

UNIVERSIDAD AUTONOMA de ENTRE RIOS
Facultad de Ciencia y Tecnología

Carrera: Licenciatura en Sistemas Informáticos

Cátedra: Investigación Operativa

Tema : Unidad 1 - Modelos Matemáticos

a) Guía de Teoría

Introducción, origen, naturaleza, desarrollo y futuro de la Investigación de Operaciones.

Este tema proporciona una visión general de la Investigación de Operaciones (IO) y su origen, así como las fases fundamentales de su estudio. Aunque no es posible detallar todas las partes de IO aquí, el objetivo es presentar un panorama general para resolver problemas.

La IO es la disciplina que permite adoptar decisiones que mejor responden a los objetivos de una organización.

Se dice que la IO es una mezcla de arte y ciencia y su objetivo fundamental es posibilitar la adopción de decisiones políticas para un diseño óptimo. El arte se manifiesta en la formulación y construcción de un modelo matemático que, representando de la mejor manera posible al sistema en estudio, permite cuantificar una situación dada. La ciencia consiste en el desarrollo de un modelo matemático (puede ser computacional) que posibilite la solución del modelo propuesto. Finalmente arte y ciencia se mezclan en una última etapa que incluye: el conocimiento último de la estructura del sistema analizado, la adopción de una solución satisfactoria y la evaluación de la misma en relación al modelo, hipótesis y datos empleados.

Un problema relacionado es que a medida que se incrementa la complejidad y especialización de una organización, se vuelve cada vez más difícil asignar los recursos disponibles a sus diversas actividades de manera que sea lo más efectivo posible para la organización como un todo. Estos tipos de problemas y la necesidad de hallar la mejor manera de resolverlos dio lugar al medio necesario para que surgiera la IO.

Durante la 2da. Guerra Mundial, la administración militar de Gran Bretaña llevó a un equipo de científicos para que estudiaran los problemas tácticos y estratégicos asociados a la defensa aérea y terrestre del país. Su objetivo era determinar la utilización más efectiva de los recursos militares limitados. Las aplicaciones incluían entre otras, estudios de la forma de utilizar el radar recientemente inventado y de la efectividad de nuevos tipos de bombas. El establecimiento de este equipo científico marcó la primera actividad normal de IO.

El nombre de IO fue dado aparentemente porque el equipo estaba llevando a cabo la actividad de investigar operaciones militares.

Desde su nacimiento, este nuevo campo de toma de decisiones se ha caracterizado por el uso del conocimiento científico a través del esfuerzo de equipos interdisciplinarios, con el propósito de determinar la mejor utilización de los recursos limitados.

Los resultados alentadores logrados por los equipos de Investigación de operaciones británicos, motivaron a la administración militar de EE.UU. a comenzar actividades similares. Según se afirma, sus esfuerzos influyeron para ganar la Batalla de Inglaterra, la Campaña de las Islas en el Pacífico y la Batalla del Atlántico Norte.

Acicateada por el éxito aparente de la IO en lo militar, gradualmente la industria se interesa en este nuevo campo. Conforme la explosión industrial que siguió a la guerra, los problemas causados por la complejidad y especialización crecientes en las organizaciones volvieron al 1er. plano.

Un número creciente de personas, incluyendo consultores de negocios que habían pertenecido o cooperado con los equipos de IO durante la guerra, diéronse cuenta que básicamente estos eran los mismos problemas pero en un contexto diferente, que habían encarado los militares. De esta manera la IO empezó a filtrarse en la industria, los negocios y el gobierno civil.

La primera técnica matemática ampliamente aceptada en el campo, conocida como el método Simplex de programación lineal, fue desarrollada por George Dantzig en 1947.

El progreso impresionante de esta disciplina se debe fundamentalmente a:

- a) El desarrollo paralelo de la computación digital, con sus tremendas capacidades de velocidad de cómputo, almacenamiento y recuperación de información que han permitido la posibilidad de resolución de problemas cada vez más complejos.
- b) El propio objetivo de la IO. Sin duda una disciplina que estudia como aprovechar el uso de recursos escasos y/o limitados, es de indiscutible interés.

