**Facultad de Ciencia y Tecnología – UADER – Sede Oro Verde.**
**Licenciatura en Sistemas Informáticos - MATEMÁTICA DISCRETA – Examen Final**
**24/02/2021 (MV)**

**Ejercicio 1. (20 puntos)**

I) Sea el alfabeto $\Sigma = \{0, 1\}$, una sucesión (0, 0, 1, 0, 1, 1, 0) de bits o de símbolos del alfabeto dado, también se lo puede simbolizar como una concatenación o cadena: 0010110.

a) ¿Cuántas cadenas de longitud máxima 7 se pueden construir?

$$\sum_{i=0}^{i=7} 2^i$$

b) ¿Cuántas cadenas de longitud 7 son de peso par?

Se tienen que considerar la cantidad de símbolos 1, para que sea par se tendrán 0, 2,4 ó 6 símbolos 1 en la cadena.

- Caso 0 veces el 1: Tengo una sola posibilidad, la cadena 0000000.

- Caso 2 veces el 1: Tengo que elegir donde coloco esos 1, tengo $\binom{7}{2} = 21$.

- Caso 4 veces el 1: Tengo que elegir donde coloco esos 1, tengo $\binom{7}{4} = 35$.

- Caso 6 veces el 1: Tengo que elegir donde coloco esos 1, tengo $\binom{7}{6} = 7$.

Solución: $1 + 21 + 35 + 7 = 64$.

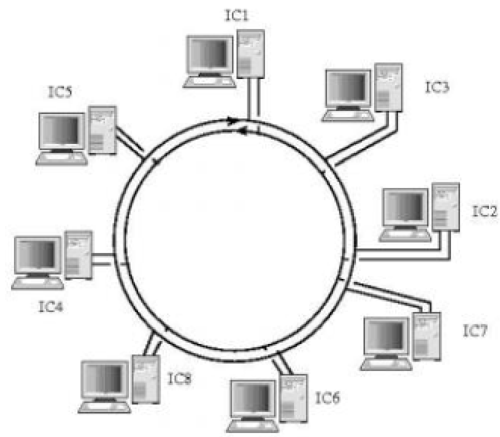
c) ¿Cuántas cadenas de longitud 7 tienen a 11 como sufijo propio?

$2^5$, dado que la cadena debe terminar en 11.

d) Escribir como concatenación de lenguajes las cadenas de longitud 7 que tienen a 11 como sufijo propio.

{0,1}{0,1}{0,1}{0,1}{0,1}{11}

II) Queremos instalar una red local de 8 ordenadores en anillo doble, como se muestra en la figura. Los ordenadores, con números de 1 hasta 8, tienen características diferentes. ¿Cuántas redes diferentes se pueden instalar? Consideramos dos redes como idénticas si tienen la misma topología (es decir: si cada ordenador tiene los mismos vecinos en las dos redes). La topología de una red es importante porque determina que ordenadores se comunican más rápidamente entre sí, y el comportamiento de la red en caso de ruptura de cables.




$$\frac{8!}{8} = 7! = 5040$$

**Ejercicio 2. (30 puntos)**

a) Demostrar por inducción matemática, para $n \geq 1$: $2^{4n} - 1$ es divisible por 5.

$5 \mid 2^{4n} - 1 , n \geq 1$

Base $n = 1$

$5 \mid 2^{4(0)} - 1 = 5 \mid 0$, por propiedad esto es correcto

Hipótesis $n = k$

$5 \mid 2^{4k} - 1$

Tesis $n = k + 1$

$5 \mid 2^{4(k+1)} - 1$

Demostración

¿$5 \mid 2^{4(k+1)} - 1$?

