

## CONJUNTOS FUZZY (BORROSOS)

### Concepto:

Una forma de indicar el concepto de pertenencia a un conjunto A, es a través de la función característica  $\mu_A(x)$ , cuyo valor indica si x pertenece o no a A:

$$\begin{cases} \mu_A(x) = 1 & \text{si } x \in A \\ \mu_A(x) = 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}$$

Una definición rigurosa, según Zadeh es:

Sea x un elemento de A, un conjunto fuzzy A esta conformado por pares ordenados:

$$\{(x | \mu_A(x)), \quad \forall x \in A\}$$

Donde  $\mu_A(x)$  es una "función característica de membresía" que toma sus valores en un conjunto totalmente ordenado, que indica el grado o nivel de pertenencia.

Supongamos en este caso que la función característica pueda tomar un valor cualquiera en el segmento  $[0, 1]$ .

Así un elemento  $x_i$  de E podría:

- ✓ no pertenecer a A ( $\mu_A(x) = 0$ ),
- ✓ pertenecer un poco a A ( $\mu_A(x)$  cercano a 0),
- ✓ pertenecer bastante a A ( $\mu_A(x)$  no muy cercano a 0 ni muy cercano a 1),
- ✓ pertenecer fuertemente a A ( $\mu_A(x)$  cercano a 1),
- ✓ y pertenecer a A ( $\mu_A(x) = 1$ ).

### Operaciones simples de los conjuntos fuzzy.

#### Inclusión

Sean A y B dos conjuntos fuzzy, se dice que A está incluido en B si:

$$\forall x \quad \mu_A(x) \leq \mu_B(x)$$

Se representa por  $A \subset B$

El concepto matemático de la expresión:

$$A = \{ (x_1 | 0.2), (x_2 | 0), (x_3 | 0.3), (x_4 | 1), (x_5 | 0.8) \}$$

Se denomina **conjunto fuzzy**.

#### Igualdad

Sean, A y B dos conjuntos fuzzy, se dice que A y B son iguales si:

$$\forall x \quad \mu_A(x) = \mu_B(x)$$

Se representa por  $A = B$

Si al menos un x es tal que la igualdad  $\mu_A(x) = \mu_B(x)$  no se satisface, se dirá que A y B no son iguales.

### Complementación

Sean A y B dos conjuntos fuzzy, se dice que A y B son complementarios si:

$$\forall x \quad \mu_B(x) = 1 - \mu_A(x)$$

Se representa por  $B^c = A$

### Conjunto fuzzy convexo

Puede definirse un conjunto fuzzy convexo de la siguiente forma:

$$\forall x_1 \in X, \forall x_2 \in X, \forall \lambda \in [0, 1]$$

$$\mu_A(\lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2) \geq \min(\mu_A(x_1), \mu_A(x_2))$$

### Intersección

Sean A y B dos conjuntos fuzzy, se define la intersección  $A \cap B$  como otro conjunto fuzzy, determinado de la siguiente forma:

$$A \cap B = C$$

$$\forall x \quad \mu_C(x) = \min(\mu_A(x), \mu_B(x))$$

### Conjunto fuzzy normal

Un conjunto fuzzy A es **normal** si y solo si al menos uno de sus elementos x verifica:

$$\max \mu_A(x) = 1$$

Este máximo puede o no ser único.

### Unión

Sean A y B dos conjuntos fuzzy, se define la unión  $A \cup B$  como otro conjunto fuzzy, determinado de la siguiente forma:

$$A \cup B = D$$

$$\forall x \quad \mu_D(x) = \max(\mu_A(x), \mu_B(x))$$

### Números fuzzy

Un número fuzzy es un conjunto fuzzy definido como convexo y normal.

## SISTEMAS FUZZY

La relación entre conjuntos fuzzy del Dominio X y conjuntos fuzzy del Dominio Y, constituye un Sistema Fuzzy.

Generalmente el Dominio X se denomina Dominio de Entrada y el Y Dominio de Salida.

