UNIVERSIDAD AUTONOMA de ENTRE RIOS

Facultad de Ciencia y Tecnología

Carrera : Licenciatura en Sistemas Informáticos
Cátedra: Investigación Operativa
Tema : Unidad 3 – Aplicaciones de Programación Lineal
a) Guía de Teoría

Introducción

Es importante destacar el hecho de que en numerosas aplicaciones de la Programación Lineal las variables de decisión alcanzan un sentido sólo si toman valores enteros. Con frecuencia es necesario asignar hombres, máquinas y vehículos a las actividades, en cantidades enteras. Es válido mencionar que existen problemas que poseen el requerimiento adicional de que algunas variables sean enteras.

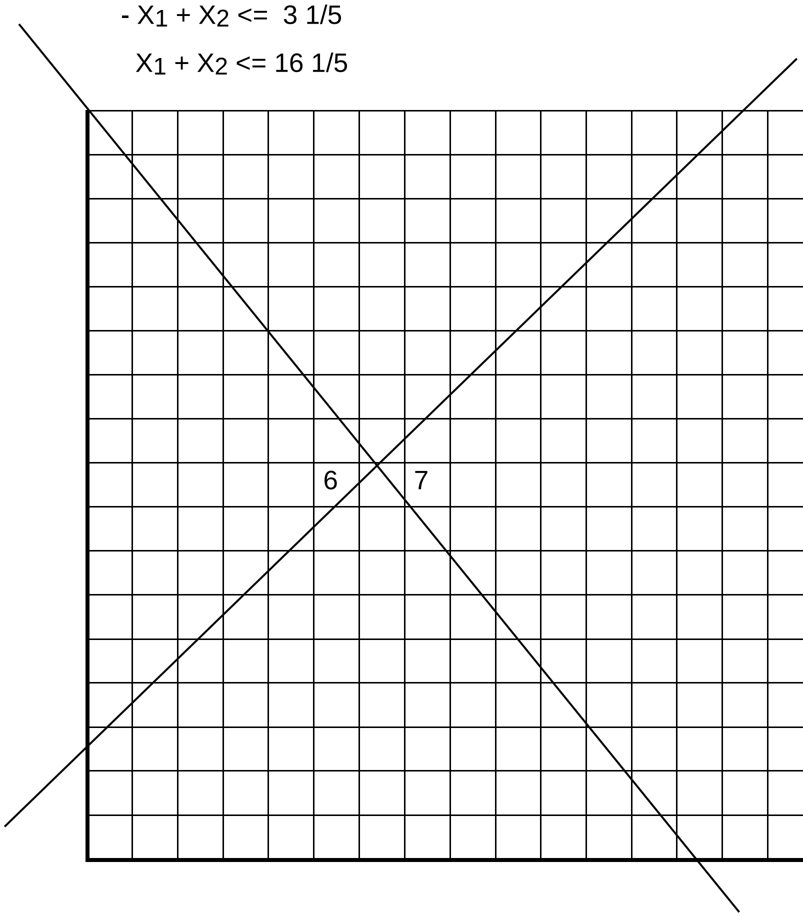
En la práctica, un enfoque común a los problemas de programación lineal entera ha sido el de usar el Método Simplex (ignorando en consecuencia la restricción entera) y después redondear los valores no enteros a enteros, en la solución resultante. A veces este procedimiento es correcto pero debemos destacar el riesgo de que la solución óptima de programación lineal no es necesariamente factible después de redondearla.

Aunque esta opción es válida a menudo, existen ciertos riesgos en este aspecto. Es difícil ver, con frecuencia, en qué sentido debe redondearse para mantener la factibilidad. Puede incluso ser necesario cambiar el valor de algunas variables en una o más unidades, después del redondeo. Veamos algunos ejemplos:

Ej. 1) Supóngase que algunas de las restricciones de un modelo matemático son:

$- X_1 + X_2 <= 3\ 1/5$

$X_1 + X_2 <= 16\ 1/5$



y que el Método Simplex ha identificado la solución óptima no entera como $X_1 = 6\ 1/5$ y $X_2 = 10$. Se observa que no es posible redondear la variable X_1 6 ó a 7 (o a cualquier otro entero) y mantener la factibilidad. Esto sólo puede hacerse cambiando el valor entero de X_2. Ante problemas mucho más complejos (mayor cantidad de variables y restricciones) es fácil de imaginar las innumerables complicaciones que pueden encontrarse.

Ej. 2) Aún cuando la solución óptima de Programación Lineal se redondee de manera satisfactoria, existe todavía otro riesgo. No hay garantía de que esta solución redondeada sea la solución óptima entera. Inclusive puede estar muy lejos de serla, en términos del valor de la función objetivo. Veamos:

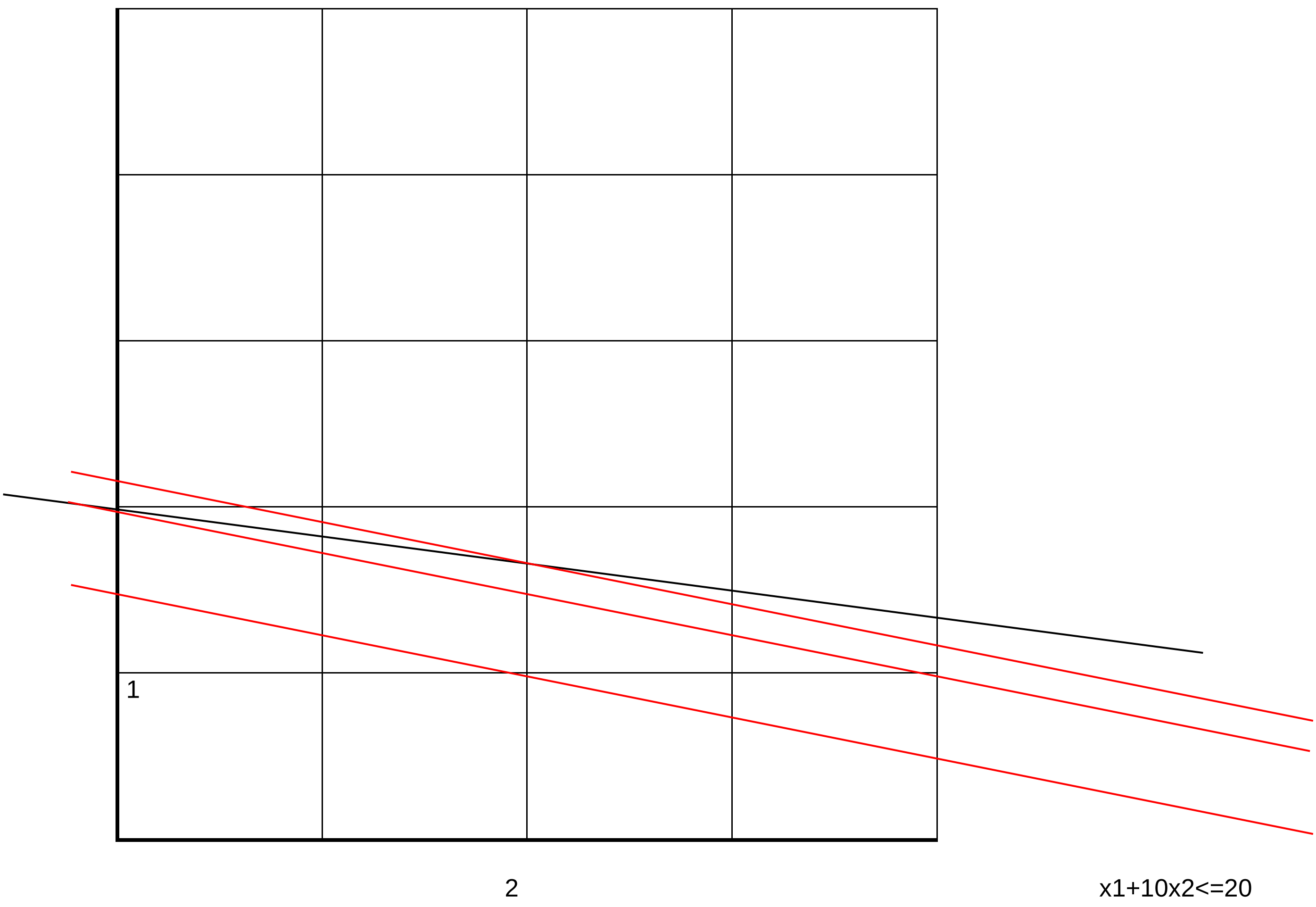
Máx $Z = X_1 + 5X_2$

s.a.

$X_1 + 10X_2 <= 20$

$X_1 <= 2$

y X_1 y X_2 enteros no negativos



La solución óptima de este problema es $X_1 = 2$ y $X_2 = 9/5$ con $Z = 11$

Si no se contara con una solución gráfica (como en este caso), entonces la variable con el valor no entero $X_2 = 9/5$ normalmente se redondearía en la dirección factible a $X_2 = 1$. La solución entera que resulta es $X_1 = 2$, $X_2 = 1$, lo que da $Z = 7$. Nótese que esta solución está muy lejos de la óptima entera $X_1 = 0$, $X_2 = 2$, donde $Z = 10$.

Por estas razones, sería útil contar con un procedimiento eficiente de solución para obtener una solución óptima para los problemas de Programación Lineal Entera. Con este fin se ha desarrollado un número considerable de algoritmos. Desafortunadamente, ninguno posee una eficiencia en los cálculos que sea remotamente comparable al Método Simplex (excepto en tipos especiales de problemas), así que, en general se limitan a problemas relativamente pequeños que tienen tal vez unas cuantas docenas de variables. Esta sigue siendo, por lo tanto, un área activa de investigación, y se continúa progresando en el desarrollo de algoritmos más eficientes.

Modelos de Programación Lineal en Enteros

Si se requiere que todas las variables sean enteros se dice que se tiene un Programa Lineal totalmente en Enteros. A continuación se plantea un modelo de Programación Lineal de esta clase de dos variables:

$$
\begin{aligned}
&\text{Máx}\quad Z = 2X_1 + 5X_2\\
&\text{s.a.}\\
&\qquad 2X_1 + 10X_2 <= 11\\
&\qquad X_1 + 3X_2 <= 2\\
&\qquad 3X_1 + 5X_2 <= 3\\
&\qquad \text{y}\ X_1\ \text{y}\ X_2 >= 0\ \text{y enteros}
\end{aligned}
$$

Si, de este modelo, eliminamos la condición “y enteros”, se transforma en un modelo lineal de dos variables reales no negativas, ya conocido. Este modelo se denomina Relajación PL del Programa Lineal en Enteros.

Si se requiere que algunas, pero no necesariamente todas, las variables de decisión de un problema sean números enteros, se tiene así un Programa Lineal en Enteros de tipo Mixto:

$$
\begin{aligned}
&\text{Máx}\quad Z = 2X_1 + 5X_2\\
&\text{s.a.}\\
&\qquad 2X_1 + 10X_2 <= 11\\
&\qquad X_1 + 3X_2 <= 2\\
&\qquad 3X_1 + 5X_2 <= 3\\
&\text{y}\ X_1\ \text{y}\ X_2 >= 0\ \text{y}\ X_2\ \text{entero}
\end{aligned}
$$

A su vez se obtiene la Relajación PL de éste problema eliminando la condición de que X_2 sea entera.

En muchas aplicaciones prácticas se utilizan variables enteras binarias 0 ó 1 (se hace o no se hace, existe o no existe).

Solución Gráfica

Una empresa dedicada a inversiones inmobiliarias dispone de um 1.365.000 de capital para volcar al mercado. Se aconseja invertir en un conjunto de casas urbanas, y en un grupo de edificios de departamentos en un complejo de gran extensión. Las casa urbanas pueden adquirirse en bloques de 3 por el precio de um 195.000 por bloque pero por el momento sólo existen 4 bloques de casas urbanas disponibles para su adquisición. Cada edificio del complejo de apartamentos contiene 12 unidades de viviendas y se venden en um 273.000. Se pueden comprar en forma separada los edificios de departamentos, y el constructor del complejo ha aceptado construir el número de edificios de 12 unidades que la empresa desee adquirir.

