מאמץ פיולה – קירכהוף והטנזור האלסטי
תחת הנושא של אלסטיות סופית במכניקת הרצף

מגישה – זרוהי פפיאן

גופים הם בעלי תכונה פיזיקלית אחת בסיסית – הם **תופסים שטח** (*occupy region*) במרחב האוקלידי. למרות שגוף נתון תופס תחומים שונים בזמנים שונים, ואף אחד מאותם התחומים לא יכול להיות קשור באופן מהותי עם הגוף, נמצא זאת נוח לבחור את המרחב $\mathfrak{B}$ בתור **ייחוס** (*reference*) ולזהות את נקודות הגוף עם מיקומם ב$\mathfrak{B}$.

באופן פורמלי, גוף $\mathfrak{B}$ יקרא **רגולרי** במרחב האוקלידי; כאשר לנוחות נתייחס אליו בתור **תצורת הייחוס** (*reference configuration*) ונקודה $p \in \mathfrak{B}$ תקרא **נקודה חומרית** (*material point*).

מכניקת הרצף היא, לרוב, מחקר על **גופים מעוותים** (*deforming bodies*). מבחינה מתמטית, **העיוות** של הגוף מתקבל באמצעות ההעתקה f המעתיקה כל נק' חומרית p לנקודה $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{p})$.

כאשר נשים לב כי הדרישה שהגוף לא יחדור לעצמו באה לידי ביטוי על ידי ההנחה שf היא 1:1.

∇f מייצגת, באופן מקומי, את הנפח אחרי הדפורמציה - לכל נפח מקורי ליחידה; ז"א $\nabla f \neq 0$.

נציג את מושג ה**עיוות של $\mathfrak{B}$** האומר כי f זוהי העתקה 1:1 וחלקה המעתיקה את $\mathfrak{B}$ על המרחב האוקלידי הסגור, כך שמתקיים כי $\det \nabla f > 0$.

ווקטור המייצג את שינוי המיקום של p: $u(p) = f(p) - p$; וכאשר u קבוע אז $f(p) = p + u$.

הטנזור הבא נקרא **גרדיאנט הדפורמציה (העיוות)** (*deformation gradient*) $F(p) = \nabla f(p)$.

במכניקה הקלאסית, **הכוח** על **קפיץ אלסטי** תלוי רק <u>בשינוי אורך הקפיץ</u>; (לא באורך עבר/קצב שינוי האורך כתלות בזמן). עבור גוף, **גרדיאנט העיוות $\boldsymbol{F}$** מודד את <u>שינויי המרחק המקומי</u>, לכן זה נראה טבעי להגדיר **גוף אלסטי** בתור אחד ש**המשוואה המכוננת**(1) (*constitutive equations*) שלו מביאה את **המאמץ** $T(\boldsymbol{x},t)$ ב$x = x(\boldsymbol{p},t)$: כאשר גרדיאנט העיוות $F(p,t)$ ידוע:

$$(25.1)\quad T(\boldsymbol{x},t) = \widehat{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{p},t),\boldsymbol{p}) \quad (\equiv \widehat{T}(F))$$

<u>רשמית</u>, **גוף אלסטי** זהו **גוף חומרי** שהמעמד המכונן שלו $\mathfrak{b}$(2) (*constitutive class*) מוגדר ע"י **פונק' תגובה** חלקה $\widehat{T} : Lin^{+} \times \mathfrak{B} \to Sym$

(1) **משוואה מכוננת** = משוואה המאפיינת את תגובת החומר הנתון לעיוותים או שיעורי דפורמציה
(2) $\mathfrak{b}$ = קבוצת כל התהליכים הדינמיים (x,T) הקונסיסטנטיים ל(1)

השימוש הנפוץ של מדידת מאמץ הוא – מאמץ קושי.

מאמץ קושי T (*Cauchy stress*) מודד את הכוח ליחידה **בתצורת העיוות** (*deformed* configuration).

בבעיות רבות, במיוחד באלה הקשורות במוצקים - זה לא נוח לעבוד עם T, שכן **תצורת העיוות** אינה ידוע מראש או אף היא זאת שצריך למצוא; מסיבה זו נעדיף לעבוד עם **טנזור מאמץ** (*stress tensor*) - הנותן כוח הנמדד ליחידה **בתצורת הייחוס** (*reference configuration*), ז"א לפני העיוות - שאותו ניתן פשוט לבחור.

מאמץ קושי T	טנזור מאמץ
תצורת העיוות (לא ידוע מראש..)	תצורת הייחוס (לפני)
שדה **מרחבי**	**שדה חומרי**

בכדי לתאר את העיוות של הגוף מתצורת הייחוס לתצורת העיוות, נמדל את הגוף בתצורת הייחוס שלו כאוסף סופי של טטראדרים שכנים. כך שככל שמספר הטטראדרים גדל ניתן להעריך לגוף צורה שרירותית.

לא נפרט מעבר.

נעזר ונסכם את הפרקים 27,29 בספר:

An Introduction to Continuum Mechanics-Academic / Morton E. Gurtin
Mathematics in Science and Engineering 158, Press (1981)

כאשר בפרק 27 מגדירים את המושג **מאמץ פיולה – קירכהוף** ומביאים הסתכלות נוספת של הנוסחאות מפרק 25 – רק שהפעם עם טנזור מאמץ במקום טנזור קושי.

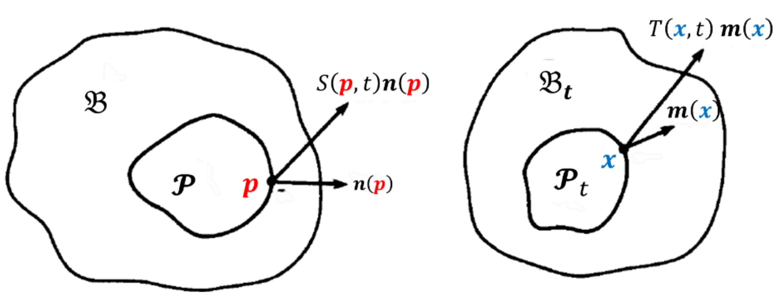
בפרק 29 חוזרים ל**טנזור האלסטי** ומגדירים את **המאפיינים האינווריאנטים** ואת קבוע האלסטיות.