## ETAPA DE DISEÑO

### Protocolo de Control

Las estrategias de control utilizadas por los expertos, pueden ser consideradas como algoritmos fuzzy, los cuales proveen el medio para tratar información cualitativa en forma rigurosa.

Este conocimiento se denomina **protocolo de control**, donde es posible incorporar condiciones temporales y/o espaciales variables y funcionamiento no lineal.

Los Sistemas Fuzzy, permiten codificar conocimiento estructurado, expresado en forma lingüística, a través de un razonamiento con conjuntos.

Además permiten trasladar el conocimiento estructurado, a una estructura flexible numérica.

En consecuencia la primer etapa en la implementación de sistemas de control fuzzy, es la generación del protocolo de control, que refleje las principales propiedades de la estrategia de control.

Consiste en un conjunto de estructuras:



**Reglas**, donde la primer parte contiene las condiciones (antecedente), mientras que la otra parte (consecuente) contiene las acciones de control, que son necesarias tomar.

A través del uso de Sistemas Fuzzy, es factible la implementación de sistemas de control a lazo cerrado o abierto, mediante la utilización de reglas obtenidas de la experiencia o del sentido común.

Es decir que se transfiere la estrategia del experto humano, expresando que control se debe implementar, cuando determinadas condiciones del proceso a controlar son observadas.

Tanto las condiciones como las acciones de control, contienen términos lingüísticos que reflejan el conocimiento del experto sobre el proceso. Estos términos lingüísticos sugieren trabajo con conjuntos, mas que con cantidades numéricas.

Para generar el protocolo de control, dos aspectos son relevantes:

✓ Aspectos relacionados con el comportamiento propio del experto, ej: **que hacer en determinadas condiciones del proceso.**

✓ Aspectos relacionados con el comportamiento del proceso, ej: **porque ocurren determinadas situaciones.**

✓ Generalmente el número de conjuntos fuzzy es impar (condición normal, más las desviaciones positivas y negativas).

✓ La densidad de los conjuntos puede ser mayor alrededor del punto de trabajo.

✓ La cantidad de conjuntos fuzzy para representar cada variable y/o característica y su correspondiente rango de validez, deben ser definidos por expertos en el sistema a controlar.

#### Proceso de Fuzzificación

En primer lugar es necesario definir las variables y/o características del Dominio de Entrada y las del Dominio de Salida.

El Proceso de Fuzzificación es representar mediante grupos de conjuntos fuzzy, cada una de las variables y/o características del Dominio de Entrada y cada una de las de Salida, dentro de los rangos de valores factibles para cada caso.

#### ETAPA DE FUNCIONAMIENTO

##### Proceso de Inferencia.

Es el proceso de control propiamente dicho, conformado por las siguientes etapas:

- ✓ transformación de las entradas al dominio fuzzy,
- ✓ tratamiento de las entradas, mediante las reglas de control,
- ✓ generación de las soluciones fuzzy parciales,
- ✓ generación de la solución fuzzy total.

Para un mejor control, esta representación debe tener las siguientes consideraciones:

✓ Los conjuntos fuzzy vecinos deben estar solapados, una regla del arte recomienda un solapamiento del 25% del área.

✓ Los conjuntos fuzzy deben tener formas geométricas sencillas (triángulos, trapecios) o gaussianas, a fin de requerir una menor cantidad de memoria, para almacenar la misma información. Deben ser números fuzzy, es decir conjuntos convexos y normales

##### Transformación de las entradas al dominio fuzzy.

Es el proceso donde se determinan los grados de pertenencia de las variables y/o características del Dominio de Entrada.

Estas entradas participan de los antecedentes de las reglas.

Es necesario generar un único grado de pertenencia del antecedente, de acuerdo a los conectores lógicos que unen los antecedentes, en cada una de las reglas.

De tal forma si el conector lógico es AND, el grado de pertenencia del antecedente es el mínimo entre los grados de pertenencia de cada variable y/o característica que participa de la regla, en cambio en caso que el conector lógico sea OR, el grado de pertenencia del antecedente es el máximo.

Se define como composición max-min a la relación equivalente a la clásica multiplicación entre vectores y matrices, donde la multiplicación de pares de elementos, es reemplazada por la condición de mínima y la suma por la condición de máxima.