El gerente de la empresa tiene libertad para dedicar 140 hs al mes a estas inversiones. Cada conjunto de casas requiere de 4 horas al mes del tiempo del gerente, mientras que cada edificio requiere de 40 hs al mes. Se estima que la renta anual a obtener será de um 2.000 por bloques de casas y de um 3.000 por edificio. La empresa pretende asignar sus fondos disponibles para inversión a los edificios de departamentos y a las casas urbanas con el objeto de maximizar beneficios anuales por renta.

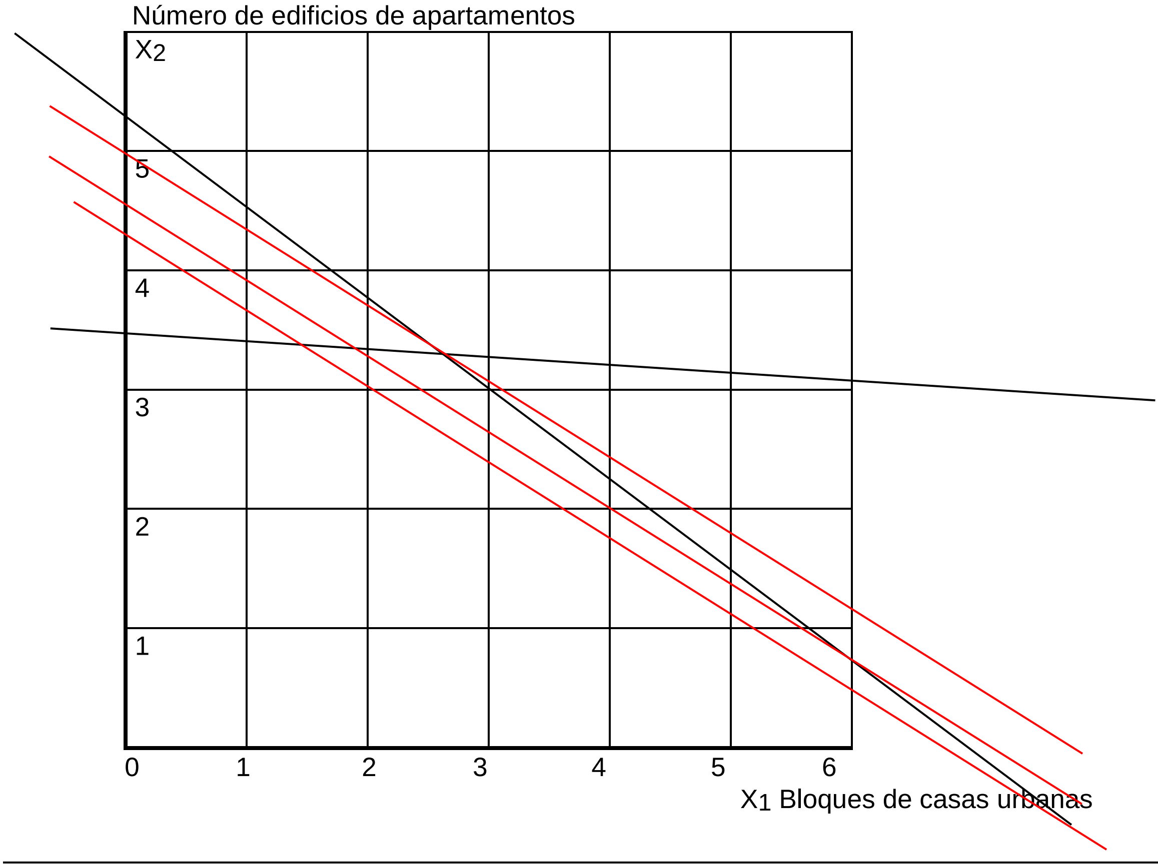
El modelo correspondiente a este problema será:
Variables de decisión: X_1 bloques de casas urbanas y X_2 edificios de departamentos, valores enteros.
Función objetivo: maximizar la renta anual a obtener por la empresa, expresada en um.
Restricciones: a) fondos disponibles para la operación inmobiliaria en miles de um.
b) tiempo del administrador en hs.
c) disponibilidad de casas urbanas en bloque.

$$\text{Máx} \quad Z = 2\,X_1 + 3\,X_2$$

s.a.

$$\begin{aligned} 195\,X_1 + 273\,X_2 &<= 1.365 \\ 4\,X_1 + 40\,X_2 &<= 140 \\ X_1 \quad &<= 4 \end{aligned}$$

$$\text{y} \quad X_1 \ \text{y} \ X_2 >= 0 \ \text{ y enteros}$$



Un primer planteamiento para resolver un problema como éste podría ser eliminar los requisitos de enteros y resolver el problema resultante de Relajación PL. Después se podrían redondear las variables de decisión para intentar llegar a la solución óptima para el programa lineal en enteros. Sin embargo, como se verá después, este procedimiento puede no dar como resultado la solución óptima. De hecho, en ocasiones el redondeo de los valores de las variables de decisión puede dar como resultado una solución no factible.

El programa lineal que se obtiene al eliminar la condición de enteros para las variables de decisión (Relajación PL) tiene por solución óptima $X_1 = 2{,}44$ $X_2 = 3{,}26$ FO = 14,66. Sin embargo esta solución no es factible para PL en enteros, puesto que las variables de decisión toman valores fraccionarios.

Redondeando las variables de decisión a los valores enteros más próximos se obtiene la solución $X_1 = 2$ $X_2 = 3$ F0 = 13. Es ésta la solución óptima en enteros? La respuesta es no. Como puede apreciarse gráficamente la solución $X_1 = 4$ $X_2 = 2$ FO = 14 es la óptima en enteros. La solución de programación lineal redondeando al entero más próximo no resultó ser una buena estrategia.

A partir del análisis de la solución del problema relajado con respecto a la solución entera se puede decir que:

***Propiedad 1*: El valor de la solución óptima de cualquier programa lineal en enteros, o mixto, y que es de maximización, produce un valor menor o igual al valor de la solución óptima para su correspondiente problema de Relajación PL.**

Esta propiedad significa que puede encontrarse una cota superior (límite superior) para el valor de cualquier programa lineal en enteros, o mixto, de maximización, resolviendo su correspondiente problema de relajación PL. Para el presente problema, la cota superior es 14,66. La solución óptima en enteros tiene un valor menor igual a 14,00.

Como se verá, se utiliza la propiedad arriba indicada en el procedimiento de solución de ramificación y acotamiento para resolver problemas lineales en enteros, y mixtos, a los cuales se le hará una pequeña modificación.

Aplicaciones de la Programación Lineal en Enteros

En la sección anterior se vio un ejemplo de un programa lineal totalmente en enteros: el problema de la compañía de Inversiones Inmobiliarias. En esta sección se analizan dos aplicaciones en las que se tienen dos variables enteras binarias o del tipo 0 - l: los problemas de presupuesto de capital y de diseño de sistemas de distribución. Se han elegido estas aplicaciones porque representan dos áreas en las que se ha utilizado ampliamente en la práctica la programación lineal en enteros. Mediante estas aplicaciones, el lector debe comenzar a desarrollar una apreciación de la flexibilidad que las variables 0 - 1 proporcionan al desarrollo de los modelos.

Presupuestos de capital

Los presupuestos de capital son un área en la que el enfoque de la ciencia de la administración ha ofrecido con frecuencia aumentos considerables en las utilidades y/o ahorros considerables. Para dar una idea de lo que tratan los presupuestos de capital, se considera el problema de la compañía de Refrigeración y se desarrolla su planteamiento de programación lineal.

La compañía de Refrigeración puede invertir fondos de capital en diversos proyectos que tienen diversos requerimientos de capital para los próximos 4 años. Teniendo recursos de capital limitados, la compañía debe elegir los proyectos y presupuestos más redituables para realizar los gastos de capital. En la siguiente tabla se muestran los valores actuales estimados de los proyectos, los requerimientos de capital y las proyecciones del capital disponibles.

<u>Valores actuales proyectados, requerimientos de capital y proyecciones de capital disponibles para la compañía de Refrigeración.</u>

Proyecto	Valor actual estimado (um)	Requerimientos de capital (um) *Año I*	*Año 2*	*Año 3*	*Año 4*
Ampliación de la planta	90.000	15.000	20.000	20.000	15.000
Ampliación del almacén	40.000	10.000	15.000	20.000	5.000
Nueva maquinaria	10.000	10.000	0	0	4.000
Investigación sobre nuevos productos	37.000	15.000	10.000	10.000	10.000
Fondos de capital disponibles		40.000	50.000	40.000	35.000

Se eligen las siguientes definiciones para las variables de decisión:

X_1 = 1 si se acepta el proyecto de ampliación de la planta; 0, si se rechaza

X_2 = 1 si se acepta el proyecto de ampliación del almacén; 0, si se rechaza

X_3 = 1 si se acepta el proyecto de nueva maquinaria; 0, si se rechaza

X_4 = I si se acepta el proyecto de investigación sobre nuevos productos; 0, si se rechaza

El planteamiento de programación lineal para este problema de presupuesto de capital tiene una restricción aparte para cada año de los fondos disponibles y una restricción por separado que exige que cada una de las variables sea menor que o igual a 1. Enseguida se expone el planteamiento de programación lineal (las cantidades monetarias están en millares de um).

$$
\begin{array}{ll}
\text{máx} & 90\,X_1 + 40\,X_2 + 10\,X_3 + 37\,X_4 \\
\text{s.a.} & \\
& 15\,X_1 + 10\,X_2 + 10\,X_3 + 15\,X_4 <= 40 \\
& 20\,X_1 + 15\,X_2 + 10\,X_4 <= 50 \\
& 20\,X_1 + 20\,X_2 + 10\,X_4 <= 40 \\
& 15\,X_1 + 5\,X_2 + 4\,X_3 + 10\,X_4 <= 35 \\
& X_1 <= 1 \\
& X_2 <= 1 \\
& X_3 <= 1 \\
& X_4 <= 1 \\
& X_1,\ X_2,\ X_3,\ X_4 >= 0
\end{array}
$$

La solución óptima para este programa lineal es $X_1 = 1$; $X_2 = 0{,}5$; $X_3 = 0{,}5$ y $X_4 = 1$, con un valor actual total estimado de um 152.000. La dificultad al plantear un problema de presupuesto de capital con programación lineal, es ahora evidente. A menos que sea posible ampliar el almacén y poner en práctica los proyectos para nuevas máquinas en incrementos del 50%, la solución que se tiene no es factible. Por ello, antes de poner en práctica la solución de programación lineal se deben hacer algunos ajustes, tales como redondear X_2 y X_3 (lo cual conduce posiblemente a una solución que no es óptima).

Un método preferible es replantear el problema de la compañía de Refrigeración como programa lineal en enteros del tipo binario (0 ó 1). Enseguida se muestra el planteamiento según tal programación:

$$
\begin{array}{ll}
\text{máx} & 90\,X_1 + 40\,X_2 + 10\,X_3 + 37\,X_4 \\
\text{s.a.} & \\
 & 15\,X_1 + 10\,X_2 + 10\,X_3 + 15\,X_4 <= 40 \\
 & 20\,X_1 + 15\,X_2 \qquad\qquad + 10\,X_4 <= 50 \\
 & 20\,X_1 + 20\,X_2 \qquad\qquad + 10\,X_4 <= 40 \\
 & 15\,X_1 + 5\,X_2 + 4\,X_3 + 10\,X_4 <= 35 \\
 & X_1, \quad X_2, \quad X_3, \quad X_4 = 0 \text{ ó } 1
\end{array}
$$

El planteamiento anterior de programación lineal da el problema de Relajación PL del programa en enteros tipo binario.

La solución óptima en enteros (procedimiento de ramificación y acotamiento) está dada por $X_1 = 1$, $X_2 = 1$, $X_3 = 1$ y $X_4 = 0$, con un valor actual total estimado de um 140.000. Debe observarse que esta solución óptima podría no haber sido descubierta simplemente redondeando la solución de programación lineal. De hecho, la mejor solución factible que se puede encontrar considerando todos los posibles redondeos de las variables fraccionarias de la solución de programación lineal es $X_1 = 1$, $X_2 = 0$, $X_3 = 0$, $X_4 = 1$, con un valor actual total estimado de um 127.000. Este valor es considerablemente inferior al valor de la solución óptima en enteros para el problema de presupuestos de capital.