27. מאמץ פיולה - קירכהוף (*THE PIOLA-KIRCHHOFF STRESS*)

יהי (x,T) **תהליך דינמי**. נרשום את **הכוח הכולל על פני השטח** $\mathcal{P}$ בזמן t כאינטגרל מעל $\partial\mathcal{P}$; התוצאה[3] :

$$\int_{\partial\mathcal{P}_t} \mathbf{Tm}\,dA = \int_{\partial\mathcal{P}} (\det \boldsymbol{F})\mathbf{T_m}\mathbf{F^{-T}}\mathbf{n}\,dA$$

$(6.18)_2 \quad \int_{\partial f(\mathcal{P})} \mathrm{T}(\mathbf{x})\mathrm{m}(\mathbf{x})\,dA_{\boldsymbol{x}} = \int_{\partial\mathcal{P}} \mathrm{T}(\mathrm{f}(\mathbf{p}))\mathrm{G}(\mathbf{p})\mathrm{n}(\mathbf{p})\,dA_{\boldsymbol{p}}$ $G = (\det \mathrm{F})F^{-T}$ $(Chap6 - \; Q11) \;\; m(x)dA_x = G(p)n(p)dA_p$	$\int_{\partial\mathcal{P}_t} \mathbf{Tm}\,dA \underset{Q11}{\underset{(6.18)_2}{=}} \int_{\partial\mathcal{P}} \mathbf{T_m}\mathrm{G}\mathbf{n}\,dA$ $= \int_{\partial\mathcal{P}} \mathbf{T_m}\,\overbrace{(\det \boldsymbol{F})\mathbf{F^{-T}}}^{G}\,\mathbf{n}\,dA$ $= \int_{\partial\mathcal{P}} \underbrace{(\det \boldsymbol{F})\mathbf{T_m}\mathbf{F^{-T}}}_{\mathbf{S}}\,\mathbf{n}\,dA$



$$(1) \quad \mathbf{S} := (\det \mathbf{F})\;\mathbf{T_m}\mathbf{F^{-T}}$$

$$(2) \quad \int_{\partial\mathcal{P}_t} \mathbf{Tm}\,dA = \int_{\partial\mathcal{P}} \mathbf{Sn}\,dA$$

השדה המוגדר לפי (1) $\boldsymbol{S} : \boldsymbol{\mathcal{B}} \times \mathbb{R} \to \boldsymbol{Lin}$ - נקרא **מאמץ פיולה קירכהוף** (*Piola-Kirchhoff stress*)
[בספרות – פעמים רבות מתייחסים לS בתור **מאמץ פיולה קירכהוף ה1**]

לפי (2), $\mathbf{Sn}$ זהו **כוח פני השטח** הנמדד לכל אזור יחידה ב**תצורת הייחוס**.
<u>הסבר</u>: נהוג לבחור את צורת הגוף בזמן נתון ולקבוע אותו כתחום ייחוס של הגוף, ז"א "תצורת ייחוס"

באופן דומה, אם b הוא כוח הגוף המתאים ל (x,T), אז:

$$(3) \quad \int_{\mathcal{P}_t} \mathrm{b}\,dV = \int_{\mathcal{P}} \mathrm{b_m}(\det \mathrm{F})\,dV = \int_{\mathcal{P}} \mathrm{b_0}\,dV$$

$$(4) \quad \mathrm{b_0} = (\det \mathrm{F})\mathrm{b_m}$$

b_0 נקרא **כוח ייחוס הגוף** (*reference body force*); הוא נותן את כוח הגוף הנמדד ליחידת נפח **בתצורת הייחוס**.

(3) m, n = שדה נורמלי של היחידות החיצוניות (*outward unit normal fields*) על $\partial\mathcal{P}_t,\; \partial\mathcal{P}$
T_m = **תיאור החומר** (*material description*) של T

נציג את המשפט הבא:

(משפט) מאמץ פיולה - קירכהוף S מספק את **משוואות האיזון**[4] (*balance equations*):

$$
\begin{aligned}
&\int_{\partial\mathcal{P}} \mathbf{Sn}\, dA + \int_{\mathcal{P}} \mathrm{b}_0\, dV = \int_{\mathcal{P}} \ddot{\mathrm{x}}\rho_0\, dV \\
&\int_{\partial\mathcal{P}} (\mathrm{x}-\mathrm{o}) \times \mathbf{Sn}\, dA + \int_{\mathcal{P}} (\mathrm{x}-\mathrm{o}) \times \mathrm{b}_0\, dV = \int_{\mathcal{P}} (\mathrm{x}-\mathrm{o}) \times \ddot{\mathrm{x}}\rho_0\, dV \qquad \forall\mathcal{P}
\end{aligned}
\tag{5}
$$

