Carrera : Licenciatura en Sistemas Informáticos
Cátedra: Investigación Operativa
Tema : Unidad 2 - Programación Lineal, Modelo directo

a) Guía de Teoría

Introducción

Mucha gente sitúa el desarrollo de la Programación Lineal (PL) entre los avances científicos más importantes de la mitad del siglo XX, y debemos estar de acuerdo con esta afirmación. Su impacto, precisamente desde 1950, ha sido fabuloso.

En la actualidad es una herramienta standard que ha ahorrado muchos miles o millones de dólares a compañías o negocios, incluso de tamaño moderado, en los países industrializados del mundo y su uso en otros sectores de la sociedad se ha extendido rápidamente.

En pocas palabras, la **PL** típicamente trata del problema de asignar recursos limitados entre actividades competidoras en la mejor forma posible (es decir, óptima). Puede surgir este problema de asignación siempre que deba solucionarse el nivel de ciertas actividades que compitan por recursos escasos necesarios para realizar esas actividades.

La variedad de situaciones a las cuales se aplica esta descripción es realmente amplia, desde la asignación de medios de producción a productos hasta la asignación de recursos nacionales a necesidades domésticas, desde la selección de la cartera hasta la selección de patrones de embarque, desde la planificación de la agricultura hasta el proyecto de la terapia de radiación, etc.

Sin embargo, el ingrediente común en cada una de estas situaciones es la necesidad de asignar recursos a las actividades.

En toda empresa suelen presentarse interrogantes cuyas respuestas son fundamentales, más no siempre sencillas de obtener. Por ejemplo, supóngase que un fabricante de artículos para el hogar desea conocer la respuesta a una serie de preguntas, tales como:

a) Qué productos de la línea fabricar?
b) Qué cantidad de cada uno?
c) Cómo afectan a los costos o a los beneficios las limitaciones de producción?
d) En caso de que haya oportunidad de comprar más materia prima, Cuál de ellas debe adquirirse, en qué cantidad, a qué precio y cuál es el producto que conviene fabricar con preferencia?
e) Para qué limites de sus disponibilidades de materias primas, sus productividades marginales se mantienen constantes?
f) Qué capacidad ociosa tiene de mano de obra, de equipos, etc.?
g) Cómo debe proceder a fin de reducir dicha capacidad ociosa?
h) Cada vez que plantea alternativas de capacidad de producción, Cuál será la demanda insatisfecha?
i) Conviene o no fabricar el nuevo producto que le proponen?
j) Cómo deberán ser las producciones de otros sectores de la empresa para abastecer el incremento propuesto en la producción de un sector cualquiera?

Todos estos interrogantes pueden ser contestados segura y rápidamente, por medio de la **PL**.

La **PL usa un modelo matemático** para describir el problema de interés. El adjetivo "lineal" significa que se requiere que todas las funciones matemáticas en este modelo **sean lineales**. La palabra "programación" no se refiere a la programación de computadoras, más bien es esencialmente un sinónimo de planificación.

Por tanto, la **PL** comprende la planificación de actividades para obtener un resultado **"óptimo"**, es decir, **un resultado que alcance la meta especificada en la mejor forma (según el modelo matemático) entre todas las alternativas factibles.**

Modelo matemático de programación lineal

Un problema lineal tiene ***función objetivo y restricciones lineales***, por lo tanto se lo puede escribir como sigue:

$$\textbf{Máx o Mín} \quad Z = c_1 X_1 + c_2 X_2 + \dots\dots\dots + c_n X_n$$

s.a.

$$\begin{aligned} a_{11} X_1 + a_{12} X_2 + \dots\dots\dots + a_{1n} X_n &<=> b_1 \\ a_{21} X_1 + a_{22} X_2 + \dots\dots\dots + a_{2n} X_n &<=> b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ a_{m1} X_1 + a_{m2} X_2 + \dots\dots\dots + a_{mn} X_n &<=> b_m \\ X_1 ; \quad X_2 ; \dots\dots\dots ; \quad X_n &=> 0 \end{aligned}$$

donde **n, nro. de variables**
m, nro. de restricciones
c_j (j=1,...,n), precio o costo por unidad de actividad j

b_i (i=1,..,m), cantidad disponible del recurso i

a_{ij}, cantidad de recurso i que debe asignarse a cada unidad de actividad j

La función que se está maximizando o minimizando se llama ***función objetivo***.

X_j (j=1,....,n) son las *variables de decisión*

En programación lineal, el término solución es cualquier especificación de valores para las variables de decisión **(X_1,.....,X_n),** sin importar si es una elección deseable o incluso admisible.

Una solución factible es una solución para la que se satisfacen todas las restricciones.

Dado que existen soluciones factibles, la meta de la PL es hallar aquella que sea la **"mejor"** por el valor más favorable de la función objetivo.

Una solución óptima es una solución factible que tiene el valor más favorable de la función objetivo.

Condiciones a cumplir

Restricciones que hacen que los productos compitan entre sí (si hubiera ilimitada cantidad de recursos, no habría competencia).

Relaciones lineales entre los productos, artículos o variables intervinientes.

Optimización de la función económica del conjunto de productos, que establece que, en general, se deben maximizar los beneficios o minimizar los costos.

Solución gráfica de un problema de PL de dos variables

El hallar la solución de un problema de PL por el método gráfico es una forma cómoda y sencilla; sin embargo, no es práctico, dado que sólo pueden resolverse problemas de **dos variables**. Para problemas de tres variables hay que trabajar en el espacio, también posible, pero mucho menos sencillo. El sistema pierde su aplicación para problemas de más de tres variables, ya que entonces es necesario operar en espacios desconocidos en el mundo físico que nos rodea.

