

# Лабораторная работа №1 «Дискретизация аналоговых сигналов»

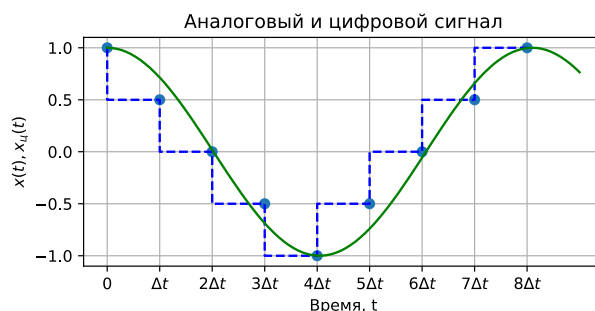
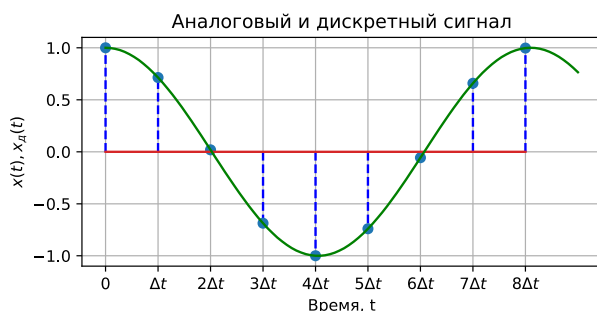
Радиофизическая лаборатория, лаборатория инфокоммуникационных технологий.

## Занятие 1. Классификация сигналов: аналоговые, дискретные, цифровые.

### Теоретическая часть

#### Классификация сигналов: аналоговые, дискретные, цифровые.

Под **сигналом** обычно понимают величину, отражающую состояние физической системы. Поэтому естественно рассматривать сигналы как функции, заданные в физических координатах. Примером могут служить одномерные сигналы, заданные как функции времени  $x(t)$ , двумерные сигналы заданные на плоскости  $I(x, y)$ . В качестве сигналов могут выступать различные величины. Пример одномерного сигнала — зависимость напряжения в сети от времени  $U(t) = A \cdot \cos(2\pi f_0 t)$ . Далее мы будем рассматривать в основном одномерные сигналы.



**Аналоговые** или непрерывные сигналы  $x(t)$  описываются непрерывными и кусочно-непрерывными функциями, причем как сама функция, так и ее аргумент могут принимать любые значения в пределах некоторого интервала.

**Дискретные сигналы**, могут быть описаны в виде счетного набора отсчетов (значений) в заданные моменты времени  $k\Delta t$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , где  $\Delta t$  — шаг дискретизации. Частота дискретизации  $f_d$  (размерность в Гц) — это величина, обратная шагу дискретизации  $f_d = 1 / \Delta t$ .

**Цифровые сигналы**, помимо того, что они являются дискретными, могут принимать лишь конечное число значений, соответствующих уровням квантования. Процесс преобразования аналогового сигнала в цифровой состоит из дискретизации и квантования, которые осуществляются аналого-цифровым преобразователем (АЦП). Обычно число уровней квантования  $2^m$ , где  $m$  — разрядность АЦП.

Для дискретных сигналов будем использовать следующие описания.

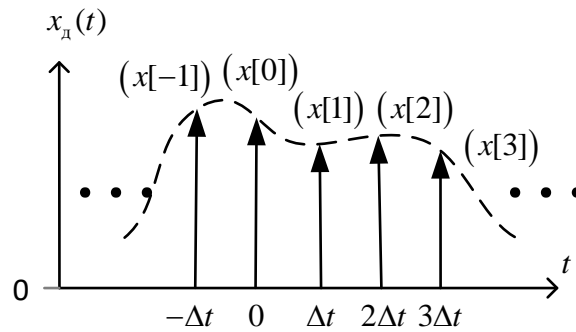
#### 1) Функция дискретного времени $k$ .

Это описание дискретного сигнала в виде последовательности отсчетов  $x[k]$  в заданные моменты времени  $k\Delta t$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , где  $\Delta t$  — шаг дискретизации. Далее мы будем использовать квадратные скобки для обозначения функций дискретного аргумента.

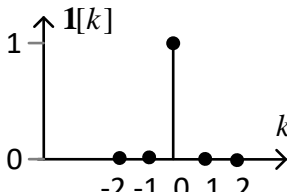
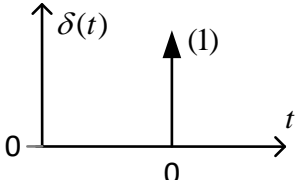
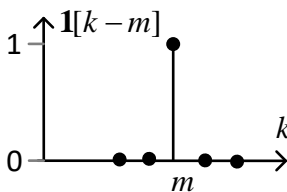
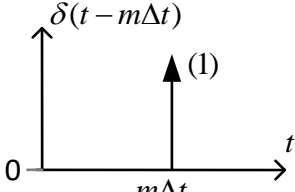
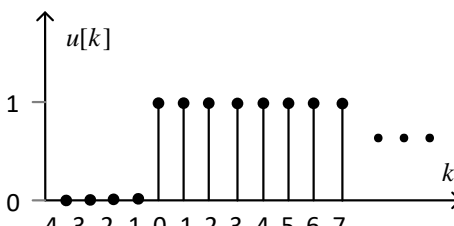
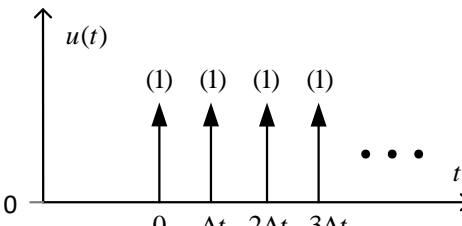
## 2) Функция непрерывного времени $t$ (континуальная запись).

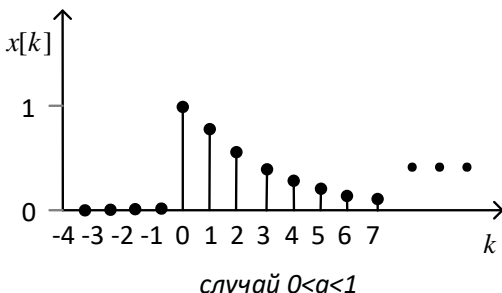
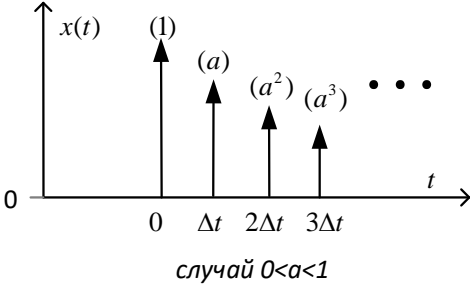
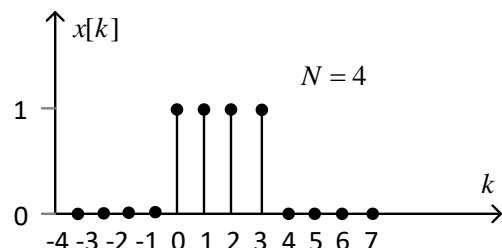
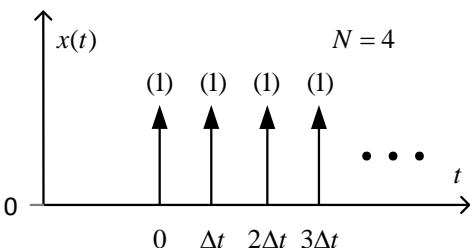
$$x_d(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \delta(t - k\Delta t)$$

В этой записи дискретный сигнал представляет собой последовательность дельта-функций с площадями  $x[k]$ .



Далее мы вернемся к этим двум формам записи и покажем, как связь между  $x[k]$  и  $x(k\Delta t)$  влияет на соотношение между спектрами дискретизованного и исходного сигнала.

Дискретный сигнал	Описание в виде функции дискретного времени	Описание в виде функции непрерывного времени
Единичный импульс в точке 0	$1[k] = \begin{cases} 1, & \text{при } k = 0, \\ 0, & \text{при } k \neq 0. \end{cases}$ $1[k]$ — единичный импульс 	$\delta(t)$ $\delta(t)$ — дельта-функция Дирака 
Единичный импульс в точке m	$1[k - m] = \begin{cases} 1, & \text{при } k = m, \\ 0, & \text{при } k \neq m. \end{cases}$ 	$\delta(t - m\Delta t)$ 
Дискретная функция включения	$u[k] = \begin{cases} 1, & \text{при } k \geq 0, \\ 0, & \text{при } k < 0. \end{cases}$ 	$\sum_{m=0}^{\infty} \delta(t - m\Delta t)$ 

Дискретная экспонента	$x[k] = \begin{cases} a^k, & \text{при } k \geq 0, \\ 0, & \text{при } k < 0. \end{cases}$  <p style="text-align: center;">случай <math>0 &lt; a &lt; 1</math></p>	$\sum_{m=0}^{\infty} a^m \delta(t - m\Delta t)$  <p style="text-align: center;">случай <math>0 &lt; a &lt; 1</math></p>
Последовательность из N единичных импульсов	$x[k] = \sum_{m=0}^{N-1} \mathbf{1}[k - m]$  <p style="text-align: center;"><math>N = 4</math></p>	$x(t) = \sum_{m=0}^{N-1} \delta(t - m\Delta t)$  <p style="text-align: center;"><math>N = 4</math></p>

### Задание на моделирование

Задание расположено в файле **Lab1\_task.ipynb**. Первому занятию соответствуют следующие задачи.