En consecuencia, la Investigación de Operaciones se aplica a problemas que tienen que ver con la forma de conducir y coordinar las operaciones o actividades dentro de una organización. La naturaleza de la organización no interesa esencialmente y, de hecho, la Investigación de Operaciones se ha aplicado con amplitud en los negocios, la industria, la milicia, el gobierno y las dependencias civiles, etc.

La investigación de Operaciones tiene que ver con la administración práctica de la organización. En consecuencia para ser satisfactoria también debe proporcionar conclusiones positivas y comprensibles a quienes deben tomar las decisiones, cuando se necesiten

Actualmente, y para el futuro, el impacto de la IO puede advertirse en muchas áreas como Administración, Economía, Ingeniería, Ciencias Sociales, Comunicaciones, Agricultura, el Campo Militar, etc.

Algunos problemas simples a resolver con ayuda de la IO.

- 1) Una compañía tiene las maquinarias necesarias para fabricar varios productos, pero no sabe cuál de ellos fabricar. Si los fabricara a todos debería producir tan pocos de c/u que no podría competir en el mercado, porque existe un costo fijo de producción que haría muy caro el producto. Además, existen limitaciones lógicas de los insumos, que necesitan cada uno de los diferentes productos. Deben fabricarse sólo algunos, pero cuáles? Y qué cantidad de cada uno? Un estudio de IO nos orientara en la respuesta.
- 2) Se quiere construir silos para almacenar granos que tenga una capacidad determinada. Pero no se conoce qué dimensiones debería tener para que resulte más económica su construcción. Distintas combinaciones de diámetro y altura implicarán distintas superficies y por lo tanto costos diferentes. También la mano de obra puede valer distinto según el tipo de silo, o los desperdicios de material que en cada caso se produzcan pueden ser decisivos para el costo final del silo. La IO puede dar solución a este problema.

Aplicaciones en Mercadotecnia

3) Selección de medios de publicidad

Las aplicaciones de programación Lineal para la selección de medios publicitarios están diseñadas para ayudar a los gerentes de mercadotecnia a asignar presupuestos fijos de publicidad a diversos medios. Los medios potenciales incluyen periódicos, revistas, radio, televisión y correo directo. En la mayor parte de estas aplicaciones el objetivo es maximizar la exposición a la audiencia. Las restricciones sobre las asignaciones permisibles usualmente se producen por consideraciones como políticas de la compañía, requisitos contractuales y disponibilidad en los medios.

4) Investigación de mercadotecnia

Diversas organizaciones llevan a cabo investigaciones mercadotécnicas para determinar características de los consumidores, actitudes y preferencias con respecto a productos o servicios que las organizaciones ofrecen. Con frecuencia, las investigaciones reales las lleva a cabo una empresa de investigación de mercadotecnia que se especializa en ofrecer a sus clientes la información que desean sobre el mercado. Los servicios que las empresas de investigación mercadotécnica ofrecen por lo común incluyen el diseño del estudio, la realización de las encuestas de mercado, el análisis de los datos recopilados y reportes resumidos y recomendaciones para el cliente. En la fase de diseño de la investigación, es posible que se establezcan objetivos o cuotas para el número y tipos de entrevistados que la investigación debe alcanzar. Cuando se establecen lineamientos sobre cuotas, el objetivo de la empresa investigadora es llevar a cabo la encuesta de manera que se satisfagan las necesidades de los clientes a un costo mínimo.