Puede pensarse entonces que se va a perder el tiempo en analizar la resolución gráfica ya que sólo podremos resolver problemas de dos variables, pero los gráficos nos ayudarán a comprender mucho del análisis de un problema de **PL**. Para más variables, incluso 2, veremos métodos analíticos.

Veamos el ejemplo de la guía anterior (problema 1 adicional). Como se puede apreciar existen aquí las condiciones predichas:

Hay ***restricciones*** de recursos ya que existe una determinada cantidad de ellos (agua, tierra y capital). Se aprecia como los cultivos 1 y 2 compiten entre sí para los mismos tipos de recursos.

Las ***restricciones y función objetivo son lineales***.

Cada cultivo genera un cierto beneficio. Se desea que éstos en conjunto sean máximos. Aquí tenemos la ***optimización de la función económica***.

Resolución del ejemplo

Máxima cantidad de agua = 80 unidades
Máxima cantidad de tierra = 60 unidades
Máxima cantidad de capital = 2.100 unidades

Variables de decisión **:** $\mathbf{X_1}$ cantidad de tierra que será sembrada por el cultivo 1

$\mathbf{X_2}$ cantidad de tierra que será sembrada por el cultivo 2

Función objetivo : Maximizar el beneficio que generan los cultivos

$$\textbf{Máx Z}\ [\text{um}] = 30[\text{um/u sup}]\ \mathbf{X_1}[\text{u sup}] + 10\ \mathbf{X_2}$$

$$\textbf{Máx Z}\ [\text{um}] = 30\ \mathbf{X_1} + 10\ \mathbf{X_2}$$

Restricciones: Llamando $\mathbf{X_1}$ a la cantidad de tierra que será sembrada por el cultivo 1 y $\mathbf{X_2}$ a la cantidad de tierra que será sembrada por el cultivo 2, la restricción referida a la disponibilidad de agua será la siguiente:

$$\mathbf{2}[\text{u ag/u sup}]\ \mathbf{X_1}[\text{u sup}] + \mathbf{X_2} <= 80\ [\text{u sup}]$$

Luego las restricciones de tierra y capital serán:

$$\mathbf{X_1}[\text{u sup}] + \mathbf{X_2} <= 60\ [\text{u sup}]$$

$$60\ [\text{u ca/u sup}]\ \mathbf{X_1}[\text{u sup}] + 10\mathbf{X_2} <= 2.100\ [\text{u cap}]$$

quedando de la siguiente forma:

$$\mathbf{2X_1 + X_2 <= 8 \qquad A}$$

$$\mathbf{X_1 + X_2 <= 60 \qquad B}$$

$$\mathbf{60\ X_1 + 10\ X_2 <= 2.100 \qquad C}$$

$$\mathbf{X_1,\ X_2 >= 0}$$

Gráficamente, queda determinada la **REGION FACTIBLE**, indicando las restricciones dadas y valuando la **FO** ya que ésta consta de 3 variables (**Z**, $\mathbf{X_1}$ y $\mathbf{X_2}$) y por lo tanto no puede dibujarse en el plano, salvo que se fije el valor de una de ellas. Graficamos ***curvas de nivel*** con distintos valores de **Z**.

Valores arbitrarios de **Z**	Punto de intersección con los ejes coordenados
$\mathbf{Z} = 300 = 30\,\mathbf{X_1} + 10\,\mathbf{X_2}$	(10,0) (0, 30)
$\mathbf{Z} = 3.000 = 30\,\mathbf{X_1} + 10\,\mathbf{X_2}$	(100,0) (0,300)

Se deduce, según aumenta **Z**, que el **óptimo** se encontrará en la intersección de las rectas A y C