- **Задача 1.1. Дискретизация и квантование.**
- **Задача 1.2. Декодирование .wav файла**

### Контрольные вопросы

**Вопрос 1.1.** Объясните, в чем заключается отличие между аналоговым, дискретным и цифровым сигналом.

**Вопрос 1.2.** Имеется одноканальная (моно) аудиозапись с битовой глубиной 16 бит на отсчет (разрядность АЦП равна 16), представленная в виде .wav файла. Частота дискретизации 44100 Гц. Определите число уровней квантования АЦП и шаг дискретизации  $\Delta t$ . Оцените длительность сигнала, если объем файла составляет 280 КБ и никакое дополнительное сжатие не производится.

(такой файл доступен по ссылке <https://freesound.org/people/xserra/sounds/219759/> )

**Вопрос 1.3.** Привести континуальную запись (в виде последовательности дельта-функций) для следующих сигналов:

а) единичного импульса, задержанного на семь тактом дискретизации

$$x[k] = \mathbf{1}[k - 7],$$

б) дискретизованной синусоиды с относительной частотой  $\nu_0 = \frac{1}{4}$

$$y[k] = \sin\left(2\pi \frac{1}{4} k\right),$$

в) последовательности из пяти единичных импульсов

$$x[k] = \sum_{m=0}^4 \mathbf{1}[k-m],$$

г) дискретной экспоненты вида

$$x[k] = \begin{cases} (-0,5)^k, & \text{при } k \geq 0, \\ 0, & \text{при } k < 0. \end{cases}$$

## Занятие 2. Спектры импульсных и периодических сигналов.

### Теоретическая часть

#### Преобразование Фурье

Все реальные сигналы имеют конечную удельную энергию:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt < \infty.$$

Например, если  $x(t)$  — напряжение (или ток), действующее на единичном сопротивлении, то интеграл представляет собой энергию, выделяемую на единичном сопротивлении, и эта энергия конечна. В этом случае  $x(t)$  — функция с интегрируемым квадратом на всей оси. По теореме Планшереля для функции  $x(t)$  существует функция  $X(f)$  также с интегрируемым квадратом на всей оси, связанная с  $x(t)$  соотношением:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T \left| X(f) - \int_{-T}^T x(t) e^{-j2\pi ft} dt \right|^2 df = 0.$$

Если функции  $x(t)$  и  $X(f)$  абсолютно интегрируемы, то

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt,$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi ft} df.$$

Эти формулы представляют собой пару преобразования Фурье (ФТ), где частота  $f$  измеряется в Герцах (Гц). Для частоты циклической частоты  $\omega = 2\pi f$ , измеряемой в рад/с (радианы в секунду) пара преобразования Фурье имеет вид:

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt,$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega.$$

Первый интеграл называется спектральной плотностью, а второй - интегралом Фурье. Далее будем использовать запись вида  $x(t) \xleftrightarrow{FT} X(f)$ , что означает, что для сигнала  $x(t)$  преобразование Фурье будет  $X(f)$ .

В общем случае  $X(\omega)$  – комплексная функция частоты:

$$X(\omega) = \operatorname{Re}[X(\omega)] + j \operatorname{Im}[X(\omega)] = A(\omega) - jB(\omega) = |X(\omega)| e^{j\varphi(\omega)},$$

где

$$\operatorname{Re}[X(\omega)] = A(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cos \omega t dt,$$

$$\operatorname{Im}[X(\omega)] = -B(\omega) = - \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \sin \omega t dt,$$

$$|X(\omega)| = \sqrt{A^2(\omega) + B^2(\omega)} - \text{амплитудно-частотная характеристика (АЧХ)},$$

$$\varphi(\omega) = -\arctg \frac{B(\omega)}{A(\omega)} - \text{фазочастотная характеристика (ФЧХ) сигнала}.$$

### Свойства преобразования Фурье

Предположим, что  $x(t) \xleftrightarrow{FT} X(f)$  и  $y(t) \xleftrightarrow{FT} Y(f)$ . Тогда справедливы следующие свойства преобразования Фурье.

1. Свойство линейности.

$$\text{Для заданных чисел } \alpha \in \mathbb{C} \text{ и } \beta \in \mathbb{C} \quad \alpha x(t) + \beta y(t) \xleftrightarrow{FT} \alpha X(f) + \beta Y(f).$$

2. Теорема запаздывания.

Для заданной задержки по времени  $\tau$  (или опережения в случае  $\tau < 0$ )

$$x(t - \tau) \xleftrightarrow{FT} e^{-j2\pi f \tau} X(f).$$

3. Теорема смещения.

$$x(t) e^{-j2\pi f_0 t} \xleftrightarrow{FT} X(f + f_0);$$

4. Теорема Парсеваля-Релея.

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) y^*(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) Y^*(f) df.$$

5. Теорема о спектре произведения.

$$x(t)y(t) \xleftrightarrow{FT} X(f) \otimes Y(f),$$

$$x(t)y(t) \xleftrightarrow{FT} \int_{-\infty}^{\infty} X(\tilde{f})Y(f-\tilde{f})d\tilde{f}.$$

6. Теорема о спектре свертки.

$$x(t) \otimes y(t) \xleftrightarrow{FT} X(f)Y(f).$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)y(t-\tau)d\tau \xleftrightarrow{FT} X(f)Y(f);$$

7. Теорема об изменении масштаба.

$$x(at) \xleftrightarrow{FT} \frac{1}{a} X\left(\frac{f}{a}\right).$$

8. Теорема о спектре производной.

$$\frac{dx(t)}{dt} \xleftrightarrow{FT} j2\pi f X(f)$$

9. Теорема о производной спектра:

$$t \cdot x(t) \xleftrightarrow{FT} \frac{1}{j2\pi} \frac{dX(f)}{df}.$$

### Спектры гармонических сигналов

Вычислим обратное преобразование Фурье для  $X(f) = \delta(f - f_0)$ , т.е. от дельта-функции в точке  $f_0$  оси частот.

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)e^{j2\pi ft}df = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(f - f_0)e^{j2\pi ft}df = e^{j2\pi f_0 t}.$$

Тогда с учетом того, что  $\cos(2\pi f_0 t) = (e^{j2\pi f_0 t} + e^{-j2\pi f_0 t}) / 2$  и  $\sin(2\pi f_0 t) = (e^{j2\pi f_0 t} - e^{-j2\pi f_0 t}) / 2j$ , получаем

$$1 \xleftrightarrow{FT} \delta(f),$$

$$e^{j2\pi f_0 t} \xleftrightarrow{FT} \delta(f - f_0),$$

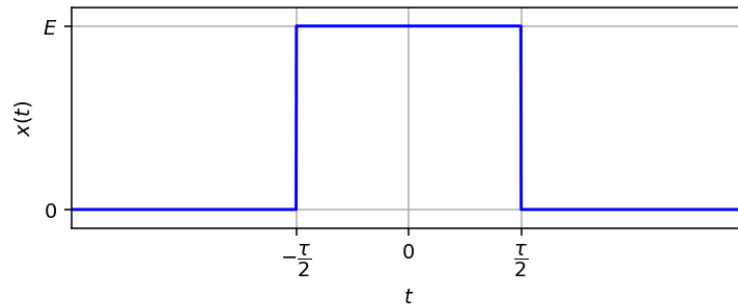
$$\cos(2\pi f_0 t) \xleftrightarrow{FT} \frac{1}{2} \delta(f - f_0) + \frac{1}{2} \delta(f + f_0),$$

$$\sin(2\pi f_0 t) \xleftrightarrow{FT} \frac{1}{2j} \delta(f - f_0) - \frac{1}{2j} \delta(f + f_0).$$

## Спектры импульсных сигналов

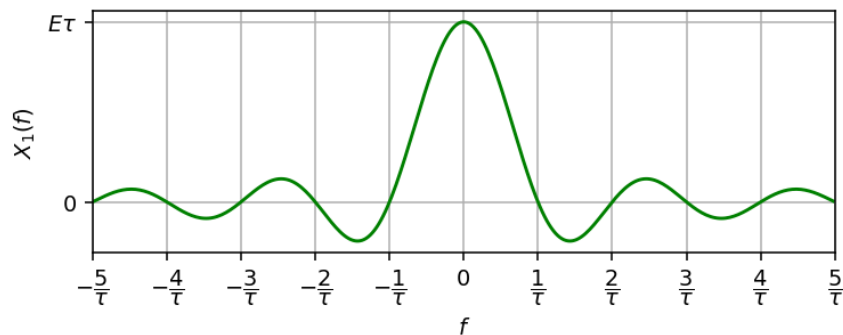
### Симметричный прямоугольный импульс длительностью $\tau$

$$x_1(t) = \begin{cases} E, & \text{если } |t| < \tau/2, \\ 0, & \text{если } |t| \geq \tau/2. \end{cases}$$