Aplicaciones financieras

5) Selección de cartera

Los problemas de selección de cartera implican situaciones en las que los gerentes financieros deben elegir inversiones específicas (por ejemplo, acciones, bonos) a partir de diversas alternativas de inversión. Los administradores de fondos mutualistas, de uniones de crédito, de compañías de seguros y de bancos, encuentran frecuentemente este tipo de problemas. La función objetivo para los problemas de selección de cartera es por lo común la maximización del rendimiento esperado o la minimización de los riesgos. Las restricciones asumen, por lo general, la forma de restricciones sobre el tiempo de inversiones permisibles, leyes estatales, políticas de la compañía, máximo riesgo permisible, etc.

Se han planteado y resuelto problemas de este tipo utilizando diversas técnicas de programación matemática. Sin embargo, si es posible plantear una función objetivo lineal y restricciones lineales en un problema específico de selección de cartera, entonces puede utilizarse la programación lineal para resolverlo.

6) Estrategia de Combinación Financiera

Las estrategias de mezcla o combinación financiera implican la selección de medios para financiar proyectos de la compañía, inventarios, operaciones de producción y otras actividades. En esta sección se ilustra la forma en que puede utilizarse la programación lineal para resolver problemas de este tipo, planteando y resolviendo un problema que implique el financiamiento de operaciones de producción. En esta aplicación específica, se debe tomar una decisión financiera con respecto a cuánta producción se debe financiar mediante fondos generados internamente, y que tanta producción se debe financiar mediante fondos externos.

Aplicaciones en Administración de la producción

7) Programación de la producción

Una de las áreas más importantes de la PL trata de las aplicaciones en períodos múltiples de planeación, tales como la programación de la producción. La resolución de un problema de esta clase permite a los administradores establecer un programa de producción eficiente y a costos reducidos, para uno o más productos, a lo largo de diversos períodos, como semanas, meses, etc. En esencia, se puede contemplar un problema de programación de la producción como uno de combinación o mezcla de productos para cada uno de diversos lapsos hacia el futuro. El administrador debe determinar los niveles de producción que permitirán a una compañía satisfacer los requisitos de demanda del producto, considerando limitaciones sobre la capacidad de producción, la capacidad de mano de obra y el espacio de almacenamiento. Al mismo tiempo, se desea minimizar el costo total para llevar a cabo esa labor.

Un motivo importante de la generalizada aplicación de la programación lineal en problemas de programación de la producción, es que éstos son de naturaleza recurrente. Se debe establecer un programa de producción para el mes en curso, después para el mes siguiente, luego para el que sigue, y así sucesivamente. Cuando el gerente de producción considera el problema cada vez, se encuentra con que, aunque la demanda de los productos varía, las limitaciones sobre el tiempo y las capacidades de producción, y sobre el espacio de almacenamiento, son básicamente las mismas. Por ello, el gerente de producción resuelve en esencia el mismo problema que se ha manejado en meses anteriores. Por tanto es posible aplicar con frecuencia un modelo general de programación lineal para el procedimiento de programado de producción. Una vez que se planteó el modelo, el administrador puede simplemente proporcionar los datos (demanda, capacidades, etc.) para el período de producción dado, y puede entonces utilizarse el modelo de programación lineal para desarrollar el programa de producción. De modo que un planteamiento de programación lineal puede tener muchas aplicaciones sucesivas.

