

Лабораторная работа №1 «Дискретизация аналоговых сигналов»

Радиофизическая лаборатория.

Оглавление

Задание к допуску.....	2
Тема 1. Классификация сигналов: аналоговые, дискретные, цифровые.....	2
Теоретическая часть	2
Классификация сигналов: аналоговые, дискретные, цифровые.	2
Задание на моделирование	4
Задачи	5
Тема 2. Спектры импульсных и периодических сигналов.	5
Теоретическая часть	5
Преобразование Фурье.....	5
Свойства преобразования Фурье	6
Спектры гармонических сигналов	7
Спектры импульсных сигналов.....	8
Спектр пачки равноотстоящих импульсов	9
Примеры решения задач	11
Задание на моделирование	14
Задачи	15
Тема 3. Эффект наложения спектров при дискретизации сигналов.....	18
Теоретическая часть	18
Спектр дискретизованного сигнала	18
Эффект наложения	20
Теорема Котельникова во временной области	20
Теорема отсчетов в частотной области	23
Эффект наложения спектров при дискретизации синусоидальных сигналов.....	24
Оценка спектра сигнала по последовательности его отсчетов	25
Задание на моделирование	27
Задачи	27
Список литературы.....	28

Задание к допуску

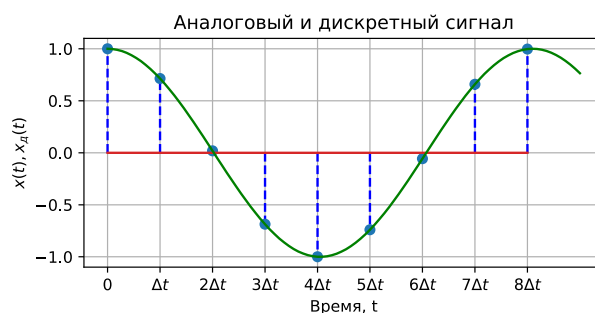
1. Прочитать теоретическую часть методички для каждой из трех предложенных тем.
2. Определить, чем отличаются аналоговые, дискретные и цифровые сигналы.
3. Вычислить спектр одиночного прямоугольного импульса (амплитуда $1В$, продолжительность τ). Построить график спектра.
4. Записать выражение для спектра бесконечного синусоидального сигнала. Построить график спектра.
5. Вычислить спектр одиночного симметричного треугольного импульса (амплитуда $1В$, продолжительность τ). Построить график спектра.
6. Оценить, как изменятся спектры в пунктах 3, 4, 5 после дискретизации с шагом $\Delta t = \tau/N$.

Тема 1. Классификация сигналов: аналоговые, дискретные, цифровые.

Теоретическая часть

Классификация сигналов: аналоговые, дискретные, цифровые.

Под **сигналом** обычно понимают величину, отражающую состояние физической системы. Поэтому естественно рассматривать сигналы как функции, заданные в физических координатах. Примером могут служить одномерные сигналы, заданные как функции времени $x(t)$, двумерные сигналы заданные на плоскости $I(x, y)$. В качестве сигналов могут выступать различные величины. Пример одномерного сигнала — зависимость напряжения в сети от времени $U(t) = A \cdot \cos(2\pi f_0 t)$. Далее мы будем рассматривать в основном одномерные сигналы.



Аналоговые или континуальные сигналы $x(t)$ описываются непрерывными и кусочно-непрерывными функциями, причем как сама функция, так и ее аргумент могут принимать любые значения в пределах некоторого интервала.

Дискретные сигналы, могут быть описаны в виде счетного набора отсчетов (значений) в заданные моменты времени $k\Delta t$, $k \in \mathbb{Z}$, где Δt — шаг дискретизации. Частота дискретизации f_d (размерность в Гц) — это величина, обратная шагу дискретизации $f_d = 1 / \Delta t$.

Цифровые сигналы, помимо того, что они являются дискретными, могут принимать лишь конечное число значений, соответствующих уровням квантования. Процесс

преобразования аналогового сигнала в цифровой состоит из дискретизации и квантования, которые осуществляются аналого-цифровым преобразователем (АЦП). Обычно число уровней квантования 2^m , где m — разрядность АЦП.

Для дискретных сигналов будем использовать следующие описания.

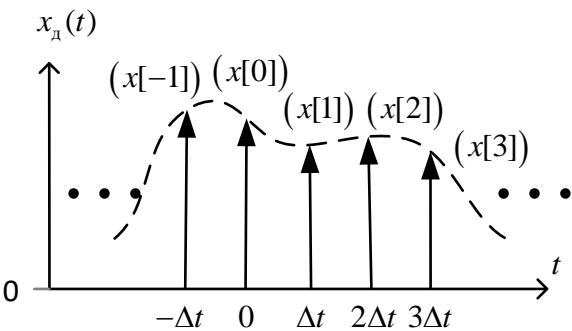
1) Функция дискретного времени k .

Это описание дискретного сигнала в виде последовательности отсчетов $x[k]$ в заданные моменты времени $k\Delta t$, $k \in \mathbb{Z}$, где Δt — шаг дискретизации. Далее мы будем использовать квадратные скобки для обозначения функций дискретного аргумента.

2) Функция непрерывного времени t (континуальная запись).

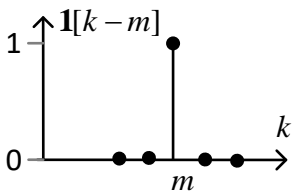
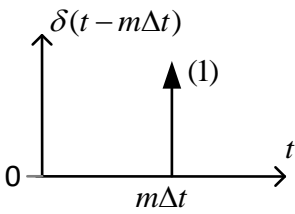
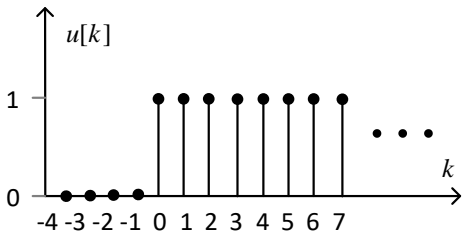
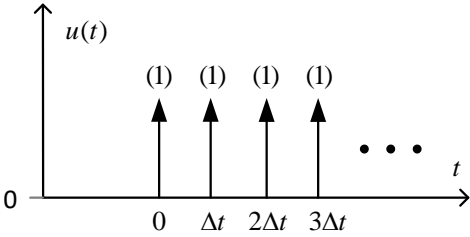
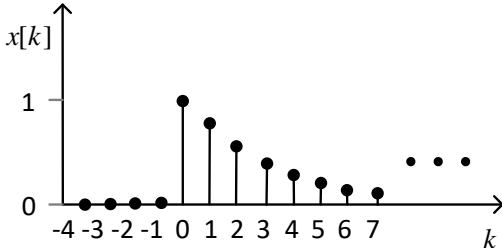
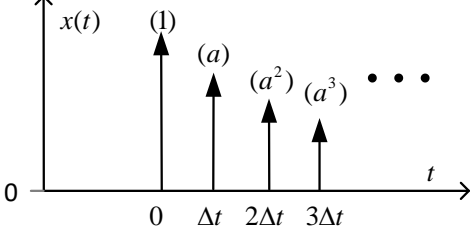
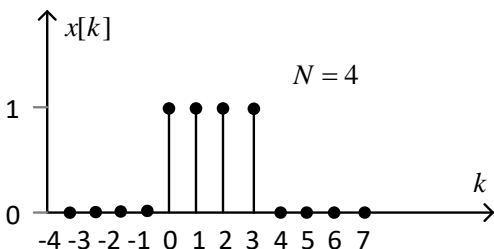
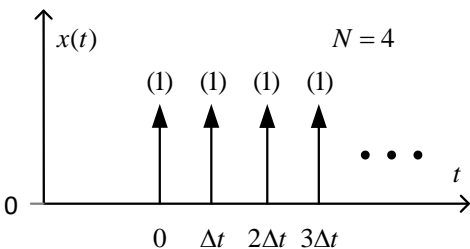
$$x_d(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \delta(t - k\Delta t)$$

В этой записи дискретный сигнал представляет собой последовательность дельта-функций с площадями $x[k]$.



Далее мы вернемся к этим двум формам записи и покажем, как связь между $x[k]$ и $x(k\Delta t)$ влияет на соотношение между спектрами дискретизованного и исходного сигнала.

Дискретный сигнал	Описание в виде функции дискретного времени	Описание в виде функции непрерывного времени
Единичный импульс в точке 0	$1[k] = \begin{cases} 1, & \text{при } k = 0, \\ 0, & \text{при } k \neq 0. \end{cases}$ $1[k]$ — единичный импульс <div> </div>	$\delta(t)$ $\delta(t)$ — дельта-функция Дирака <div> </div>
Единичный импульс в точке m	$1[k - m] = \begin{cases} 1, & \text{при } k = m, \\ 0, & \text{при } k \neq m. \end{cases}$	$\delta(t - m\Delta t)$

		
Дискретная функция включения	$u[k] = \begin{cases} 1, & \text{при } k \geq 0, \\ 0, & \text{при } k < 0. \end{cases}$ 	$\sum_{m=0}^{\infty} \delta(t - m\Delta t)$ 
Дискретная экспонента	$x[k] = \begin{cases} a^k, & \text{при } k \geq 0, \\ 0, & \text{при } k < 0. \end{cases}$  <p style="text-align: center;">случай $0 < a < 1$</p>	$\sum_{m=0}^{\infty} a^m \delta(t - m\Delta t)$  <p style="text-align: center;">случай $0 < a < 1$</p>
Последовательность из N единичных импульсов	$x[k] = \sum_{m=0}^{N-1} 1[k-m]$  <p style="text-align: right;">$N = 4$</p>	$x(t) = \sum_{m=0}^{N-1} \delta(t - m\Delta t)$  <p style="text-align: right;">$N = 4$</p>

Задание на моделирование

Задание расположено в файле **Lab1_task.ipynb**. Первому занятию соответствуют следующие задачи.