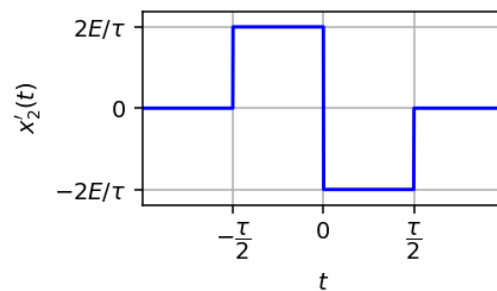
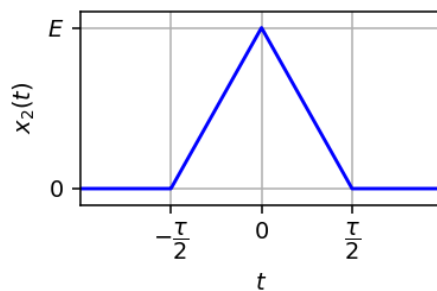
Спектр

$$X_1(f) = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} E e^{-j2\pi f t} dt = \frac{E}{-j2\pi f} e^{-j2\pi f t} \Big|_{-\tau/2}^{\tau/2} = E \frac{\sin(\pi f \tau)}{\pi f} = E\tau \frac{\sin(\pi f \tau)}{\pi f \tau}.$$

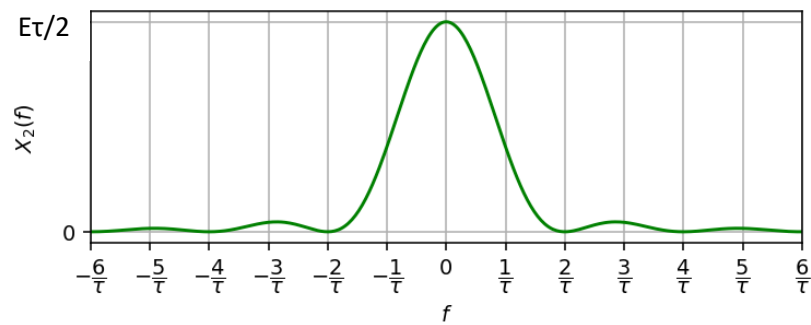


### Симметричный треугольный импульс длительностью $\tau$ .

$$x_2(t) = \begin{cases} E \left(1 - \frac{2|t|}{\tau}\right), & \text{если } |t| < \tau/2, \\ 0, & \text{если } |t| \geq \tau/2. \end{cases}$$



$$X_2(f) = \frac{1}{j2\pi f} \left( e^{j\pi f \tau/2} - e^{-j\pi f \tau/2} \right) \frac{2E}{\tau} \frac{\tau}{2} \frac{\sin(\pi f \tau/2)}{\pi f \tau/2} = \frac{E\tau}{2} \frac{\sin^2(\pi f \tau/2)}{(\pi f \tau/2)^2}$$



**Косинусоидальный импульс длительностью  $\tau$ .**

$$x_3(t) = \begin{cases} E \cos\left(\frac{\pi t}{\tau}\right), & \text{если } |t| < \tau/2, \\ 0, & \text{если } |t| \geq \tau/2. \end{cases}$$

$$x_3(t) = x_1(t) \cos(2\pi \frac{1}{2\tau} t) = \frac{1}{2} x_1(t) \left( e^{j2\pi \frac{1}{2\tau} t} + e^{-j2\pi \frac{1}{2\tau} t} \right)$$

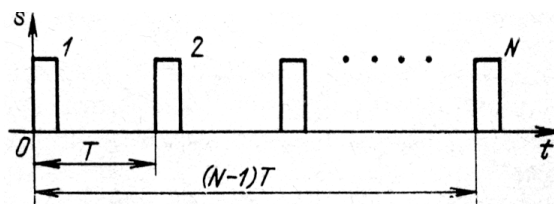
а значит

$$X_3(f) = \frac{1}{2} X_1\left(f - \frac{1}{2\tau}\right) + \frac{1}{2} X_1\left(f + \frac{1}{2\tau}\right)$$

$$X_3(f) = X_1(f) \otimes \left( \frac{1}{2} \delta\left(f - \frac{1}{2\tau}\right) + \frac{1}{2} \delta\left(f + \frac{1}{2\tau}\right) \right) = \frac{1}{2} X_1\left(f - \frac{1}{2\tau}\right) + \frac{1}{2} X_1\left(f + \frac{1}{2\tau}\right)$$

### Спектр пачки равноотстоящих импульсов

Найдём спектр пачки равноотстоящих импульсов. Для определённости возьмём пачку из  $N$  прямоугольных импульсов



Обозначим через  $X_1(\omega)$  спектральную плотность первого импульса. Тогда для группы из  $N$  равноотстоящих импульсов в соответствии с теоремой запаздывания будем иметь

$$X(\omega) = X_1(\omega) [1 + e^{-j\omega T} + e^{-j\omega 2T} + \dots + e^{-j\omega (N-1)T}] = X_1(\omega) \sum_{k=0}^{N-1} e^{-j\omega kT}.$$

На частотах  $\omega = n2\pi/T$ , где  $n$  – целое, каждое слагаемое в квадратных скобках равно единице, следовательно:

$$X(\omega = n2\pi/T) = NX_1(\omega = n2\pi/T).$$



Таким образом, на частотах  $\omega = n2\pi/T$  модуль спектра пачки в  $N$  раз больше модуля спектра одиночного импульса. Это объясняется тем, что на частотах  $\omega = n2\pi/T$  спектральные компоненты различных импульсов складываются с фазовыми сдвигами, кратными  $2\pi$ .

Суммируя  $N$  членов геометрической прогрессии, получаем

$$X(\omega) = X_1(\omega) \frac{1 - e^{-j\omega NT}}{1 - e^{-j\omega T}} = X_1(\omega) \frac{e^{-j\omega NT/2} [e^{j\omega NT/2} - e^{-j\omega NT/2}]}{e^{-j\omega T/2} [e^{j\omega T/2} - e^{-j\omega T/2}]} = X_1(\omega) e^{-j\omega(N-1)T/2} \frac{\sin \omega NT / 2}{\sin \omega T / 2}.$$

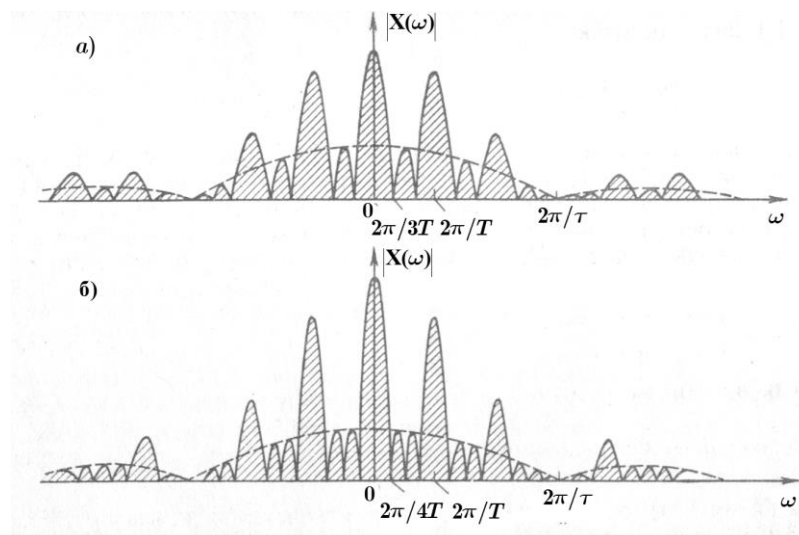
Видно, что на частотах  $\omega = m2\pi/NT$ , где  $m$  – целое,  $X(\omega) = 0$ . Подставляя сюда значение

$$X_1(\omega) = E\tau \frac{\sin \omega \tau / 2}{\omega \tau / 2} e^{-j\omega \tau / 2},$$

где  $\tau$  – длительность отдельного импульса, получаем окончательно для спектра пачки из  $N$  равноотстоящих прямоугольных импульсов:

$$X(\omega) = e^{-j\omega[(N-1)T/2 + \tau/2]} E\tau \frac{\sin \omega \tau / 2}{\omega \tau / 2} \frac{\sin \omega NT / 2}{\sin \omega T / 2}.$$

Для иллюстрации на рис. 1.8.14а изображён модуль спектра пачки из трёх прямоугольных импульсов, а на рис. 1.8.14б – из четырёх. При этом интервал между соседними импульсами  $T = 3\tau$ . Пунктиром изображён модуль спектра одиночного импульса. С увеличением числа импульсов в пачке спектральная плотность  $X(\omega)$  при  $N \rightarrow \infty$  принимает дискретную структуру спектра периодической функции. Нетрудно обобщить этот результат на произвольную форму одиночного импульса.



Модуль спектра пачки прямоугольных импульсов: а – три импульса в пачке, б – четыре импульса в пачке

### Примеры решения задач

#### Задача 1.

Определить спектр  $X(f)$  гармонического сигнала

$$x(t) = \cos(2\pi f_1 t) + 3\cos(2\pi f_2 t)$$

где  $f_1 = 100$  Гц,  $f_2 = 200$  Гц. Какой вид будет иметь спектр для  $x(t)w(t)$ , где  $w(t)$  — некоторая оконная функция.