### Tratamiento de las entradas, mediante las reglas de control.

#### Composición max-min.

Una matriz fuzzy es aquella que tiene todos sus elementos definidos como grados de pertenencia a conjuntos fuzzy, es decir resulta una matriz numérica.

Dado el vector A y la matriz M, puede obtenerse el vector B mediante la composición max-min de la siguiente forma:

$$A \circ M = B$$

$$b_j = \max \min (a_i, m_{ij}) \rightarrow \text{producto fuzzy del vector A y la columna j de M.}$$

Los conjuntos fuzzy, se identifican como vectores numéricos:

$$A = (a_1, \dots, a_n)$$

$$B = (b_1, \dots, b_p)$$

Donde,

$$a_i = \mu_A(x_i)$$

$$b_j = \mu_B(y_j)$$

### Fuzzy Hebb FAMs

La mayoría de los sistemas fuzzy que se encuentran en las aplicaciones son las denominadas Hebb FAMs, es decir basadas en la interpretación del postulado de aprendizaje de Hebb, donde la medida de relación del sistema, está dado por el producto entre las señales de entrada y de salida.

Para el caso de sistemas fuzzy, donde la entrada es el vector A y la salida el vector B, es posible obtener la matriz Hebb fuzzy, aplicando la composición max-min entre estos vectores:

$$M = A^T \circ B$$

Donde  $m_{ij} = \min(a_i, b_j)$

De esta forma es posible obtener la matriz Fuzzy numérica, de una relación fuzzy (A, B).

Este razonamiento considera que la entrada afecta a todas las reglas en forma simultánea (comportamiento paralelo).

De tal forma una entrada activa todas las reglas ( $A_k, B_k$ ) en paralelo, pero en diferente grado. Si  $A'$  satisface solamente parcialmente el antecedente  $A_k$ , el consecuente asociado  $B_k$  se activa también en forma parcial  $B_k'$ . Si  $A'$  no satisface  $A_k$ , el consecuente  $B_k$  no es activado y en este caso  $B_k'$  es igual al conjunto vacío.

### Inferencia mediante las reglas.

En casos prácticos si se tiene un sistema fuzzy que define la relación entre dos Dominios, una entrada a dicho sistema generalmente es un vector binario con un solo 1 y el resto de los elementos 0.

Cuando se aplica esta entrada a la regla (A, B), el valor de  $x_i$  activa A con un grado  $\mu_A(x_i)$ .

Si existen varias entradas, se deben combinar para generar un grado de pertenencia del antecedente  $\mu_{ant}(x_i)$ .

### PROCESO DE DEFUZZIFICACION

Para obtener una salida única no fuzzy, se realiza un proceso de defuzzificación de la salida fuzzy  $B_{SAL}$ .

La defuzzificación de las salidas consiste en obtener un valor numérico representativo de cada salida del sistema.

Existen varias técnicas de defuzzificación, las más utilizadas son:

Teniendo la Matriz Fuzzy numérica de la regla y las entradas, podemos obtener la salida que genera dicha regla:

$$A' \circ M = (A' \circ A^T) \circ B = \min(\mu_{ant}(x_i), \mu_B) = B'$$

pues

$$(A' \circ A^T) = \mu_{ant}(x_i)$$

Es decir que la salida asociada con la regla, también es activada con un grado  $\mu_{ant}(x_i)$ .

#### Método del centroide o centro de gravedad:

Una vez obtenida la función de pertenencia global, se calcula el valor exacto de la salida como el centroide, CE de esta función:

$$y = \frac{\int y \mu(y) dy}{\int \mu(y)}$$

$$y = \frac{\sum_{k=1}^n CE_k \mu(y_k)}{\sum_{k=1}^n \mu(y_k)}$$

#### Método de las áreas:

En este caso en lugar de los grados de pertenencia, se utilizan las áreas de cada salida parcial:

$$y = \frac{\sum_{k=1}^n CE_k \mu(y_k)}{\sum_{k=1}^n \mu(y_k)}$$