- Задание 1.1. Дискретизация и квантование.
- Задание 1.2. Декодирование .wav файла

Задачи

Задача 1.1. Имеется одноканальная (моно) аудиозапись с битовой глубиной 16 бит на отсчёт (разрядность АЦП равна 16), представленная в виде .wav файла. Частота дискретизации 44100 Гц. Определите число уровней квантования АЦП и шаг дискретизации Δt . Оцените длительность сигнала, если объем файла составляет 280 КБ и никакое дополнительное сжатие не производится.

(такой файл доступен по ссылке <https://freesound.org/people/xserra/sounds/219759/>)

Задача 1.2. Привести континуальную запись (в виде последовательности дельта-функций) для следующих сигналов:

а) единичного импульса, задержанного на семь тактом дискретизации

$$x[k] = \mathbf{1}[k - 7],$$

б) дискретизованной синусоиды с относительной частотой $\nu_0 = \frac{1}{4}$

$$y[k] = \sin\left(2\pi \frac{1}{4} k\right),$$

в) последовательности из пяти единичных импульсов

$$x[k] = \sum_{m=0}^4 \mathbf{1}[k - m],$$

г) дискретной экспоненты вида

$$x[k] = \begin{cases} (-0,5)^k, & \text{при } k \geq 0, \\ 0, & \text{при } k < 0. \end{cases}$$

Тема 2. Спектры импульсных и периодических сигналов.

Теоретическая часть

Преобразование Фурье

Все реальные сигналы имеют конечную удельную энергию:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt < \infty.$$

Например, если $x(t)$ — напряжение (или ток), действующее на единичном сопротивлении, то интеграл представляет собой энергию, выделяемую на единичном сопротивлении, и эта энергия конечна. В этом случае $x(t)$ — функция с интегрируемым квадратом на всей оси. По теореме Планшереля для функции $x(t)$ существует функция $X(f)$ также с интегрируемым квадратом на всей оси, связанна с $x(t)$ соотношением:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T \left| X(f) - \int_{-T}^T x(t) e^{-j2\pi ft} dt \right|^2 df = 0.$$

Если функции $x(t)$ и $X(f)$ абсолютно интегрируемы, то

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt,$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi ft} df.$$

Эти формулы представляют собой пару преобразования Фурье (ФТ), где частота f измеряется в Герцах (Гц). Для частоты циклической частоты $\omega = 2\pi f$, измеряемой в рад/с (радианы в секунду) пара преобразования Фурье имеет вид:

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt,$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega.$$

Первый интеграл называется спектральной плотностью, а второй - интегралом Фурье.

Далее будем использовать запись вида $x(t) \overset{FT}{\leftrightarrow} X(f)$, что означает, что для сигнала $x(t)$ преобразование Фурье будет $X(f)$.

В общем случае $X(\omega)$ – комплексная функция частоты:

$$X(\omega) = \operatorname{Re}[X(\omega)] + j \operatorname{Im}[X(\omega)] = A(\omega) - jB(\omega) = |X(\omega)| e^{j\varphi(\omega)},$$

где

$$\operatorname{Re}[X(\omega)] = A(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cos \omega t dt,$$

$$\operatorname{Im}[X(\omega)] = -B(\omega) = - \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \sin \omega t dt,$$

$|X(\omega)| = \sqrt{A^2(\omega) + B^2(\omega)}$ – амплитудно-частотная характеристика (АЧХ),

$\varphi(\omega) = -\arctg \frac{B(\omega)}{A(\omega)}$ – фазо-частотная характеристика (ФЧХ) сигнала.

Свойства преобразования Фурье

Предположим, что $x(t) \overset{FT}{\leftrightarrow} X(f)$ и $y(t) \overset{FT}{\leftrightarrow} Y(f)$. Тогда справедливы следующие свойства преобразования Фурье.

1. Свойство линейности.

Для заданных чисел $\alpha \in \mathbb{C}$ и $\beta \in \mathbb{C}$ $\alpha x(t) + \beta y(t) \overset{FT}{\leftrightarrow} \alpha X(f) + \beta Y(f)$.

2. Теорема запаздывания.

Для заданной задержки по времени τ (или опережения в случае $\tau < 0$)

$$x(t - \tau) \xleftrightarrow{FT} e^{-j2\pi f\tau} X(f).$$

3. Теорема сдвига.

$$x(t)e^{-j2\pi f_0 t} \xleftrightarrow{FT} X(f + f_0);$$

4. Теорема Парсеваля-Релея.

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)y^*(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)Y^*(f)df.$$

5. Теорема о спектре произведения.

$$x(t)y(t) \xleftrightarrow{FT} X(f) \otimes Y(f),$$

$$x(t)y(t) \xleftrightarrow{FT} \int_{-\infty}^{\infty} X(\tilde{f})Y(f - \tilde{f})d\tilde{f}.$$

6. Теорема о спектре свертки.

$$x(t) \otimes y(t) \xleftrightarrow{FT} X(f)Y(f).$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)y(t - \tau)d\tau \xleftrightarrow{FT} X(f)Y(f);$$

7. Теорема об изменении масштаба.

$$x(at) \xleftrightarrow{FT} \frac{1}{a} X\left(\frac{f}{a}\right).$$

8. Теорема о спектре производной.

$$\frac{dx(t)}{dt} \xleftrightarrow{FT} j2\pi f X(f)$$

9. Теорема о производной спектра:

$$t \cdot x(t) \xleftrightarrow{FT} \frac{1}{j2\pi} \frac{dX(f)}{df}.$$

Спектры гармонических сигналов

Вычислим обратное преобразование Фурье для $X(f) = \delta(f - f_0)$, т.е. от дельта-функции в точке f_0 оси частот.

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)e^{j2\pi ft}df = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(f - f_0)e^{j2\pi ft}df = e^{j2\pi f_0 t}.$$

Тогда с учетом того, что $\cos(2\pi f_0 t) = (e^{j2\pi f_0 t} + e^{-j2\pi f_0 t})/2$ и $\sin(2\pi f_0 t) = (e^{j2\pi f_0 t} - e^{-j2\pi f_0 t})/2j$, получаем

$$1 \xleftrightarrow{FT} \delta(f),$$

$$e^{j2\pi f_0 t} \xleftrightarrow{FT} \delta(f - f_0),$$

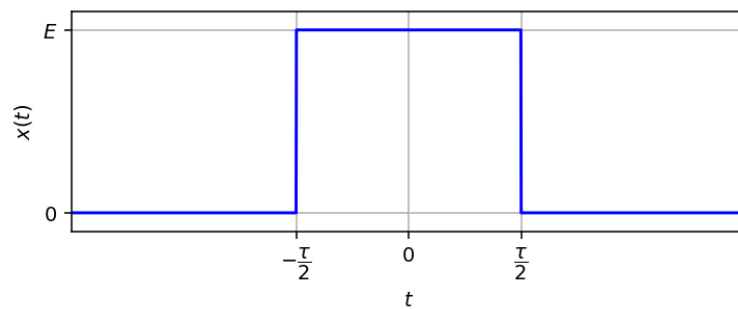
$$\cos(2\pi f_0 t) \xleftrightarrow{FT} \frac{1}{2} \delta(f - f_0) + \frac{1}{2} \delta(f + f_0),$$

$$\sin(2\pi f_0 t) \xleftrightarrow{FT} \frac{1}{2j} \delta(f - f_0) - \frac{1}{2j} \delta(f + f_0).$$

Спектры импульсных сигналов

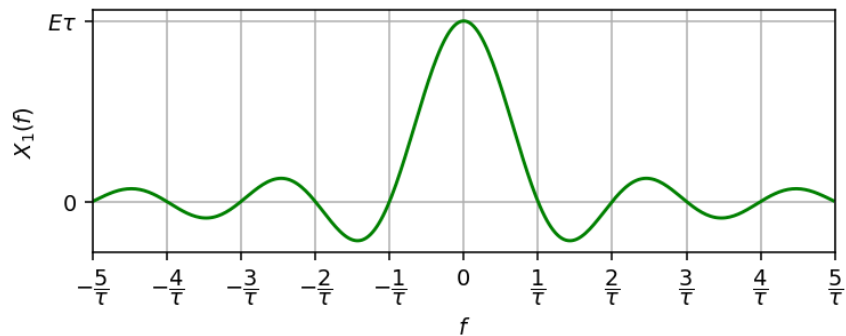
Симметричный прямоугольный импульс длительностью τ

$$x_1(t) = \begin{cases} E, & \text{если } |t| < \tau/2, \\ 0, & \text{если } |t| \geq \tau/2. \end{cases}$$



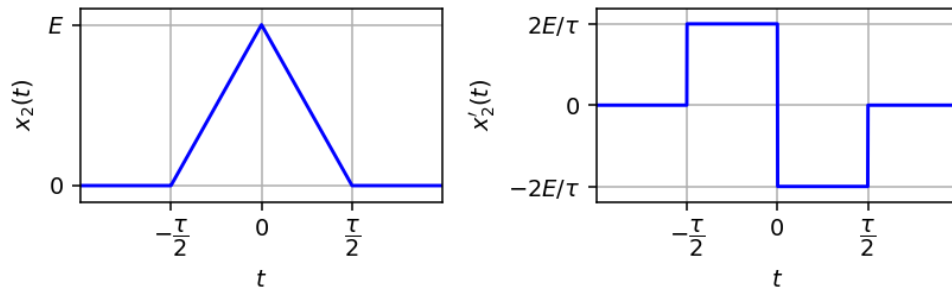
Спектр

$$X_1(f) = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} E e^{-j2\pi f t} dt = \frac{E}{-j2\pi f} e^{-j2\pi f t} \Big|_{-\tau/2}^{\tau/2} = E \frac{\sin(\pi f \tau)}{\pi f} = E \tau \frac{\sin(\pi f \tau)}{\pi f \tau}.$$