### Решение

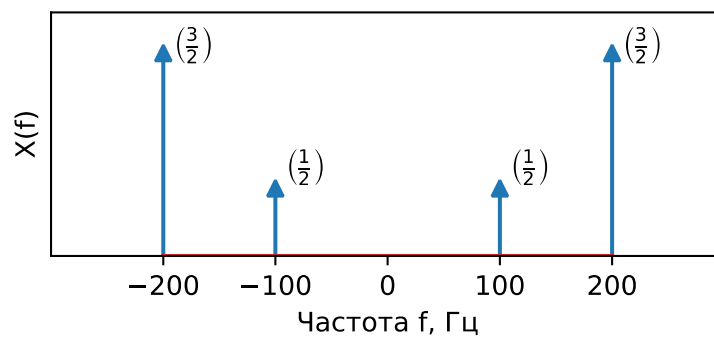
По свойствам преобразования Фурье

$$\exp(j2\pi f_0 t) \xleftrightarrow{FT} \delta(f - f_0),$$

$$\cos(2\pi f_0 t) \xleftrightarrow{FT} \frac{1}{2}\delta(f - f_0) + \frac{1}{2}\delta(f + f_0).$$

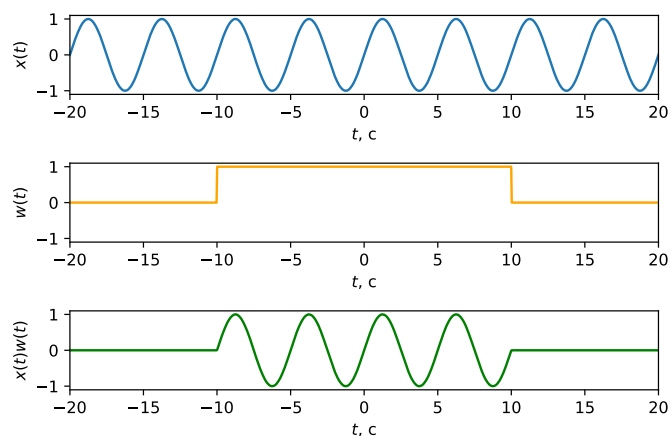
Тогда по свойству линейности преобразования Фурье

$$X(f) = \frac{1}{2}\delta(f - f_1) + \frac{1}{2}\delta(f + f_1) + \frac{3}{2}\delta(f - f_2) + \frac{3}{2}\delta(f + f_2)$$



### Ограничение сигнала по длительности.

Ограничение сигнала по длительности эквивалентно умножению на прямоугольную оконную функцию.



$$y(t) = w(t)x(t). \text{ Пусть } x(t) \overset{FT}{\leftrightarrow} X(f), w(t) \overset{FT}{\leftrightarrow} W(f), y(t) \overset{FT}{\leftrightarrow} Y(f).$$

$$w(t)x(t) \overset{FT}{\leftrightarrow} W(f) \otimes X(f),$$

$$w(t)x(t) \overset{FT}{\leftrightarrow} \int_{-\infty}^{\infty} W(\tilde{f})X(f - \tilde{f})d\tilde{f}.$$

В нашем примере

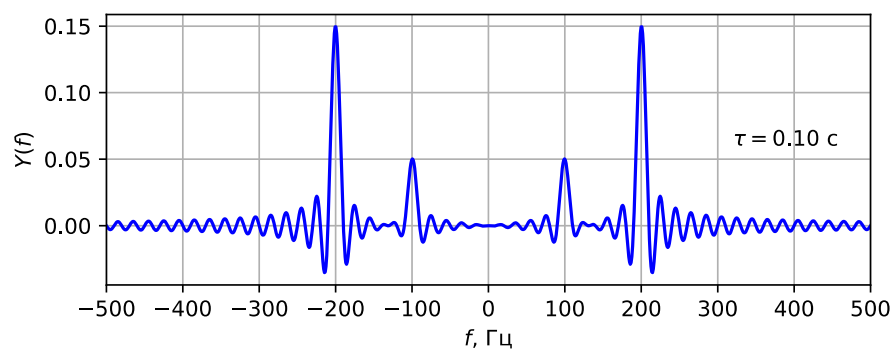
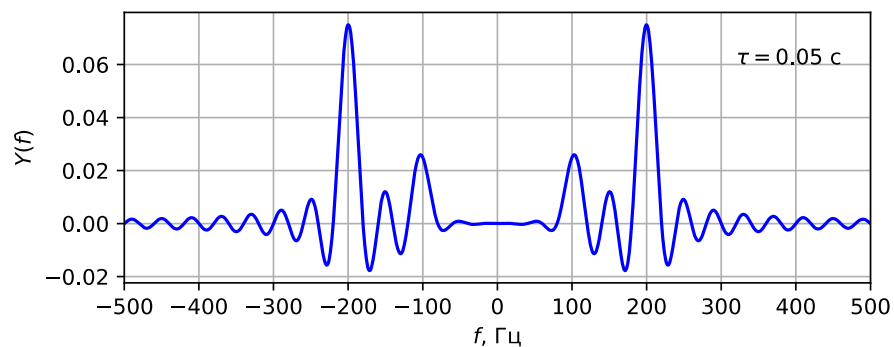
$$X(f) = \frac{1}{2}\delta(f - f_1) + \frac{1}{2}\delta(f + f_1) + \frac{3}{2}\delta(f - f_2) + \frac{3}{2}\delta(f + f_2).$$

$$w(t)x(t) \overset{FT}{\leftrightarrow} \int_{-\infty}^{\infty} W(\tilde{f})X(f - \tilde{f})d\tilde{f}.$$

$$Y(f) = \frac{1}{2}W(f - f_1) + \frac{1}{2}W(f + f_1) + \frac{3}{2}W(f - f_2) + \frac{3}{2}W(f + f_2).$$

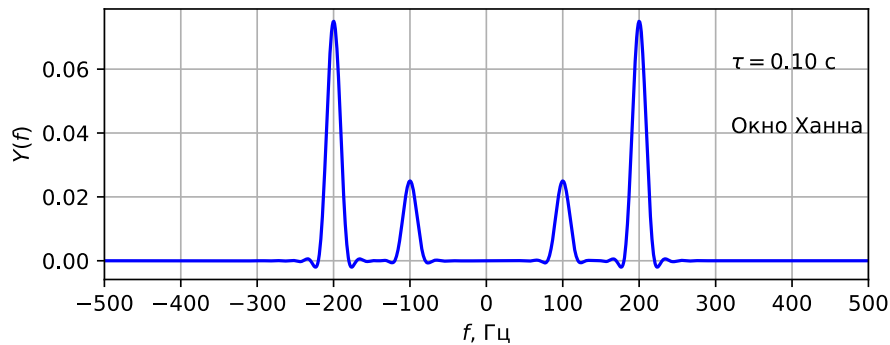
Спектр прямоугольного окна длиной  $\tau$  соответствует спектру прямоугольного импульса длиной  $\tau$  с высотой  $E = 1$

$$W(f) = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} E e^{-j2\pi f t} dt = \frac{1}{-j2\pi f} e^{-j2\pi f t} \Big|_{-\tau/2}^{\tau/2} = \frac{\sin(\pi f \tau)}{\pi f} = \tau \frac{\sin(\pi f \tau)}{\pi f \tau}.$$



Для окна Ханна

$$W_H(f) = \frac{\sin(\pi f \tau)}{2\pi f (1 - \tau^2 f^2)}.$$



### Задача 2.

Определите спектр  $W_H(f)$  аналогового окна Ханна длительностью  $\tau$ .

$$w_H(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left( 1 + \cos\left(\frac{2\pi t}{\tau}\right) \right), & \text{если } |t| < \frac{\tau}{2}, \\ 0, & \text{если } |t| \geq \frac{\tau}{2}. \end{cases}$$

Приведем два способа решения, отличные от непосредственного вычисления преобразования Фурье по формуле.

#### Решение 1.

Пусть  $w(t)$  — прямоугольное окно той же длительности.

$$w_H(t) = \frac{1}{2} w(t) + \frac{1}{4} w(t) \exp\left(j2\pi t \frac{1}{\tau}\right) + \frac{1}{4} w(t) \exp\left(-j2\pi t \frac{1}{\tau}\right).$$

Тогда по теореме смещения для преобразования Фурье

$$W_H(f) = \frac{1}{2} W(f) + \frac{1}{4} W\left(f - \frac{1}{\tau}\right) + \frac{1}{4} W\left(f + \frac{1}{\tau}\right).$$

Далее остается подставить  $W(f)$ .