<u>הוכחה:</u>

<table>
<tr>
<td rowspan="5">$$\begin{aligned} &\int_{\partial\mathcal{P}} \mathbf{Sn}\, dA + \int_{\mathcal{P}} \mathrm{b}_0\, dV \\ \underset{(2+3)}{=} &\int_{\partial\mathcal{P}_t} \mathbf{Tm}\, dA + \int_{\mathcal{P}_t} \mathrm{b}\, dV \\ \underset{(14.9)}{\overset{(14.2)_1}{=}} &\int_{\mathcal{P}_t} \dot{\mathrm{v}}\rho\, dV \underset{(12.7)}{=} \int_{\mathcal{P}} \ddot{\mathrm{x}}\rho_0\, dV \end{aligned}$$</td>
<td>(2) $\int_{\partial\mathcal{P}_t} \mathbf{Tm}\, dA = \int_{\partial\mathcal{P}} \mathbf{Sn}\, dA$</td>
</tr>
<tr>
<td>(3) $\int_{\mathcal{P}_t} \mathrm{b}\, dV = \int_{\mathcal{P}} \mathrm{b}_{\mathrm{m}}(\det \mathrm{F})\, dV = \int_{\mathcal{P}} \mathrm{b}_0\, dV$</td>
</tr>
<tr>
<td>(12.7) $\int_{\mathcal{B}_t} \mathbf{\Phi}(\mathbf{x},\mathbf{t})\boldsymbol{\rho}(\mathbf{x},\mathbf{t})\, dV_x = \int_{\mathcal{B}} \Phi_{\mathbf{m}}(\mathbf{p},\mathrm{t})\rho_0(\mathbf{p})\, dV_{\mathrm{p}}$</td>
</tr>
<tr>
<td>(14.9) $\mathbf{S}(\mathbf{n}) = \mathbf{Tn}$</td>
</tr>
<tr>
<td>$(14.2)_1$ $\int_{\mathcal{P}_t} \dot{\mathrm{v}}\rho\, dV = \int_{\partial\mathcal{P}_t} \mathbf{S}(\mathbf{n})\, dA + \int_{\mathcal{P}_t} b\, dV$ [מאזן המומנטום הלינארי]</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr>
<td rowspan="4">$$\begin{aligned} &\int_{\partial\mathcal{P}} (\mathrm{x}-\mathrm{o}) \times \mathbf{Sn}\, dA + \int_{\mathcal{P}} (\mathrm{x}-\mathrm{o}) \times \mathrm{b}_0\, dV \\ \underset{(*)}{=} &\int_{\partial\mathcal{P}} (\mathrm{x}-\mathrm{o}) \times \mathbf{T}_{\mathbf{m}}\mathbf{G}\,\mathrm{n}\, dA + \int_{\mathcal{P}} (\mathrm{x}-\mathrm{o}) \times \mathrm{b}_0\, dV \\ \underset{(6.18)_3}{=} &\int_{\partial\mathcal{P}_t} (\mathrm{x}-\mathrm{o}) \times \mathbf{Tm}\, dA + \int_{\mathcal{P}} (\mathrm{x}-\mathrm{o}) \times \mathrm{b}_0\, dV \\ \underset{(**)}{=} &\int_{\partial\mathcal{P}_t} \mathrm{r} \times \mathbf{Tm}\, dA + \int_{\mathcal{P}} \mathrm{r} \times \mathrm{b}_0\, dV \underset{(3)}{=} \int_{\partial\mathcal{P}_t} r \times \mathbf{Tm}\, dA + \int_{\mathcal{P}_t} \mathrm{r} \times \mathbf{b}\, dV \\ \underset{(14.9)}{\overset{(14.2)_2}{=}} &\int_{\mathcal{P}_t} r \times \dot{\mathrm{v}}\rho\, dV \underset{(12.7)}{\overset{(**)}{=}} \int_{\mathcal{P}} (\mathrm{x}-\mathrm{o}) \times \ddot{\mathrm{x}}\rho_0\, dV \end{aligned}$$</td>
<td>$(6.18)_3$ $\int_{\partial f(\mathcal{P})} (\mathrm{x}-\mathrm{o}) \times \mathrm{T}(\mathrm{x})\mathrm{m}(\mathrm{x})\, dA_x = \int_{\partial\mathcal{P}} (\mathrm{f}(\mathrm{p})-\mathrm{o}) \times \mathrm{T}\big(\mathrm{f}(\mathrm{p})\big)\mathrm{G}(\mathrm{p})\mathrm{n}(\mathrm{p})\, dA_p$</td>
</tr>
<tr>
<td>(12.7) $\int_{\mathcal{B}_t} \mathbf{\Phi}(\mathbf{x},\mathbf{t})\boldsymbol{\rho}(\mathbf{x},\mathbf{t})\, dV_x = \int_{\mathcal{B}} \Phi_{\mathbf{m}}(\mathbf{p},\mathrm{t})\rho_0(\mathbf{p})\, dV_{\mathrm{p}}$</td>
</tr>
<tr>
<td>$(14.2)_2$ $\int_{\mathcal{P}_t} r \times \dot{\mathrm{v}}\rho\, dV = \int_{\partial\mathcal{P}_t} \mathbf{r} \times \mathbf{S}(\mathbf{n})\, dA + \int_{\mathcal{P}_t} r \times b\, dV$</td>
</tr>
<tr>
<td>$(*)$ $S = (\det \mathbf{F})\, \mathbf{T}_{\mathbf{m}}\mathbf{F}^{-\mathbf{T}} = \mathbf{T}_{\mathbf{m}}\mathrm{G}$ $\quad G = (\det \mathrm{F})F^{-T}$
$(**)$ $r := (x-o)$</td>
</tr>
</table>

■

(4) **משוואות האיזון** = הצהרה כללית המאפיינת את סיבת התנועה של גוף חומרי $\mathfrak{B}$

ראינו בעבר כי T מקיימת את **משוואות השדה**:

$$(25.14)\quad div\, T + b = \rho\dot{v} \quad (motion\ eq.)$$
$$T = T^T \quad (Symetry)$$

כעת, באופן דומה נראה זאת עבור S:

(משפט) $\boldsymbol{S}$ מקיימת את **משוואות השדה**[5] (*field equations*)

$$(6)\quad \begin{aligned} \mathrm{Div}\,\boldsymbol{S} + \boldsymbol{b_0} &= \rho_0\ddot{\boldsymbol{x}} \\ \boldsymbol{SF^T} &= \boldsymbol{FS^T} \end{aligned}$$

<u>הוכחה:</u>

$(5)_1\quad \int_{\partial\mathcal{P}} \mathbf{Sn}\, dA + \int_{\mathcal{P}} \mathrm{b}_0\, dV = \int_{\mathcal{P}} \ddot{\mathbf{x}}\boldsymbol{\rho_0}\, dV$	$\int_{\mathcal{P}} (\mathrm{Div}\, S + b_0 - \rho_0\ddot{x})\, dV$ $= \int_{\mathcal{P}} \mathbf{Div}\,\boldsymbol{S}\, dV + \int_{\mathcal{P}} (b_0 - \rho_0\ddot{x})\, dV$ $\underset{Div}{=} \int_{\partial\mathcal{P}} \mathbf{Sn}\, dA + \int_{\mathcal{P}} (b_0 - \rho_0\ddot{x})\, dV \underset{(5)_1}{=} 0$
$\int_{\partial R} \mathbf{Sn}\, dA = \int_{R} \mathrm{Div}\, S\, dV$ [משפט הדיברגנץ]	היחס הזה מתקיים $\forall\mathcal{P}$ - אז $(6)_1$ חייב להתקיים

$(1)\ \boldsymbol{S} = (\det \boldsymbol{F})\, \boldsymbol{T_m}\, \boldsymbol{F^{-T}}$	$\underset{(1)}{\Rightarrow}\quad T_m = (\det \boldsymbol{F})^{-1}\boldsymbol{SF^T}$
$(Def)\ T\ is\ symmetric{:}\quad T = T^T$	$\underset{(sym)}{\overset{Def}{\Rightarrow}}\quad \boldsymbol{SF^T} = \boldsymbol{FS^T}$

■

חשוב לציין כי לפי $(6)_2$, $\boldsymbol{S}$ בד"כ **לא סימטרית**.

כעת, <u>מהסימטריה</u> של T והבאים נקבל כי - **כוח המאמץ של $\boldsymbol{\mathcal{P}}$** בזמן t ניתן ע"י: $\int_{\mathcal{P}} \mathbf{S}\cdot\dot{F}\, dV$