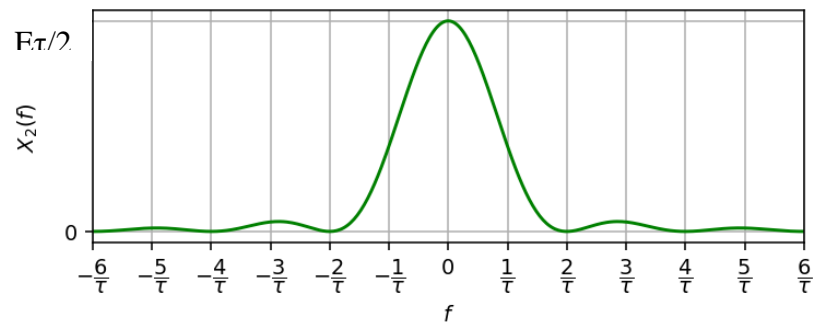


Симметричный треугольный импульс длительностью τ .

$$x_2(t) = \begin{cases} E \left(1 - \frac{2|t|}{\tau} \right), & \text{если } |t| < \tau/2, \\ 0, & \text{если } |t| \geq \tau/2. \end{cases}$$



$$X_2(f) = \frac{1}{j2\pi f} (e^{j\pi f \tau/2} - e^{-j\pi f \tau/2}) \frac{2E}{\tau} \frac{\tau}{2} \frac{\sin(\pi f \tau/2)}{\pi f \tau/2} = \frac{E\tau}{2} \frac{\sin^2(\pi f \tau/2)}{(\pi f \tau/2)^2}$$



Косинусоидальный импульс длительностью τ .

$$x_3(t) = \begin{cases} E \cos\left(\frac{\pi t}{\tau}\right), & \text{если } |t| < \tau/2, \\ 0, & \text{если } |t| \geq \tau/2. \end{cases}$$

$$x_3(t) = x_1(t) \cos(2\pi \frac{1}{2\tau} t) = \frac{1}{2} x_1(t) \left(e^{j2\pi \frac{1}{2\tau} t} + e^{-j2\pi \frac{1}{2\tau} t} \right)$$

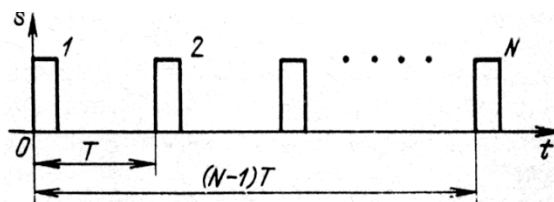
а значит

$$X_3(f) = \frac{1}{2} X_1(f - \frac{1}{2\tau}) + \frac{1}{2} X_1(f + \frac{1}{2\tau})$$

$$X_3(f) = X_1(f) \otimes \left(\frac{1}{2} \delta(f - \frac{1}{2\tau}) + \frac{1}{2} \delta(f + \frac{1}{2\tau}) \right) = \frac{1}{2} X_1(f - \frac{1}{2\tau}) + \frac{1}{2} X_1(f + \frac{1}{2\tau})$$

Спектр пачки равноотстоящих импульсов

Найдём спектр пачки равноотстоящих импульсов. Для определённости возьмём пачку из N прямоугольных импульсов



Обозначим через $X_1(\omega)$ спектральную плотность первого импульса. Тогда для группы из N равноотстоящих импульсов в соответствии с теоремой запаздывания будем иметь

$$X(\omega) = X_1(\omega)[1 + e^{-j\omega T} + e^{-j\omega 2T} + \dots + e^{-j\omega(N-1)T}] = X_1(\omega) \sum_{k=0}^{N-1} e^{-j\omega kT}.$$

На частотах $\omega = n2\pi/T$, где n – целое, каждое слагаемое в квадратных скобках равно единице, следовательно:

$$X(\omega = n2\pi/T) = NX_1(\omega = n2\pi/T).$$

Таким образом, на частотах $\omega = n2\pi/T$ модуль спектра пачки в N раз больше модуля спектра одиночного импульса. Это объясняется тем, что на частотах $\omega = n2\pi/T$ спектральные компоненты различных импульсов складываются с фазовыми сдвигами, кратными 2π .

Суммируя N членов геометрической прогрессии, получаем

$$X(\omega) = X_1(\omega) \frac{1 - e^{-j\omega NT}}{1 - e^{-j\omega T}} = X_1(\omega) \frac{e^{-j\omega NT/2} [e^{j\omega NT/2} - e^{-j\omega NT/2}]}{e^{-j\omega T/2} [e^{j\omega T/2} - e^{-j\omega T/2}]} = X_1(\omega) e^{-j\omega(N-1)T/2} \frac{\sin \omega NT/2}{\sin \omega T/2}.$$

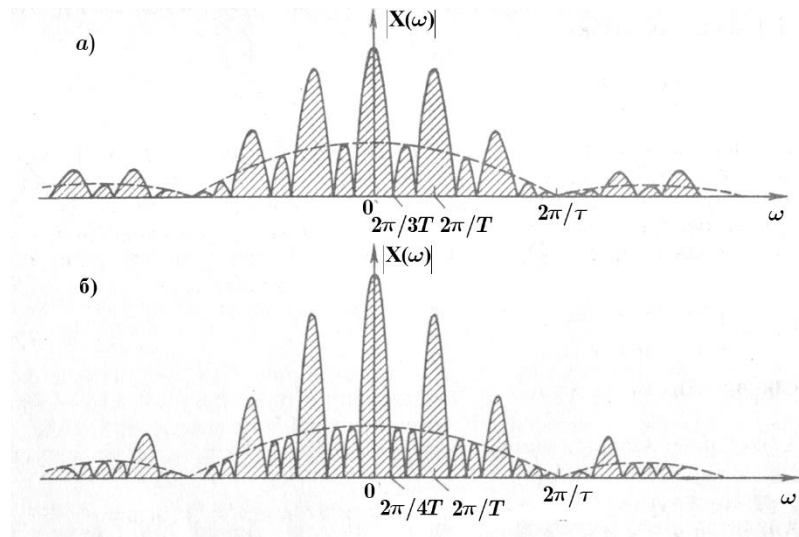
Видно, что на частотах $\omega = m2\pi/NT$, где m – целое, $X(\omega) = 0$. Подставляя сюда значение

$$X_1(\omega) = E\tau \frac{\sin \omega \tau/2}{\omega \tau/2} e^{-j\omega \tau/2},$$

где τ – длительность отдельного импульса, получаем окончательно для спектра пачки из N равноотстоящих прямоугольных импульсов:

$$X(\omega) = e^{-j\omega[(N-1)T/2 + \tau/2]} E\tau \frac{\sin \omega \tau/2}{\omega \tau/2} \frac{\sin \omega NT/2}{\sin \omega T/2}.$$

Для иллюстрации на рис. 1.8.14а изображён модуль спектра пачки из трёх прямоугольных импульсов, а на рис. 1.8.14б – из четырёх. При этом интервал между соседними импульсами $T = 3\tau$. Пунктиром изображён модуль спектра одиночного импульса. С увеличением числа импульсов в пачке спектральная плотность $X(\omega)$ при $N \rightarrow \infty$ принимает дискретную структуру спектра периодической функции. Нетрудно обобщить этот результат на произвольную форму одиночного импульса.



Модуль спектра пачки прямоугольных импульсов: а – три импульса в пачке, б – четыре импульса в пачке

Примеры решения задач

Задача 1.

Определить спектр $X(f)$ гармонического сигнала

$$x(t) = \cos(2\pi f_1 t) + 3\cos(2\pi f_2 t)$$

где $f_1 = 100$ Гц, $f_2 = 200$ Гц. Какой вид будет иметь спектр для $x(t)w(t)$, где $w(t)$ — некоторая оконная функция.