#### Решение 2.

Рассмотрим сигнал  $x(t) = \frac{1}{2} \left( 1 + \cos\left(\frac{2\pi t}{\tau}\right) \right).$

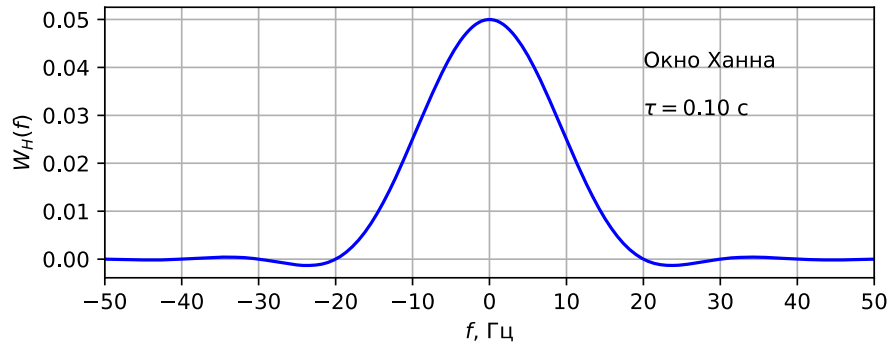
Его спектр  $X(f) = \frac{1}{2} \delta(f) + \frac{1}{4} \delta\left(f - \frac{1}{\tau}\right) + \frac{1}{4} \delta\left(f + \frac{1}{\tau}\right).$

При этом  $w_H(t) = w(t)x(t)$  и  $W_H(f) = W(f) \otimes X(f)$ .

Используя фильтрующее свойство  $\delta$ -функции, получаем

$$W_H(f) = \frac{1}{2}W(f) + \frac{1}{4}W\left(f - \frac{1}{\tau}\right) + \frac{1}{4}W\left(f + \frac{1}{\tau}\right).$$

$$W_H(f) = \frac{\sin(\pi f \tau)}{2\pi f (1 - \tau^2 f^2)}.$$



### Задание на моделирование

Задание расположено в .ipynb файле. Второму занятию соответствуют следующие задачи.

- **Задача 2.1. Спектры симметричных импульсов**
- **Задача 2.2. Теорема запаздывания для преобразования Фурье**
- **Задача 2.3. Спектр отрезка синусоиды**
- **Задача 2.4. Спектр пачки равноотстоящих импульсов**

### Контрольные вопросы

**Вопрос 2.1.** Определите спектр  $X(f)$  аналогового гармонического сигнала

$$x(t) = \sin(2\pi f_1 t) + \cos(2\pi f_2 t), \quad f_1 = 100 \text{ кГц}, \quad f_2 = 250 \text{ кГц}.$$

**Вопрос 2.2.** Определите спектр  $W(f)$  аналогового симметричного окна Ханна длительностью  $\tau$ .

$$w(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left( 1 + \cos\left(2\pi \frac{t}{\tau}\right) \right), & \text{если } |t| \leq \tau/2, \\ 0, & \text{если } |t| > \tau/2. \end{cases}$$

**Вопрос 2.3.** а) Вычислите спектр  $X_1(f)$  одностороннего экспоненциального импульса для случая  $\alpha > 0$

$$x_1(t) = \begin{cases} E \exp(-\alpha t), & \text{если } t \geq 0, \\ 0, & \text{если } t < 0. \end{cases}$$

Найдите амплитудный  $|X_1(f)|$  и фазовый  $\varphi_1(f) = \arctg\left(\frac{\operatorname{Im} X(f)}{\operatorname{Re} X(f)}\right)$  спектры этого сигнала.

б) Воспользовавшись этим результатом, определите спектральную плотность для двухстороннего экспоненциального импульса  $x_2(t) = E \exp(-\alpha |t|) = x_1(t) + x_1(-t)$ .

в) используя свойство преобразования Фурье — теорему о производной спектра, определить для случая  $\alpha > 0$  спектральную плотность сигнала

$$x_3(t) = \begin{cases} t \exp(-\alpha t), & \text{если } t \geq 0, \\ 0, & \text{если } t < 0. \end{cases}$$

**Вопрос 2.4.** Показать, что спектральная плотность гауссова импульса  $x(t) = \exp(-\beta^2 t^2)$  является гауссовой функцией частоты<sup>1</sup>

$$X(f) = \frac{\sqrt{\pi}}{\beta} e^{-\left(\frac{\pi f}{\beta}\right)^2}.$$

**Вопрос 2.5.** Получить и изобразить спектр пачки из  $N = 5$  симметрично расположенных относительно нуля прямоугольных импульсов амплитудой  $E = 1$  В, длительностью  $\tau = 1$  мкс и интервалом следования в пачке  $T_0 = 10$  мкс.

**Вопрос 2.6.** Пусть  $X(f)$  — спектр некоторого сигнала  $x(t)$  конечной длительности. Определить спектр сигнала  $x(t) \cos(2\pi f_0 t)$ , где  $f_0 = 10$  кГц.

---

<sup>1</sup> Возможно, что в решении потребуется табличный интеграл  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi^2} d\xi = \sqrt{\pi}$ . Отдельно его определять не нужно.

## Занятие 3. Эффект наложения спектров при дискретизации сигналов.

### Теоретическая часть

#### Спектр дискретизованного сигнала

Рассмотрим способы описания дискретизованного сигнала, т.е. дискретного сигнала, получаемого из аналогового с помощью дискретизации.

##### 1) Функция дискретного времени.

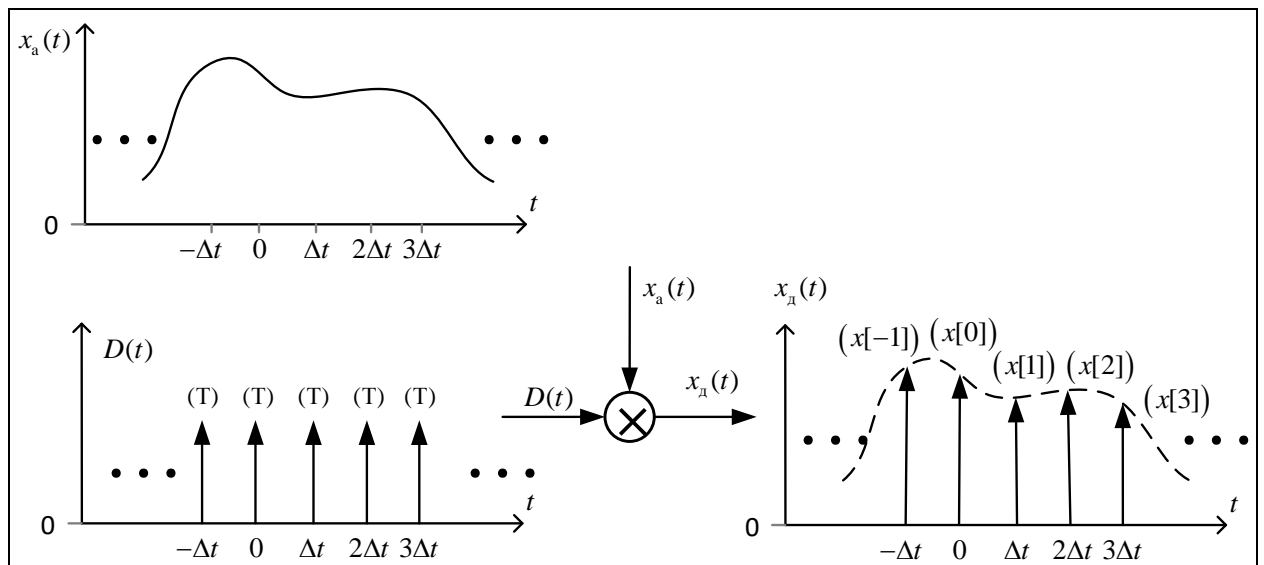
Это описание дискретного сигнала в виде последовательности отсчетов  $x[k]$  в заданные моменты времени  $k\Delta t$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , где  $\Delta t$  — шаг дискретизации:

$$x[k] = Tx(k\Delta t), \quad T \in \{1; \Delta t\}$$

где  $T$  — константа с размерностью времени, равная единице или  $\Delta t$ . Выбор этой константы, как будет показано далее, влияет на связь между спектром дискретизованного и исходного сигнала.

##### 2) Функция непрерывного времени (континуальная запись).

$$x_d(t) = T \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta t) \delta(t - k\Delta t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \delta(t - k\Delta t)$$



В этой записи дискретизованного сигнала представляется как результат умножения исходного аналогового сигнала  $x(t)$  на идеальную функцию дискретизации, представляющую собой периодическую последовательность дельта-функций Дирака с площадями  $T$

$$D(t) = T \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n\Delta t).$$

В таком случае дискретизованный сигнал описывается последовательностью дельта-функций с площадями (весами)  $x[k] = Tx(k\Delta t)$ :

$$x_d(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} T x(k\Delta t) \delta(t - k\Delta t).$$

$$x_d(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \delta(t - k\Delta t)$$

Определим спектр дискретизованного сигнала  $X_d(f)$ , зная спектр исходного аналогового сигнала до дискретизации  $X(f)$ . Воспользуемся континуальной формой записи дискретизованного сигнала

$$x_d(t) = T \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta t) \delta(t - n\Delta t) = D(t)x(t)$$

$$D(t) = T \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n\Delta t).$$

Ряд Фурье для идеальной функции дискретизации

$$D(t) = \frac{T}{\Delta t} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp(jm \frac{2\pi}{\Delta t} t).$$

Таким образом,  $x_d(t) = \frac{T}{\Delta t} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp(jm \frac{2\pi}{\Delta t} t) x(t)$ . Тогда по теореме смещения для преобразования Фурье:

$$X_d(f) = \frac{T}{\Delta t} \sum_{m=-\infty}^{\infty} X(f - mf_d).$$

При непосредственном взятии отсчетов  $x[k] = x(k\Delta t)$  константа  $T = 1$ , и спектр перед периодическим повторением масштабируется.