La capacidad para evitar valores fraccionarios es una de las dos principales razones por las que generalmente se prefiere el planteamiento de programación en enteros para el problema de presupuesto de capital. El segundo motivo por el que los científicos de la administración prefieren un modelo de programación en enteros binario para los problemas de presupuesto de capital es la flexibilidad que se obtiene al desarrollar ciertas restricciones no presupuestales. Con frecuencia éstas son importantes en los problemas de presupuesto de capital, y se pueden plantear solamente utilizando variables de tipo binario, a las que en ocasiones se denomina variables lógicas.

Restricciones de elección múltiple y mutuamente excluyentes

Supóngase que, en vez de un proyecto de expansión de la planta, la compañía de Refrigeración tiene en realidad en consideración tres proyectos de expansión de almacenes. Se debe ampliar una de las bodegas debido a un aumento en la demanda de los productos, pero no existe suficiente demanda nueva para hacer que resulte redituable la ampliación de más de un almacén. Para reflejar esta situación podrían incorporarse en el modelo anterior de programación lineal según enteros binarios las siguientes definiciones de variables y la *restricción de elección múltiple.* Sean

X_2 = 1 si se acepta el proyecto original de ampliación del almacén; 0, si se rechaza,
X_5 = 1 si se acepta el proyecto secundario de ampliación del almacén; 0, si se rechaza,
X_6 = 1 si se acepta el tercer proyecto de ampliación del almacén; 0, si se rechaza.

La restricción de elección múltiple que refleja el requisito de que sólo puede seleccionarse uno solo de esos proyectos se expresa de la siguiente manera:

$$X_2 + X_5 + X_6 = 1$$

Es fácil ver por qué se denomina restricción de elección múltiple. Como únicamente se permite que X_2, X_5 y X_6 asuman valores de 0 ó 1, uno solo de estos proyectos debe elegirse de entre las alternativas. Obsérvese que si se permiten valores fraccionarios para las variables de decisión (como en programación lineal), no se podría poner en práctica el requisito de seleccionar uno y sólo un proyecto (por ejemplo, $X_2 = 1/3$, $X_5 = 1/3$, $X_6 = 1/3$ satisfaría la restricción).

Si no se hubiera solicitado que se ampliara un almacén, entonces la restricción de elección múltiple podría modificarse de la siguiente manera:

$$X_2 + X_5 + X_6 <= 1$$

Esta modificación permite el caso de que no se hagan ampliaciones en los almacenes ($X_2 = X_5 = X_6 = 0$), pero no admite que se amplíe mas de un almacén. A este tipo de restricción se le denomina con frecuencia restricción mutuamente excluyente.

Restricción con k de n alternativas

Se puede extender la noción de restricciones de elección múltiple para modelar situaciones en las que deben seleccionarse k de entre un conjunto de n proyectos. Supóngase que X_2, X_5, X_6, X_7 y X_8 representan cinco proyectos potenciales de ampliación de almacenes, y que se considera necesario aceptar dos de los cinco proyectos. La siguiente restricción asegura que se satisface este nuevo requisito:

$$X_2 + X_5 + X_6 + X_7 + X_8 = 2$$

Si se requiriera la selección de no más de dos de los proyectos, se utilizaría la siguiente restricción de menor que o igual a:

$$X_2 + X_5 + X_6 + X_7 + X_8 <= 2$$

De nueva cuenta, deben restringirse los valores de las variables anteriores al tipo binario (0 ó 1).

Restricciones condicionales y de correquisito

En ocasiones se condiciona la aceptación de un proyecto a la aceptación de otro. Por ejemplo, supóngase que el proyecto de ampliación de almacén para la compañía de Refrigeración hubiera dependiendo del proyecto de ampliación de la planta. Utilizando X_1 para representar la ampliación de la planta y X_2 para la ampliación del almacén, se podría introducir la siguiente restricción condicional para poner en práctica este requerimiento:

$$X_2 <= X_1$$

ó bien

$$X_2 - X_1 <= 0$$

Como se requiere que tanto X_1 como X_2 sean 0, se observa que en los casos en que $X_1 = 0$, X_2 se convierte obligadamente en 0. Cuando X_1 es 1, también se permite que X_2 sea igual a 1; por ello, pueden ampliarse tanto la planta como el almacén. Sin embargo, se observa que la restricción anterior no impone la aceptación del proyecto de ampliación del almacén (X_2) si se acepta el proyecto de ampliación de la planta (X_1) si fuera requisito aceptar proyecto de ampliación del almacén cuando se aceptara el proyecto de ampliación de planta, y viceversa, entonces se diría que los proyectos X_1 y X_2 representan proyectos de correquisito. Para modelar una situación como ésta, simplemente se escribe la restricción anterior en forma de igualdad:

$$X_2 = X_1$$

ó bien

$$X_2 - X_1 = 0$$

Esta restricción obliga a X_1 y X_2 a asumir el mismo valor.

SOLUCIÓN POR RAMIFICACIÓN Y ACOTAMIENTO DE PROGRAMAS LINEALES SEGUN ENTEROS

Al igual que los programas lineales, es difícil resolver en forma gráfica los programas lineales en enteros que tienen tres variables. Además, como es imposible resolver gráficamente problemas más grandes, deben utilizarse otros procedimientos de solución. La ramificación y acotamiento es en la actualidad el método de solución de uso general que es más eficiente para programas lineales en enteros. Casi todos los paquetes de computación de programas en enteros comercialmente disponibles utilizan el método de ramificación y acotamiento.

Tal procedimiento divide el conjunto de soluciones factibles para un problema de programación en enteros en subconjuntos menores (ramificación). Después, se utilizan diversas reglas para (1) identificar los subconjuntos que es más probable que contengan la solución óptima y (2) identificar los subconjuntos que no es necesario explorar más porque no es posible que contengan la solución óptima.

Se obtiene una cota superior para la mejor solución en cada subconjunto resolviendo una Relajación PL. En los casos en que la solución de tal relajamiento da como resultado la solución en enteros, se llega a la mejor solución del subconjunto y se obtiene una cota inferior para el subconjunto. La mejor de las soluciones enteras factibles (considerando todos los subconjuntos) es la solución óptima.

En esta sección se muestra la forma en que puede utilizarse el método de ramificación y acotamiento para resolver problemas de programación en enteros aplicándolo al problema totalmente en enteros de la Compañía Inversora. Después se comenta la forma en que se le puede extender a programas lineales de tipo mixto y se presenta un diagrama de flujo en el que se resumen los pasos del procedimiento.

El método de ramificación y acotamiento comienza por resolver la Relajación PL del programa lineal en enteros Así, se plantea enseguida la Relajación PL del problema de la compañía Inversora:

$$\text{Máx} \quad Z = 2\,X_1 + 3\,X_2$$

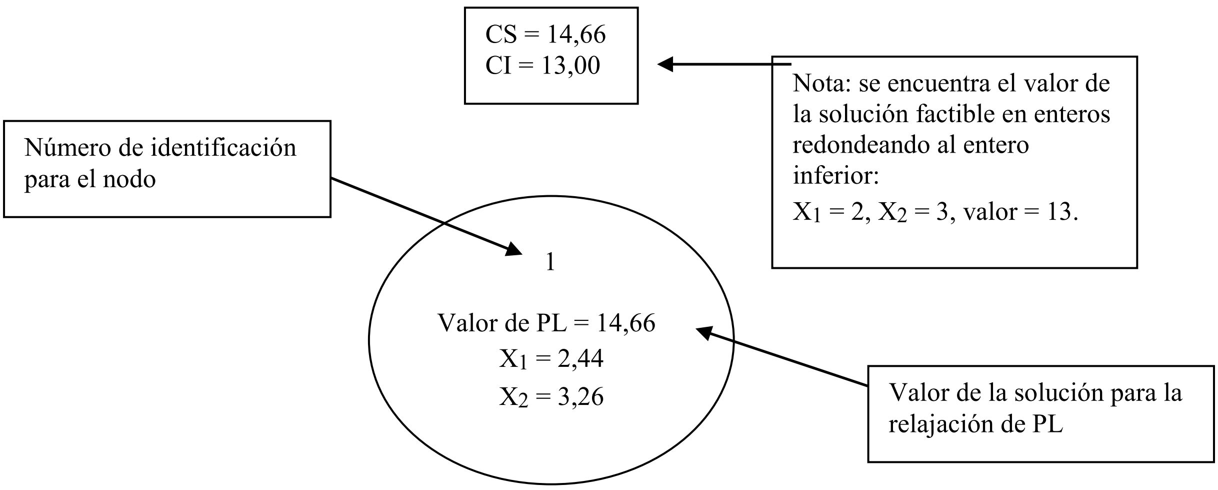
s.a.

$$
\begin{aligned}
195\,X_1 + 273\,X_2 &\le 1.365 \\
4\,X_1 + 40\,X_2 &\le 140 \\
X_1 &\le 4 \\
\text{y} \quad X_1 \ \text{y} \ X_2 &\ge 0
\end{aligned}
$$

La solución es $X_1 = 2{,}44$ y $X_2 = 3{,}26$, con un valor de la función objetivo de 14,66. Si la solución óptima de la Relajación PL hubiera satisfecho los requerimientos de enteros se hubiera tenido entonces la solución óptima para el problema lineal en enteros. Como no fue así, se continúa con el método de ramificación y acotamiento. Como primer paso, recuérdese la propiedad: ***El valor de la solución óptima de cualquier programa lineal en enteros, o mixto, y que es de maximización, produce un valor menor o igual al valor de la solución óptima para su correspondiente problema de Relajación PL,***

por ello se sabe que el valor de la solución óptima en enteros para este problema no puede ser superior a 14,66.

Como los coeficientes de todas las variables de las restricciones son no negativos, y como todas las restricciones son del tipo <=, se puede encontrar una solución factible en enteros redondeando hacia abajo cada variable de decisión; es decir, el redondear hacia la cifra inferior sólo puede reducir el lado izquierdo de la desigualdad y, por ello, debe siempre ofrecer una solución factible. La solución factible que se encuentra redondeando hacia los números inferiores es $X_1 = 2$ y $X_2 = 3$, con un valor de 13 para la función objetivo. El valor de esta solución factible da una cota inferior sobre el valor de la solución óptima del programa lineal en enteros, puesto que se sabe que el valor de la solución óptima debe arrojar un valor mayor que o igual al valor de cualquier solución factible. Por ello, puede establecer una cota (límite) inferior de 13. Enseguida se muestra el primer nodo del árbol de solución de ramificación y acotamiento, en donde sabemos que CS se refiere a la cota superior y CI se refiere a la cota inferior.



Se sabe ahora que el valor de la solución óptima debe estar entre el limite superior 14,66 y el inferior de 13. Aunque se haya encontrado una solución factible con valor de 13, debe continuarse para ver si es posible encontrar una solución mejor Aquí es donde entra en juego la parte de ramificación del procedimiento del tipo de ramificación y acotamiento.

Se divide en dos subconjuntos el conjunto de soluciones factibles para la Relajación PL. Se crean estos subconjuntos eligiendo la variable entera que esté mas lejos de serlo, para ramificar sobre ella; por tanto, se elige X_1, que tiene un valor de 2,44. En la solución óptima en enteros, X_1 debe ser entero, por lo que se ve que, X_1 será menor que o igual a 2, o bien X_1 será mayor que o igual a 3. Por ello se establecen dos ramas y dos nodos descendentes para el árbol de la solución de ramificación y acotamiento. Un nodo descendente corresponde al subconjunto de solución con

$X_1 <= 2$; el otro, al subconjunto de solución con $X_1 >= 3$. Como X_1, debe ser entero, la solución óptima debe estar contenida en alguno de estos dos subconjuntos.

Se crea la primera rama añadiendo la restricción $X_1 <= 2$ al problema inicial. A este nodo se le denomina nodo 2. De modo que se resuelve la Relajación PL en el nodo 2.