Решение

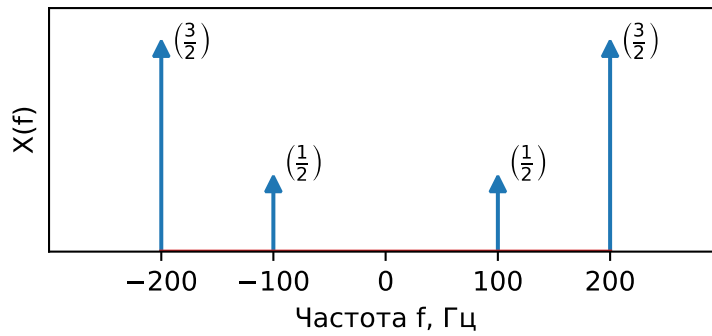
По свойствам преобразования Фурье

$$\exp(j2\pi f_0 t) \overset{FT}{\leftrightarrow} \delta(f - f_0),$$

$$\cos(2\pi f_0 t) \overset{FT}{\leftrightarrow} \frac{1}{2}\delta(f - f_0) + \frac{1}{2}\delta(f + f_0).$$

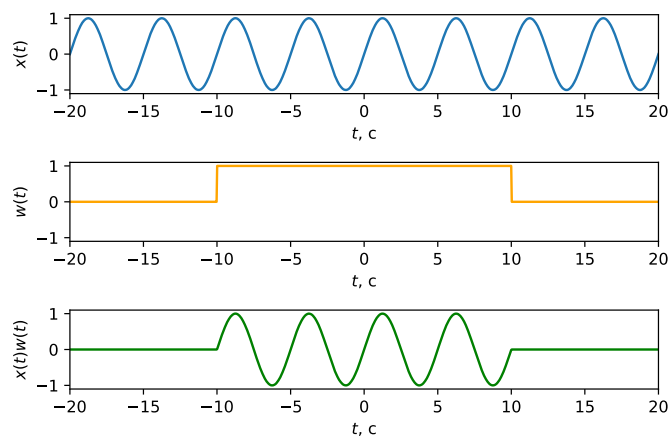
Тогда по свойству линейности преобразования Фурье

$$X(f) = \frac{1}{2}\delta(f - f_1) + \frac{1}{2}\delta(f + f_1) + \frac{3}{2}\delta(f - f_2) + \frac{3}{2}\delta(f + f_2)$$



Ограничение сигнала по длительности.

Ограничение сигнала по длительности эквивалентно умножению на прямоугольную оконную функцию.



$$y(t) = w(t)x(t)$$

Пусть

$$x(t) \overset{FT}{\leftrightarrow} X(f), \quad w(t) \overset{FT}{\leftrightarrow} W(f), \quad y(t) \overset{FT}{\leftrightarrow} Y(f).$$

$$w(t)x(t) \overset{FT}{\leftrightarrow} W(f) \otimes X(f),$$

$$w(t)x(t) \overset{FT}{\leftrightarrow} \int_{-\infty}^{\infty} W(\tilde{f})X(f - \tilde{f})d\tilde{f}.$$

В нашем примере

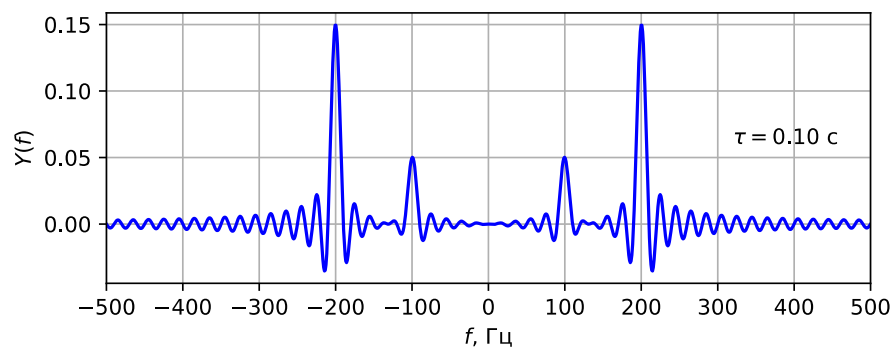
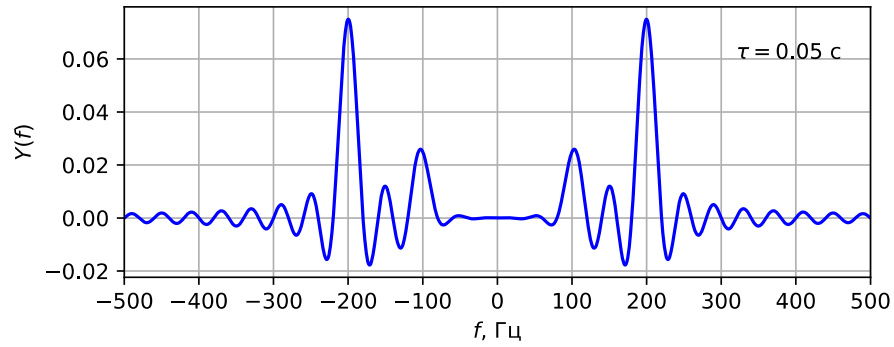
$$X(f) = \frac{1}{2}\delta(f - f_1) + \frac{1}{2}\delta(f + f_1) + \frac{3}{2}\delta(f - f_2) + \frac{3}{2}\delta(f + f_2).$$

$$w(t)x(t) \overset{FT}{\leftrightarrow} \int_{-\infty}^{\infty} W(\tilde{f})X(f - \tilde{f})d\tilde{f}.$$

$$Y(f) = \frac{1}{2}W(f - f_1) + \frac{1}{2}W(f + f_1) + \frac{3}{2}W(f - f_2) + \frac{3}{2}W(f + f_2).$$

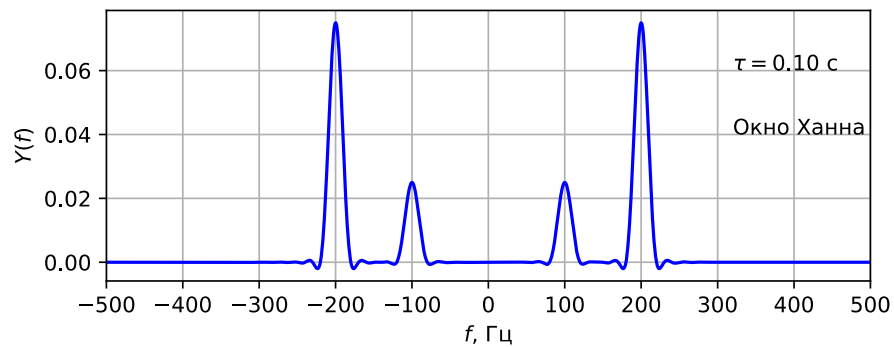
Спектр прямоугольного окна длиной τ соответствует спектру прямоугольного импульса длиной τ с высотой $E = 1$

$$W(f) = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} E e^{-j2\pi f t} dt = \frac{1}{-j2\pi f} e^{-j2\pi f t} \Big|_{-\tau/2}^{\tau/2} = \frac{\sin(\pi f \tau)}{\pi f} = \tau \frac{\sin(\pi f \tau)}{\pi f \tau}.$$



Для окна Ханна

$$W_H(f) = \frac{\sin(\pi f \tau)}{2\pi f (1 - \tau^2 f^2)}.$$



Задача 2.

Определите спектр $W_H(f)$ аналогового окна Ханна длительностью τ .

$$w_H(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left(1 + \cos\left(\frac{2\pi t}{\tau}\right) \right), & \text{если } |t| < \frac{\tau}{2}, \\ 0, & \text{если } |t| \geq \frac{\tau}{2}. \end{cases}$$

Приведем два способа решения, отличные от непосредственного вычисления преобразования Фурье по формуле.

Решение 1.

Пусть $w(t)$ — прямоугольное окно той же длительности.

$$w_H(t) = \frac{1}{2}w(t) + \frac{1}{4}w(t)\exp\left(j2\pi t\frac{1}{\tau}\right) + \frac{1}{4}w(t)\exp\left(-j2\pi t\frac{1}{\tau}\right).$$

Тогда по теореме сдвига для преобразования Фурье

$$W_H(f) = \frac{1}{2}W(f) + \frac{1}{4}W\left(f - \frac{1}{\tau}\right) + \frac{1}{4}W\left(f + \frac{1}{\tau}\right).$$

Далее остается подставить $W(f)$.

Решение 2.

Рассмотрим сигнал $x(t) = \frac{1}{2}\left(1 + \cos\left(\frac{2\pi t}{\tau}\right)\right)$.

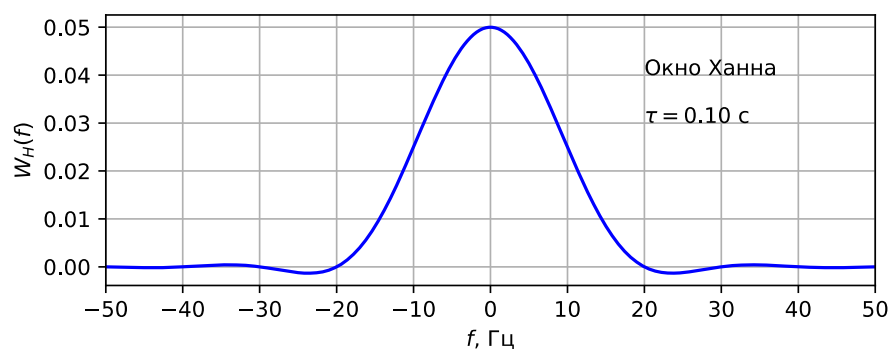
Его спектр $X(f) = \frac{1}{2}\delta(f) + \frac{1}{4}\delta\left(f - \frac{1}{\tau}\right) + \frac{1}{4}\delta\left(f + \frac{1}{\tau}\right)$.

При этом $w_H(t) = w(t)x(t)$ и $W_H(f) = W(f) \otimes X(f)$.

Используя фильтрующее свойство δ -функции, получаем

$$W_H(f) = \frac{1}{2}W(f) + \frac{1}{4}W\left(f - \frac{1}{\tau}\right) + \frac{1}{4}W\left(f + \frac{1}{\tau}\right).$$

$$W_H(f) = \frac{\sin(\pi f \tau)}{2\pi f (1 - \tau^2 f^2)}.$$



Задание на моделирование

Задание расположено в .ipynb файле. Второму занятию соответствуют следующие задачи.