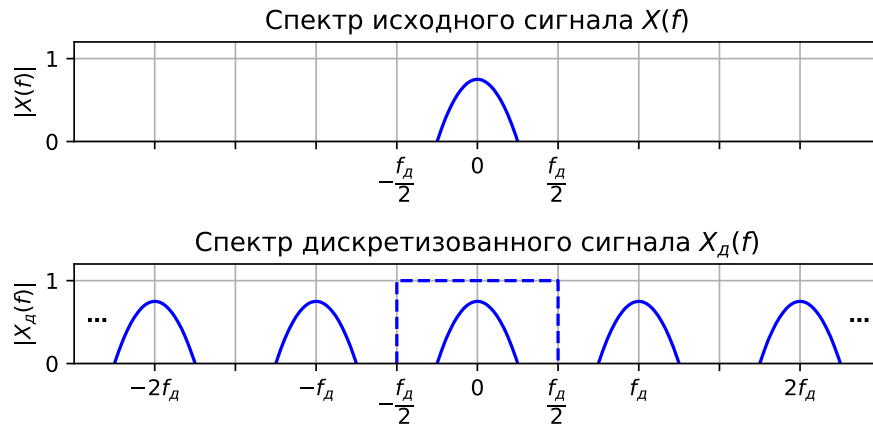
При  $T = \Delta t$  (когда  $x[k] = \Delta t x(k\Delta t)$ ) дискретизация аналогового сигнала  $x(t)$  по времени с шагом  $\Delta t$  приводит к периодическому повторению его спектра с периодом (по частоте), равным частоте дискретизации  $f_d = 1/\Delta t$

$$X_d(f) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} X(f - mf_d).$$

Заметим, что при этом интервал  $\left[-\frac{f_d}{2}, \frac{f_d}{2}\right]$  является одним периодом функции  $X_d(f)$ . Если

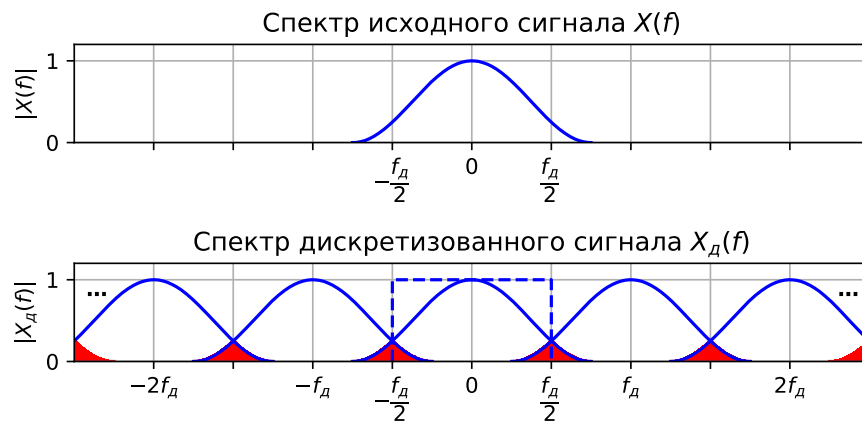
спектр аналогового сигнала лежит в этом интервале, то он периодически повторяется без наложения.





### Эффект наложения

Если спектр аналогового сигнала до дискретизации не был ограничен интервалом  $\left[-\frac{f_d}{2}, \frac{f_d}{2}\right]$ , то возникает **эффект наложения** (англ. **aliasing**, элайзинг, алиасинг). В таком случае спектр аналогового и дискретизованного на этом интервале не совпадают. Частично устранить этот эффект можно применением фильтра нижних частот с частотой среза  $f_c = f_d / 2$ , при этом информация о высокочастотных спектральных компонентах  $|f| > f_c$  не сохраняется.



### Теорема Котельникова во временной области

**Теорема отсчетов для сигнала с финитным спектром (Котельников 1933 г., Шеннон 1949 г.).**

Если сигнал  $x(t)$  имеет спектр, ограниченный интервалом  $[-f_B, f_B]$ , и не содержит гармонических компонент на частотах  $\pm f_B^2$ , то он представим с помощью своих дискретных

отсчетов  $x(k\Delta t)$ , взятых с шагом  $\Delta t = \frac{1}{2f_B}$ :

<sup>2</sup> Без этой оговорки теорема Котельникова не выполняется, например, для случая дискретизации сигнала

$$x(t) = \sin(2\pi f_B t) \text{ с шагом } \Delta t = \frac{1}{2f_B}.$$

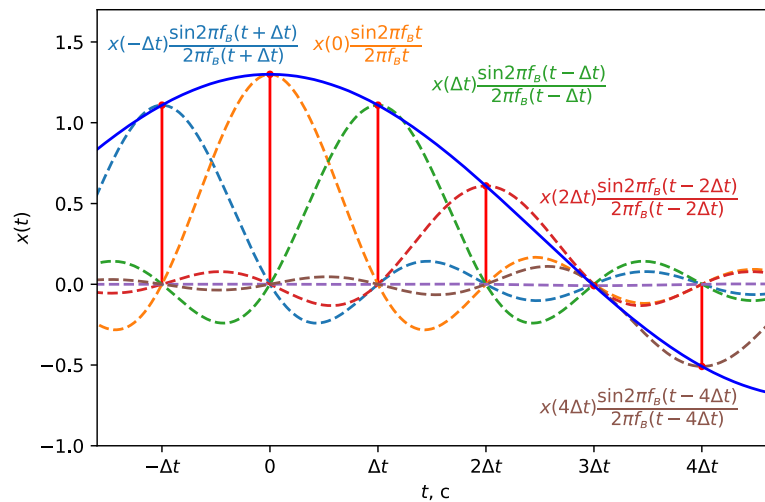
$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta t) \frac{\sin(2\pi f_B(t - k\Delta t))}{2\pi f_B(t - k\Delta t)}.$$

Приведем две различные интерпретации этой теоремы.

- 1) Если сигнал  $x(t)$  дискретизован с частотой  $f_d$ , а его спектр ограничен интервалом  $\left[-\frac{f_d}{2}, \frac{f_d}{2}\right]$ , его можно представить с помощью дискретных отсчетов  $x(k\Delta t)$ . Частота  $f_d/2$ , равная половине частоты дискретизации, называется частотой Найквиста.
- 2) Отсчеты  $x(k\Delta t)$  являются коэффициентами Фурье разложения сигнала  $x(t)$  по базису из функций отсчетов:

$$\varphi_k(t) = \frac{\sin(2\pi f_B(t - k\Delta t))}{2\pi f_B(t - k\Delta t)}, \quad \Delta t = \frac{1}{2f_B}.$$

В пространстве сигналов из  $L_2(-\infty, \infty)$  с спектром, ограниченным интервалом  $\left[-\frac{f_d}{2}, \frac{f_d}{2}\right]$ , система функций  $\{\varphi_k(t)\}_{k \in \mathbb{Z}}$  полна и ортогональна.



Для сигнала  $x(t)$  с финитным спектром  $X(f)$  запишем представление по функциям отсчетов:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \frac{\sin(2\pi f_B(t - k\Delta t))}{2\pi f_B(t - k\Delta t)},$$

где

$$c_k = \frac{(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varphi}_k)}{(\boldsymbol{\varphi}_k, \boldsymbol{\varphi}_k)} = \frac{1}{\Delta t} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \frac{\sin(2\pi f_B(t - k\Delta t))}{2\pi f_B(t - k\Delta t)} dt$$

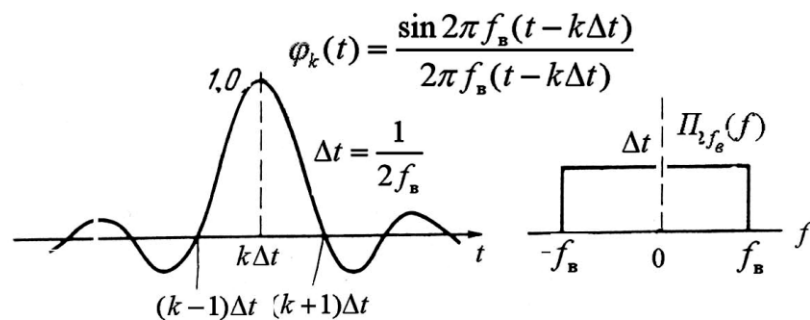
есть коэффициенты Фурье и  $\Delta t = 1/2f_B$ . Спектр функции отсчетов

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_k(t) e^{-j2\pi f t} dt = \Pi_{2f_B}(f) \exp(-j2\pi f k \Delta t)$$

имеет фазовый множитель из-за сдвига по времени на  $k\Delta t$ . Модуль этого спектра  $\Pi_{2f_B}(f)$  является прямоугольной функцией с единичной площадью. С учётом обобщённого равенства Парсеваля

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) y^*(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) Y^*(f) df$$

выражение для коэффициента  $c_k$  можем записать в виде



$$c_k = \frac{1}{\Delta t} \int_{-\infty}^{\infty} X(f) \Pi_{2f_B}(f) e^{j2\pi f k \Delta t} df.$$