Relajación PL en el nodo 2:

$$\begin{aligned}
\text{Máx} \quad & Z = 2X_1 + 3X_2 \\
\text{s.a.} \quad & 195X_1 + 273X_2 \le 1.365 \\
& 4X_1 + 40X_2 \le 140 \\
& X_1 \le 4 \\
& X_1 \le 2 \\
& \text{y } X_1 \text{ y } X_2 \ge 0
\end{aligned}$$

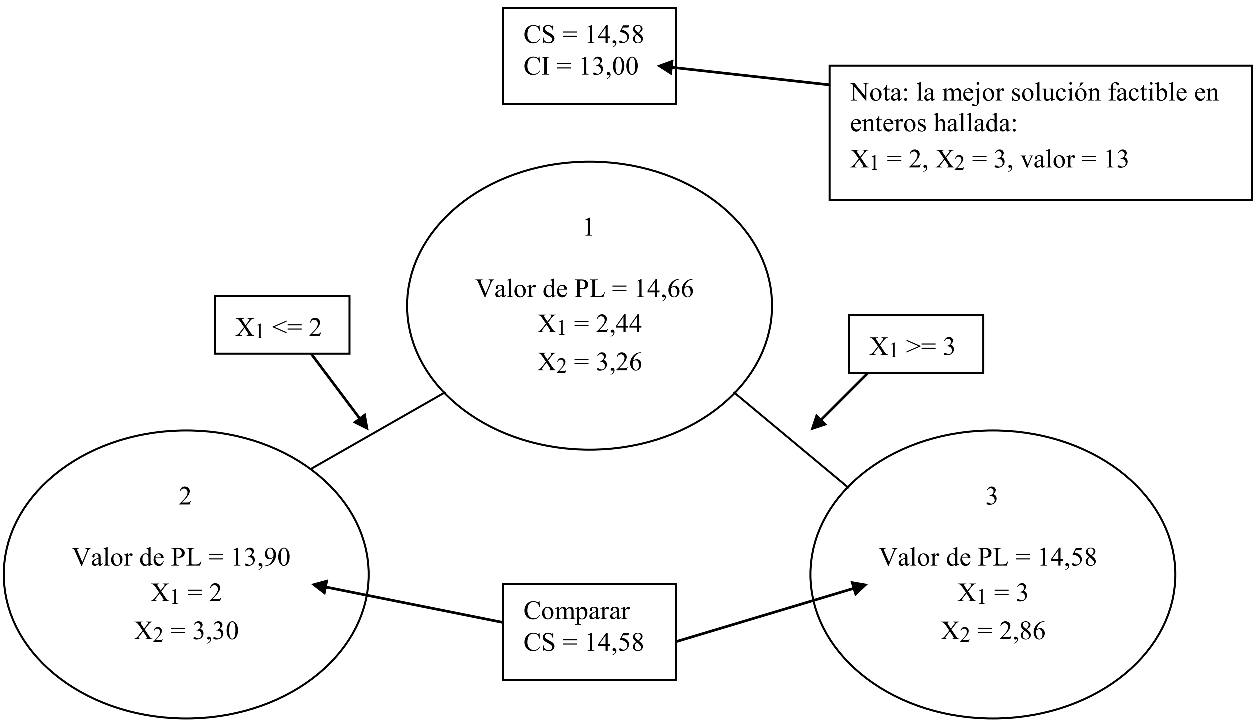
Se observa que la restricción que se añade (X_1 <= 2) hace que la restricción X_1 <= 4 sea redundante. Esto es una simple coincidencia y no siempre sucede. La solución a este programa lineal da como resultado X_1 = 2, X_2 = 3,30, con un valor de 13,90 para la función objetivo.

La segunda rama que parte del nodo 1 se crea añadiendo la restricción X_1 >= 3 a la Relajación PL para el problema inicial. Por ello, se resuelve la siguiente Relajación PL en el nodo 3.

Relajación PL en el nodo 3:

$$\begin{aligned}
\text{Máx} \quad & Z = 2X_1 + 3X_2 \\
\text{s.a} \quad & 195X_1 + 273X_2 \le 1.365 \\
& 4X_1 + 40X_2 \le 140 \\
& X_1 \le 4 \\
& X_1 \ge 3 \\
& \text{y } X_1 \text{ y } X_2 \ge 0
\end{aligned}$$

La solución a este programa lineal da como resultado X_1 = 3 y X_2 = 2,86 con un valor de 14,58.



Se sabe, de la propiedad 1, que el valor de la Relajación PL en el nodo 2 es una cota superior (CS) para todas las soluciones que tienen $X_1 <= 2$, y el valor de la Relajación PL en el nodo 3 es una cota superior para todas las soluciones con $X_1 >= 3$.

Como estos dos subconjuntos incluyen todas las soluciones para problema dado, puede ahora calcularse una nueva cota superior que es el valor máximo de la Relajación PL para el nodo 2 (13,90) y el valor de la Relajación PL para el nodo 3 (14,58). Por ello, la nueva cota superior para el valor de la solución del problema de programación lineal en enteros es 14,58. En general, se vuelve a calcular la cota superior cada vez que se terminan las operaciones sobre dos ramas que parten de un nodo.

En este momento vuelve a calcularse la cota inferior (Cl). El nuevo valor para la cota inferior es el máximo de todas las soluciones factibles en enteros que se han encontrado hasta el momento. Como las soluciones de las Relajaciones PL en los nodos 2 y 3 no condujeron a soluciones factibles en enteros, no se modifica la cota inferior 13 que se estableció en el nodo 1. En este punto del procedimiento de solución de ramificación y acotamiento se tiene CS = 14,58 y Cl = 13,00. El Árbol parcial actual con la solución de ramificación y acotamiento se muestra en la Fig. anterior.

Se ha establecido (en el nodo 2) que 13,90 es una cota superior para todas las soluciones con $X_1 <= 2$ y (en el nodo 3) que 14,58 es una cota superior para todas las soluciones cono $X_1 >= 3$. La propiedad 2 que se plantea enseguida muestra la forma en la que se pueden utilizar estos resultados al continuar con el procedimiento de ramificación y acotamiento.

***Propiedad 2*: El valor de la Relajación en cada nodo de un problema de maximización es una cota superior para el valor de la Relajación en cualquier nodo descendente.**

Utilizando esta propiedad se observa que si se fuera a ramificar a partir del nodo 2, no se podría encontrar ninguna solución que tuviera un valor superior a 13,90. Si se fuera a ramificar a partir del. nodo 3, no podría encontrarse ninguna solución que tuviera un valor superior a 14,58. Como, en potencia, el nodo 3 podría conducir a una mejor solución, se le elige para ramificar a partir de él, y no a partir del nodo 2. En general, siempre se elige, para continuar la ramificación, el nodo que tiene mayor valor en la Relajación PL. Como X_2 es la única variable que tiene un valor fraccionario en el nodo 3, se la elige para ramificar sobre ella. Así, se crean dos ramas a partir del nodo 3: una con $X_2 <= 2$ y otra con $X_2 >= 3$. Se establecen, entonces, dos nodos descendentes resolviendo las siguientes Relajaciones PL en los nodos 4 y 5.

Relajación PL en el nodo 4:

$$
\begin{array}{lrcl}
\text{Máx} & Z = 2X_1 + 3X_2 & & \\
\text{s.a.} & 195X_1 + 273X_2 & <= & 1.365 \\
 & 4X_1 + 40X_2 & <= & 140 \\
 & X_1 & <= & 4 \\
 & X_1 & >= & 3 \\
 & X_2 & <= & 2 \\
 & y\ X_1\ y\ X_2 & >= & 0
\end{array}
$$

Relajación PL en el nodo 5:

$$
\begin{aligned}
\text{Máx} \quad & Z = 2X_1 + 3X_2 \\
\text{s.a.} \quad & \\
& 195X_1 + 273X_2 <= 1.365 \\
& 4X_1 + 40X_2 <= 140 \\
& X_1 <= 4 \\
& X_1 >= 3 \\
& X_2 >= 3 \\
& \text{y } X_1 \text{ y } X_2 >= 0
\end{aligned}
$$

Obsérvese que como se está ramificando a partir del nodo 3, se requiere que $X_1 >= 3$ en ambas Relajaciones PL.

Después de resolver estos problemas de programación lineal, puede construirse el árbol de soluciones con el método de relajación y acotamiento que se muestra en la próxima Fig.

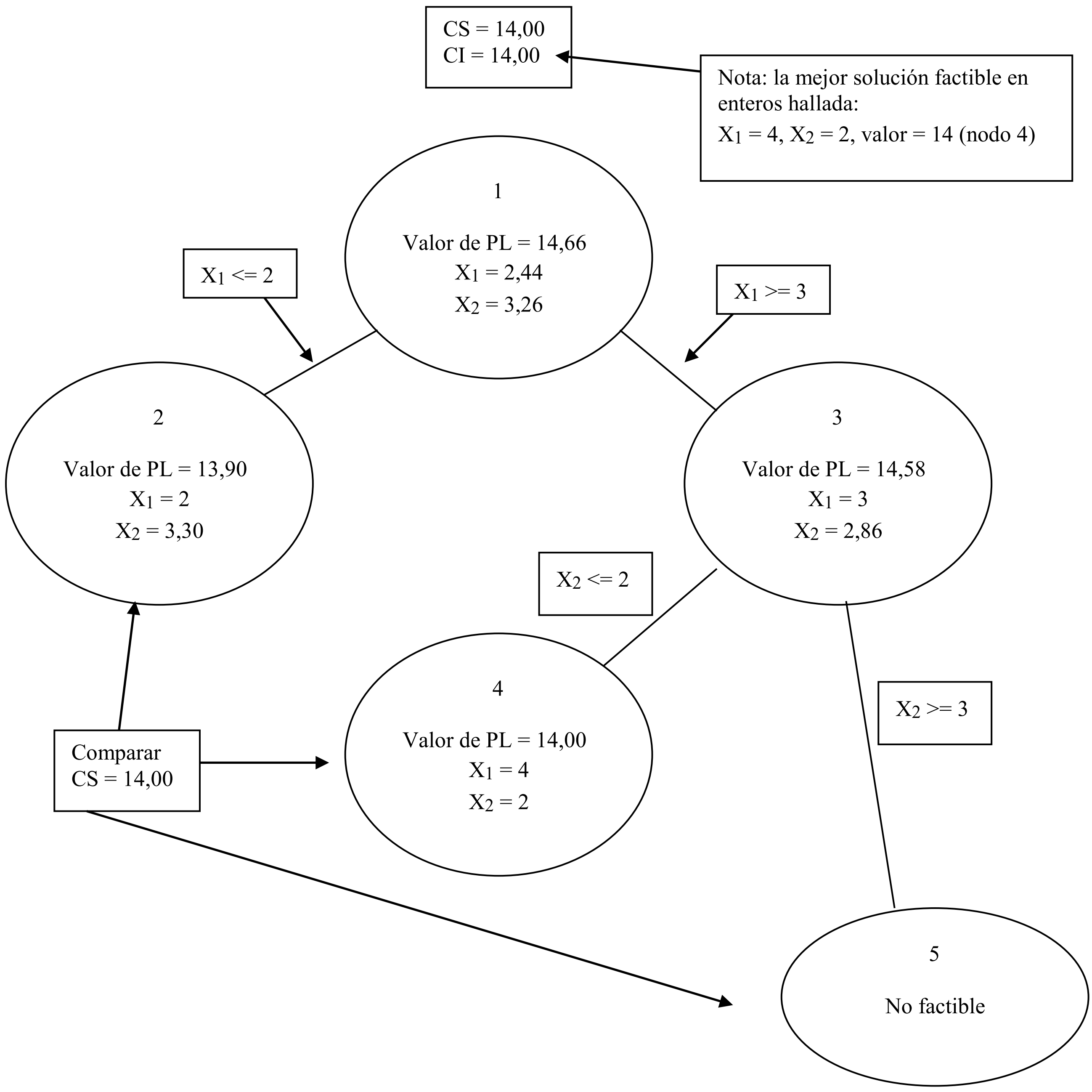
Obsérvese que, en el nodo 4, que corresponde a la adición de la restricción $X_2 <= 2$ se encuentra una solución factible en enteros. Sin embargo, se halla que en el nodo 5, después de añadir la restricción $X_2 >= 3$ no existe solución factible.

