin totale con i due numeri m_1 e m_2 degli spin singoli è

$$m = m_1 + m_2$$

Questa proprietà ci serve per dedurre che l'autostato $|1, 1\rangle$. Infatti quest'ultimo, che ha numero quantico $m = 1$, non può che corrispondere all'autostato $|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle$ della base originale, poiché è l'unica per cui vale $m_1 = m_2 = 1/2$. Quindi sappiamo già in partenza che

$$|1, 1\rangle = \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \quad (7)$$

A questo autostato possiamo applicare l'operatore di scala \hat{S}_- per trovare $|1, 0\rangle$ e $|1, -1\rangle$. Per \hat{S}_- vale che

$$\hat{S}_- |s, m\rangle = \hbar \sqrt{(s+m)(s-m+1)} |s, m-1\rangle$$

Quindi troviamo

$$\hat{S}_- |1, 1\rangle = \hbar \sqrt{(1+1)(1-1+1)} |1, 0\rangle = \hbar \sqrt{2} |1, 0\rangle$$

Facciamo lo stesso con l'altro membro di (7)

$$\begin{aligned}
 \hat{S}_- \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle &= (\hat{S}_{1-} + \hat{S}_{2-}) \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle = \\
 &= \hbar \sqrt{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 1\right)} \left| -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle + \hbar \sqrt{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 1\right)} \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle = \\
 &= \hbar \left(\left| -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle + \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \right)
 \end{aligned}$$

Quindi abbiamo scoperto che

$$|1, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\left| -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle + \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \right)$$

Ripetendo lo stesso procedimento con $|1, 0\rangle$ troviamo

$$\hat{S}_- |1, 0\rangle = \hbar \sqrt{(1+0)(1-0+1)} |1, -1\rangle = \hbar \sqrt{2} |1, -1\rangle$$

e

$$\begin{aligned}
 (\hat{S}_{1-} + \hat{S}_{2-}) \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\left| -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle + \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \right) &= \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\hat{S}_{1-} \left| -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle + \hat{S}_{1-} \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle + \hat{S}_{2-} \left| -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle + \hat{S}_{2-} \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \right) = \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\hat{S}_{1-} \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle + \hat{S}_{2-} \left| -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \right) = \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\hbar \left| -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle + \hbar \left| -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \right) = \\
 &= \frac{2}{\sqrt{2}} \hbar \left| -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle = \sqrt{2} \hbar \left| -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle
 \end{aligned}$$

Infine troviamo che

$$|1, -1\rangle = \left| -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle$$

In realtà avremmo potuto arrivare a quest'ultimo risultato con lo stesso ragionamento con cui abbiamo dedotto (7). Rimane da determinare $|0, 0\rangle$. Se vogliamo esprimere questo autostato come combinazione lineare della base originale abbiamo quattro coefficienti da determinare

$$|0, 0\rangle = \alpha \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle + \beta \left| -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle + \gamma \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle + \delta \left| -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle$$

Tuttavia possiamo dedurre a priori che due di questi coefficienti devono essere 0. Infatti se applichiamo l'operatore \hat{S}_z ad entrambi i membri, ci accorgiamo che l'uguaglianza può valere solo se α e δ sono 0. Quindi possiamo assumere che $|0, 0\rangle$ sia della forma

$$|0, 0\rangle = \alpha \left| -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle + \beta \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle$$

Siccome i 4 autostati dello spin totale sono autostati di operatori hermitiani, sono certamente ortogonali tra di loro. Sfruttando questa proprietà imponiamo

$$\langle 1, 1 | 0, 0 \rangle = 0 \quad (8)$$

$$\langle 1, 0 | 0, 0 \rangle = 0 \quad (9)$$

$$\langle 1, -1 | 0, 0 \rangle = 0 \quad (10)$$

Eseguendo i calcoli ci accorgiamo che (8) e (10) non producono nessuna condizione utile, perché da entrambe si ottiene $\alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 = 0$. Da (9) invece otteniamo

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\left\langle -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right| + \left\langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right| \right) \left(\alpha \left| -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle + \beta \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \right) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\alpha \cdot 1 + \beta \cdot 0 + \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 1) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\alpha + \beta) \\ \implies \quad \alpha &= -\beta \end{aligned} \tag{11}$$

L'altra condizione che possiamo sfruttare per determinare α e β è la condizione di normalizzazione

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$$

Siccome possiamo sempre assumere che i coefficienti di Clebsch-Gordan siano reali, l'equazione si riduce a

$$\alpha^2 + \beta^2 = 1 \tag{12}$$

Mettendo in sistema le equazioni (11) e (12) le soluzioni possibili sono

$$\alpha = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \beta = \mp \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Siccome i fattori di fase non hanno alcuna rilevanza dal punto di vista fisico (e quindi anche un semplice -1) possiamo scegliere a piacere una delle due soluzioni, e otteniamo

$$|0, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\left| -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle - \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \right)$$