A $\quad 2\,\mathbf{X_1} + \mathbf{X_2} = 80 \qquad \mathbf{X_1} =$

C $\quad 60\,\mathbf{X_1} + 10\,\mathbf{X_2} = 2.100 \qquad \mathbf{X_2} =$

Valor óptimo $\mathbf{Z} = 30\,(32.5) + 10\,(15) =$

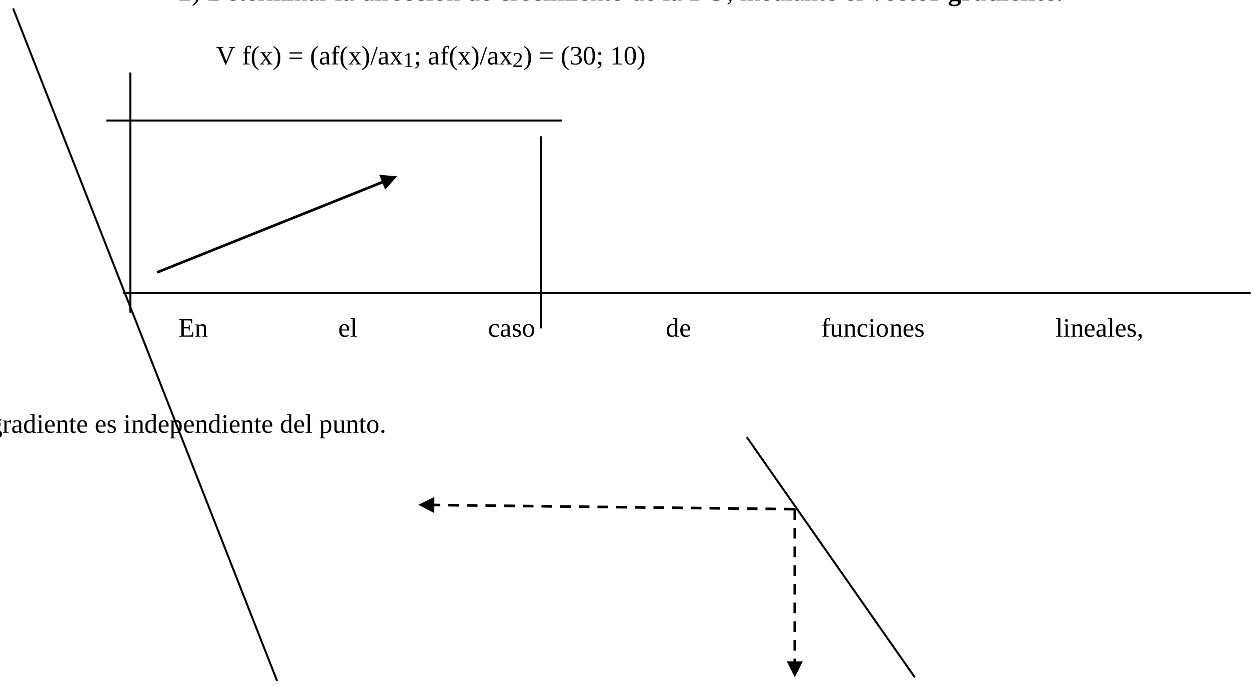
Método del gradiente

Una forma alternativa de obtener el **óptimo** gráficamente se basa en las propiedades del gradiente de una función. ***"El gradiente de una función en un punto es un vector normal al plano tangente a la curva de nivel de la función en dicho punto, y su sentido indica la dirección en la cual la función aumenta más rápidamente".***

Luego, el procedimiento a seguir es el siguiente:

1) Dar un valor arbitrario a la **FO** y graficarla. Ej. Z = 300
2) Determinar la dirección de crecimiento de la **FO**, mediante el **vector gradiente**.

$V f(x) = (af(x)/ax_1; af(x)/ax_2) = (30; 10)$



En el caso de funciones lineales, el gradiente es independiente del punto.

Puede observarse, que desplazando rectas paralelas a Z = 300, en el sentido de **crecimiento del gradiente**, encontraremos la recta con **Z máximo**, en la intersección de las rectas dadas anteriormente.

Conclusiones del análisis gráfico:

1) La ***solución óptima*** siempre corresponde a un vértice de la región factible.
2) El número de vértices es *finito*.
3) Una forma de encontrar el ***óptimo*** de un problema de **PL** sería ubicar todos los vértices y calcular el valor de la **FO** en c/u de ellos. El vértice con mejor valor de la **FO** es el ***óptimo***.

Determinación algebraica de los puntos extremos

Hemos visto que la solución a un problema de **PL** cae siempre sobre un vértice de la **región factible** (seguro que algún vértice de la **RF** es solución óptima), entonces, en 1er. término, se necesita un procedimiento algebraico para determinar los vértices de la **RF** y así evaluar en ellos la **FO**. Para comenzar a resolver este problema se deberán transformar las **inecuaciones en igualdades**, por lo cual se introduce el concepto de **variables de holgura**, que son aquellas que no tienen asignado un beneficio en la función a maximizar (en este caso), pero sí pueden tener un significado físico (**sobrante de agua, de tierra o de capital**).

Las igualdades quedan (forma standard):

$$\begin{array}{llllll} 2\,\mathbf{X_1} + & \mathbf{X_2} + & \mathbf{X_3} & & & = 80 \quad A \\ \mathbf{X_1} + & \mathbf{X_2} & & + \mathbf{X_4} & & = 60 \quad B \\ 60\,\mathbf{X_1} + & 10\,\mathbf{X_2} & & & + \mathbf{X_5} & = 2.100 \quad C \\ \mathbf{X_1}\,; & \mathbf{X_2}\,; & \mathbf{X_3}\,; & \mathbf{X_4}\,; & \mathbf{X_5} & >= 0 \end{array}$$

Y el funcional

Máx Z = $30\,\mathbf{X_1} + 10\,\mathbf{X_2} + 0\,\mathbf{X_3} + 0\,\mathbf{X_4} + 0\,\mathbf{X_5}$

Obsérvese que haciendo las variables de holgura = 0 se obtiene la frontera de cada restricción, es decir, los puntos que verifican la restricción como igualdad. Ej.: si $\mathbf{X_3} = 0$

$$2\,\mathbf{X_1} + \mathbf{X_2} + \qquad = 80 \text{ A}$$

Si la variable de holgura toma un valor positivo, dicho punto cumple con la restricción como desigualdad, es decir el **punto es factible**. Pero si toma un valor negativo implica que el punto en estudio es **no factible**. Todo vértice de la RF se obtiene por la intersección al menos de dos restricciones. Es decir, al menos dos variables son iguales a cero.

Si el vértice corresponde a un eje coordenado será $\mathbf{X_1}$ ó $\mathbf{X_2} = 0$ y $\mathbf{X_3}$ ó $\mathbf{X_4}$ ó $\mathbf{X_5} = 0$.

En **n dimensiones** podemos decir que todo vértice tiene **n variables = 0**.

Recordemos que un problema representado en esta forma tiene **n + m variables (n reales y m de holgura) y m restricciones de igualdad.**

Este sistema de ecuaciones tendrá ***solución única*** si se fijan **n variables = 0, quedando así un sistema normal m x m.**

Como sabemos que en cada vértice **n variables son nulas**, luego puede obtenerse para cada punto extremo el valor de las **m variables restantes**, resolviendo el **sistema de m ecuaciones y m incógnitas** resultante.