Произведение под интегралом при  $-f_B < f < f_B$

$$X(f) \Pi_{2f_B}(f) = X(f) \frac{1}{2f_B} = X(f) \Delta t,$$

Поэтому  $c_k = x(k\Delta t)$ . Отсюда вывод: если сигнал имеет спектр, ограниченный интервалом  $[-f_B, f_B]$  и шаг дискретизации  $\Delta t = 1/2f_B$ , то коэффициенты Фурье  $c_k$  разложения сигнала по функциям отсчётов  $\varphi_k(t)$  являются выборками сигнала  $x(k\Delta t)$  и для  $x(t)$  имеет место представление рядом Котельникова:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta t) \frac{\sin 2\pi f_B(t - k\Delta t)}{2\pi f_B(t - k\Delta t)}.$$

**Алгоритм передачи непрерывного сигнала с помощью его отсчетов.**

- Взять отсчеты  $x(k\Delta t)$ ,  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$
- Передать величины этих отсчетов.
- На приемном конце сформировать короткие импульсы с площадями  $\Delta t x(k\Delta t)$ .
- Восстановить сообщение с помощью фильтра нижних частот с полосой пропускания  $[-f_B, f_B]$ , подавая на вход сформированные короткие импульсы

### Недостатки подхода.

- Спектры реальных сигналов ограничены по частоте приближено.
- Невозможно измерить отсчеты сигнала за бесконечно малый промежуток времени.
- Реальные фильтры восстановления отличаются от идеального фильтра нижних частот.
- Короткие импульсы отличны от дельта-функций.

### Теорема отсчетов в частотной области

Реально все сигналы наблюдаются в течение конечного интервала времени, например,  $[-T, T]$ . Поэтому можно считать, что  $x(t)$  является финитной функцией. Спектр такого сигнала имеет бесконечную протяжённость и записывается в виде

$$X(f) = \int_{-T}^T x(t) e^{-j2\pi f t} dt.$$

Для периодического продолжения  $x(t)$  с периодом  $2T$  (без наложения) справедливо представление рядом Фурье:

$$x_n(t) = \sum_n c_n \exp(j2\pi n \Delta f t),$$

где  $\Delta f = 1/2T$  и коэффициенты Фурье

$$c_n = (1/2T) \int_{-T}^T x(t) \exp(-j2\pi n \Delta f t) dt = \Delta f X(n\Delta f).$$

Для спектральной функции можем записать

$$X(f) = \int_{-T}^T \left[ \sum_n \Delta f X(n\Delta f) \exp(j2\pi n \Delta f t) \right] \exp(-j2\pi f t) dt = \Delta f \sum_n X(n\Delta f) \int_{-T}^T \exp(j2\pi(n\Delta f - f)t) dt.$$

Интеграл в этом выражении легко находится

$$\int_{-T}^T \exp(j2\pi(n\Delta f - f)t) dt = \frac{1}{j2\pi(n\Delta f - f)} \exp(j2\pi(n\Delta f - f)t) \Big|_{-T}^T = \frac{2 \sin 2\pi T(n\Delta f - f)}{2\pi(n\Delta f - f)}.$$

Для  $X(f)$  окончательно получаем

$$X(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(n\Delta f) \frac{\sin 2\pi T(f - n\Delta f)}{2\pi T(f - n\Delta f)}; \quad \Delta f = 1/2T.$$

Это интерполяционная формула Котельникова (теорема отсчётов) в частотной области. Функция  $X(f)$  на любой частоте  $f$  однозначно представляется последовательностью своих отсчётов, взятых через равные интервалы  $\Delta f = 1/2T$ .

Дискретизация спектральной функции с шагом  $\Delta f = 1/2T$  приводит к периодическому повторению сигнала по оси времени с периодом  $2T$ . При этом эффекта наложения отдельных

периодов друг на друга не будет, поскольку шаг дискретизации по частоте выбран в соответствии с теоремой отсчетов в спектральной области. Выделив один из периодов, например, при  $t \in [-T, T]$ , можно точно восстановить спектральную функцию  $X(f)$ , взяв преобразование Фурье для  $x(t)$ .

### Эффект наложения спектров при дискретизации синусоидальных сигналов

Дискретизация сигнала  $x(t)$  по времени с шагом  $\Delta t$  приводит к периодическому повторению исходного спектра  $X(f)$  с периодом, равным частоте дискретизации  $f_d = 1/\Delta t$ . Полезная информация содержится в полосе  $[-f_d/2, f_d/2]$ . Если не принять специальных мер, возникает эффект наложения, в результате которого все частоты в спектре сигнала, превышающие половинную частоту дискретизации, как бы отражаются от этой частоты и переносятся на более низкие частоты, искажая исходный спектр. Для устранения этого эффекта сигнал перед дискретизацией предварительно пропускают через низкочастотный фильтр, частота среза которого равна  $f_c = 1/2\Delta t$ . Частота  $f_d/2$  в зарубежной литературе называется частотой Найквиста.

При дискретизации синусоидальных сигналов необходимо следить за тем, чтобы частоты синусоид не превосходили половину частоты дискретизации, как того требует теорема Котельникова. Несоблюдение этого условия приводит к парадоксальным результатам, например, при наблюдении восстановленных синусоид в цифровом осциллографе.

Пусть сигнал  $x(t) = \sin \pi f_0 t$  дискретизируется с частотой  $f_d$  отсчетов в секунду, т. е. через равные интервалы времени  $\Delta t = 1/f_d$ . Для последовательности отсчетов можем записать

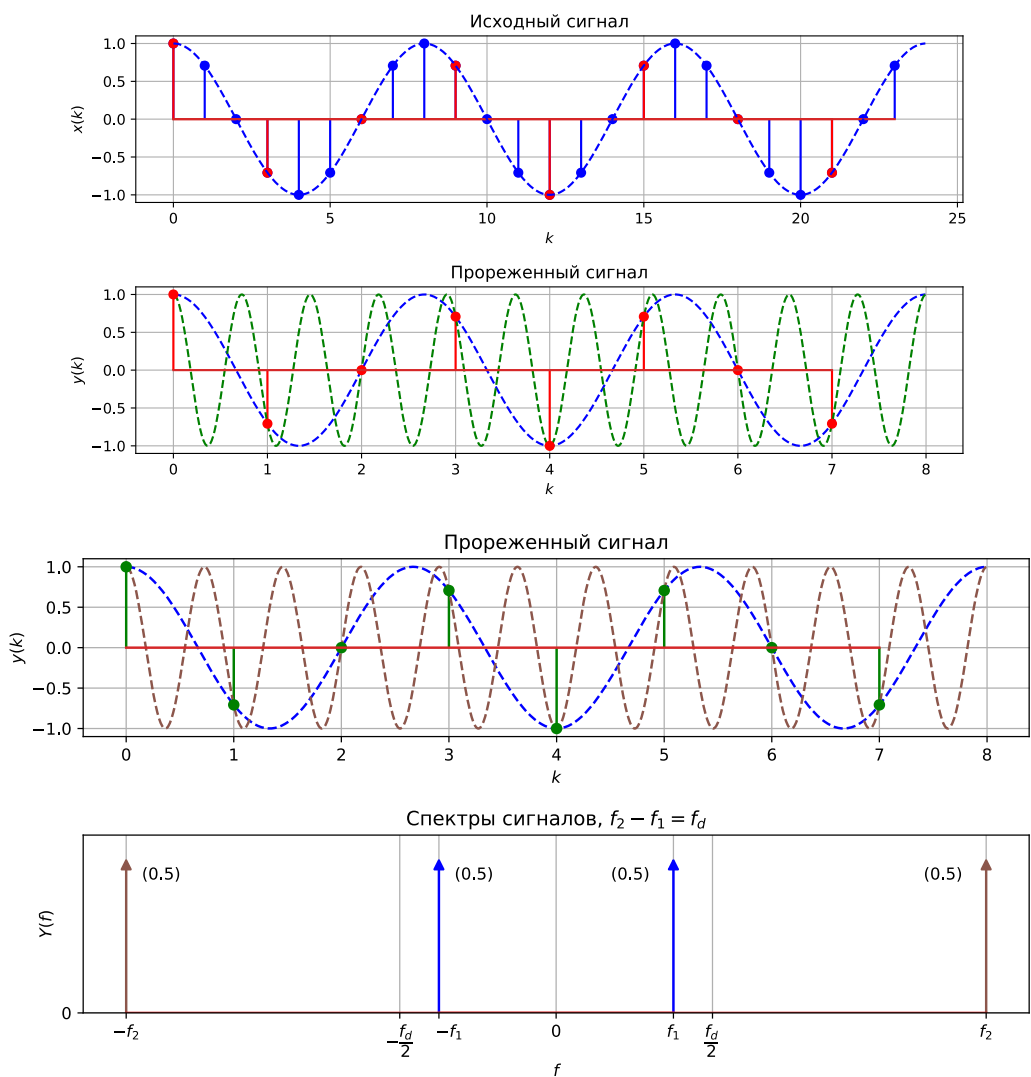
$$x[k] = \sin(2\pi f_0 k \Delta t) = \sin(2\pi f_0 k \Delta t + 2\pi m) = \sin 2\pi(f_0 + m/k \Delta t)k \Delta t.$$

Если выберем  $m$  кратным  $k$ ,  $m = nk$ , мы можем заменить отношение  $m/k$  целочисленной переменной  $n$ , так что