$2^{4(k+1)} - 1 = 2^{4k}2^4 - 1 = 2^{4k}(16) - 1 = (15)2^{4k} + 2^{4k} - 1 = 5\left((3)2^{4k}\right) + 2^{4k} - 1 \rightarrow$

$5 \mid 5\left((3)2^{4k}\right) + 2^{4k} - 1$

Por propiedad si $5 \mid 5 \rightarrow 5 \mid 5\left((3)2^{4k}\right), (3)2^{4k} \in Z$

Por hipótesis $5 \mid 2^{4k} - 1$

Por propiedad $\left[\left(5 \mid 5\left((3)2^{4k}\right)\right) \wedge \left(5 \mid 2^{4k} - 1\right)\right] \rightarrow 5 \mid \left(5\left((3)2^{4k}\right) + 2^{4k} - 1\right)$

En consecuencia el principio de inducción $5 \mid 2^{4n} - 1$, es verdadero para $n \geq 1$.

b) Un encargado gastó \$65036 en la compra de discos duros y memorias RAM. Cada memoria RAM costó \$4123 y cada disco duro \$7235. ¿Cuántas memorias y cuántos discos compra?

$m$ = cantidad de memorias.

$d$ = cantidad de discos.

$m, d \geq 0$

$65036 = 4123m + 7235d$

$7235 = 4123 + 3112$

$4123 = 3112 + 1011$

$3112 = (3)1011 + 79$

$1011 = (12)79 + 63$

$79 = 63 + 16$

$63 = (3)16 + 15$

$16 = 15 + 1$

$1 = 16 - 15 = 16 - (63 - (3)16) = (4)16 - 63 = (4)(79 - 63) - 63 = (4)(79) - (5)63 =$

$(4)(79) - (5)(1011 - (12)79) = (-5)1011 + (64)79 =$

$(-5)1011 + (64)(3112 - (3)1011) = (64)3112 + (-197)1011 =$

$(64)3112 + (-197)(4123 - 3112) = (-197)4123 + (261)3112 =$

$(-197)4123 + (261)(7235 - 4123) = (-458)4123 + (261)7235$

$1 = (-458)4123 + (261)7235$

$65036 = (-29786488)4123 + (16974396)7235$

$65036 = (-29786488 + 7235k)4123 + (16974396 - 4123k)7235$

$-29786488 + 7235k \geq 0, k \in Z$

$k \geq \dfrac{297886488}{7235} \cong 4116.99$

$16974396 - 4123k \geq 0, k \in Z$

$k \leq \dfrac{-16974396}{-4123} \cong 4117.001$

$k = 4117$

$$65036 = \left(-29786488 + 7235(4117)\right)4123 + \left(16974396 - 4123(4117)\right)7235$$

$$65036 = (7)4123 + (5)7235$$

Solución: Compró 7 memorias y 5 discos.

**Ejercicio 3. (20 puntos)**
a) Determinar si $(\mathbb{R}^{+},*)$ es grupo, con $*$ definido como $x*y=2xy$ (del lado derecho se tiene la multiplicación usual de números reales.

$x, y, z \in (R^{+},*)$

(1) Cerrado
$x * y = 2xy \in R^{+}$

(2) Asociativo

$x * (y * z) = x * (2yz) = 2x2yz = 4xyz$

$(x * y) * z = (2xy) * z = 22xyz = 4xyz$

(3) Neutro

$x * e = x \rightarrow x = 2xe \rightarrow e = \frac{1}{2} \in R^{+}$

(4) Inverso

$x * x^{-1} = e = \frac{1}{2} \rightarrow 2xx^{-1} = \frac{1}{2} \rightarrow x^{-1} = \frac{1}{4x}$