En este punto se ha encontrado una solución factible ($X_1 = 4$, $X_2 = 2$) con un valor de 14,00 (véase el nodo 4). Por tanto, se modifica la cota inferior y se convierte en CI = 14,00. De CS = 14, se sabe que la solución óptima no puede arrojar un valor mayor de 14,00. Por tanto, la solución $X_1 = 4$, $X_2 = 2$, con un valor de 14, es la óptima para el problema dado. Se puede ahora plantear la regla para detener el procedimiento de solución de ramificación y acotamiento.

Regla para detener el procedimiento

Cuando CS = CI, ya se ha encontrado la solución óptima. Es la solución factible que tiene el valor igual a la CI.

<u>Arbol de solución completo de Ramificación y Acotamiento</u>



Se ha visto ya la forma en que se aplica el procedimiento de solución de ramificación y acotamiento para resolver el problema totalmente en enteros. En la próxima página se observa un diagrama de flujo del procedimiento general de resolución en enteros.

Extensión a programas lineales en enteros y mixtos

Una gran ventaja del procedimiento de solución de ramificación y acotamiento para la programación en enteros es que resulta aplicable tanto para programas lineales en enteros y mixtos como para programas totalmente en enteros. Para ver la forma en que puede aplicarse el procedimiento de solución de ramificación y acotamiento a un programa lineal en enteros y mixto, se vuelve al problema dado y se supone que no se exige que X_2 sea entero. Este sería el caso si se pudieran adquirir acciones fraccionarias según los edificios de apartamentos. En este caso, la Relajación PL resuelta en el nodo 1 sería exactamente la misma, y arrojaría un valor de 14,66 como cota superior. Pero la cota inferior se encontraría redondeando sólo X_1 hacia el entero inferior. Por ello, el valor de la cota inferior en el nodo 1 seria 13,78, dada por la solución factible entera mixta $X_1 = 2$, $X_2 = 3,26$. Se muestra esto enseguida:

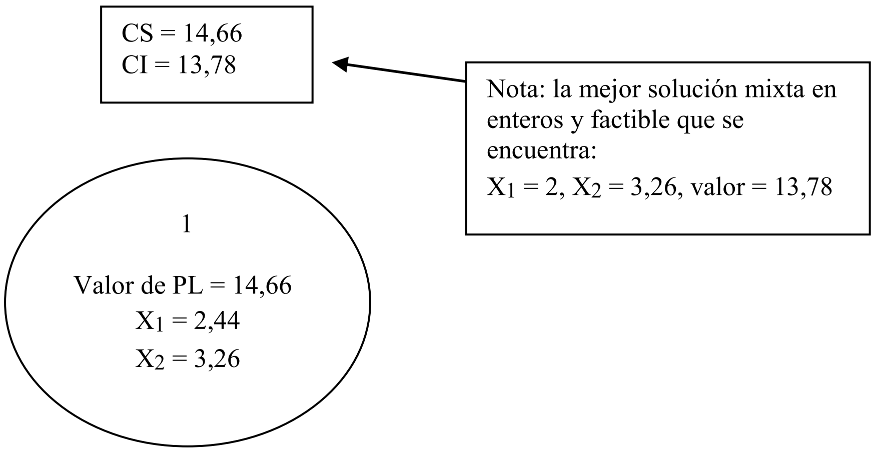
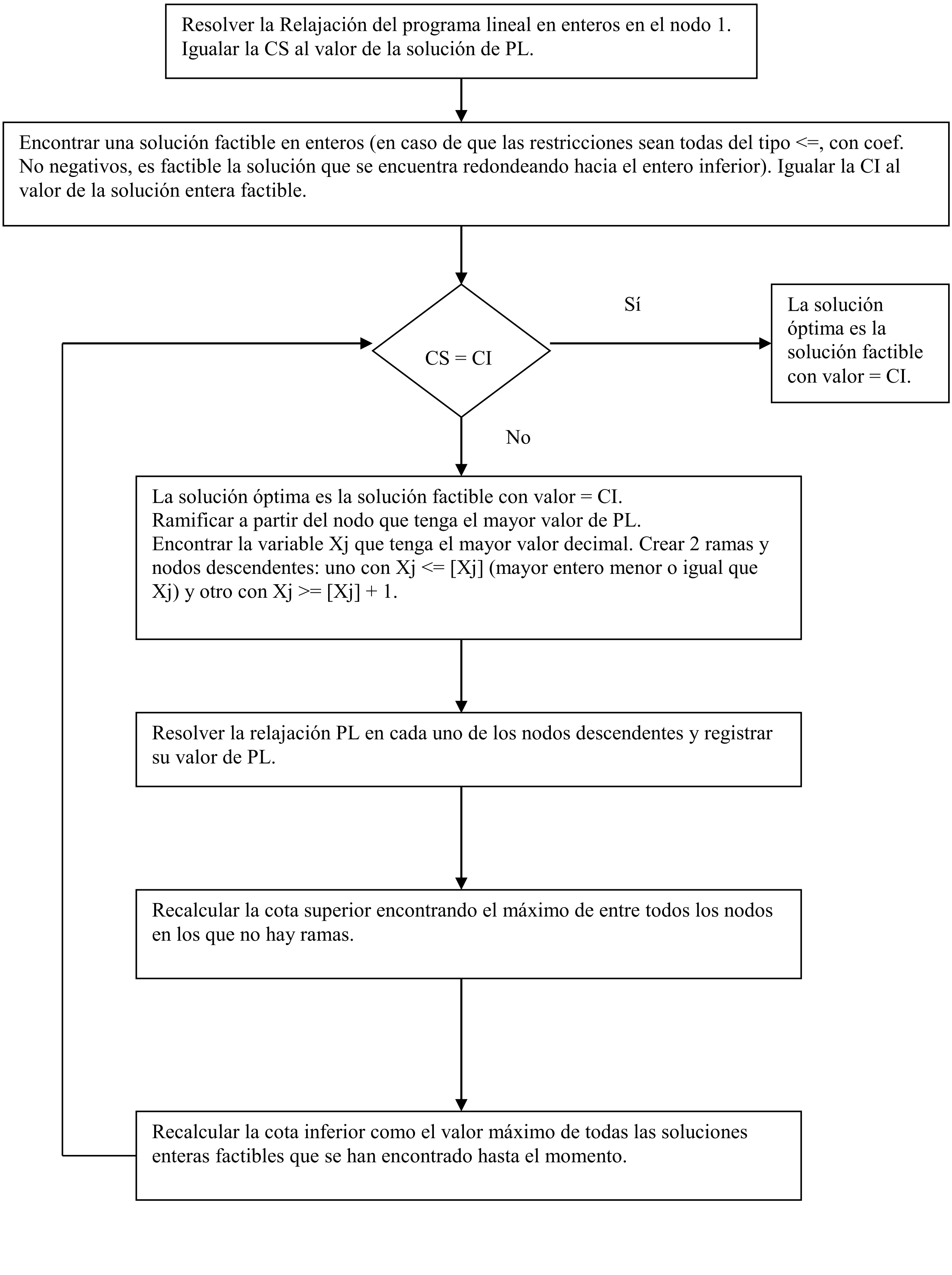
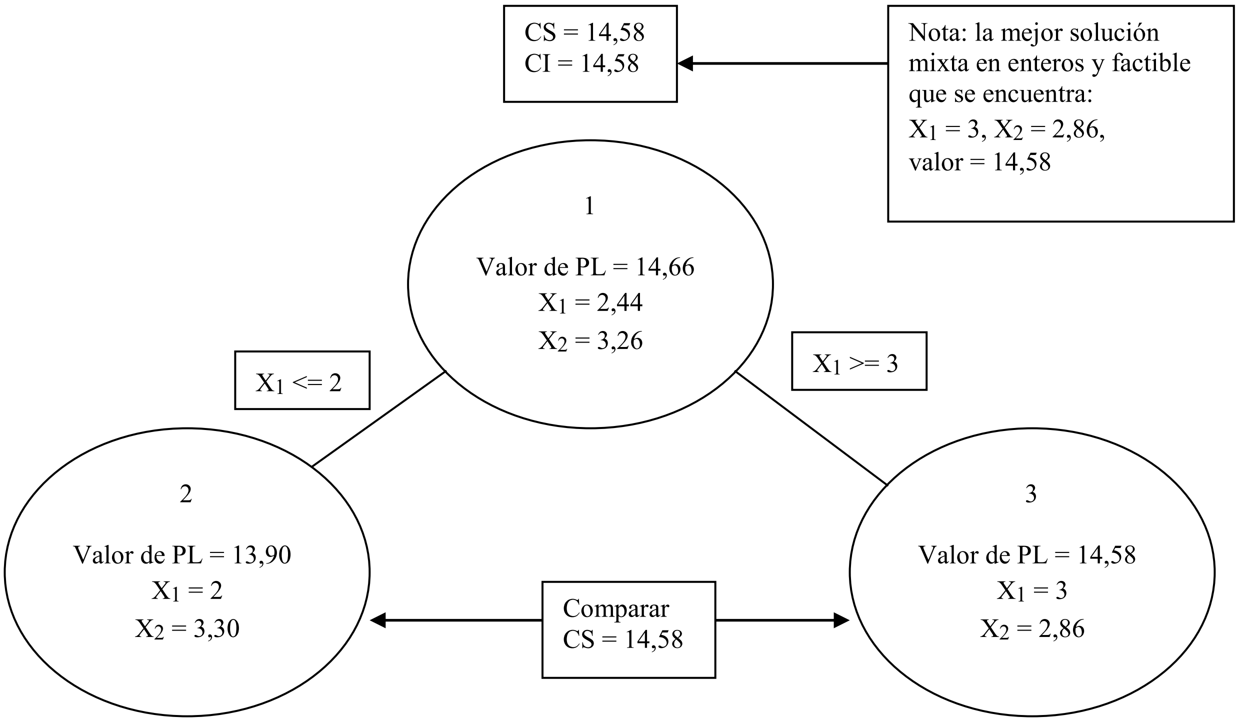


Diagrama de flujo del método de ramificación y acotamiento para el programa lineal totalmente en enteros



Para ramificar, se reduce ahora la consideración únicamente a las variables que se requiere que sean enteras. Elegir la variable entera con la mayor parte fraccionaria conduce de nuevo a ramificar sobre X_1; se requiere que $X_1 <= 2$ en una rama y que $X_l >= 3$ en la otra. Por ello, las Relajaciones PL que se resuelven en los nodos 2 y 3 serían las mismas que antes (Fig. próxima). Sin embargo, obsérvese que existe una solución entera mixta factible cuando la solución de programación lineal en este nodo produce una X_1 entera. Por ello, las soluciones en los nodos 2 y 3 son factibles para el problema lineal en enteros mixto. Se puede establecer una nueva cota inferior de Cl = 14,58 comparando los valores de todas las soluciones factibles enteras mixtas que se han encontrado. Puede establecerse una nueva cota superior de CS = 14,58 comparando los valores de las Relajaciones PL en los nodos 2 y 3. Como la cota superior y la inferior son iguales, ya se ha encontrado la solución óptima para el problema de la Compañía, en donde sólo se requiere que X_1 sea entero.

Está dada por $X_1 = 3$ y $X_2 = 2,86$, con un valor de 14,88 para la función objetivo.



Una aplicación de ubicación de bancos

El departamento de planeación a largo plazo, de una Compañía bancaria está considerando la posibilidad de ampliar sus operaciones hacia una región de 20 condados. En la actualidad, la citada compañía no tiene ninguna oficina principal de negocios en ninguno de esos 20 condados que se consideran. De acuerdo con las leyes bancarias de la región, si una empresa bancaria establece una oficina principal de negocios (OPN), en cualquier condado entonces puede establecer sucursales del banco y en cualquier otro adyacente. Sin embargo, para establecer una nueva oficina principal, la Compañía debe obtener aprobación para un banco nuevo, proveniente de Organismo del Estado, o adquirir un banco ya existente.