Ejemplo:

Pto. extremo	Variables nulas			
a	$\mathbf{X_1}=\mathbf{X_2}=0$	n=2	m=3	N=5
b	$\mathbf{X_1}=\mathbf{X_4}=0$			
c	$\mathbf{X_3}=\mathbf{X_4}=0$			
d	$\mathbf{X_3}=\mathbf{X_5}=0$			
e	$\mathbf{X_2}=\mathbf{X_5}=0$			
f	$\mathbf{X_4}=\mathbf{X_2}=0$			
g	$\mathbf{X_4}=\mathbf{X_5}=0$			
.	....			

Determinación de las restantes variables:

Pto. a:		Pto. f:	
$X_1 = X_2 = 0$		$X_2 = X_4 = 0$	$X_1 = 60$
$X_3 = 80$		$2X_1 + X_3 = 80$	$X_2 = 0$
$X_4 = 60$		$X_1 = 60 \quad -->$	$X_3 = -40$
$X_5 = 2.100$		$60X_1 + X_5 = 2.100$	$X_4 = 0$
			$X_5 = -1.500$
extremo factible		**extremo no factible (se violan restricciones de no negatividad)**	

De esta forma, encontramos todos los puntos extremos (los que resultan de la intersección de 2 restricciones y vemos si son puntos **factibles o no**. Luego de los factibles, nos quedamos con el que ***optimice la FO***.

Procedimiento general

Llamemos **N** al número total de variables **(variables de decisión + variables de holgura = n + m)**.

a) De la forma standard, obtenemos un sistema de **m** ecuaciones y **N** incógnitas.

b) Asignando a **(N-m)** variables el valor cero, y los llamaremos ***variables no básicas.***

c) Resolviendo el sistema resultante **(m ecuaciones con m incógnitas)** obtenemos el valor de las **m** variables restantes, las que llamaremos ***variables básicas.***

d) El punto extremo obtenido $\mathbf{X}\ (\mathbf{X_1}, \mathbf{X_2}, \ldots\ \mathbf{X_m}, \mathbf{X_{m+1}}, \ldots\ \mathbf{X_N})$

m *variables básicas* **N-m** *variables no básicas*

se llama ***solución básica*** del sistema de **m** ecuaciones y **m** incógnitas. Si dicha solución satisface las restricciones de no negatividad se llama ***solución básica factible*** y corresponde a un vértice de la RF.

e) El número total de ***soluciones básicas (factibles y no factibles)*** o sea puntos extremos, será:

$$C^{N}_{m} = \frac{N!}{m!\,(N-m)!} = \frac{N!}{n!\,(N-n)!}$$

f) Obtenidos todos los puntos extremos factibles ***(soluciones básicas factibles)*** y evaluando la FO en c/u de ellos podríamos encontrar la ***<u>solución óptima</u>*** del problema.

Pero este procedimiento es ineficiente por varias razones:

a) El Nro. de soluciones a evaluar puede ser **muy grande**. Para nuestro ejemplo:

$$N = 5 \qquad m = 3 \qquad n = 2 \qquad C^{5}_{3} = \frac{5!}{3!\,(5-3)!} = 10$$

En el gráfico, tenemos 10 puntos (a, b, c, ... j).

b) Muchas de estas soluciones pueden ser **no factibles**.

c) Se hace uso de la FO para medir la calidad de la solución recién **después** de hallar los puntos extremos.

Para salvar estos inconvenientes ha sido desarrollado un método que partiendo de una solución básica factible (vértice de la RF) evalúa progresivamente sólo soluciones básicas factibles que mejoran el valor de la **FO**.

Definiciones

- Una ***solución factible*** en un prob. de **PL** es un vector X que satisface el conjunto total de restricciones.

- Todo punto X obtenido de hacer (N-m) variables iguales a cero es una ***solución básica*** del sistema de m ecuaciones y N incógnitas.

- Una ***solución básica factible*** es aquella que, además de ser básica, satisface la condición de no negatividad. Dicha solución constituye un vértice de la **RF**.

$$X(X_1, X_2, \ldots\ldots X_N) = (\underbrace{X_1, X_2, \ldots\ldots X_m}_{\text{m variables } \textbf{\textit{básicas}}}, \underbrace{X_{m+1}, \ldots\ldots X_N}_{\text{N-m variables } \textbf{\textit{no básicas}}})$$

Las (N-m) variables iguales a cero se denominan variables ***No básicas***.
Las m variables restantes (= 0 ó <> 0) se llaman ***básicas***.

- Una ***solución óptima*** es una solución básica factible que optimiza el valor de la **FO**.

Propiedad fundamental

Los **vértices de la RF** de un problema de **PL** están completamente determinados por las ***soluciones básicas factibles*** del sistema de ecuaciones algebraicas que la definen en el formato standard de dicho modelo.

Problema de minimización

Una empresa divide su actividad en 3 explotaciones: pesca libre, determinadas especies y pescado de aleta. Para esta actividad cuenta con 18 buques, los que pueden ser afectados a cualquier explotación (no necesariamente se utilizan todos ellos). Los costos mensuales por buque, según la actividad al que son afectados, son los siguientes:

pesca libre	um 500.000
determinadas especies	um 600.000
pescado de aleta	um 1.000.000

Debido a la mano de obra permanente con que cuenta la empresa, no puede tener menos de 7 buques en ultramar. La empresa desea determinar cuál es el número de unidades a asignar a cada explotación para que el costo mensual sea mínimo.

a) Exprese el modelo matemático correspondiente.