$(1)\ \mathbf{S} = (\det\mathbf{F})\, \mathbf{T_m F^{-T}}$	$(*)\quad T\cdot\boldsymbol{D} \underset{(22.4)}{=} T\cdot\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}(\boldsymbol{L}+\boldsymbol{L^T})$ $\underset{(1.6)_a}{=} T\cdot\boldsymbol{L}$ $\underset{(8.8)_1}{=} T\cdot(\dot{F}_0F_0^{-1})$ $\underset{(1.5)_2}{=} (TF_0^{-T})\cdot\dot{F}_0$
$(3)\ \int_{\mathcal{P}_t} \mathrm{b}\, dV = \int_{\mathcal{P}} \mathbf{b_m}(\mathbf{det}\,\mathbf{F})\, dV = \int_{\mathcal{P}} \mathbf{b_0}\, dV$	
$(1.5)_2\quad R\cdot(ST) = (S^TR)\cdot T = (RT^T)\cdot S$	
$(1.6)_a\quad S\cdot T = S\cdot T^T = S\cdot\left\{\frac{1}{2}(T+T^T)\right\}$	$\int_{\mathcal{P}_t} T\cdot D\, dV \overset{(*)}{=} \int_{\mathcal{P}_t} (\boldsymbol{T}F_0^{-T})\cdot\dot{F}_0\, dV$ $\underset{(3)}{=} \int_{\boldsymbol{\mathcal{P}}} (\mathbf{det}\,\boldsymbol{F})(\boldsymbol{T_m}F^{-T})\cdot\dot{F}\, dV$ $\underset{(1)}{=} \int_{\mathcal{P}} \mathbf{S}\cdot\dot{F}\, dV$
$(8.8)_1\quad \dot{F} = L_mF$ $L = \mathrm{grad}\ \mathrm{v}$ (**velocity gradient**)	
$(Ch\ 9)\ \ D = \frac{1}{2}(L+L^T) = \frac{1}{2}(grad\ v + grad\ v^T)$	

■

(5) **משוואות השדה** = מד"ר חלקיות הקובעות את דינמיקת השדה.
(חלקיות כי תלויות במרחב ובזמן - לפחות 2 משתנים)

נציג את הטענה הבאה שתעזור לנו להגדיר בצורה אלטרנטיבית את **משפט הכוח** (15.2):

$$(7)\qquad \begin{gathered}\int_{\partial\mathcal{P}_t} \mathrm{Tm}\cdot\mathrm{v}\,dA = \int_{\partial\mathcal{P}_t} (\mathrm{Tv})\cdot\mathrm{m}\,dA = \int_{\partial\mathcal{P}} \mathrm{Sn}\cdot\dot{\mathrm{x}}\,dA \\ \int_{\mathcal{P}_t} \mathrm{b}\cdot\mathrm{v}\,dV = \int_{\mathcal{P}} \mathrm{b_0}\cdot\dot{\mathrm{x}}\,dV\end{gathered}$$

<u>הוכחה:</u>

$(1)\ \mathbf{S} = (\det\mathbf{F})\,\mathbf{T_m}\mathbf{F}^{-\mathbf{T}} \qquad G = (\det F)F^{-T}$	$\int_{\partial\mathcal{P}_t} \mathrm{Tm}\cdot\mathrm{v}\,dA \underset{(Ch\,1)}{\overset{\text{סימטרי}}{=}} \int_{\partial\mathcal{P}_t} (\mathrm{Tv})\cdot\mathrm{m}\,dA \underset{(6.18)_1}{\overset{(*)}{=}} \int_{\partial\mathcal{P}} \mathbf{T_m}(\det\mathbf{F})\mathbf{F}^{-\mathbf{T}}\mathbf{n}\cdot\dot{\mathrm{x}}\,dA \underset{(1)}{=} \int_{\partial\mathcal{P}} \mathbf{Sn}\cdot\dot{\mathrm{x}}\,dA$
$(Ch\,1)\quad Su\cdot v = u\cdot S^T v$	
$(6.18)_1\ \int_{\partial f(\mathcal{P})} \mathrm{v(x)}\cdot m(x)\,dA_x = \int_{\partial\mathcal{P}} \mathrm{v\big(f(p)\big)}\cdot G(p)n(p)\,dA_p$	
$(*)\ \int_{\partial\mathcal{P}_t} \mathbf{Tm}\,dA = \int_{\partial\mathcal{P}} \mathbf{T_m}(\det\boldsymbol{F})\mathbf{F}^{-\mathbf{T}}\mathbf{n}\,dA = \int_{\partial\mathcal{P}} \mathbf{T_m}\mathbf{Gn}\,dA$	

$(4)\ \mathrm{b_0} = (\det\mathrm{F})\mathrm{b_m}$	$\int_{\mathcal{P}_t} \mathrm{b}\cdot\mathrm{v}\,dV \underset{(6.14)_1}{=} \int_{\mathcal{P}} \mathbf{b_m}(\det\mathbf{F})\cdot\dot{\mathrm{x}}\,dV \underset{(4)}{=} \int_{\mathcal{P}} \mathbf{b_0}\cdot\dot{\mathrm{x}}\,dV$
$(6.14)_1\ \int_{f(\mathcal{P})} \varphi(x)\,dV_x = \int_{\mathcal{P}} \varphi\big(f(p)\big)\det F(p)\,dV_p$	

■

(משפט הכוח) (*Theorem of Power Expended*) בהינתן $\mathcal{P}$

$$(8)\qquad \int_{\partial\mathcal{P}} \mathbf{Sn}\cdot\dot{\mathrm{x}}\,dA + \int_{\mathcal{P}} \mathrm{b_0}\cdot\dot{\mathrm{x}}\,dV = \int_{\mathcal{P}} \mathrm{S}\cdot\dot{\mathrm{F}}\,dV + \frac{d}{dt}\int_{\mathcal{P}} \frac{\dot{\mathrm{x}}^2}{2}\rho_0\,dV$$

<u>הוכחה:</u>

$(7)_1\quad \int_{\partial\mathcal{P}_t} \mathrm{Tm}\cdot\mathrm{v}\,dA = \int_{\partial\mathcal{P}_t} (\mathrm{Tv})\cdot\mathrm{m}\,dA = \int_{\partial\mathcal{P}} \mathrm{Sn}\cdot\dot{\mathrm{x}}\,dA$	$(*)\quad \int_{\mathcal{P}_t} \frac{\mathrm{v}^2}{2}\rho\,dV \underset{(12.7)}{=} \int_{\mathcal{P}} \frac{\dot{x}^2}{2}\rho_0\,dV$
$(7)_2\quad \int_{\mathcal{P}_t} \mathrm{b}\cdot\mathrm{v}\,dV = \int_{\mathcal{P}} \mathrm{b_0}\cdot\dot{\mathrm{x}}\,dV$	$\int_{\partial\mathcal{P}} \mathbf{Sn}\cdot\dot{\mathrm{x}}\,dA + \int_{\mathcal{P}} \mathrm{b_0}\cdot\dot{\mathrm{x}}\,dV \underset{(7)}{=} \int_{\partial\mathcal{P}_t} \mathbf{S(n)}\cdot v\,dA + \int_{\mathcal{P}_t} \mathrm{b}\cdot v\,dV \underset{(15.2)}{=} \int_{\mathcal{P}_t} T\cdot D\,dV + \frac{d}{dt}\overset{*}{\int_{\mathcal{P}_t}} \frac{v^2}{2}\rho\,dV \underset{(*)}{=} \underbrace{\int_{\mathcal{P}} S\cdot\dot{F}\,dV}_{\text{כוח הלחץ}} + \frac{d}{dt}\int_{\mathcal{P}} \frac{\dot{\mathrm{x}}^2}{2}\rho_0\,dV$
$(12.7)\ \int_{\mathcal{P}_t} \mathbf{\Phi(x,t)\rho(x,t)}\,dV_x = \int_{\mathcal{P}} \Phi_\mathbf{m}(\mathbf{p},\mathrm{t})\rho_0(\mathbf{p})\,dV_\mathrm{p}$	
$(15.2)\quad \int_{\partial\mathcal{P}_t} S(n)\cdot v\,dA + \int_{\mathcal{P}_t} b\cdot v\,dV = \int_{\mathcal{P}_t} T\cdot D\,dV + \frac{d}{dt}\int_{\mathcal{P}_t} \frac{v^2}{2}\rho\,dV$ $\begin{bmatrix}\textit{Theorem of}\\ \textit{Power Expended}\end{bmatrix}$ *where* $D = \frac{1}{2}(grad\ v + grad\ v^T)$ *is the stretching*	

■

אחת האקסיומות העיקריות של המכניקה היא ש: " **התגובה החומרית בלתי תלויה בצופה**."