Condados que existen en la región

Condados en consideración	Condados adyacentes (por número)
Condado 1	2, 12, 16
Condado 2	1, 3, 12
Condado 3	2, 4, 9, 10, 12, 13
Condado 4	3, 5, 7, 9
Condado 5	4, 6, 7
Condado 6	5, 7, 17
Condado 7	4, 5, 6, 8, 9, 17, 18
Condado 8	7, 9, 10, 11, 18
Condado 9	3, 4, 7, 8, 10
Condado 10	3, 8, 9, 11, 12, 13
Condado 11	8, 10, 13, 14, 15, 18, 19, 20
Condado 12	1, 2, 3, 10, 13, 16
Condado 13	3, 10, 11, 12, 15, 16
Condado 14	11, 15, 20
Condado 15	11, 13, 14, 16
Condado 16	1, 12, 13, 15
Condado 17	6, 7, 18
Condado 18	7, 8, 11, 17, 19
Condado 19	11, 18, 20
Condado 20	11, 14, 19

En la tabla se ofrece una lista de los 20 condados de la región, junto con los condados adyacentes. Se observa en la tabla que el condado 1 es adyacente a los condados 2, 12 y 16; el condado 2 es adyacente a los condados 1, 3 y 12 y así sucesivamente. Como un paso inicial en la planeación, a la Compañía le gustaría determinar el número mínimo de OPN necesario para poder tener operaciones en la región completa de 20 condados. Puede utilizarse un modelo de programación según enteros de tipo 0-1 para resolver este problema.

Se definen las siguientes variables:

X_i = 1 Si se establece que OPN en el condado i; 0, si no es así.

Con objeto de minimizar el número de OPN que se necesita, la función objetivo puede escribirse como

$$\text{mín. } X_1 + X_2 + \ldots\ldots + X_{20}$$

Con el fin de ubicar sucursales bancarias en un condado, tal región debe tener una OPN, o ser adyacente a otro que tenga una OPN. Por ello, habrá una restricción para cada condado. Por ejemplo, la restricción para el condado Ashtabula 1 podría ser:

$$X_1 + X_2 + X_{12} + X_{16} \qquad >= 1$$

Obsérvese que el cumplimiento de esta restricción asegura que se ubica una OPN en el condado 1 o en alguno o más de los adyacentes. Por tanto, esta restricción garantiza que la Compañía estará en posibilidades de ubicar sucursales bancarias en el condado 1.

Se muestra enseguida el planteamiento completo del problema de ubicación de bancos:

$$\begin{aligned}
&\text{mín. } X_1 + X_2 + \ldots\ldots + X_{20} \\
&\text{s.a.} \\
&\quad X_1 + X_2 + X_{12} + X_{16} \geq 1 \\
&\quad X_1 + X_2 + X_3 + X_{12} \geq 1 \\
&\quad \ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\quad X_{11} + X_{14} + X_{19} + X_{20} \geq 1 \\
&\\
&\quad X_i = 0, 1 \qquad i = 1, 2, \ldots\ldots, 20
\end{aligned}$$

Solución

FO = 3 $\quad$ **$X_7 = 1$, $X_{11} = 1$, $X_{12} = 1$**

La solución óptima indica que se abran oficinas principales de negocios en los condados 7, 11 y 12. Teniendo OPN en estos tres condados, la Compañía puede abrir sucursales bancarias en la totalidad de los 20 condados. Todas las demás variables de decisión tienen valor cero en el óptimo, lo cual indica que no se deben abrir OPN en estos condados.

TRANSPORTE O DISTRIBUCION

Introducción

Cuando hablamos de Programación Lineal hicimos hincapié en su amplia aplicabilidad.

Continuaremos ampliando nuestros horizontes en este capítulo, analizando algunos tipos particularmente importantes de problemas.

Estos tipos especiales comparten varias características claves.

La 1ra. es que todas ellas surgen con frecuencia en la práctica, en una gran variedad de contextos. También tienden a requerir un gran número de restricciones y variables, de modo que una aplicación directa en una computadora del método Simplex puede ser muy cara o incluso prohibitiva, desde el punto de vista de la computación. Por fortuna, otra característica es que la mayor parte de los coeficientes aij en las restricciones son cero y los relativamente pocos coeficientes diferentes de cero aparecen siguiendo un patrón distintivo. Como resultado, ha sido posible desarrollar versiones especiales simplificadas del método Simplex que logran dramáticos ahorros en los cálculos, explotando esta estructura especial del problema. Por lo tanto, tiene importancia familiarizarse suficientemente con estos tipos especiales de problemas, de modo que puedan reconocerse cuando se presenten y aplicar el procedimiento apropiado de cálculo.

Probablemente el tipo especial más importante de problemas de **PL** es el llamado ***problema de transporte*** y se presentará su procedimiento especial de solución (simplificación del método Simplex que puede obtenerse explotando la estructura especial de problema).

Este se interesa en la distribución de cualquier artículo, desde cualquier grupo de centros de suministros (fuentes), hacia cualquier grupo de centros receptores (destinos), de modo que minimicen los costos totales de distribución.

Modelo matemático.

Suponemos que existen "m" fuentes y "n" destinos. Sea:

a_i *: nro. de unidades disponibles por la fuente i (i= 1, 2, .., m)*

b_j *: nro. de unidades demandadas por el destino j (j= 1, 2, .., n)*

c_{ij} *: costo de transporte por unidad asignado a la ruta ij.*

El objetivo es determinar el nro. de unidades transportadas desde cada fuente i a cada destino j, tal que el costo total de transporte sea mínimo.

Supongamos que se tienen 3 fábricas (m=3) que deben abastecer a 2 mercados (n=2).

Fuentes Destinos

(Disponibilidad) (Demanda)

a_1 1 X_{11}

X_{12} 1 b_1

a_2 2 X_{21}

X_{31} X_{22} 2 b_2

a_3 3 X_{32}

El problema se puede presentar por medio de una tabla:

		Destinos$_{(j)}$		
		D_1	D_2	Suministros
Fuentes$_{(i)}$	O_1	C_{11} **X_{11}**	C_{12} **X_{12}**	a_1
	O_2	C_{21} **X_{21}**	C_{22} **X_{22}**	a_2
	O_3	C_{31} **X_{31}**	C_{32} **X_{32}**	a_3
Demandas		b_1	b_2	

siendo X_{ij} el número de unidades transportadas desde "i" hasta "j".

El **modelo matemático** que representa a este problema es:

mín $Z = C_{11} X_{11} + C_{12} X_{12} + \dots\dots\dots + C_{32} X_{32}$

s.a.

$$
\begin{aligned}
X_{11} + X_{21} + X_{31} &\geq b_1 \\
X_{12} + X_{22} + X_{32} &\geq b_2 \\
X_{11} + X_{12} &\leq a_1 \\
X_{21} + X_{22} &\leq a_2 \\
X_{31} + X_{32} &\leq a_3 \\
X_{ij} \geq 0, \ \forall_i, \ \forall_j
\end{aligned}
$$

En general, un modelo de transporte es como sigue:

$$\textbf{mín } \mathbf{Z} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} C_{ij} X_{ij}$$

Balance del Modelo de Transporte

La definición general del modelo requiere que el nro. total de unidades requeridas por los destinos sea igual al nro. total de unidades suministradas por las fuentes.

$$\sum_{j=1}^{n} b_j = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} X_{ij}\right) = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} X_{ij}\right) = \sum_{i=1}^{m} a_i$$

En la práctica no siempre se cumple esta limitación, pero debe imponerse para desarrollar la técnica de transporte. El balance se logra utilizando fuentes o destinos ficticios de la siguiente manera:

Si la **demanda excede el suministro**, se utilizará una ***"fuente ficticia"*** que suministre la cantidad faltante:

$$\mathbf{af} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i$$

Si el **suministro excede la demanda**, se utilizará un ***"destino ficticio"*** que consuma la cantidad sobrante:

$$\mathbf{bf} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$$

Un suministro artificial representa una demanda insatisfecha, es decir, un destino al cual se le ha asignado X_{ij} unidades desde un suministro artificial o ficticio; en realidad es un destino cuya demanda ha sido insatisfecha en X_{ij} unidades.

Por ejemplo:

Fuentes (Suministros)		Destinos (Demandas)	
		1	(5)
(10)	1	2	(10)
(20)	2	3	(5)
5	f	4	(15)

Suministro total = 10 + 20 = **30**

Demanda total = 5 + 10 + 5 + 15 = **35** ====> Se requiere una ***fuente ficticia*** para suministrar 35 - 30 = **5** unidades.

Una posible manera de distribuir las unidades es:

Fuentes (Suministros)		Destinos (Demandas)	
		1	(5)
(10)	1	2	(10)
(20)	2	3	(5)
5	f	4	(15)

Como el destino 4 adquiere 5 unidades de la fuente ficticia, significa que **su demanda (15 unidades) queda insatisfecha en 5 unidades.**

Por lo tanto, para asignar los costos a los "caminos ficticios", se tienen 2 alternativas:

1) **Si no interesa** que destino quede sin satisfacer, se asignará a todos los caminos ficticios costos iguales (se aconseja usar costos iguales a cero).

2) **Si interesa** asegurar que la demanda de un determinado destino quede satisfecha, el costo asignado al camino ficticio correspondiente a ese destino debe ser muy alto respecto de los demás, en caso contrario debe ser muy bajo.

Un criterio similar debe usarse para el caso de destinos ficticios.

Técnicas de resolución

Supóngase una empresa que posee 4 fábricas situadas en distintos lugares del país (O_1, O_2, O_3 y O_4). La producción de cada una de éstas fábricas debe ser enviada a 3 destinos (D_1, D_2 y D_3), o centros principales de distribución.

Los costos de transporte se indican en el siguiente cuadro:

O_i \ D_j	D_1	D_2	D_3	Disponibilidades
O_1	6	3	6	25
O_2	5	9	7	25
O_3	4	10	2	30
O_4	8	5	4	20
				100
Requerimiento	15	35	50	100

Esta matriz indica que para transportar 1 unidad del producto desde el origen 1 (O_1) al destino 1 (D_1) por ejemplo, se requiere un gasto de 6 unidades monetarias. La disponibilidad de O_1 es 25 y la demanda ó requerimiento de D_1 es 15.

Se pide ***minimizar los costos de transporte***, estableciendo un programa de trabajo o de envíos desde los orígenes a los diferentes destinos.

El **modelo matemático** que representa a este problema es:

$$\min\ Z = 6\,X_{11} + 3\,X_{12} + \dots\dots\dots + 4\,X_{43}$$

s.a.

$$X_{11} + X_{21} + X_{31} + X_{41} >= 15$$
$$X_{12} + X_{22} + X_{32} + X_{42} >= 35$$
$$X_{13} + X_{23} + X_{33} + X_{43} >= 50$$

$$X_{11} + X_{12} + X_{13} <= 25$$
$$X_{21} + X_{22} + X_{23} <= 25$$
$$X_{31} + X_{32} + X_{33} <= 30$$
$$X_{41} + X_{42} + X_{43} <= 20$$
$$X_{ij} >= 0, \quad \forall\, i, \quad \forall\, j$$

La solución de este problema se obtendrá con un utilitario de computación, en el gabinete del Instituto.

Resolución por el método del extremo Noroeste

Este método **comienza asignando la mayor cantidad posible a la variable X_{11} (en el rincón NO del tableau, según la oferta y demanda correspondientes).** La columna (o fila) que es satisfecha debe tacharse, indicando que las restantes variables de la columna (o fila) tienen valor nulo. Si una columna y una fila son satisfechas simultáneamente, sólo una de ellas se deberá tachar (esto garantiza poder determinar variables básicas con valor nulo, es decir soluciones degeneradas).

Luego, el procedimiento continúa asignando la mayor cantidad posible al próximo elemento no tachado de la columna (fila) siguiente. El algoritmo, sin ningún fundamento matemático, **finaliza cuando queda sin tachar sólo una fila (columna).**

Para nuestro ejemplo:

	D_1	D_2	D_3
O_1	6	3	6
O_2	5	9	7
O_3	4	10	2
O_4	8	5	4

1) X_{11} = 15. Tacho columna 1. En la fila 1 quedan 10 unidades.

2) X_{12} = 10. Tacho fila 1. En la columna 2 quedan 25 unidades.

3) X_{22} = 25. Tacho columna 2 y asigno X_{23} = 0, tacho fila 2.