- **Задание 2.1. Спектры симметричных импульсов**
- **Задание 2.2. Теорема запаздывания для преобразования Фурье**
- **Задание 2.3. Спектр отрезка синусоиды**
- **Задание 2.4. Спектр пачки равноотстоящих импульсов**

Задачи

Задача 2.1. Определите спектр $X(f)$ аналогового гармонического сигнала $x(t) = \sin(2\pi f_1 t) + \cos(2\pi f_2 t)$, $f_1 = 100$ кГц, $f_2 = 250$ кГц.

Задача 2.2. Определите спектр $W(f)$ аналогового симметричного окна Ханна длительностью τ .

$$w(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left(1 + \cos \left(2\pi \frac{t}{\tau} \right) \right), & \text{если } |t| \leq \tau/2, \\ 0, & \text{если } |t| > \tau/2. \end{cases}$$

Задача 2.3. а) Вычислите спектр $X_1(f)$ одностороннего экспоненциального импульса для случая $\alpha > 0$

$$x_1(t) = \begin{cases} E \exp(-\alpha t), & \text{если } t \geq 0, \\ 0, & \text{если } t < 0. \end{cases}$$

Найдите амплитудный $|X_1(f)|$ и фазовый $\varphi_1(f) = \arctg \left(\frac{\operatorname{Im} X(f)}{\operatorname{Re} X(f)} \right)$ спектры этого сигнала.

б) Воспользовавшись этим результатом, определите спектральную плотность для двухстороннего экспоненциального импульса $x_2(t) = E \exp(-\alpha |t|) = x_1(t) + x_1(-t)$.

в) используя свойство преобразования Фурье — теорему о производной спектра, определить для случая $\alpha > 0$ спектральную плотность сигнала

$$x_3(t) = \begin{cases} t \exp(-\alpha t), & \text{если } t \geq 0, \\ 0, & \text{если } t < 0. \end{cases}$$

Задача 2.4. Показать, что спектральная плотность гауссова импульса $x(t) = \exp(-\beta^2 t^2)$ является гауссовой функцией частоты¹

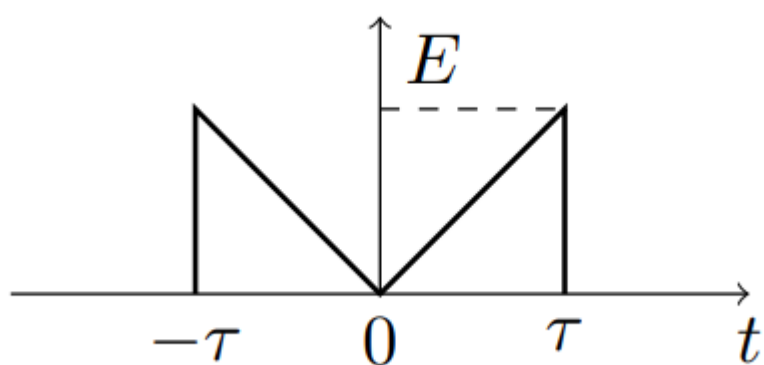
$$X(f) = \frac{\sqrt{\pi}}{\beta} e^{-\left(\frac{\pi f}{\beta}\right)^2}.$$

Задача 2.5. Получить и изобразить спектр пачки из $N=5$ симметрично расположенных относительно нуля прямоугольных импульсов амплитудой $E=1$ В, длительностью $\tau=1$ мкс и интервалом следования в пачке $T_0=10$ мкс.

Задача 2.6. Пусть $X(f)$ — спектр некоторого сигнала $x(t)$ конечной длительности. Определить спектр сигнала $x(t) \cos(2\pi f_0 t)$, где $f_0 = 10$ кГц.

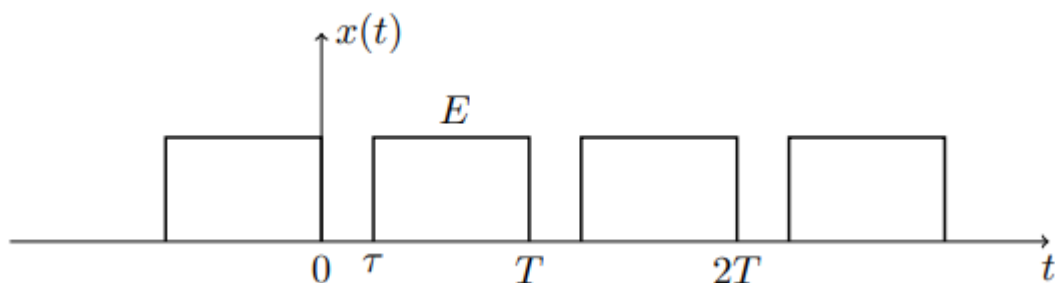
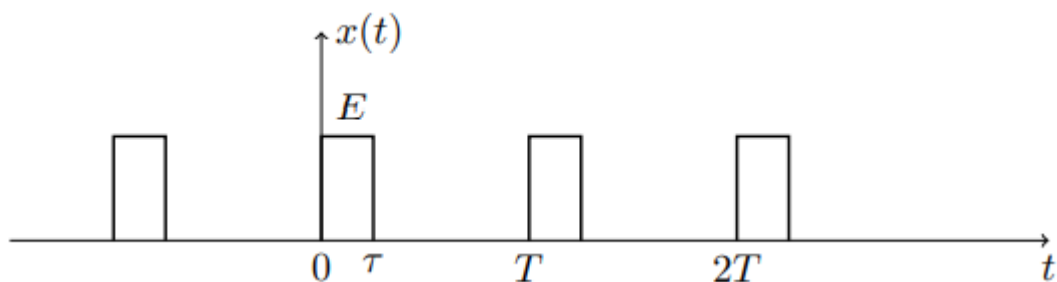
¹ Возможно, что в решении потребуется табличный интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi^2} d\xi = \sqrt{\pi}$. Отдельно его определять не нужно.

Задача 2.7. Найти спектр импульса:

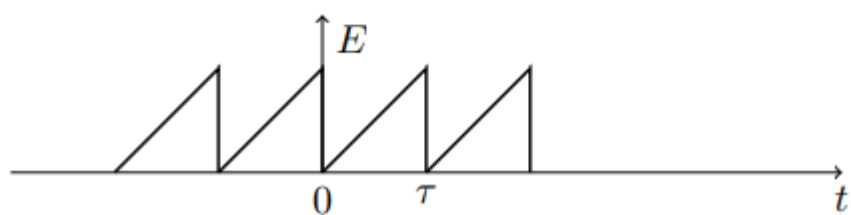
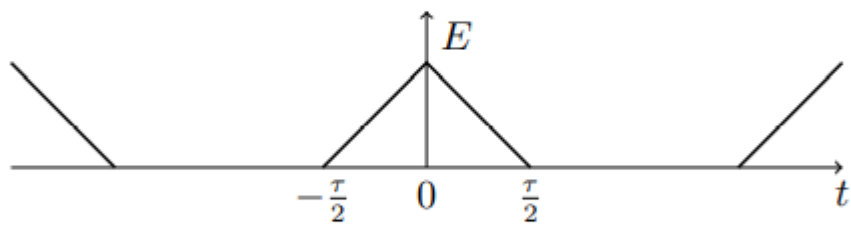
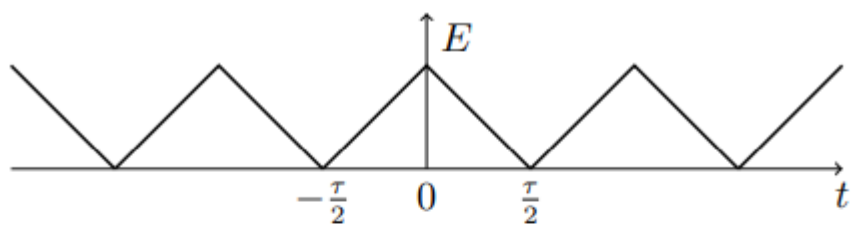


Указать значение максимальной спектральной плотности. Вычислить спектр периодической последовательности с периодом $T = 2\tau$.

Задача 2.8. Изобразить на одном чертеже модули спектров двух бесконечных последовательностей с одинаковым периодом T :



Задача 2.9. Определить и изобразить спектры следующих бесконечных последовательностей:



Задача 2.10. Вычислить интегралы, используя обобщенное равенство Парсеваля:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)y^*(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)Y^*(f)df$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\theta)}{\theta} d\theta \quad \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin(\theta)}{\theta}\right)^2 d\theta \quad \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin(\theta)}{\theta}\right)^4 d\theta$$

Тема 3. Эффект наложения спектров при дискретизации сигналов.

Теоретическая часть

Спектр дискретизованного сигнала

Рассмотрим способы описания дискретизованного сигнала, т.е. дискретного сигнала, получаемого из аналогового с помощью дискретизации.

1) Функция дискретного времени.