Verificación

$x * x^{-1} = x * \frac{1}{4x} = 2x\frac{1}{4x} = \frac{1}{2} = e$

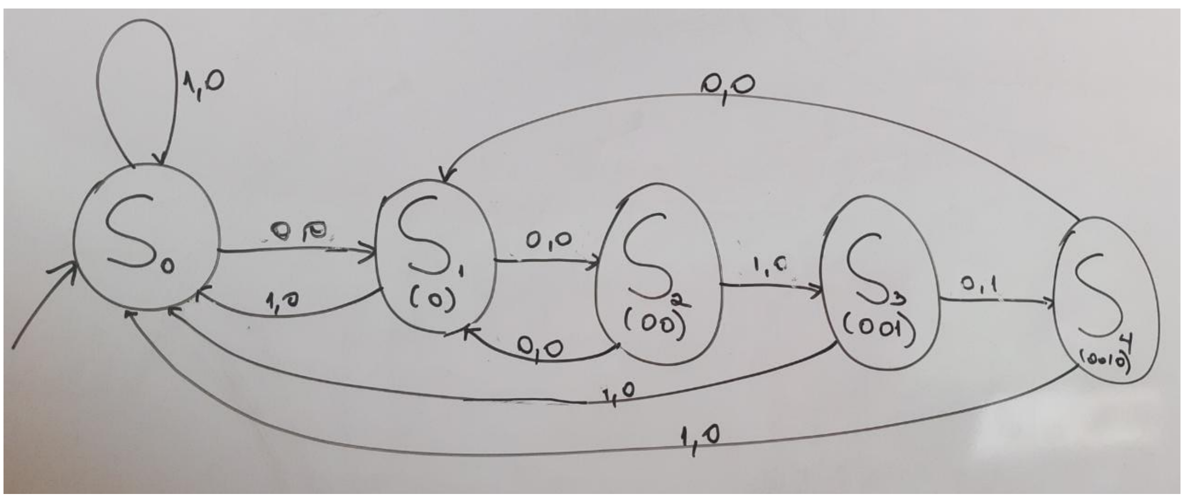
Por lo tanto $(R^{+},*)$ es un grupo.

b) Construir la tabla del subgrupo aditivo generado por el elemento $H = \langle 3 \rangle$ del grupo $(Z_{15}, \overset{15}{+})$ .

$< 3 > = \{0,3,6,9,12\}$

| + | 0 | 3 | 6 | 9 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 3 | 6 | 9 | 12 |
| 3 | 3 | 6 | 9 | 12 | 0 |
| 6 | 6 | 9 | 12 | 0 | 3 |
| 9 | 9 | 12 | 0 | 3 | 6 |
| 12 | 12 | 0 | 3 | 6 | 9 |

**Ejercicio 4. (15 puntos)**
Con $\Sigma = \{0,1\} = I = O$ , construir una máquina de estados finitos que identifique la subcadena 0010 con solapamiento.



**Ejercicio 5. (15 puntos)**

Resolver la relación de recurrencia: $3a_{n-1}+2a_{n-2}+a_n=15.2^n$, $a_0=0$, $a_1=1$

$$a_n = a_n^{(h)} + a_n^{(p)}$$

- $a_n^{(h)}$

$a_n + 3a_{n-1} + 2a_{n-2} = 0$

Ecuación Característica: $r^2 + 3r + 2 = 0 \rightarrow r_1 = -2, r_1 = -1$

$a_n^{(h)} = C_1((-2)^n)+C_2((-1)^n)$

- $a_n^{(p)}$

$a_n^{(p)} = A2^n$

$a_n + 3a_{n-1} + 2a_{n-2} = 15(2^n)$

$A2^n + 3(A2^{n-1}) + 2(A2^{n-2}) = 15(2^n)$

$A2^2 + 3(A2^1) + 2(A) = 15(2^2)$

$4A + 6A + 2A = 60$

$A = 5$

$a_n^{(p)} = 5(2^n)$

$a_n = a_n^{(h)} + a_n^{(p)} = C_1((-2)^n)+C_2((-1)^n) + 5(2^n)$

$a_0 = 0 = C_1((-2)^0)+C_2((-1)^0) + 5(2^0) = C_1+C_2 + 5 \rightarrow C_1 = -C_2 - 5$

$a_1 = 1 = C_1((-2)^1)+C_2((-1)^1) + 5(2^1) = -2C_1 - C_2 + 10 = -2(-C_2 - 5) - C_2 + 10$

$1 = C_2 + 20 \rightarrow C_2 = -19, C_1 = 14$

$a_n = 14((-2)^n) + (-19)((-1)^n) + 5(2^n), n \geq 0$