Considere ahora que por razones de costo la explotación de pescado de aleta deja de ser de interés para la empresa, por lo que ésta decide suprimirla.

b) Exprese el nuevo modelo matemático.

c) Resuelva gráficamente.

d) Determine algebraicamente los puntos extremos, indique cuáles son no factibles y cuáles factibles. Con las soluciones básicas factibles, evalúe la FO y determine el óptimo.

a) Modelo matemático lineal

Variables de decisión: X_1 cant. de buques de pesca libre [unid.]
X_2 cant. de buques de determinada especie [unid.]
X_3 cant. de buques de pescado de aleta [unid.]

Función objetivo : Minimizar el costo mensual de la utilización de buques para pesca

mín Z[um] = 500.000[um/unid] X_1 [unid] + 600.000 X_2 + 1.000.000 X_3

Restricciones: [unid] $X_1 + X_2 + X_3 <= 18$ [unid]

$X_1 + X_2 + X_3 >= 7$

$X_1; \quad X_2; \quad X_3 >= 0$

b)

Variables de decisión: X_1 cant. de buques de pesca libre [unid.]
X_2 cant. de buques de determinada especie [unid.]

Función objetivo : Minimizar el costo mensual de la utilización de buques para pesca

mín Z[um] = 500.000[um/unid] X_1 [unid] + 600.000 X_2

Restricciones: [unid] $X_1 + X_2 <= 18$ [unid]

$X_1 + X_2 >= 7$

$X_1; \quad X_2; \quad >= 0$

c) Solución gráfica por el método del gradiente

d) Determinación algebraica de los puntos extremos

Tenemos, en teoría, 6 puntos resultantes de intersecciones de rectas (a, b, c, ... f), uno (1) de los cuales no existe.

N = 4
m = 2
n = 2

$$C^{4}_{2} = \frac{4!}{2!\,(4-2)!} = 6$$

Método Simplex

El método Simplex de resolución debido a George Dantzig (1947), provee un sistema rápido y efectivo para la resolución de problemas de **PL**.

Es la metodología empleada en las aplicaciones prácticas y permite resolver una gran cantidad de problemas de real importancia industrial.

Su desarrollo parecerá complicado al principio, pero planteado el cuadro inicial correspondiente, el sistema se torna completamente mecánico, lo cual hace que su resolución sea perfectamente factible por medio de computadoras.

El sistema, al igual que otros, llega a la solución óptima por medio de iteraciones o pasos sucesivos, ya que no existe ningún método o fórmula que alcance directamente esta solución.

Recordemos lo visto hasta el momento:

- El **óptimo** de un problema de **PL** siempre ocurrirá en un **vértice de la RF** (punto extremo factible).
- Cada punto extremo puede determinarse algebraicamente a partir de las ecuaciones de la forma standard. Dando a N-m variables el valor cero (variables no básicas) queda definido un sistema de ecuaciones mxm cuya resolución nos brinda el valor de las m variables restantes (variables básicas). Se obtiene así una solución básica. Si todas las variables básicas son no negativas la solución corresponde a un vértice de la región factible.
- Los vértices de la **RF** de un problema de **PL** están completamente determinados por las soluciones básicas factibles.
- Si no dispusiéramos de un procedimiento inteligente para resolver este tipo de problemas podríamos valuar la **FO** en cada vértice y el punto óptimo se obtiene comparando dichos valores.
- Los inconvenientes eran: el nro. elevado de puntos extremos a ver, muchas soluciones son no factibles o no existentes, la **FO cumple un rol pasivo.**

El método Simplex se ha diseñado para evitar estas ineficiencias.

El procedimiento comienza a partir de una solución básica y se mueve a través de una secuencia de soluciones básicas factibles tal que cada nueva solución tiene la posibilidad de mejorar el valor de la **FO.**

Este procedimiento, que garantiza la generación de este tipo de secuencias de soluciones básicas se basa en el cumplimiento de dos condiciones fundamentales:

CONDICION DE OPTIMICIDAD: asegura que nunca se hallarán soluciones peores en relación a la actual.

CONDICION DE FACTIBILIDAD: garantiza que en los cálculos, si se parte de una solución básica factible, solo se hallaran soluciones básicas factibles.

Introduciremos el método en base al ejemplo del sistema de riego visto.

De esta forma apreciaremos las ideas fundamentales en las que se basa el método. Posteriormente analizaremos en forma rigurosa la validez del procedimiento.

El método se basa en el empleo de la forma standard

$$\text{Máx } \mathbf{Z} = 30\,\mathbf{X_1} + 10\,\mathbf{X_2} + 0\,\mathbf{X_3} + 0\,\mathbf{X_4} + 0\,\mathbf{X_5}$$

$$\begin{array}{lllllll}
2\,\mathbf{X_1} + & \mathbf{X_2} + & \mathbf{X_3} & & & = & 80 \quad A \\
\mathbf{X_1} + & \mathbf{X_2} & & + \ \mathbf{X_4} & & = & 60 \quad B \\
60\,\mathbf{X_1} + & 10\,\mathbf{X_2} & & & + \ \mathbf{X_5} & = & 2.100 \quad C \\
\mathbf{X_1}\,; & \mathbf{X_2}\,; & \mathbf{X_3}\,; & \mathbf{X_4}\,; & \mathbf{X_5} & >= & 0
\end{array}$$

Para la solución del problema se plantea una tabla donde se ubican los **coeficientes de las variables, el valor de las restricciones y de los coeficientes del funcional.** Llamaremos $\mathbf{A_i}$ a los vectores definidos por los coeficientes de las variables, **B** al valor máximo de las restricciones, $\mathbf{X_k}$ a las variables que se encuentran en la solución en cada paso, $\mathbf{C_k}$ a los coeficientes de beneficio de las variables que se encuentran en el paso analizado y, $\mathbf{C_j}$ a los coeficientes de beneficio en general. Tomamos como punto de partida, el **vértice a**, correspondiente a $\mathbf{X_1}$ **y** $\mathbf{X_2} = \mathbf{0}$, situación de **FO** más desfavorable ya que allí es el punto extremo básico factible donde ésta vale $\mathbf{0 = FO = 0X_1 + 0X_2 + 0X_3 + 0X_4 + 0X_5}$.