8) Planeación de la mano de obra

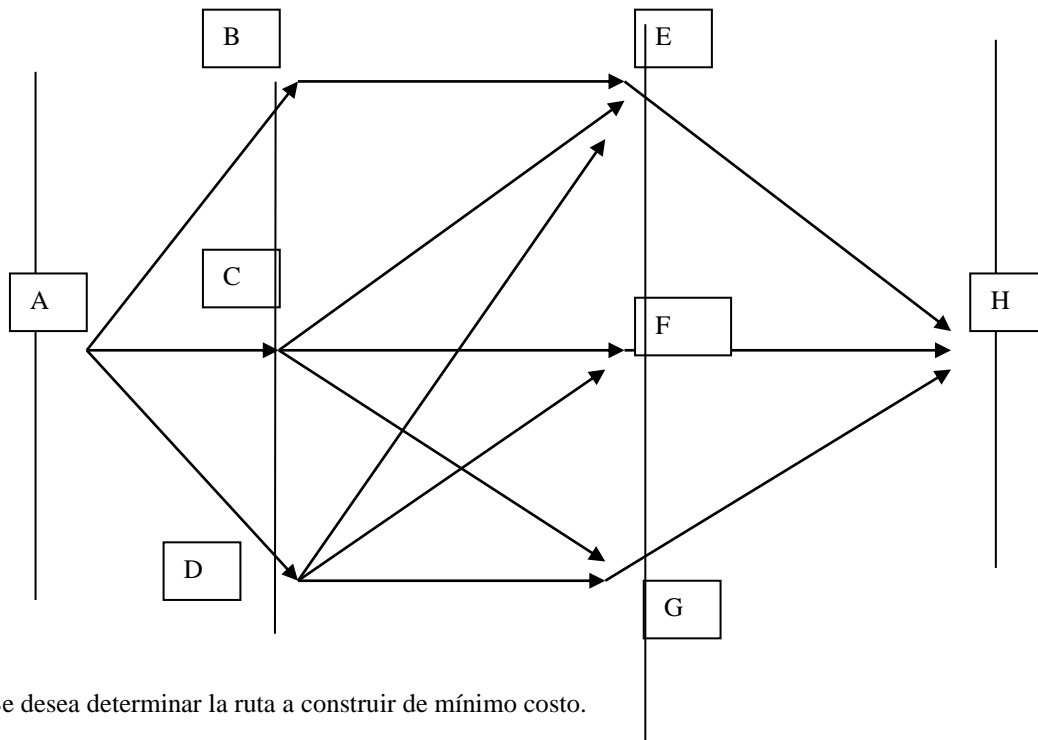
Con frecuencia se presentan problemas de planeación o de programación de la mano de obra cuando los administradores deben tomar decisiones que implican requerimientos departamentales de mano de obra para un período dado de tiempo. Esto es particularmente cierto cuando las asignaciones de mano de obra tienen cierta flexibilidad y en los casos en los que cuando menos cierta parte de la mano de obra puede asignarse a más de un departamento o centro de trabajo. Este es con frecuencia el caso cuando se ha capacitado a los empleados para realizar dos o más tareas.

9) Uno de los tipos especiales importantes de los problemas de IO se llama problema de transporte; un ejemplo típico se trata de una compañía que fabrica alimentos enlatados en distintas ciudades de un determinado país y se distribuyen a varios puntos del mismo. Debido a que los costos de embarque constituyen un gasto de consideración, la gerencia esta iniciando un estudio para reducirlos tanto como sea posible. Para la temporada venidera, se ha hecho una estimación de cuál será la producción de cada empaquetadora, y a cada almacén se le ha asignado una determinada cantidad de abastecimiento total de alimentos enlatados. Se da esta información (en cargas de camión), junto con el costo de embarque por carga para cada combinación empaquetadora - almacén. Se debe determinar el plan (óptimo) para la asignación de estos embarques a las diversas combinaciones que haga mínimo los costos totales de embarque.

- 10) Un problema construido especialmente para ilustrar los conceptos e introducir la terminología de Programación Dinámica es el problema de la construcción de una carretera.

El gráfico podría representar una carretera a construir.

Cada vertical es una etapa (con distintas ciudades o pueblos) y cada punto un posible nudo de paso de la carretera. Ej.: de B se puede ir solamente a E. Asimismo se conocen los costos de construcción de cada tramo.



- 11) La Teoría de colas (líneas de espera), se ilustra mediante una sala de emergencias de hospital. La sala proporciona cuidado médico a los casos de emergencia que llegan al hospital por ambulancia o automóvil particular. A cualquier hora siempre hay un doctor de servicio en la sala de emergencia. Sin embargo, debido a una tendencia creciente en los casos de emergencia de usar estos servicios, en lugar de ir a un médico privado, el hospital ha estado experimentando un aumento continuo en el número de visitas a la sala de emergencias cada año.