4) X_{32} = 30, tacho fila 3, X_{43} = 20, tacho fila 4, de modo que finalizo el procedimiento (quedó sin tachar la columna 3).

El costo de transporte asociado a esta solución básica inicial es:

Z = 6 x 15 + 3 x 10 + 9 x 25 + 7 x 0 + 2 x 30 + 4 x 20
Z = 485

La **regla del NO** siempre brinda el número exacto de variables básicas iniciales (m+n-1).
La definición general del modelo de transporte requiere que:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

Este requerimiento resulta en una **ecuación dependiente** de modo que el modelo sólo tiene *m+n-1 ecuaciones independientes.*
Por lo tanto, una ***solución básica factible inicial deberá incluir m+n-1 variables básicas.***

Resolución por el método del mínimo costo

El método del rincón NO no intenta, bajo ningún punto de vista, localizar una buena solución inicial empleando rutas o caminos económicos.

El método del mínimo costo trata de mejorar, en parte, este inconveniente.

Procedimiento:

-- Asignar la mayor cantidad posible a la variable con menor costo unitario. Si hay empate elija en forma arbitraria.
-- Tache la columna o la fila satisfecha. Al igual que en el método anterior, sólo una debe ser tachada en caso de que se satisfagan simultáneamente.
-- Ajustar las demandas y los suministros de los elementos no tachados y asignar la mayor cantidad posible a la variable no tachada que posee menor costo unitario.
-- El procedimiento finaliza cuando queda exactamente una fila o columna sin tachar.

Para nuestro caso

	D_1	D_2	D_3
O_1	6	3	6
O_2	5	9	7
O_3	4	10	2
O_4	8	5	4

1) Variables con mínimo costo; $X_{33} = 30$.
2) Satisface F_3, tacho F_3.
3) Corrijo Disponibilidad$_3 = 0$ y Demanda$_3 = 20$.
4) Variable con mínimo costo $X_{12} = 25$, tacho F_1.
5) Corrijo $D_{i1} = 0$ y $D_{e2} = 10$.
6) Variable con mínimo costo $X_{43} = 20$, satisface C_3 y F_4,, tacho F_4.
7) Corrijo $Di_4 = 0$ y $D_{e3} = 0$, asigno $X_{23} = 0$, tacho C_3.
8) Variable con mínimo costo $X_{21} = 15$, tacho C_1.
9) Asigno $X_{22} = 10$ y tacho F_2,
de modo que finalizó el procedimiento (quedó sin tachar la columna 2).

costo de transporte asociado a esta solución básica inicial es:

$$\mathbf{Z = 3 \times 25 + 5 \times 15 + 9 \times 10 + 0 \times 7 + 2 \times 30 + 4 \times 20}$$

$$\mathbf{Z = 380}$$

Se ha obtenido, por este método una solución mejor que por el anterior (sin ningún criterio lógico). Pero esto no siempre ocurre.

Luego de encontrada una solución de inicio se debe proceder a optimizarla. Para ello veremos el método de los multiplicadores o MODI, que permite determinar, además, si se alcanzó o no el óptimo.

El mecanismo del MODI trabaja en forma similar al método SIMPLEX en el siguiente sentido:

-- Elige desde el punto de vista económico, cuál es el vector (ruta o camino) que entra para mejorar la solución.
-- Determina el vector (ruta o camino) que sale.
-- Por un sistema de signos, advierte en que momento se ha alcanzado la solución óptima.

En el método Simplex cada vez que se introduce un nuevo vector (columna que entra), se establece una nueva base del sistema, y todas las operaciones subsiguientes tienden a determinar las coordenadas de los otros vectores en función de la nueva base.

En el método MODI, la introducción de un nuevo vector (casilla que entra), produce una serie de cambios en las columnas y en las filas de la matriz de acuerdo con un cierto circuito, ruta o camino.
La determinación de los nuevos valores en función de la nueva casilla es muy sencilla, dado que aquí sólo se trata de sumar y de restar números.

Vamos a desarrollar este nuevo método sobre la base de una matriz básica inicial resuelta con una combinación de los 2 métodos anteriores y que se expone en el cuadro:

	D_1	D_2	D_3
O_1	6 **15**	3 **10**	
O_2		9 **5**	7 **20**
O_3			2 **30**
O_4		5 **20**	

Se ha obtenido una primera solución o base del sistema, en la cual se ha indicado en un recuadro en el ángulo superior derecho de cada casilla, el costo.
El costo total de transporte será entonces:

Z = 6x15 + 3x10 + 9x5 + 7x20 + 2x30 + 5x20

Z = 465 unidades monetarias.

Esta es una ***solución del problema***, pero lo que no sabemos es ***si es la mejor.*** Para ello habría que analizar qué es lo que sucede con un nuevo ordenamiento, es decir estudiar qué pasa si, por ejemplo, desde el origen 2 se envía mercadería al destino 1 (casilla O_2 D_1). Por lo tanto, hay que investigar las casillas usadas o rutas no usadas y evaluar el costo.

Aquí hay que considerar un hecho fundamental que es el siguiente: cada casilla o ruta tiene realmente dos costos. En la casilla que se ha tomado como ejemplo éstos serán:

- Costo Directo (CD_{21}), que es el costo de transportar una unidad del producto desde el origen O_2 al destino D_1, y que es de 5 u.m.

- Costo Indirecto (CI_{21}), que es el costo de tener esa unidad en el destino 1, desde el origen 2, pero a través de transferencias desde otros destinos y orígenes, es decir usando una ruta o camino indirecto.

Del cuadro anterior se desprende que es posible colocar una unidad en D_1, desplazándola de la casilla O_2D_2. Para compensar la pérdida de esa unidad en la columna destino D_2, se le debe sumar una unidad a la casilla O_1D_2, y para no alterar la fila del origen 1, es necesario restar una unidad de O_1D_1. Como se agregó una unidad a O_2D_1, la columna del destino 1 no necesita nuevas modificaciones.

Se verifica que tanto las columnas de requerimientos como las filas de disponibilidades no han cambiado, aunque sí se ha variado la composición de los envíos. Es importante comprobar que los cambios han tenido lugar siguiendo un circuito que, excepto el punto analizado, tienen todos sus vértices en *casillas que están ocupadas* o lo que es lo mismo, ya son solución.

Hay que destacar que si el número de Variables Básicas es igual a m+n-1, siempre hay un sólo circuito, y sólo uno.

Siguiendo con el ejemplo propuesto, veamos ahora a qué costo se ha logrado desplazar una unidad desde el origen O_2 al destino D_1.

Cuando se transfirió una unidad de O_2D_2 a O_2D_1, se ahorraron 9 u.m., ya que ese es el costo de transportar dicha unidad de O_2 a D_2.

Pero ahora se deben aumentar en una unidad las existencias en O_1D_2 que suman entonces 11, con un mayor costo de 3 u.m.; pero ello implica a su vez un ahorro de 6 u.m., ya que se envía una unidad menos desde O_1 a D_1, quedando aquí sólo 14 unidades.

Quiere decir entonces, que todos estos movimientos han hecho que el costo de tener una unidad en la casilla O_2D_1 sea de: $9 - 3 + 6 = 12$ u.m.

Por lo tanto éste sería el *costo indirecto* de colocar una unidad en O_2D_1 en forma *indirecta.*

Pero sabemos que si en lugar de hacer este camino, la transferencia se efectúa en forma directa (desde O_2 a D_1), el *costo directo* es el dado en el cuadro, o sea 5 u.m.

En consecuencia, la diferencia entre ambos costos es: $CI_{ij} - CD_{ij} = 12 - 5 = 7$ u.m.

Por lo tanto, si desde el origen 2 se envía una unidad al destino 1, el ahorro será de 7 u.m., en comparación con enviar esa misma unidad en forma indirecta.

Se plantea ahora otro interrogante: conociendo que el envío de una unidad en forma directa desde O_2 a D_1 produce un ahorro de 7 u.m. ¿Cuántas unidades deben ser entonces transportadas?

Si se observa el cuadro anterior es evidente que, como máximo, se pueden transportar 5 unidades. ¿Por qué?

Porque de acuerdo con el sistema de compensación analizado, dentro del circuito, cualquier cantidad *mayor que 5*, daría un valor negativo.

Por ejemplo, supóngase que se transfieran 15 unidades. Los valores de las cantidades a transportar en cada ruta quedan:

$$O_1D_1 = 15 - 15 = 0$$

$$O_1D_2 = 15 + 10 = 25$$

$$O_2D_2 = 5 - 15 = -10$$

Evidentemente no se pueden transportar 15 unidades desde un origen que sólo tiene 5 (recordar las condiciones de no negatividad).

Tampoco es posible transferir las 10 unidades de la casilla O_1D_2 porque entonces quedaría:

$$O_1D_2 = 10 - 10 = 0$$

$$O_2D_2 = 5 + 10 = 15$$

$O_2D_1 = 0 - 10 = -10$ Otra vez imposible.

Queda claro entonces que se deben transferir no más de 5 unidades. ¿Cómo será entonces la nueva distribución?

Efectuando la compensación queda el siguiente cuadro:

	D_1	D_2	D_3
O_1			
O_2			
O_3			
O_4			

Observar que:

1.- Los vectores o casillas que eran solución pero que no formaron parte del circuito, tales como $O_2 D_3$, $O_3 D_3$ y $O_4 D_2$, permanecen sin alteración.

2.- Los valores de las disponibilidades (filas), y requerimientos (columnas), no se han alterado.

3.- Desapareció de la solución la casilla O_2D_2, quedando en su lugar O_2D_1.

4.- Si se transfirieron 5 unidades y cada una produce un ahorro de 7 u.m., el ahorro total será de 35 u.m.

En efecto, el nuevo funcional es:

$$\mathbf{Z} = 6x10 + 3x15 + 5x5 + 7x20 + 5x20 + 2x30 = \mathbf{430\ u.m.}$$

El Z anterior era de 465 u.m. La diferencia es de 465 - 430 = **35 u.m.**

Este análisis habría que hacerlo para cada casilla no ocupada y evaluar los resultados, ya que pueden existir casillas cuya asignación daría una mejor solución, en función de que, aun cuando se hubiese elegido la casilla correcta (es decir la que produce el máximo ahorro), no se sabe si la solución puede o no ser mejorada.

Este sería sin duda un procedimiento largo y engorroso; en consecuencia, es necesario disponer de una metodología sistemática que vaya eligiendo cuáles son las casillas que deben ser analizadas, escogiendo de entre ellas la mejor. Este procedimiento existe y se llama **MODI.**

Resolución por el método MODI

Se resolverá en forma completa el problema que se está analizando, siguiendo una serie de pasos.

Paso primero:

Se aplica el modo de asignación primaria (cualquiera sea) y se obtiene el cuadro:

	D_1	D_2	D_3	u_i
O_1				
O_2				
O_3				
O_4				
v_j				

Paso segundo:

Se comprueba si esta solución puede ser mejorada; es decir se trata de hallar, si es que existe, qué casilla o ruta debe entrar en una nueva solución para disminuir los costos totales.

Para ello se descompone *cualquiera* de los costos en dos componentes u_i y v_j. Se tomó por ejemplo el costo perteneciente a la casilla O_1D_1, es decir $CD_{11} = 6$. Este se descompone de la siguiente manera: $CD_{11} = u_1 + v_1$

Dando a u_1 o a v_1 *cualquier* valor, por ejemplo $u_1 = 6$, v_1 será igual a 0. Es de notar que automáticamente quedan fijados los restantes valores de u_i y v_j, pertenecientes a los costos de las casillas ocupadas, pero siempre y cuando el sistema tenga **m+n-1 soluciones**. Veamos si esto se cumple en este problema. En él tenemos:

m = Número de filas = 4
n = Número de columnas = 3

En consecuencia:

$$m + n - 1 = 4 + 3 - 1 = 6$$

Se verifica que, efectivamente, hay 6 soluciones, por lo que el problema puede ser resuelto.
Se pueden descomponer ahora el resto de los costos, aplicando siempre la ecuación:

$$CD_{ij} = u_i + v_j$$

Así se tiene que comenzando con $CD_{11} = 6$ y fijando arbitrariamente el valor de $u_1 = 6$, p. ej., v_1 deberá valer 0, dado que: $CD_{11} = u_1 + v_1$

$$6 = 6 + 0$$

Conociendo $u_1 = 6$ y $CD_{12} = 3$, puede determinarse $v_2 = -3$.