<u>La primera tabla será:</u>

		$\mathbf{C_j}$						
$\mathbf{C_k}$	$\mathbf{X_k}$	**B**	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	b_i/a_{ij}
	$\mathbf{Z_j}$							
		$\mathbf{Z_j - C_j}$						

La tabla esta compuesta por:

- Matriz formada por los vectores columna de los coeficientes de las variables reales.
- Matriz formada por los vectores unitarios columna de las variables de holgura.
- Vector columna de términos independientes **B**.
- Vector columna con las variables que pertenecen a la solución $\mathbf{X_k}$.
- Vector columna con los coeficientes de beneficio o costo asociados a las variables que pertenecen a la solución.
- Vector fila de coef. de beneficios asociados a las variables $\mathbf{X_j}$.

La matriz unitaria representa en cada solución o iteración, la base del sistema.

Analizando el cuadro obtenido, tenemos la primera soluc. básica ya que a cada valor de $\mathbf{X_k}$ le corresponde horizontalmente un valor de $\mathbf{B_j}$. Así:

$X_1 = X_2 = 0$, $X_3 = 80$, $X_4 = 60$, $X_5 = 2.100$

X_3, X_4 y X_5 son ***variables básicas***

X_1 y X_2 son ***variables no básicas***

Z es igual a la suma de los productos de los valores que toman las variables, por los coeficientes asociados de beneficio.

$$Z = \quad C_k X_k = 0x80 + 0x60 + 0x2.100 = \mathbf{0}$$

Luego hacemos los $\mathbf{Z_j}$ para c/u de las columnas $\mathbf{A_i}$.

La próxima etapa es hallar una nueva ***solución básica factible*** (vértice) que tenga mejor valor de **FO** (en este caso mayor).

El **método Simplex** (**MS**) lo que hace es asignar un valor positivo a una variable que en este momento vale cero (no básica) y que tenga la posibilidad de mejorar el valor de la **FO**.

Si observamos la fila final de $\mathbf{Z_j\text{-}C_j}$ vemos que al no estar $\mathbf{X_1}$ y $\mathbf{X_2}$ en la solución, se pierde de aumentar el funcional, por c/unidad de variable, 30 y 10 unidades de beneficio respectivamente.

Estos valores se llaman ***costos de oportunidad*** y es lo que se deja de ganar al no introducir la variable correspondiente ($\mathbf{X_1}$ ó $\mathbf{X_2}$) en la solución.

Se aprecia en definitiva que Zj-Cj es en realidad un balance económico que analiza la mejora potencial que puede lograrse introduciendo Xj, de donde se desprende que:

Z_j es lo que se pierde al introducir X_j

C_j es lo que se gana al introducir X_j

Por lo tanto, cuando se maximiza un problema, éste admite una solución mayor, siempre que haya un valor negativo de $\mathbf{Z_j\text{-}C_j}$.

Adviértase que para los vectores base, **Zj-Cj=0**, lo que indica que no se gana ni se pierde nada si se introduce dicho vector en la solución.

Este paso que se acaba de explicar, constituye el medio de conocer si la solución obtenida anteriormente puede o no ser mejorada. Hemos planteado la condición de **OPTIMICIDAD.**

Si, como en este caso, puede ser mejorada, dada la presencia de 2 (dos) valores negativos de **Zj-Cj**, el problema que se plantea ahora consiste en determinar que variable debe entrar y cual debe salir.

La variable que entra será $\mathbf{X_1}$ ya que produce mayor pérdida al no ser introducida. Pero como la base tiene 3 variables, una de ellas debe salir.

Observemos el gráfico. Nuestra solución actual corresponde al punto **A (X_1=0; X_2=0)** y la nueva solución, como $\mathbf{X_1}$ entra a la base, será un extremo sobre el eje de $\mathbf{X_1}$ y corresponderá al punto **e**, pues es el **mínimo extremo factible en dicha dirección,** por lo tanto $\mathbf{X_5=0}$ sale de la base.

Esta información se puede obtener de la tabla o cuadro, haciendo el cociente b_i/a_{ij} entre los valores de la columna solución y los coef. positivos de la columna de $\mathbf{X_1}$. El menor de estos cocientes determina la condición de **FACTIBILIDAD**.

Luego de determinar las variables entrante y saliente, el cuadro se debe modificar para que la columna solución brinde directamente los nuevos valores de **FO** y las variables básicas. Esta tarea se puede efectuar con el **procedimiento de Gauss Jordan** u operaciones sobre filas.