Como resultado, cuando llegan pacientes durante las horas picos (al atardecer) tienen que esperar hasta que llega su turno de ser atendidos por el doctor. Por lo tanto, se ha hecho una propuesta de que debe asignarse un segundo doctor a la sala de emergencias durante estas horas, de modo que puedan tratarse simultáneamente 2 casos de emergencia. Reconociendo que pueden aplicarse varios modelos de la Teoría de colas para predecir las características de espera del sistema, con un doctor y con dos doctores, lo que ayudará al hospital en su evaluación de la propuesta de agregar un 2do. médico.

Fases de un estudio de Investigación Operativa

En un estudio de IO se distinguen varias fases:

- a) **Definición del problema.**
- b) **Construcción del modelo.**
- c) **Solución del modelo.**
- d) **Validación del modelo.**
- e) **Implementación de los resultados finales.**

Aunque la sucesión anterior de ninguna manera es standard, parece generalmente aceptable.

Definición del problema

Esto implica una descripción exacta del objetivo del estudio, reflejando una representación aproximada del interés total del sistema. A veces no es tan simple, y es común considerar el interés de un subproblema en lugar del problema total.

Construcción del modelo

Esto implica expresar los objetivos y restricciones a través de relaciones cuantitativas en función de variables de decisión.

De acuerdo a la complejidad de este modelo será la forma de resolverlo. El modelo se aproxima al problema.

Solución del modelo

Si el modelo responde a un formato común o determinado, puede resolverse por técnicas matemáticas. Si las relaciones matemáticas que lo definen son muy complejas deberán utilizarse otras técnicas en lugar de buscar una solución analítica.

En estos casos se usarán *modelos de simulación o métodos heurísticos*.

Los *modelos de simulación* imitan el comportamiento del sistema en un período de tiempo. Para ello se especifica un nro. de eventos o sucesos en el tiempo y luego se presta atención al sistema sólo cuando ellos ocurren, y la información que se obtiene se acumula estadísticamente y se actualiza cada vez que el evento tiene lugar.

Dado que los *modelos de simulación* no necesitan en forma explícita funciones matemáticas para relacionar las variables (a menudo pueden citarse modelos matemáticos a partir de modelos de simulación) se emplean para simular sistemas complejos que no pueden ser modelados y/o resueltos en forma matemática.

Sus principales desventajas son: 1) Las dificultades en el diseño de experimentar estadísticamente.

2) El acopio de información.

3) La realización de test de inferencias.

La simulación de un modelo implica gran número de cálculos por lo cual es posible sólo al contar con computadoras adecuadas.

Modelos heurísticos. A menudo el modelo matemático es de naturaleza demasiado compleja para permitir llegar a una solución exacta o hacerlo implica un costo computacional muy elevado. Otras veces el conocimiento del problema es impreciso o contradictorio o ambiguo. Ante estas situaciones los modelos heurísticos presentan una alternativa de hallar mayores soluciones, o soluciones aproximadas, como generalmente se las denomina.

Los modelos heurísticos se basan en reglas prácticas o intuitivas. Se parte de una solución actual y se la va modificando en base a dichas reglas. Cuando ya no se puede mejorar, luego de varios intentos, se supone que se ha llegado a una buena solución.

Entonces, sólo la programación matemática, que es la que nos da resultados analíticos, nos permite saber que hemos llegado realmente al óptimo.

Validación del modelo

El modelo representa a un sistema. Para saber cuán bien lo representa, es común testear su validez comparando sus predicciones con los datos reales. Cuando no se cuenta con el sistema real se lo suele simular.

Implementación de los resultados

Se deben traducir los resultados del análisis en instrucciones detalladas y entendibles por aquellas personas que administran el sistema.