אקסיומה זו מעולם לא נאמרת במפורש בספרים יסודיים על מכניקה, כנראה מכיוון שהיא נראית כה ברורה;

דוגמה פשוטה להבהרה: מיתר אלסטי דק הממושקל בקצה המסתובב במהירות זוויתית קבועה ובעל התארכות δ

האקסיומה טוענת כי:

[הכוח בחוט המייצר הארכה זו] **זהה ל** [כוח הנדרש ליצירת ההתארכות δ כשהמיתר מוחזק במקום אחד]

שתי תנועות המיתר נבדלות זו מזו רק בשינוי הצופה; כלומר, צופה המסתובב עם המיתר רואה את המיתר עובר

אותה תנועה כמו "צופה דומם" המרחיב את המיתר ביד.

כעת, נסתכל על התוצאות שנקבעו עד כה; ניתן לומר כי הן השלכות של **מאזן הכוחות** (*balance of momentum*)

והן אינן תלויות **במבנה של הגוף**. מההנחה כי הגוף **אלסטי**, S ניתנת ע"י **משוואה מכוננת** מהצורה:

$(1)\quad \mathbf{S} = (\det \mathbf{F})\,\mathbf{T_m F^{-T}}$	$(9)\ \ S = \hat{\mathrm{S}}(\mathrm{F})\quad with:$ $(10)\ \ \hat{\mathrm{S}}(\mathrm{F}) = (\det F)\hat{\mathrm{T}}(\mathrm{F})\mathrm{F}^{-\mathrm{T}}$
$(25.1)\ \ T(x,t) = \hat{T}(F(p,t),p)$	

[כמו בעבר, אנחנו לא מזכירים את התלות המפורשת של $\hat{\mathrm{S}}$ על **נק' חומרית** $\boldsymbol{p}$]. נבחר $Q \in Orth^+$ ונקבל כי:

$$(11)\quad \hat{\mathbf{S}}(\boldsymbol{QF}) = \boldsymbol{Q}\hat{\mathbf{S}}(\boldsymbol{F})\quad \forall F \in Lin^+, Q \in Orth^+$$

כאשר יחס זה מבטא את הדרישה שהתגובה בלתי תלויה בצופה.

זה יכול לשמש כדי להסיק **משוואות מכוננות** עבור S במקביל ל(25.5). עם זאת, קל יותר להמשיך ישירות ולקבל:

$$(12)\quad \mathrm{S} = (\det F)F\bar{T}(C)$$

בהגדרת (13) – נוכל לקבל את (14):

$$(13)\quad \bar{S}(C) = \sqrt{\det C}\,\bar{T}(C)$$

$$(14)\quad S = F\bar{S}(C)$$

הסבר:

$(10)\quad \hat{\mathrm{S}}(\mathrm{F}) = (\det F)\hat{\mathrm{T}}(\mathrm{F})\mathrm{F}^{-\mathrm{T}}$	$\hat{S}(QF) \underset{(10)}{=} (\det QF)\hat{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{QF})(QF)^{-T}$ $\underset{(25.3)}{=} (\boldsymbol{\det QF})Q\hat{T}(F)Q^T(\boldsymbol{QF})^{-\boldsymbol{T}}$ $\underset{(*)}{=} (\boldsymbol{\det F})Q\hat{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{F})Q^T Q\boldsymbol{F}^{-\boldsymbol{T}}$ $\underset{(10)}{=} Q\hat{S}(F)$
$(*)\quad Q \in Orth^+\quad then: \begin{matrix} det(QF) = det\,F \\ (QF)^{-T} = QF^{-T} \end{matrix}$	
$(25.3)\quad Q\hat{T}(F)Q^T = \hat{T}(QF)\quad \begin{matrix} F \in Lin^+ \\ Q \in Orth^+ \end{matrix}$	

$(9)\quad \mathrm{S} = \hat{\mathrm{S}}(\mathrm{F})$	$S \underset{(9)}{=} \hat{\mathrm{S}}(\mathrm{F}) \underset{(10)}{=} (\det F)\hat{\mathbf{T}}(\mathbf{F})\mathrm{F}^{-\mathrm{T}}$ $\underset{(25.5)_3}{=} (\det F)F\bar{T}(C)F^T\mathrm{F}^{-\mathrm{T}}$ $= (\det F)F\bar{T}(C)$
$(10)\ \ \hat{\mathrm{S}}(\mathrm{F}) = (\det F)\hat{\mathrm{T}}(\mathrm{F})\mathrm{F}^{-\mathrm{T}}$	
$(25.5)\ \ \begin{matrix} \hat{T}(F) = F\overset{*}{T}(U)F^T \\ \hat{T}(F) = F\tilde{T}(C)R^T \\ \hat{T}(F) = F\bar{T}(C)F^T \end{matrix}\quad C = U^2 = F^T F$	

(13) $\bar{S}(C) = \sqrt{\det C}\,\bar{T}(C)$	$\overset{(12)}{\Rightarrow}$ $S = (\det \boldsymbol{F}) F\bar{T}(C) \underset{(**)}{=} \sqrt{\det \boldsymbol{C}}\, F\bar{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{C}) \underset{(13)}{=} F\bar{S}(C)$
$(**)$ $\det C = \det(F^T F) = (\det F)^2$	

■

נשים לב כי לפי (13) והחלקות של $\bar{T}$ נקבל כי $\bar{S}$ היא העתקה חלקה של $Psym \to Sym$.