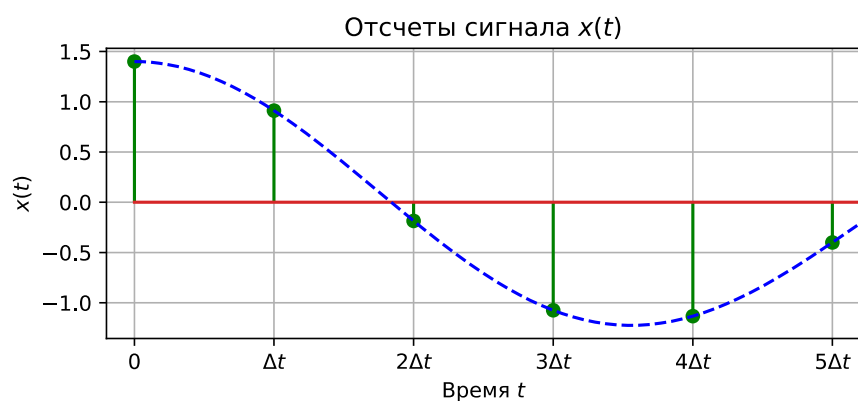
$$x[k] = \sin(2\pi f_0 k \Delta t) = \sin 2\pi(f_0 + n/\Delta t)k \Delta t = \sin 2\pi(f_0 + n f_d)k \Delta t.$$

Следовательно, частоты  $f_0$  и  $f_0 + n f_d$  дают одинаковый результат. Это выражение показывает, что последовательность цифровых отсчетов  $x(k)$ , представляющая синусоиду с частотой  $f_0$  Гц, точно так же представляет синусоиды с другими частотами  $f_0 + n f_d$ . Это одно из важнейших соотношений в области цифровой обработки сигналов.

*Вывод.* При дискретизации с частотой  $f_d$  отсчетов в секунду мы не можем различить дискретизованные значения синусоиды частотой  $f_0$  Гц и синусоиды частотой  $(f_0 + n f_d)$  Гц, если  $n$  — любое положительное или отрицательное целое число.



### Оценка спектра сигнала по последовательности его отсчетов



Пусть есть последовательность выборок  $x(k\Delta t)$ ,  $k \in Z$  некоторого аналогового сигнала  $x(t)$ , где  $\Delta t$  — шаг дискретизации — интервал времени между каждой парой соседних эквидистантных отсчетов,  $k \in Z$  — номер отсчета.  $f_d = 1/\Delta t$  — частота дискретизации — величина, обратная шагу дискретизации (размерность  $[Гц] = [с^{-1}]$ ). Будем считать, что спектр исходного аналогового

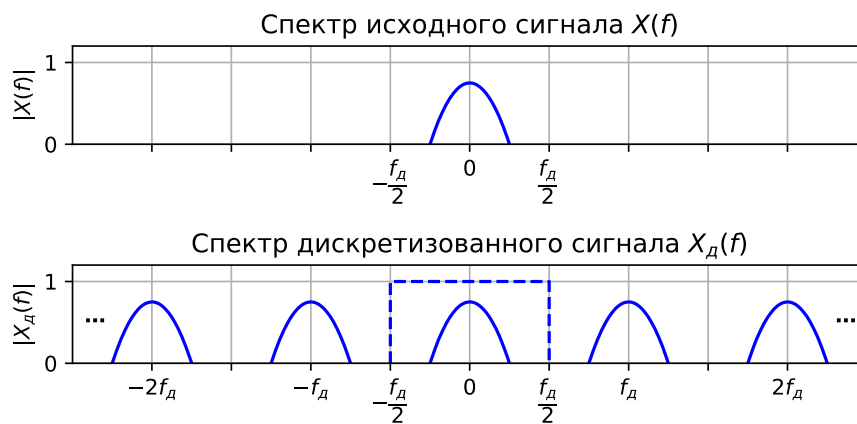
сигнала ограничен интервалом  $[-f_d/2; f_d/2]$ , а соответственно при дискретизации не наблюдается эффект наложения спектров ( $f_d > 2f_B$ ).

Рассмотрим последовательность отсчетов (дискретный сигнал)  $x[k]$ , которую будем определять через выборки следующим образом

$$x[k] = Tx(k\Delta t),$$

где  $T = \Delta t$ . Как ранее было установлено, при  $T = \Delta t$  спектр дискретизованного сигнала  $x[k]$  представляет собой периодическое повторение исходного спектра  $X_a(f)$  аналогового сигнала  $x(t)$  с периодом, равным частоте дискретизации  $f_d$ :

$$X_d(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_a(f - nf_d).$$



Необходимая спектральная информация будет содержаться в полосе  $[-f_d/2; f_d/2]$ . Теперь оценим спектр исходного сигнала по его выборкам в этой полосе.

Континуальная запись дискретного сигнала  $x[k]$  в данном случае

$$x_d(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta(t - k\Delta t).$$

Вычислим его спектр (преобразование Фурье)

$$\begin{aligned} X_d(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} x_d(t) \exp(-j2\pi ft) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta(t - k\Delta t) \exp(-j2\pi ft) dt = \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - k\Delta t) \exp(-j2\pi ft) dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \exp(-j2\pi f k \Delta t), \end{aligned}$$

Таким образом, спектр дискретного сигнала определяется через его отсчёты по формуле

$$X_d(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \exp(-j2\pi f k \Delta t). \quad (1)$$

Эта формула определяет прямое дискретное во времени преобразование Фурье (ДВПФ). Учитывая, что (1) представляет собой ряд Фурье для периодической функции  $X_d(f)^3$ , получаем, что отсчётные значения дискретного сигнала соответствуют коэффициентам Фурье в этом ряде:

$$x[k] = c_{-k} = \frac{1}{f_d} \int_{-f_d/2}^{f_d/2} X(f) \exp(j2\pi f k \Delta t) df. \quad (2)$$

В итоге получаем пару формул (1) и (2), определяющих прямое и обратное дискретное во времени преобразование Фурье (ДВПФ). ДВПФ в свою очередь показывает, каким является спектр дискретного сигнала  $x[k]$ , который на отрезке оси частот  $[-f_d/2; f_d/2]$  в отсутствие наложения совпадает со спектром исходного аналогового сигнала. При этом важно помнить, что в данном случае выборки аналогового сигнала связаны с дискретной последовательностью как  $x[k] = \Delta t x(k\Delta t)$ .

### Задание на моделирование

Задание расположено в .ipynb файле. Третьему занятию соответствуют следующие задачи.

- **Задача 3.1.** Эффект наложения при дискретизации прямоугольного импульса
- **Задача 3.2.** Эффект наложения при прореживании сигнала¶

### Контрольные вопросы

**Вопрос 3.1.** Определить аналоговый сигнал  $x_a(t)$ , после дискретизации без наложения с шагом  $\Delta t$  которого получается единичный импульс  $x[k] = 1[k] = \Delta t x_a(k\Delta t)$  ( $T = \Delta t$ ):

а) используя ряд Котельникова

$$x_a(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_a(k\Delta t) \frac{\sin 2\pi f_s(t - k\Delta t)}{2\pi f_s(t - k\Delta t)};$$

б) восстановив аналоговый сигнал, используя значения ДВПФ последовательности  $x[k]$  на периоде  $[-f_d/2, f_d/2]$ .

**Вопрос 3.2.** Воспользовавшись равенством Парсеваля для преобразования Фурье, показать, что функции отсчетов

$$\varphi_k(t) = \frac{\sin 2\pi f_s(t - k\Delta t)}{2\pi f_s(t - k\Delta t)}, \quad \Delta t = \frac{1}{2f_s},$$

имеют конечную удельную энергию  $\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt$ , и доказать их ортогональность в  $L_2(-\infty; \infty)$ .

---

<sup>3</sup> Напоминание. Для  $2l$ - периодической функции  $f(x)$ , абсолютно интегрируемой на интервале  $(-l; l)$  ряд Фурье по системе функций  $\phi_m(x) = \exp(jm\frac{\pi}{l}x)$ ,  $m \in \mathbb{Z}$ :

$$f(x) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_m \exp(jm\frac{\pi}{l}x), \quad \text{где коэффициенты Фурье } c_m = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x) \exp(-jm\frac{\pi}{l}x) dx$$



**Вопрос 3.3.** Определить, будут ли различимы синусоиды с частотами  $f_1 = 20$  кГц и  $f_2 = 80$  кГц при их дискретизации с частотой  $f_d = 60$  кГц. Будет ли наблюдаться эффект наложения?

### Список литературы

В качестве литературы рекомендуются учебные пособия [1]–[3]. Эти книги есть в библиотеке МФТИ.

1. Романюк Ю.А. Основы цифровой обработки сигналов. В 3-х ч. Ч.1. Свойства и преобразования дискретных сигналов. Изд. 2-Е, . М.: МФТИ, 2007. 332 с.
2. Романюк Ю.А. Дискретное преобразование Фурье в цифровом спектральном анализе. Учебное пособие. М.: МФТИ, 2007. 120 с.
3. Солонина А.И. Цифровая обработка сигналов в зеркале Matlab. СПб.: БХВ-Петербург, 2021. 560 с.