La intersección entre la fila y la columna de la variable que sale y la que entra, respectivamente, señala el valor del denominado **"pivote"**, que permitirá la transformación algebraica necesaria para obtener los nuevos coeficientes. La fila donde se encuentra el pivote se modifica dividiendo cada coeficiente por el valor del coeficiente que resultó ser el pivote, y este por si mismo. Los coeficientes de las filas restantes se modifican de acuerdo a:

$$\mathbf{a'_{ij}} = a_{ij} - \frac{a_{sj} * a_{ik}}{a_{sk}} \; ;$$

ejemplo: $$b_2 = 60 - \frac{2.100 * 1}{60} = 25$$

$$\mathbf{a'_{12}} = 1 - \frac{2 * 10}{60} = 2/3 \,,$$ así se logra:

La **segunda** tabla será:

		C_j						
C_k	X_k	B	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	b_i/a_{ij}
	Z_j							
		Z_j-C_j						

gráficamente, estamos en el punto **e** para esta **2da. solución básica factible**

$\mathbf{X_3} = 10$, $\mathbf{X_4} = 25$, $\mathbf{X_1} = 35$ ***variables básicas***

$\mathbf{X_2} = 0$, $\mathbf{X_5} = 0$ ***variables no básicas***

El método continúa ya que debe estar $\mathbf{X_2}$ en la base, $\mathbf{Z_j\text{-}C_j = -5}$ y sale $\mathbf{X_3}$ (b_i/a_{ij} = **15**).

La **tercera** tabla será:

		$\mathbf{C_j}$					
$\mathbf{C_k}$	$\mathbf{X_k}$	**B**	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
	$\mathbf{Z_j}$						
		$\mathbf{Z_j\text{-}C_j}$					

Hemos arribado a la solución:

$\mathbf{X_2 = 15,\ X_4 = 12{,}50,\ X_1 = 32{,}50}$ ***variables básicas***

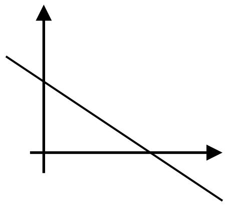
$\mathbf{X_3 = 0,\ X_5 = 0}$ ***variables no básicas*** correspondiente al **vértice d**.

Como todos los coeficientes de la fila correspondiente a Z_j-C_j son no negativos, no es posible mejorar más la solución y por ello hemos encontrado el ***óptimo.***

Es importante observar que, de los 5 vértices que tiene la región fact. sólo hemos reconocido 3 y que si hubiéramos resuelto el problema mediante el procedimiento de resolver los sistemas de ecuaciones, deberíamos haber resuelto 10 sistemas de ecuaciones.

Técnica de variables artificiales

Cuando las variables de holgura no pueden suministrar la base inicial, es necesario recurrir a otra técnica que la provea.



Este caso se presenta cuando alguna de las restricciones es de tipo >=.

Recordemos que cuando teníamos una restricción de <=, por ej. $3\,\mathbf{X_1} + 2\mathbf{X_2} \quad <= 12$

se transformaba en igualdad sumando una variable de holgura $3\,\mathbf{X_1} + 2\mathbf{X_2} + \mathbf{X_3} = 12$

luego, anulando $\mathbf{X_1}$ y $\mathbf{X_2}$, se obtiene directamente el valor de $\mathbf{X_3} = 12$, **punto básico factible**

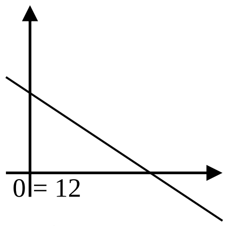
Si la restricción fuese de >=, por ej. $3\,\mathbf{X_1} + 2\mathbf{X_2} \quad >= 12$

se transforma en igualdad restando una variable de holgura $3\,\mathbf{X_1} + 2\mathbf{X_2} - \mathbf{X_3} = 12$

ahora, si damos a $\mathbf{X_1}$ y $\mathbf{X_2}$ el valor 0, de la ecuación surge que:

$- \mathbf{X_3} = 12$

$\mathbf{X_3} = -12$, es decir el punto elegido es **no factible**



Si la restricción hubiese sido =, por ej. $3\,\mathbf{X_1} + 2\,\mathbf{X_2} = 12$

Si se da el valor 0 a las variables de decisión no se cumple con la restricción 0 = 12

Por lo tanto, la forma mas simple que teníamos para encontrar una solución factible inicial, que era anular las variables de decisión, ya no nos sirve, debido a que el origen no es punto factible.

Veamos el siguiente ej.:

mín Z = $4\,\mathbf{X_1} + \mathbf{X_2}$

s.a.

$$
\begin{aligned}
3\,\mathbf{X_1} + \mathbf{X_2} &= 3 \quad A\\
4\,\mathbf{X_1} + 3\,\mathbf{X_2} &>= 6 \quad B\\
\mathbf{X_1} + 2\,\mathbf{X_2} &<= 3 \quad C\\
\mathbf{X_1}\,;\ \mathbf{X_2} &>= 0
\end{aligned}
$$

En la forma standard será:

mín Z = $4\,\mathbf{X_1} + \mathbf{X_2} + 0\mathbf{X_3} + 0\mathbf{X_4}$

s.a.

$$
\begin{aligned}
3\,\mathbf{X1} + \mathbf{X2} &= 3 \quad A\\
4\,\mathbf{X_1} + 3\,\mathbf{X_2} - \mathbf{X_3} &= 6 \quad B\\
\mathbf{X_1} + 2\,\mathbf{X_2} + \mathbf{X_4} &= 3 \quad C\\
\mathbf{X_1};\ \mathbf{X_2}\,;\ \mathbf{X_3}\,;\ \mathbf{X_4} &>= 0
\end{aligned}
$$

para la primera SBF, la matriz de los coef. será:

$$
\begin{matrix}
3 & 1 & 0 & 0\\
4 & 3 & -1 & 0\\
1 & 2 & 0 & 1
\end{matrix}
$$

Dentro de esta matriz no puede hallarse una submatriz cuadrada con configuración de **matriz unidad**. Esta situación se presenta generalmente con la existencia de variables de holgura (Slack) con coef. unitarios negativos en la tabla inicial o inexistentes, lo que las elimina de dicha solución básica factible.