נשכתב את **משוואות השדה הבסיסיות** בצורה הבאה:

$(6)_1$ $\mathrm{Div}\,\boldsymbol{S} + \boldsymbol{b_0} = \rho_0 \ddot{\boldsymbol{x}}$, $\boldsymbol{SF^T} = \boldsymbol{FS^T}$ [משוואת שדה $\boldsymbol{S}$]	(15) $S = F\bar{S}(C)$, $C = F^T F$, $F = \nabla x$, $\mathrm{Div}\, S + b_0 = \rho_0 \ddot{x}$
(14) $S = F\bar{S}(C)$ [משוואה מכוננת]	
(25.13) $T = F\bar{T}(C)F^T$, $C = F^T F$ [משוואה מכוננת]	
(25.14) $div\, T + b = \rho \dot{v}$ $(motion\ eq.)$, $T = T^T$ $(Symetry)$ [משוואת שדה $\boldsymbol{T}$]	
(25.15) $\rho \det F = \rho_0$ $\rho_0\ density$ [מאזן המסה]	

<u>הערות:</u>

- היחס $(6)_2$ נובע באופן אוטומטי מהעובדה כי $\bar{S}$ בעלת ערכים סימטריים
- (15) יוצא רק עם ρ_0, שאנו מניחים שהוא יודע מראש
  ז"א **מאזן המסה** (25.15) לא צריך להיכלל ברשימה של **משוואות השדה**

כל השדות ב (15) בעלי $\mathcal{B} \times \mathbb{R}$ בתור התחום שלהם, והאופרטור Div הוא ביחס **לנקודה החומרית p** ב$\mathcal{B}$.

לעומת זאת, חלק מהשדות ב(25.15) – (25.13) מוגדרים על המסלול $\mathcal{F}$, וחשוב יותר, Div הוא ביחס למקום x **בתצורה הנוכחית**. מסיבה זו: **ניסוח של (15)** נוח יותר בבעיות שהמסלול <u>אינו ידוע מראש</u>.

בעיות הגבול (*boundary-value problems*) של **הגמישות-הסופית** מתקבלות ע"י הצמדת תנאי התחלה והגבול עבור (15). כאשר **תנאי התחלה** בדרך כלל מציינים את התנועה הראשונית ואת המהירות:

$$(16)\quad \begin{aligned} x(p,0) &= x_0(p) \\ \dot{x}(p,0) &= v_0(p) \end{aligned}$$

עם x_0, v_0 שנקבעו על $\mathcal{B}$.

כדי לפרט את **תנאי הגבול** יש להתייחס לשתי קבוצות משנה (רגולריות) קבועות: φ_1, φ_2 על $\partial\mathcal{B}$:

$$s.t. \quad \begin{array}{c} \partial\mathcal{B} = \varphi_1 \cup \varphi_2 \\ \mathring{\varphi}_1 \cap \mathring{\varphi}_2 = \emptyset \end{array} \qquad \mathring{\varphi}_\alpha \; is\ the\ interior\ of\ \varphi_\alpha$$

בקביעת התנועה בφ_1, מתיחה על פני השטח על φ_2: [$\hat{x}, \hat{s}$ שדות ווקטורים]

$$(17) \quad \begin{array}{ll} x = \hat{x} & on \quad \varphi_1 \times [0, \infty) \\ \mathrm{Sn} = \hat{\mathrm{s}} & on \quad \varphi_2 \times [0, \infty) \end{array}$$

צורה נוספת של **מצב הגבול** (*boundary condition*) מתעוררת כאשר אחד מציין את **פני שטח המתיחה** Tm על המשטח המעוות $x(\varphi_2, t)$. דוגמה למצב מסוג זה - כאשר רואים את ההשפעות של **לחץ אחיד** π_0.

$$T(x,t)m(x) = -\pi_0 m(x) \qquad \forall x \in x(\varphi_2, t) \quad \forall t \geq 0$$

ניתן גם לרשום מצב זה - כמו **הגבלה** על **מאמץ פיולה קירכהוף** S; התוצאה היא:

$$(18) \quad \mathrm{Sn} = -\pi_0 (\det F) F^{-T} \mathrm{n} \quad on \;\; \varphi_2 \times [0, \infty)$$

ברור כי זה לא מקרה מיוחד של (17) כי $F(p,t)$ אינו ידוע מראש. כן ניתן להכליל את (17) כדי לכלול את המקרה על ידי אפשרות כי $\hat{s}$ תהיה הפונקציה $\hat{s}(\mathrm{F}, \mathrm{p}, \mathrm{t})$ התלויה גם בF.

[למעשה, ניתן להראות כי השילוב $(\det F) F^{-T} \mathrm{n}$ תלוי רק בשיפוע המשיק של x על φ_2]

<u>**בתיאוריה הסטטיסטית**</u>:

- כל השדות <u>אינם</u> תלויים בזמן
- בעיית הגבול הבסיסית מורכבת במציאת דפורמציה f המספקת את **משוואות השדה**:

$$(19) \quad \begin{array}{c} S = F\bar{S}(C) \\ C = F^T F, \quad F = \nabla \mathbf{f} \\ \mathrm{Div}\,\mathrm{S} + b_0 = \mathbf{0} \end{array} \qquad \begin{bmatrix} with\ boundary \\ consitions \end{bmatrix} \Rightarrow \quad (20) \quad \begin{array}{l} f = \hat{f} \;\; on \quad \varphi_1 \\ \mathrm{Sn} = \hat{\mathrm{s}} \;\; on \quad \varphi_2 \end{array}$$

כאשר $\hat{f}, \hat{s}$ פונקציות שנקבעו על $\varphi_1, \ \varphi_2$.

המשיכות (*traction*) נקבעות על כל הגבול כאשר (20) בעלת הצורה של:

$$(21) \quad \mathrm{Sn} = \hat{\mathrm{s}} \;\; on \quad \boldsymbol{\partial\mathcal{B}}$$

$(5)_1 \quad \int_{\partial\mathcal{P}} \mathbf{Sn}\, dA + \int_{\mathcal{P}} \mathrm{b}_0\, dV = \int_{\mathcal{P}} \ddot{\mathrm{x}} \rho_0\, dV$	$\Rightarrow \quad \int_{\partial\mathcal{B}} \hat{\mathrm{s}}\, dA + \int_{\mathcal{B}} \mathrm{b}_0\, dV = 0$

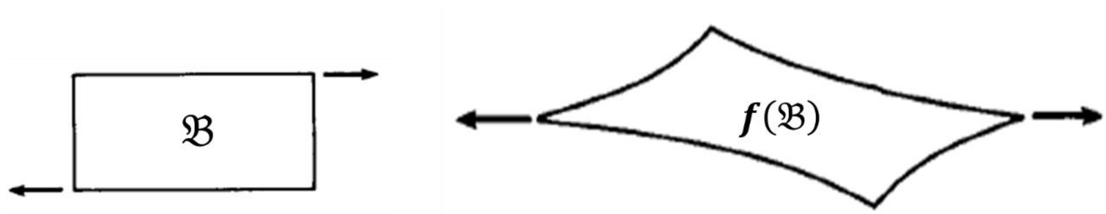
קשר זה כרוך רק בנתונים **ומספק תנאי הכרחי** לקיום הפתרון. מצד שני:

$(5)_2 \quad \int_{\partial\mathcal{P}} (\mathrm{x}-\mathrm{o}) \times \mathrm{Sn}\, dA + \int_{\mathcal{P}} (\mathrm{x}-\mathrm{o}) \times \mathrm{b}_0\, dV = \int_{\mathcal{P}} (\mathrm{x}-\mathrm{o}) \times \ddot{\mathrm{x}}\rho_0\, dV$	$\Rightarrow \int_{\partial\mathcal{B}} (\mathrm{f}-\mathrm{o}) \times \hat{\mathrm{s}}\, dA + \int_{\mathcal{B}} (\mathrm{x}-\mathrm{o}) \times \mathrm{b}_0\, dV = 0$

מנוכחות העיוות $\boldsymbol{f}$, זה לא הגבלה על הנתונים, אלא **תנאי התאמה** שבאופן אוטומטי יתקיים ע"י כל פתרון של בעיית ערך הגבול (21), (19).