Si $v_2 = -3$ y $CD_{23} = 9$, el valor de u_2 será de 12.

Habiendo calculado $u_2 = 12$, y como se conoce $CD_{23} = 7$, evidentemente $v_3 = -5$.

Se tiene ahora que $v_3 = -5$ y que $CD_{33} = 2$; en consecuencia $u_3 = 7$.

Por último, conociendo que $CD_{42} = 5$ y que $v_2 = -3$, el valor de $u_4 = 8$.

Lo que se ha hecho en realidad, es descomponer los costos directos, es decir los reales, para los vectores que están en la solución Se puede ahora hacer lo mismo para aquellos que no están en la solución, es decir para las casillas vacías, determinando de esta manera los costos indirectos, e identificándolos como CI_{ij}.

$$CD_{32} = u_3 + v_2$$

$$CD_{32} = 7 + (-3) = 4$$

El CD_{41} será: $CD_{41} = 8 + 0 = 8$ Y así sucesivamente.

Paso tercero:

Consiste en comparar los costos así obtenidos con los reales. Es el paso equivalente al cálculo del Zj-Cj en el método Simplex.

Se colocan los valores positivos en el ángulo inferior izquierdo, indicando sólo con un signo "menos" cuando esta diferencia es negativa. Es evidente que, para aquellos vectores que son solución, la diferencia es cero, al igual que en el método Simplex (Zj-Cj = 0 para los vectores columna que corresponden a las variables que son solución), ya que el costo directo coincide con el indirecto. Así se tiene, por ejemplo, que para la casilla O_1D_3, la diferencia será:

$CI_{13} - CD_{13} = 1 - 6 = -5$ (sólo se coloca el signo menos en el ángulo inferior izquierdo)

Para la casilla O_2D_1 se tiene, p. ej.: $CI_{21} - CD_{21} = 12 - 5 = +7$

Se coloca el valor +7 en el ángulo inferior izquierdo, y se calculan todas las diferencias en las casillas que no son solución.

¿Para qué nos sirve todo esto? Para conocer si la solución alcanzada es la óptima o no.

Aquí se están ***minimizando los costos,*** y si se analiza la metodología usada en el Simplex para problemas de minimización, se recordará que un Zj-Cj positivo, indicaba que la solución podía mejorarse.

Aquí también se tienen CIij-CDij positivos, por lo tanto, la solución puede ser mejorada. Por otro lado, la lógica dice, como ya se ha analizado antes, que si una casilla no ocupada tiene un costo indirecto mayor que el directo, la aplicación de este último mejorara la solución.

¿Qué vector debe entrar para ello?

En el método Simplex se introducía la columna que tuviera el mayor Zj-Cj positivo. Aquí también; entra en consecuencia el vector que tenga el mayor CIij-CDij (se observa que hay dos valores positivos, uno que vale 7 y otro 3). En consecuencia:

$$CI_{21} - CD_{21} = +7$$

Paso cuarto:

Con origen en O_2D_1, se busca un circuito --siempre hay uno y sólo uno-- que saliendo de O_2D_1 vuelva a él, usando únicamente los valores bases que están en los vértices. Se recuerda que esto es así, ya que es el único medio que puede garantizar constancia de columnas y filas, cuando se hacen las transferencias.

En este caso el camino es:

O_2D_1; O_1D_1; O_1D_2; O_2D_2; O_2D_1

No puede ser construido ningún otro circuito, ya que si, por ejemplo, se sigue la línea superior hasta O_1D_3, el circuito no podría doblar hacia abajo dado que esa casilla no corresponde a una solución.

Se podría hacer por ejemplo así:

$$O_2D_1;\ O_1D_1;\ O_1D_2;\ O_2D_2;\ O_2D_3;\ O_3D_3$$

Pero en O_3D_3 hay que parar, ya que ni en esa línea ni en dicha columna hay soluciones, es decir vértices, donde el circuito pueda doblar.

Se verá ahora otro aspecto del método: en realidad se está trabajando con vectores, entonces se identifica como vector A_{21} al correspondiente a la casilla O_2D_1, y se le asigna el signo menos. Se recorre ahora el circuito en cualquier sentido, colocando los signos en forma alternada.

De entre los valores positivos, se elige el X_{ij} con menor valor, en este caso: 5.

Esta es la cantidad del vector A_{21} que entra a la nueva solución. Es el equivalente de hallar los cocientes entre los b_i y los coeficientes técnicos a_{ij} en el método Simplex y elegir el menor.

	D_1	D_2	D_3	u_i
O_1				
O_2				
O_3				
O_4				
v_j				

El cuadro de arriba muestra ahora cómo se transfieren las cinco unidades desde la casilla O_2D_2 a la casilla O_2D_1, siguiendo el circuito, sumando y restando las cinco unidades de forma tal de mantener invariable el valor de cada fila y de cada columna.

Los demás valores de X_{ij} que están fuera del circuito permanecen constantes.

<u>Paso quinto</u>:

Consiste en asignar a las casillas que son solución, los valores de los costos reales hallados.

Se aprecia que, al igual que en el método Simplex, ha quedado formada una nueva base, interviniendo ahora en ella el vector A_{21} en lugar del vector A_{22}.

El valor del funcional será en consecuencia:

$$\mathbf{Z} = 6x10 + 3x15 + 5x5 + 7x20 + 2x30 + 5x20 = \mathbf{430\ u.m.}$$

El nuevo funcional es de 35 u.m. menor que el anterior, tal como se había calculado anteriormente.

Queda ahora por determinar si esta solución puede ser mejorada o si es la óptima, siguiendo para ello de nuevo todos los pasos analizados desde el paso segundo.

Entonces paso segundo: Descomposición de los costos directos y formación de los costos indirectos

Para la tabla anterior, empezando con un costo cualquiera, por ejemplo CD_{42}, se tiene:

$CD_{42} = u_4 + v_2$
$CD_{42} = 0 + 5 = 5$

Por lo tanto:

$CD_{12} = -2 + 5 = 3$
$CD_{11} = -2 + 8 = 6$
$CD_{21} = -3 + 8 = 5$
$CD_{23} = -3 + 10 = 7$
$CD_{33} = -8 + 10 = 2$

A continuación se calculan los costos de las casillas vacías, o costos indirectos.

<u>Paso tercero</u>: Comparación de costos

Se comparan los costos hallados con los originales, poniendo un signo menos en el ángulo inferior izquierdo de cada casilla, si la diferencia $CI_{ij} - CD_{ij}$ es negativa, o poniendo el signo "más", y el valor correspondiente en caso contrario.

Evidentemente el problema puede tener una mejor solución, ya que hay dos valores positivos (+2 y +6).

<u>Paso cuarto</u>: Establecimiento del circuito

Se va a introducir el vector A_{43}, dado que es el que tiene el mayor valor positivo, y tomándolo como origen, se dibuja el circuito que se observa en la tabla anterior.

Este circuito es: A_{43}; A_{42}; A_{12}; A_{11}; A_{21}; A_{23}; A_{43}

Se asigna el signo menos a A_{43} y luego los signos más y menos en forma alternada en los vértices donde el circuito cambia de dirección. Se elige ahora el menor valor positivo, que es igual a diez.

Se transfieren las diez unidades recorriendo el circuito en cualquier sentido y respetando la no variación de columnas y filas, obteniéndose la siguiente tabla:

	D_1	D_2	D_3	u_i
O_1				
O_2				
O_3				
O_4				
v_j				

<u>Paso quinto</u>: Asignación de los costos

Se asignan a las casillas ocupadas de éste cuadro los costos originales, y se colocan en el ángulo superior derecho.

El valor del funcional será en consecuencia:

$$Z = 3x25 + 5x15 + 7x10 + 2x30 + 5x10 + 4x10$$

$$\mathbf{Z = 370 \text{ u.m.}}$$

El nuevo funcional es de 60 u.m. menor que el anterior.

Para averiguar si esta solución puede ser mejorada se vuelve a empezar desde el paso segundo.

<u>Paso segundo</u>: Descomposición de los costos directos y formación de los costos indirectos

Para la tabla anterior, empezando con un costo cualquiera, por ejemplo CD_{12} se tiene:

$CD_{12} = -5 + 8 = 3$

Por lo tanto:

$CD_{42} = -3 + 8 = 5$
$CD_{43} = -3 + 7 = 4$
$CD_{33} = -5 + 7 = 2$
$CD_{23} = 0 + 7 = 7$
$CD_{21} = 0 + 5 = 5$

A continuación se calculan los costos de las casillas vacías, o costos indirectos.

<u>Paso tercero: Comparación de costos</u>

De la comparación de todos los costos entre las casillas de las tablas última y original, resulta que todas las diferencias son 0 o negativas; por lo tanto el problema no puede ser mejorado, y se ha alcanzado la solución óptima.

En consecuencia: **<u>SOLUCION OPTIMA</u>**

* ***El origen O_1 abastece al destino D_2 con 25 unidades.***
* ***El origen O_2 abastece al destino D_1 con 15 unidades.***
* ***El origen O_2 abastece al destino D_3 con 10 unidades.***
* ***El origen O_3 abastece al destino D_3 con 30 unidades.***
* ***El origen O_4 abastece al destino D_2 con 10 unidades.***
* ***El origen O_4 abastece al destino D_3 con 10 unidades.***

Cantidades disponibles mayores que las cantidades requeridas

Hasta ahora se ha supuesto que la suma de las cantidades disponibles igualaba a la suma de las cantidades requeridas, pero normalmente esto no es así, ya que, en general, la producción excede a los requerimientos. Supóngase que en el problema anterior, las disponibilidades suman 120 kg. y los requerimientos sólo 100 kg., de acuerdo con la distribución que sigue:

D_j / O_i	D_1	D_2	D_3	Disponibilidades
O_1	6	3	6	25
O_2	5	9	7	30
O_3	4	10	2	35
O_4	8	5	4	30
				120
Requerimiento	15	35	50	100

¿Cómo proceder en este caso? Se crea un destino ficticio (variable Slack), y en su columna se asigna cada casilla a un costo de, p.ej. M=30 u.m., es decir un valor muy alto en relación a los demás, tal como se aprecia ahora:

D_j / O_i	D_1	D_2	D_3	D_4	Disponibilidades
O_1	6	3	6	30	25
O_2	5	9	7	30	30
O_3	4	10	2	30	35
O_4	8	5	4	30	30
					120
Requerimiento	15	35	50	20	120

La primera asignación, descomposición de los costos, determinación del vector a entrar y el trazado del circuito, se muestra en el siguiente cuadro:

	D_1	D_2	D_3	D_4	u_i
O_1	6 **15**	3 **10**	6 **-**	30 **-**	-6
O_2	5 +1	9 **25**	7 -	30 **5**	0
O_3	4 -	10 -	2 **35**	30 -	-2
O_4	8 -	5 +4	4 **15**	30 **15**	0
v_j	6	9	4	30	

Siguiendo con el procedimiento anteriormente descripto se llega al resultado final que se muestra:

	D_1	D_2	D_3	D_4	u_i
O_1		3 **25**			-2
O_2	5 **15**			30 **15**	0
O_3			2 **35**		-2
O_4		5 **10**	4 **15**	30 **5**	0
v_j	5	5	4	30	

El valor del funcional será en consecuencia:

$$\mathbf{Z} = 3x25 + 5x15 + 30x15 + 2x35 + 5x10 + 4x15 + 30x5$$

$$\mathbf{Z = 930\ u.m.}$$

Por lo tanto, se deben enviar quince unidades desde el origen 2 al destino ficticio 4, y cinco unidades desde el origen 4, también al destino ficticio 4. El significado de estos envíos ficticios es que dichas cantidades deben permanecer en los almacenes de los respectivos orígenes, o sea quince unidades en el origen 2 y cinco unidades en el origen 4.

En consecuencia, ya que no hay realmente un transporte desde esos orígenes a los destinos ficticios, el costo total será menor. Es decir:

$$\mathbf{Z} = 930 - 30 \times 15 - 30 \times 5 = 330 \text{ u.m.}$$