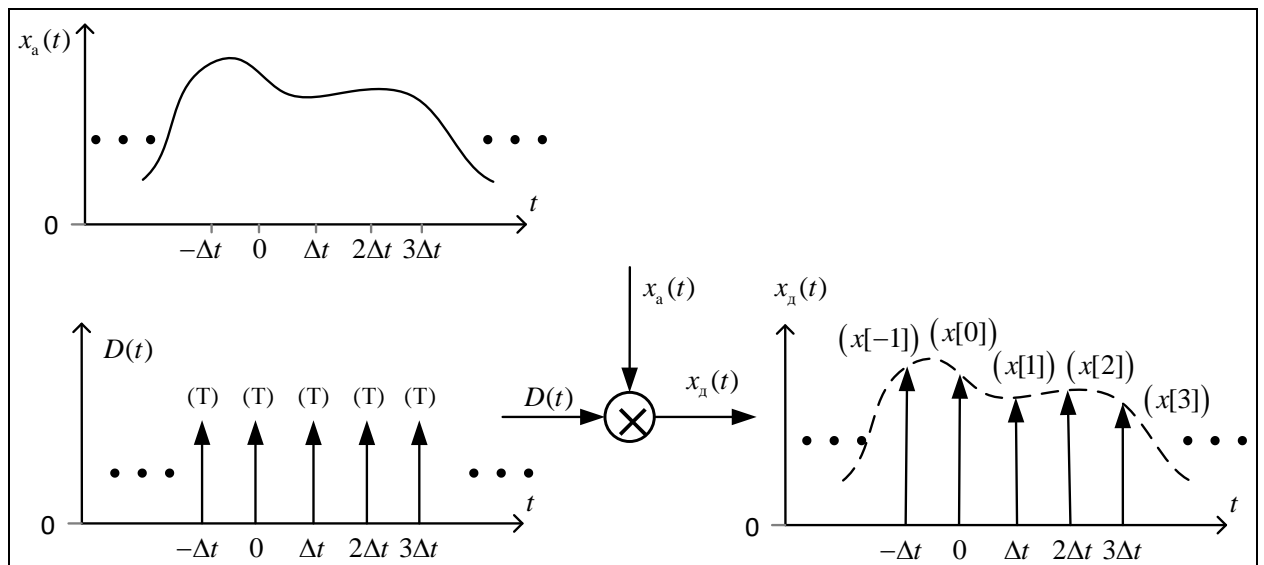
Это описание дискретного сигнала в виде последовательности отсчетов $x[k]$ в заданные моменты времени $k\Delta t$, $n \in \mathbb{Z}$, где Δt — шаг дискретизации:

$$x[k] = Tx(k\Delta t), \quad T \in \{1; \Delta t\}$$

где T — константа с размерностью времени, равная единице или Δt . Выбор этой константы, как будет показано далее, влияет на связь между спектром дискретизованного и исходного сигнала.

2) Функция непрерывного времени (континуальная запись).

$$x_d(t) = T \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta t) \delta(t - k\Delta t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \delta(t - k\Delta t)$$



В этой записи дискретизованного сигнала представляется как результат умножения исходного аналогового сигнала $x(t)$ на идеальную функцию дискретизации, представляющую собой периодическую последовательность дельта-функций Дирака с площадями T

$$D(t) = T \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n\Delta t).$$

В таком случае дискретизованный сигнал описывается последовательностью дельта-функций с площадями (весами) $x[k] = Tx(k\Delta t)$:

$$x_d(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} T x(k\Delta t) \delta(t - k\Delta t).$$

$$x_d(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \delta(t - k\Delta t)$$

Определим спектр дискретизованного сигнала $X_d(f)$, зная спектр исходного аналогового сигнала до дискретизации $X(f)$. Воспользуемся континуальной формой записи дискретизованного сигнала

$$x_d(t) = T \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta t) \delta(t - n\Delta t) = D(t)x(t)$$

$$D(t) = T \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n\Delta t).$$

Ряд Фурье для идеальной функции дискретизации

$$D(t) = \frac{T}{\Delta t} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp(jm \frac{2\pi}{\Delta t} t).$$

Таким образом, $x_d(t) = \frac{T}{\Delta t} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp(jm \frac{2\pi}{\Delta t} t) x(t)$. Тогда по теореме смещения для преобразования Фурье:

$$X_d(f) = \frac{T}{\Delta t} \sum_{m=-\infty}^{\infty} X(f - mf_d).$$

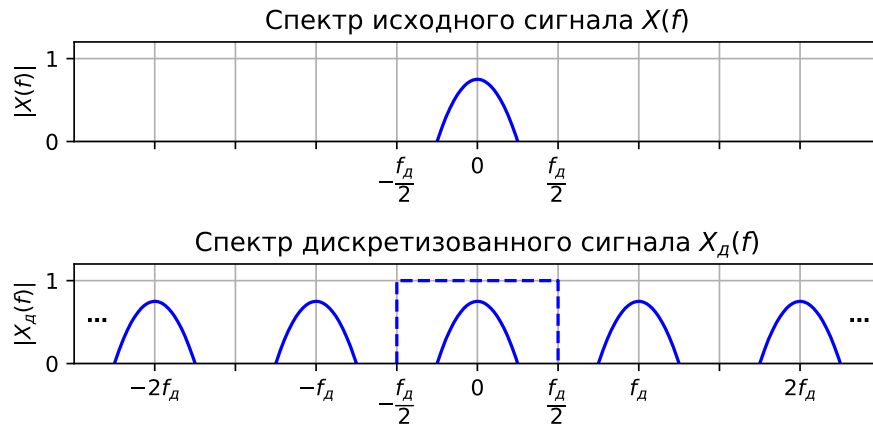
При непосредственном взятии отсчетов $x[k] = x(k\Delta t)$ константа $T=1$, и спектр перед периодическим повторением масштабируется.

При $T = \Delta t$ (когда $x[k] = \Delta t x(k\Delta t)$) дискретизация аналогового сигнала $x(t)$ по времени с шагом Δt приводит к периодическому повторению его спектра с периодом (по частоте), равным частоте дискретизации $f_d = 1 / \Delta t$

$$X_d(f) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} X(f - mf_d).$$

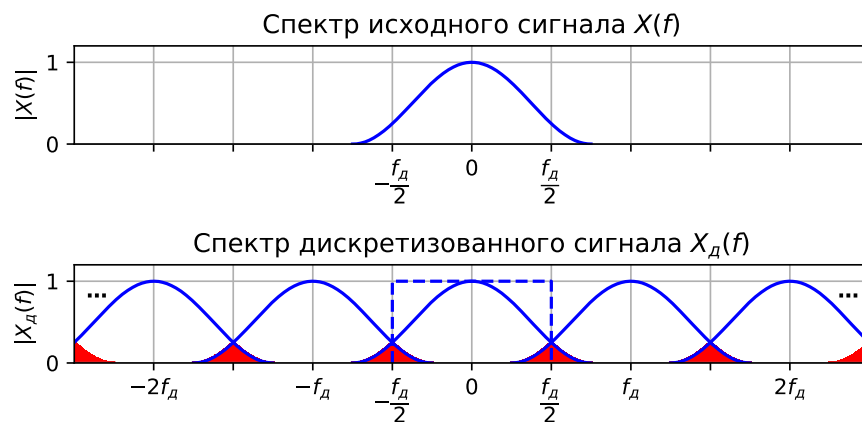
Заметим, что при этом интервал $\left[-\frac{f_d}{2}, \frac{f_d}{2}\right]$ является одним периодом функции $X_d(f)$.

Если спектр аналогового сигнала лежит в этом интервале, то он периодически повторяется без наложения.



Эффект наложения

Если спектр аналогового сигнала до дискретизации не был ограничен интервалом $\left[-\frac{f_d}{2}, \frac{f_d}{2}\right]$, то возникает **эффект наложения** (англ. **aliasing**, элайзинг, алиасинг). В таком случае спектр аналогового и дискретизованного на этом интервале не совпадают. Частично устранить этот эффект можно применением фильтра нижних частот с частотой среза $f_c = f_d / 2$, при этом информация о высокочастотных спектральных компонентах $|f| > f_c$ не сохраняется.



Теорема Котельникова во временной области

Теорема отсчетов для сигнала с финитным спектром (Котельников 1933 г., Шеннон 1949 г.). Если сигнал $x(t)$ имеет спектр, ограниченный интервалом $[-f_b, f_b]$, и не

содержит гармонических компонент на частотах $\pm f_B^2$, то он представим с помощью своих дискретных отсчетов $x(k\Delta t)$, взятых с шагом $\Delta t = \frac{1}{2f_B}$:

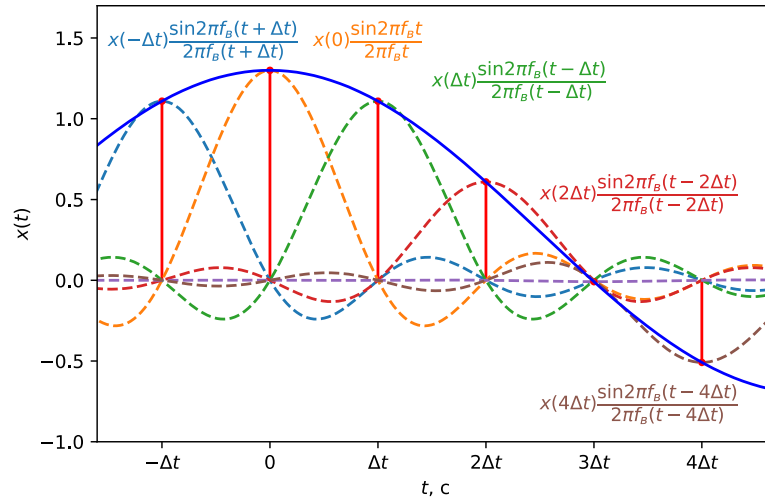
$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta t) \frac{\sin(2\pi f_B(t - k\Delta t))}{2\pi f_B(t - k\Delta t)}.$$

Приведем две различные интерпретации этой теоремы.

- 1) Если сигнал $x(t)$ дискретизован с частотой f_d , а его спектр ограничен интервалом $\left[-\frac{f_d}{2}, \frac{f_d}{2}\right]$, его можно представить с помощью дискретных отсчетов $x(k\Delta t)$. Частота $f_d/2$, равная половине частоты дискретизации, называется частотой Найквиста.
- 2) Отсчеты $x(k\Delta t)$ являются коэффициентами Фурье разложения сигнала $x(t)$ по базису из функций отсчетов:

$$\varphi_k(t) = \frac{\sin(2\pi f_B(t - k\Delta t))}{2\pi f_B(t - k\Delta t)}, \quad \Delta t = \frac{1}{2f_B}.$$

В пространстве сигналов из $L_2(-\infty, \infty)$ с спектром, ограниченным интервалом $\left[-\frac{f_d}{2}, \frac{f_d}{2}\right]$, система функций $\{\varphi_k(t)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ полна и ортогональна.