ההבדל:

$$\color{red}{force\ VS\ moment\ balance}$$



כל עוד הכוחות הפועלים על $\mathcal{B}$ מצייתים **לאיזון הכוחות**, אנו מצפים לפתרון, אפילו אם כי מומנטים אינם מאוזנים **בתצורת הייחוס**; הגוף פשוט **יתעוות** כדי להבטיח איזון מומנטים **בתצורת העיוות**.

29. הטנזור האלסטי/גמיש [*THE ELASTICITY TENSOR*]

התנהגות **המשוואה המכוננת** (27.9) (*constitutive equation*) $S=\hat{S}(F)$ ליד $F=I$ כפופה לשינוי

הטרנספורמציה הלינארית $C:Lin\rightarrow Lin$ המוגדרת על ידי:

$$(1)\ \ \mathrm{C}=\mathrm{D}\hat{\mathrm{S}}(\mathrm{I})$$

[יש **אזכור סמוי** של התלות **בנקודה החומרית p**]

C נקרא **טנזור האלסטיות** (*elasticity tensor*) עבור **נקודה חומרית p**; כאשר בצורה גסה, C היא הנגזרת של **מאמץ פיולה קירכהוף** ביחס לF ב $F=I$.

רואים את חשיבות הטנזור הזה בהמשך, כאשר מסיקים את התיאוריה הליניארית המתאימה **לעיוותים קטנים** (*small deformations*) מתצורת הייחוס. לנוחות, נניח מעתה כי **המתח השיורי** (*residual stress*) נעלם, ז"א:

$$(2)\ \ \hat{S}(I)=\hat{T}(I)=0$$

[לחץ שיורי מתעורר בחומר במהלך טיפול בחום שלו, מעבר מנוזל למוצק, בזמן של עיבוד מכני]

מ(2) + (1) : $\boldsymbol{C}$ יכול להיות מוגדר כנגזרת של $\hat{T}$, פונקציית התגובה של **מתח קושי** (*Cauchy stress*)

(משפט) $\quad (3)\ \ C=D\hat{T}(I)$

<u>הוכחה:</u>

$(1)\ \ \mathrm{C}=\mathrm{D}\hat{\mathrm{S}}(\mathrm{I})$	$\underset{(27.10)}{\Rightarrow}\ \hat{\mathrm{S}}(\mathrm{F})F^T=\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{F})\hat{\mathrm{T}}(\mathrm{F})\quad,\ \ \varphi(F)=\det F$
$(2)\ \ \hat{S}(I)=\hat{T}(I)=0$	$\underset{(3.9)}{\overset{\forall H\in Lin}{\Rightarrow}}\ \hat{\mathrm{S}}(\mathrm{F})F^T+\mathbf{D}\hat{\mathrm{S}}(\mathrm{F})[\mathbf{H}]F^T=\varphi(F)\boldsymbol{D}\hat{\mathrm{T}}(\mathrm{F})[\boldsymbol{H}]+\boldsymbol{D}\varphi(F)[\boldsymbol{H}]\hat{T}(F)$
(3.9) כלל לייבניץ[*Product Rule*] $\quad h=\pi(f,g)$ $\boldsymbol{Dh}(\boldsymbol{x})[\boldsymbol{u}]=\mathrm{D}\pi\big(f(x),g(x)\big)[\mathrm{u}]$ $=\pi(f(x),\boldsymbol{D}g(x)[\boldsymbol{u}])+\pi\big(\boldsymbol{D}f(x)[\boldsymbol{u}],g(x)\big)$	$\underset{(2)}{\overset{in\ F=I}{\Rightarrow}}\ \ 0+\mathbf{D}\hat{\mathbf{S}}(\mathbf{I})[\mathrm{H}]\mathrm{I}^T=\varphi(\mathrm{I})D\hat{\mathrm{T}}(\mathrm{I})[H]+0$
$(27.10)\quad \hat{\mathrm{S}}(\mathrm{F})=(\det F)\hat{\mathrm{T}}(\mathrm{F})\mathrm{F}^{-\mathrm{T}}$	$\underset{(1)}{\Rightarrow}\ \ \mathbf{C}[H]=\mathrm{D}\hat{\mathrm{T}}(\mathrm{I})[H]$

■

(משפט) תכונות הטנזור האלסטי:

$$(a)\ \ C[H] \in Sym\ \ \forall H \in Lin\,;\qquad (b)\ \ C[W] = 0\ \ \forall W \in Skw$$

<u>הוכחה</u>: להוכחת (a) –

$C[H] \in Sym$	$C[H] = \frac{d}{d\alpha}\hat{T}(I+\alpha H)\vert_{\alpha=0}$
	$\hat{T}$ בעל ערכים סימטריים

להוכחת (b) – נבחר $W \in Skw$ ונקח $\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{e}^{\boldsymbol{W}t}$ כך ש $Q(t) \in Orth^+$. $[Ch\ 36]$

$\overset{F=I}{\underset{(25.3)\,(2)}{\Rightarrow}}\ \hat{T}\big(Q(t)\big) = 0 \quad \Rightarrow \quad D\hat{T}\big(Q(t)\big)\big[\dot{Q}(t)\big] = 0$	$(2)\ \ \hat{S}(I) = \hat{T}(I) = 0$
	$(3)\ \ C = D\hat{T}(I)$
	$(25.3)\ \ Q\hat{T}(F)Q^T = \hat{T}(QE) \qquad \forall F \in Lin^+,\ Q \in Orth^+$
$\overset{t=0}{\underset{(*)}{\Rightarrow}}\ \mathbf{D}\hat{\mathbf{T}}(\mathbf{I})[w] \underset{(3)}{=} C[w] = 0$	$(*)\quad Q(0) = I,\ \ \dot{Q}(0) = w$

■

בעבר ראינו כי – כל טנזור S ניתן לייצוג **בצורה יחידה** ע"י סכום של **טנזור-סימטרי** E, **ואנטי-סימטרי** W (*skew*).