En este caso debe observarse que la variable $\mathbf{X_3}$ aparece afectada por el coef. -1 debido al sentido de la desigualdad y a la restricción de no negatividad.

Concretamente y, dentro del conjunto de coef., no puede definirse una **solución básica factible**.

En el caso particular de este sistema se encuentra una interpretación gráfica en el hecho de que el origen de coordenadas, no es punto extremo del convexo.

La solución a este problema se alcanza mediante un **artificio algebraico**, consistente en la creación de una variable con coef. +1 en la fila necesaria para conformar una submatriz unidad dentro de la matriz ***(requisito indispensable para que el método Simplex halle nuevas soluciones).***

$$\text{mín } \mathbf{Z} = 4\,\mathbf{X_1} + \mathbf{X_2} + 0\,\mathbf{X_3} + 0\,\mathbf{X_4} + M\,\mathbf{u_1} + M\,\mathbf{u_2}$$

s.a.

$$\begin{array}{rcl} 3\,\mathbf{X_1} + \mathbf{X_2} + \mathbf{u_1} & = & 3\text{ A} \\ 4\,\mathbf{X_1} + 3\,\mathbf{X_2} - \mathbf{X_3} + \mathbf{u_2} & = & 6\text{ B} \\ \mathbf{X_1} + 2\,\mathbf{X_2} + \mathbf{X_4} & = & 3\text{ C} \\ \mathbf{X_1}\,;\ \mathbf{X_2}\,;\ \mathbf{X_3}\,;\ \mathbf{X_4} & >= & 0 \end{array}$$

donde M es un valor muy grande positivo.

Las variables adicionadas (u_1, u_2) no tienen significado físico dentro del problema, e inclusive, la SBF que puede obtenerse merced a ella implica la anulación de 3 variables originales del problema, no definiendo esta anulación, ningún vértice real del problema.

Luego; estas variables, tanto por razones algebraicas como de significado del problema, no podrían integrar una solución óptima real, debiendo consecuentemente buscarse que la misma salga posteriormente de la base y permanezca fuera de ella, respetando no obstante, todas las reglas del Simplex.

Esto puede realizarse **definiendo para las variables artificiales, un coeficiente en el funcional arbitrariamente grande en valor absoluto, y de signo opuesto al objetivo del problema.** Consecuentemente, mientras la variable artificial permanezca en la base, su coeficiente intervendrá en el cálculo del funcional, dando para este un resultado indeseado.

El **tableau base inicial** tiene la siguiente forma:

		C_j							
C_k	**X_k**	**B**	A_1	A_2	A_3	A_4	u_1	u_2	b_i/a_{ij}
	Z_j								
		Z_j-C_j							

El signo de M es **negativo si se maximiza y es positivo si se minimiza.**

La variable que entra estará ahora indicada por el valor MAYOR (con signo +) del ***costo de oportunidad***, o sea de Zj-Cj.

Entra la variable **X_1** y sale la variable artificial **u_1**.

Luego se procede como en las etapas convencionales del método Simplex.

El coeficiente **M** se lo llama de **PENALIZACION**.

La nueva base **(segunda)**, será:

		C_j						
C_k	X_k	**B**	A_1	A_2	A_3	A_4	u_2	b_i/a_{ij}
	Z_j							
		Z_j-C_j						

X_2 entra a la base y puede salir tanto u_2 como X_4. Elegimos u_2 porque sabemos que debe ser cero en la solución final.

La nueva base **(tercera)**, será:

		C_j					
C_k	X_k	**B**	A_1	A_2	A_3	A_4	b_i/a_{ij}
	Z_j						
		Z_j-C_j	0	0	**1/5***	0	

La nueva base **(cuarta)**, será:

		C_j				
C_k	X_k	**B**	A_1	A_2	A_3	A_4
4	X_1	**3/5**	1	0	0	-1/5
1	X_2	**6/5**	0	1	0	3/5
0	X_3	**0**	0	0	1	1
	Z_j	**18/5**	4	1	0	-1/5
		Z_j-C_j	**0**	**0**	**0**	**-1/5**

Como todos los **Zj-Cj son <= 0** y el problema es de **minimización**, hemos llegado a la ***SOLUCION OPTIMA***.

FO = 18/5 um **X_1 = 3/5** **Punto único** indicado en el gráfico.
X_2 = 6/5
X_3 = 0
X_4 = 0

Una desventaja de usar un valor **M** es el posible error computacional que puede ocasionar el asignarlo **muy grande**. Los coeficientes originales de las variables de decisión en la **FO** pueden resultar muy pequeños frente a los múltiplos de **M**. Debido a **errores de redondeo**, inherentes a cada computadora, la solución puede resultar insensible a los valores de los coeficientes originales de las variables y en consecuencia son tratados como variables iguales pero en realidad tienen coeficientes distintos en la **Función Objetivo**.

A pesar del tremendo avance reciente en el poder de cálculo y capacidad de las computadoras digitales, las dificultades de cómputo todavía se presentan al resolver algunos modelos de **PL grandes**.

Las técnicas dadas **(Simplex y método M)** dan solución a simples problemas y a entender y ver (a veces gráficamente) muchos detalles de **PL**, pero luego utilizaremos en la vida profesional utilitarios de computación que usan técnicas **transparentes** a nosotros (Simplex revisado, Algoritmos de variables acotadas, etc.), que resuelven problemas de redondeo u otros y dan solución al problema de **PL**.