Для сигнала $x(t)$ с финитным спектром $X(f)$ запишем представление по функциям отсчетов:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \frac{\sin(2\pi f_B(t - k\Delta t))}{2\pi f_B(t - k\Delta t)},$$

² Без этой оговорки теорема Котельникова не выполняется, например, для случая дискретизации сигнала $x(t) = \sin(2\pi f_B t)$ с шагом $\Delta t = \frac{1}{2f_B}$.

где

$$c_k = \frac{(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varphi}_k)}{(\boldsymbol{\varphi}_k, \boldsymbol{\varphi}_k)} = \frac{1}{\Delta t} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \frac{\sin(2\pi f_B(t - k\Delta t))}{2\pi f_B(t - k\Delta t)} dt$$

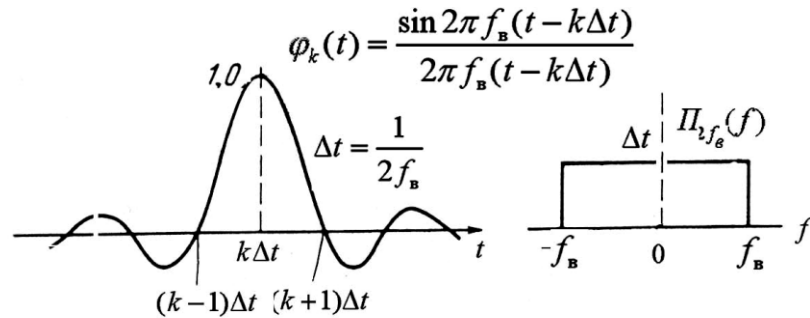
есть коэффициенты Фурье и $\Delta t = 1/2f_B$. Спектр функции отсчётов

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_k(t) e^{-j2\pi f t} dt = \Pi_{2f_B}(f) \exp(-j2\pi f k\Delta t)$$

имеет фазовый множитель из-за сдвига по времени на $k\Delta t$. Модуль этого спектра $\Pi_{2f_B}(f)$ является прямоугольной функцией с единичной площадью. С учётом обобщённого равенства Парсеваля

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) y^*(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) Y^*(f) df$$

выражение для коэффициента c_k можем записать в виде



$$c_k = \frac{1}{\Delta t} \int_{-\infty}^{\infty} X(f) \Pi_{2f_B}(f) e^{j2\pi f k\Delta t} df.$$

Произведение под интегралом при $-f_B < f < f_B$

$$X(f) \Pi_{2f_B}(f) = X(f) \frac{1}{2f_B} = X(f) \Delta t,$$

Поэтому $c_k = x(k\Delta t)$. Отсюда вывод: если сигнал имеет спектр, ограниченный интервалом $[-f_B, f_B]$ и шаг дискретизации $\Delta t = 1/2f_B$, то коэффициенты Фурье c_k разложения сигнала по функциям отсчётов $\varphi_k(t)$ являются выборками сигнала $x(k\Delta t)$ и для $x(t)$ имеет место представление рядом Котельникова:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta t) \frac{\sin 2\pi f_B(t - k\Delta t)}{2\pi f_B(t - k\Delta t)}.$$

Алгоритм передачи непрерывного сигнала с помощью его отсчетов.

- Взять отсчеты $x(k\Delta t)$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$
- Передать величины этих отсчетов.
- На приемном конце сформировать короткие импульсы с площадями $\Delta t x(k\Delta t)$.

- Восстановить сообщение с помощью фильтра нижних частот с полосой пропускания $[-f_c, f_c]$, подавая на вход сформированные короткие импульсы

Недостатки подхода.

- Спектры реальных сигналов ограничены по частоте приближено.
- Невозможно измерить отсчеты сигнала за бесконечно малый промежуток времени.
- Реальные фильтры восстановления отличаются от идеального фильтра нижних частот.
- Короткие импульсы отличны от дельта-функций.

Теорема отсчетов в частотной области

Реально все сигналы наблюдаются в течение конечного интервала времени, например, $[-T, T]$. Поэтому можно считать, что $x(t)$ является финитной функцией. Спектр такого сигнала имеет бесконечную протяжённость и записывается в виде

$$X(f) = \int_{-T}^T x(t) e^{-j2\pi f t} dt.$$

Для периодического продолжения $x(t)$ с периодом $2T$ (без наложения) справедливо представление рядом Фурье:

$$x_n(t) = \sum_n c_n \exp(j2\pi n \Delta f t),$$

где $\Delta f = 1/2T$ и коэффициенты Фурье

$$c_n = (1/2T) \int_{-T}^T x(t) \exp(-j2\pi n \Delta f t) dt = \Delta f X(n\Delta f).$$

Для спектральной функции можем записать

$$X(f) = \int_{-T}^T \left[\sum_n \Delta f X(n\Delta f) \exp(j2\pi n \Delta f t) \right] \exp(-j2\pi f t) dt = \Delta f \sum_n X(n\Delta f) \int_{-T}^T \exp(j2\pi(n\Delta f - f)t) dt.$$

Интеграл в этом выражении легко находится

$$\int_{-T}^T \exp(j2\pi(n\Delta f - f)t) dt = \frac{1}{j2\pi(n\Delta f - f)} \exp(j2\pi(n\Delta f - f)t) \Big|_{-T}^T = \frac{2 \sin 2\pi T(n\Delta f - f)}{2\pi(n\Delta f - f)}.$$

Для $X(f)$ окончательно получаем

$$X(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(n\Delta f) \frac{\sin 2\pi T(f - n\Delta f)}{2\pi T(f - n\Delta f)}; \Delta f = 1/2T.$$

Это интерполяционная формула Котельникова (теорема отсчётов) в частотной области. Функция $X(f)$ на любой частоте f однозначно представляется последовательностью своих отсчётов, взятых через равные интервалы $\Delta f = 1/2T$.

Дискретизация спектральной функции с шагом $\Delta f = 1/2T$ приводит к периодическому повторению сигнала по оси времени с периодом $2T$. При этом эффекта наложения отдельных периодов друг на друга не будет, поскольку шаг дискретизации по частоте выбран в соответствии с теоремой отсчетов в спектральной области. Выделив один из периодов, например, при $t \in [-T, T]$, можно точно восстановить спектральную функцию $X(f)$, взяв преобразование Фурье для $x(t)$.

Эффект наложения спектров при дискретизации синусоидальных сигналов

Дискретизация сигнала $x(t)$ по времени с шагом Δt приводит к периодическому повторению исходного спектра $X(f)$ с периодом, равным частоте дискретизации $f_d = 1/\Delta t$. Полезная информация содержится в полосе $[-f_d/2, f_d/2]$. Если не принять специальных мер, возникает эффект наложения, в результате которого все частоты в спектре сигнала, превышающие половинную частоту дискретизации, как бы отражаются от этой частоты и переносятся на более низкие частоты, искажая исходный спектр. Для устранения этого эффекта сигнал перед дискретизацией предварительно пропускают через низкочастотный фильтр, частота среза которого равна $f_c = 1/2\Delta t$. Частота $f_d/2$ в зарубежной литературе называется частотой Найквиста.

При дискретизации синусоидальных сигналов необходимо следить за тем, чтобы частоты синусоид не превосходили половину частоты дискретизации, как того требует теорема Котельникова. Несоблюдение этого условия приводит к парадоксальным результатам, например, при наблюдении восстановленных синусоид в цифровом осциллографе.

Пусть сигнал $x(t) = \sin \pi f_0 t$ дискретизируется с частотой f_d отсчетов в секунду, т. е. через равные интервалы времени $\Delta t = 1/f_d$. Для последовательности отсчетов можем записать