Estructuras de los Modelos Matemáticos

A diferencia de los modelos de simulación o heurísticos donde no pueden sugerirse estructuras físicas fijas, un modelo matemático incluye 3 conjuntos básicos de elementos:

Variables de decisión: son las variables relevantes en función de las cuales se escribe el modelo. Son las incógnitas a determinar a partir de la solución del modelo (x).

Función objetivo: mide la efectividad del sistema como una función matemática de las variables de decisión [$f(x)$].

Restricciones: son funciones de las variables de decisión que representan las limitaciones físicas y tecnológicas del sistema que restringen el rango de valores que pueden tomar las variables de decisión $g(x) \leq b$

Un modelo matemático de optimización (de objetivo único) se lo plantea, en general, de la siguiente forma:

Optimizar (maximizar o minimizar) $f(x)$ **Función objetivo**

Sujeto a $g(x) \leq b$

Restricciones de las Funciones

$L_1 \leq x \leq L_2$

Restricciones de las Variables

Clasificación de los problemas de optimización

Considerando la linealidad o no de las funciones del modelo:

Problema lineal: función objetivo lineal y restricciones lineales

Problema no lineal: función objetivo lineal y restricciones no lineales, función objetivo no lineal y restricciones lineales, función objetivo y restricciones no lineales

Simplificaciones del modelo matemático

Luego de que el modelo matemático es construido, a menudo se introducen modificaciones para poder tratar el problema en forma analítica y/o algorítmica.

Las simplificaciones que suelen producirse son:

Disminución del nro. de variables, haciendo sustituciones de una, en función en otras.

Reducción del nro. de restricciones, haciendo sustituciones y eliminando restricciones innecesarias o no activas.

Simplificación de las funciones, disminuyendo la no linealidad mediante funciones aproximadas.

Definiciones

Punto factible: es todo punto que verifica todas las restricciones del modelo.

Punto no factible: es todo punto que no verifica al menos una de las restricciones del modelo.

Región factible: es el conjunto de todos los puntos factibles del modelo.

El óptimo del modelo no siempre es el óptimo del problema físico ya que el primero es una aproximación y sólo lo será si existe la certeza de que el objetivo planteado es la verdadera meta del problema y las restricciones del mismo representan fidedignamente la situación.

Ejemplos de modelado

- a) Se debe construir un depósito cilíndrico de al menos 95 m³ de capacidad. Hallar las dimensiones del mismo de manera que la sup. metálica requerida para su construcción sea mínima.

Función Objetivo: minimizar superficie metálica

$$\text{minimizar Sup. total} = 2 \pi r^2 + 2 \pi r h$$

Variables de decisión: incógnitas del problema, lo que deseo saber h (altura), r (radio)

Restricciones: h y r no pueden tomar cualquier valor. Hay condiciones impuestas por el problema:

$$\begin{aligned} \pi r^2 h &\geq 95 \\ r &\geq 0 \\ h &\geq 0 \end{aligned}$$

Clasificación: problema no lineal

- b) Una compañía produce 2 artículos A y B que pueden venderse en el mercado a \$ 20 y \$ 15 por unidad, respectivamente. Su elaboración consta de 2 etapas: ensamblado y terminado.

El producto A requiere 5 hs. para ensamblado y 1/2 hs. para terminado por unidad., mientras que el artículo B requiere 2 hs. y 1 hs. para las mismas etapas.

La mano de obra con que cuenta la compañía limita el ensamblado a 100 hs. y el terminado a 30 hs.

¿Qué cantidad de cada producto conviene fabricar para obtener una mayor utilidad?

F.O. máx ganancias $Z = 20 (\$/\text{unidad}) X_A (\text{unidad}) + 15 X_B$

sujeto a

$$\begin{aligned} 5 X_A + 2 X_B &\leq 100 \\ 0,5 X_A + X_B &\leq 30 \\ X_A &\geq 0 \\ X_B &\geq 0 \end{aligned}$$

Clasificación: problema lineal.