במקרה שלנו, טנזור H ניתן לייצוג ע"י סכום של **טנזור-סימטרי** E, **ואנטי-סימטרי** W, ומקבלים כי:

$$(4)\ \ C[H] = C[E]$$

<u>הסבר</u>:

$C[H] = C[E+W] \underset{linear}{=} C[E] + C[W] \underset{(b)}{=} C[E]$	$(b)\ \ C[W] = 0 \quad \forall W \in Skw$
	$H = E + W,\quad E = \frac{1}{2}(H + H^T)\quad W = \frac{1}{2}(H - H^T)$

ומכאן C **נקבע לחלוטין** ע"י ההגבלה שלו לSym. בשלב הבא נקבע את **המאפיינים האינווריאנטים**[(6)] של C.

(משפט) C **אינווריאנטי** תחת קבוצת הסימטריה g עבור החומר בp.

<u>הוכחה</u>:

$\mathbf{Q}\mathbf{C}[H]Q^T \underset{(3)}{=} QD\hat{T}(I)[H]Q^T \underset{(37.27)}{=} D\hat{T}(QIQ^T)[QHQ^T] \underset{(25.9)_1}{=} D\hat{T}(I)[QHQ^T] \underset{(3)}{=} C[QHQ^T]$	$(3)\ \ C = D\hat{T}(I)$
	$(25.9)_1\ \ Q\hat{T}(F)\hat{Q} = \hat{T}(QGQ^T)$
	$(37.27)\ \ QDG(A)[U]Q^T = DG(QAQ^T)[QUQ^T] \quad \begin{bmatrix} Invariance\ of \\ the\ derivative \end{bmatrix}$

כאשר C אינווריאנטי תחת g

■

(6) **אינווריאנטים** = פונק' סקלריות הנשארות קבועות תחת שינויים בסיסיים

כדי להמשיך את הדיון של האלסטיות – נראה קצת רקע ונסתכל על המושגים של **סימטריה ואיזוטרופי**:

- חומר נקרא **איזוטרופי** *(isotropic)* אם תגובת החומר זהה לכל בחירת בסיס. ז"א לא תלויה באוריינטציה. שאלות שעולות הן מה קורה במצב בו אנו עושים עיוות. האם זה עדיין יישאר איזוטרופי?
- **סימטריה** היא תכונה של **תצורת הגוף**

מושג נוסף שנצטרך, המגיע מתחום של הנדסת חומרים, הוא - **מודול/קבוע האלסטיות** של חומר (הידוע גם בתור מודול יאנג). זהו היחס בין –

$$\frac{\textbf{מאמץ}\ (\textit{stress})\ (\text{כוח ליחידת שטח בחומר})}{\textbf{מתיחות}\ (\textit{strain})\ (\text{שינוי בממדי החומר})}$$

או בניסוח פשוט יותר – ההתנגדות של החומר לשינוי קטן בצורתו באמצעות כוח המופעל עליו, בתחום האלסטי, כלומר התחום בו היחס בין המאמץ למתיחות שומר על הליניאריות. נדגיש כי בשינוי אלסטי, החומר חוזר למצבו המקורי כאשר הכוח מוסר. מודול האלסטיות הוא ערך המבטא את הגמישות של החומר.

הצמצום המשמעותי ביותר של הקבועים **האלסטיים** הוא **בחומר איזוטרופי**: עבור חומר אלסטי איזוטרופי קיימים בדיוק 2 קבועים(7) בלתי תלויים המספיקים לאפיין את החומר - μ, λ אותם נראה במשפט הבא.

כעת, לפי (a) מקבלים כי C בעל ערכים בSym. לכן, משפט זה ביחד עם (37.22) בעל התוצאה הבאה (ברורה אך חשובה – גרסה של **חוק הוק**):

(משפט) נניח כי החומר בp הוא **איזוטרופי**. אז קיימים הסקלרים λ, μ כך שלכל **טנזור סימטרי** E מתקיים:

$$(5)\quad C[E] = 2\mu E + \lambda(\mathrm{tr}\ E)I$$

הסקלרים $\begin{matrix}\mu = \mu(p)\\ \lambda = \lambda(p)\end{matrix}$ נקראים **קבועי לאמה** *(Lame moduli)* בנק' p.

נגיד כי C **סימטרית** אם - לכל טנזור H, G מתקיים:

$$H \cdot C[G] = G \cdot C[H]$$

כעת, מהסיבה כי $C[W] = 0$ לכל W, C אף פעם לא יכול להיות **חיובי מובהק** (*positive definite*) במובן הרגיל. עם זאת, יש מצבים חשובים בהם C המוגבל לSym בעל מאפיין זה. לכן הבה נסכים כי:

$$C\ \ is\ \ positive\ definite\ if \qquad E \cdot C[E] > 0$$

לכל הטנזורים הסימטריים $E \neq 0$

(7) כאשר בחומר אנטי איזוטרופי (לדוגמה פלטת עץ) יש 21 קבועים - לא נפרט

(משפט) נניח כי החומר בp איזוטרופי, אזי C סימטרי. יתר על כן, C **חיובי מובהק** ↔ **קבועי הלאמה** מקיימים:

$$(6)\quad \mu > 0 \qquad 2\mu + 3\lambda > 0$$

<u>הוכחה</u>: יהיו H, G **טנזורים עם חלקים סימטריים** H_s, G_S:

$(a)\quad C[H] \in Sym\ \forall H \in Lin\ ;$ $(b)\quad C[W] = 0\ \forall W \in Skw$	$H \cdot C[G] = H_S \cdot C[G_S]$ $= 2\mu H_S \cdot G_S + \lambda(\mathrm{tr\ H})(\mathrm{tr\ G})$ $= \mathrm{G} \cdot \mathrm{C[H]}$
$(5)\quad C[E] = 2\mu E + \lambda(\mathrm{tr}\ E)I$	

כך ש C סימטרית. כעת, נבחר את הטנזור הסימטרי H : $\alpha = \frac{1}{3}\mathrm{tr\ H}$, $\mathrm{H_0 = H - \alpha I}$ ולכן $H = H_0 + \alpha I$, $\mathrm{tr\ H_0} = 0$

לכן מכיוון ש$\mathrm{I \cdot H_0} = 0$

$$H \cdot C[H] = 2\mu(|H_0|^2 + 3\alpha^2) + 9\lambda\alpha^2 = 2\mu|H_0|^2 + 3\alpha^2(2\mu + 3\lambda)$$

באופן טריוויאלי, (6) גורר כי C הוא **חיובי מובהק**. לעומת זאת, אם C הוא **חיובי מובהק**,

אז ע"י בחירת $H = \alpha I$ נקבל כי $2\mu + 3\lambda > 0$, ובחירת H עם $\mathrm{tr\ H} = 0$ נקבל כי $\mu > 0$.

■