

Facultad de Ciencia y Tecnología – UADER – Sede Oro Verde.
Licenciatura en Sistemas Informáticos - MATEMÁTICA DISCRETA – Examen Final
10/03/2021 (MV)

Ejercicio 1. (21 puntos)

- a) En una clase de Matemática Discreta que consta de 40 alumnos se desean armar equipos de 4 alumnos para la entrega de un trabajo práctico. Si no pueden quedar alumnos sin grupo, indicar de cuántas maneras es posible armarlos.
- b) Para el armado de una máquina de estados finitos se sabe que $|S|=7$, $I = \{a, b, c\}$ y $O = \{0, 1\}$. Indicar cuántas máquinas de estado finito distintas se pueden armar con esta información.
- c) Del apartado anterior, mostrar en particular una, que detecte la cadena abca en la posición $4k$ (con k natural).

Ejercicio 2. (24 puntos)

- a) Demostrar por inducción matemática, para todo n impar mayor o igual a 1:
$$2^{2^n} + 1 \text{ es divisible por } 5.$$
- b) Utilizar el algoritmo de Euclides para hallar todos los $x, y \in \mathbb{Z}$ tales que
$$36x + 102y = \text{mcd}(36, 102)$$

Ejercicio 3. (15 puntos)

Sea el conjunto $G = \mathbb{Q} - \{0\}$ se define la operación $*$ como $x * y = 3xy$ (del lado derecho se tiene la multiplicación usual de números reales. Probar que $(G, *)$ es un grupo abeliano.

Ejercicio 4. (20 puntos)

Dado el anillo $R = \left(\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_4, \overset{\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_4}{+}, \overset{\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_4}{\cdot} \right)$, utilizar el teorema chino del resto para responder:

- a) ¿Es posible encontrar un anillo isomorfo a R donde sus elementos sean ternas ordenadas?
- b) Hallar el opuesto de $(2, 3)$.
- c) ¿Cuántos elementos de R tienen inverso multiplicativo?
- d) De ser posible, hallar los inversos multiplicativos de $(1, 3)$ y de $(1, 2)$.
- e) ¿Es R un anillo conmutativo con elemento unidad? ¿es Cuerpo?

Ejercicio 5. (20 puntos)

Resolver la relación de recurrencia: $a_n + 2a_{n-1} - 3a_{n-2} = 5^n$, $a_0 = a_1 = -1$.