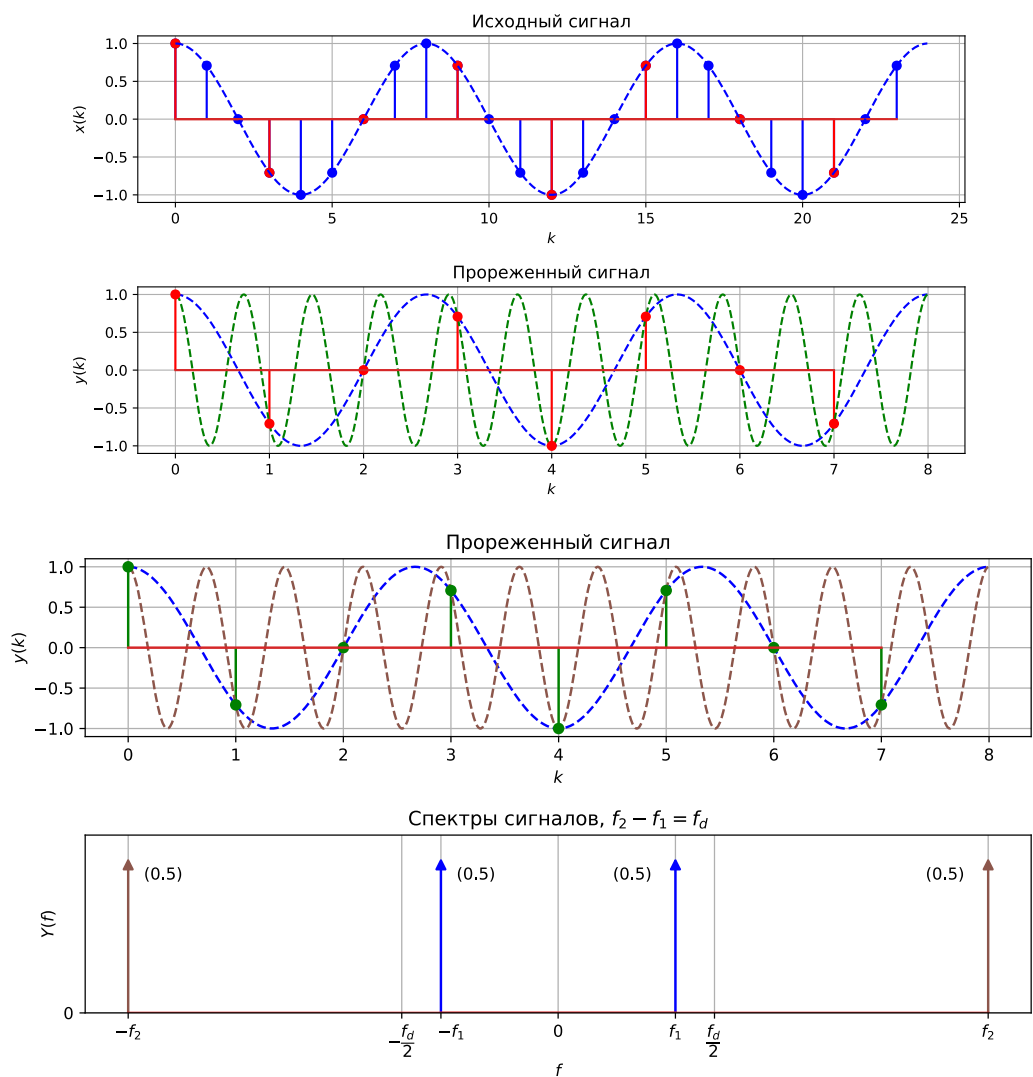
$$x[k] = \sin(2\pi f_0 k \Delta t) = \sin(2\pi f_0 k \Delta t + 2\pi m) = \sin 2\pi(f_0 + m/k \Delta t)k \Delta t.$$

Если выберем m кратным k , $m = nk$, мы можем заменить отношение m/k целочисленной переменной n , так что

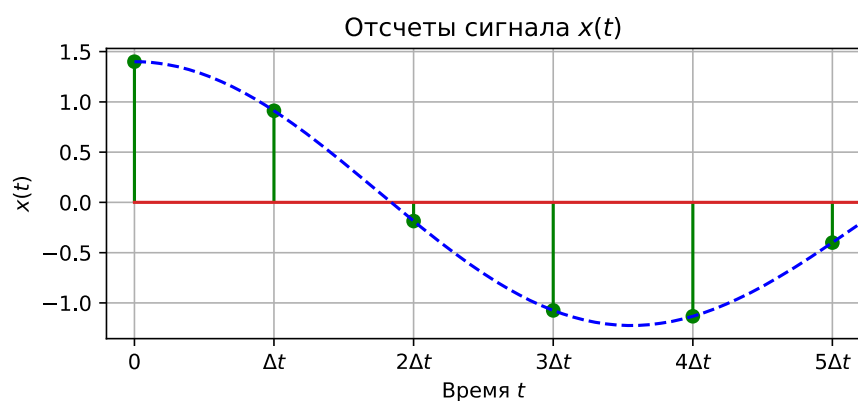
$$x[k] = \sin(2\pi f_0 k \Delta t) = \sin 2\pi(f_0 + n/\Delta t)k \Delta t = \sin 2\pi(f_0 + n f_d)k \Delta t.$$

Следовательно, частоты f_0 и $f_0 + n f_d$ дают одинаковый результат. Это выражение показывает, что последовательность цифровых отсчетов $x(k)$, представляющая синусоиду с частотой f_0 Гц, точно так же представляет синусоиды с другими частотами $f_0 + n f_d$. Это одно из важнейших соотношений в области цифровой обработки сигналов.

Вывод. При дискретизации с частотой f_d отсчетов в секунду мы не можем различить дискретизованные значения синусоиды частотой f_0 Гц и синусоиды частотой $(f_0 + n f_d)$ Гц, если n —любое положительное или отрицательное целое число.



Оценка спектра сигнала по последовательности его отсчетов



Пусть есть последовательность выборок $x(k\Delta t)$, $k \in \mathbb{Z}$ некоторого аналогового сигнала $x(t)$, где Δt — шаг дискретизации — интервал времени между каждой парой соседних эквидистантных отсчетов, $k \in \mathbb{Z}$ — номер отсчета. $f_d = 1/\Delta t$ — частота дискретизации — величина, обратная шагу дискретизации (размерность $[\text{Гц}] = [\text{с}^{-1}]$). Будем считать, что

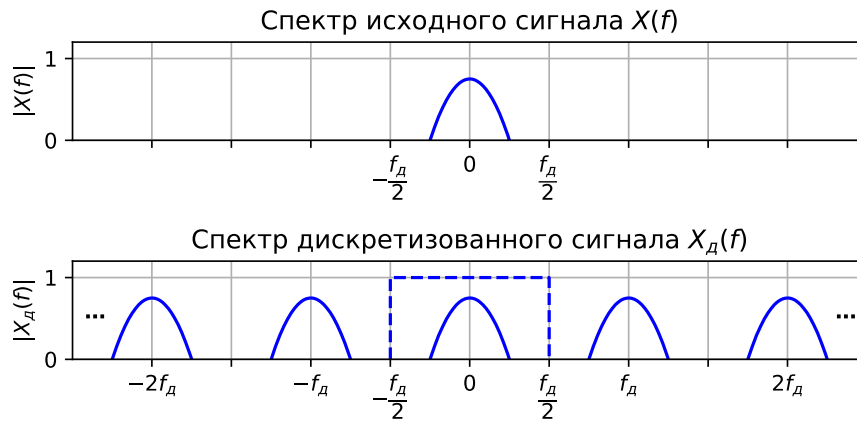
спектр исходного аналогового сигнала ограничен интервалом $[-f_d/2; f_d/2]$, а соответственно при дискретизации не наблюдается эффект наложения спектров ($f_d > 2f_b$).

Рассмотрим последовательность отсчетов (дискретный сигнал) $x[k]$, которую будем определять через выборки следующим образом

$$x[k] = Tx(k\Delta t),$$

где $T = \Delta t$. Как ранее было установлено, при $T = \Delta t$ спектр дискретизованного сигнала $x[k]$ представляет собой периодическое повторение исходного спектра $X_a(f)$ аналогового сигнала $x(t)$ с периодом, равным частоте дискретизации f_d :

$$X_d(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_a(f - nf_d).$$



Необходимая спектральная информация будет содержаться в полосе $[-f_d/2; f_d/2]$. Теперь оценим спектр исходного сигнала по его выборкам в этой полосе.

Континуальная запись дискретного сигнала $x[k]$ в данном случае

$$x_d(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta(t - k\Delta t).$$

Вычислим его спектр (преобразование Фурье)

$$\begin{aligned} X_d(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} x_d(t) \exp(-j2\pi ft) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta(t - k\Delta t) \exp(-j2\pi ft) dt = \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - k\Delta t) \exp(-j2\pi ft) dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \exp(-j2\pi f k \Delta t), \end{aligned}$$

Таким образом, спектр дискретного сигнала определяется через его отсчёты по формуле

$$X_d(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \exp(-j2\pi f k \Delta t). \quad (1)$$

Эта формула определяет прямое дискретное во времени преобразование Фурье (ДВПФ). Учитывая, что (1) представляет собой ряд Фурье для периодической функции $X_d(f)^3$, получаем, что отсчётные значения дискретного сигнала соответствуют коэффициентам Фурье в этом ряде:

$$x[k] = c_{-k} = \frac{1}{f_d} \int_{-f_d/2}^{f_d/2} X(f) \exp(j2\pi f k \Delta t) df. \quad (2)$$

В итоге получаем пару формул (1) и (2), определяющих прямое и обратное дискретное во времени преобразование Фурье (ДВПФ). ДВПФ в свою очередь показывает, каким является спектр дискретного сигнала $x[k]$, который на отрезке оси частот $[-f_d/2; f_d/2]$ в отсутствии наложения совпадает со спектром исходного аналогового сигнала. При этом важно помнить, что в данном случае выборки аналогового сигнала связаны с дискретной последовательностью как $x[k] = \Delta t x(k\Delta t)$.

Задание на моделирование

Задание расположено в .ipynb файле. Третьему занятию соответствуют следующие задачи.

- **Задание 3.1. Эффект наложения при дискретизации прямоугольного импульса**
- **Задание 3.2. Эффект наложения при прореживании сигнала**

Задачи

Задача 3.1. Определить аналоговый сигнал $x_a(t)$, после дискретизации без наложения с шагом Δt которого получается единичный импульс $x[k] = 1[k] = \Delta t x_a(k\Delta t)$ ($T = \Delta t$):

а) используя ряд Котельникова

$$x_a(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_a(k\Delta t) \frac{\sin 2\pi f_s(t - k\Delta t)}{2\pi f_s(t - k\Delta t)};$$

б) восстановив аналоговый сигнал, используя значения ДВПФ последовательности $x[k]$ на периоде $[-f_d/2; f_d/2]$.

Задача 3.2. Воспользовавшись равенством Парсеваля для преобразования Фурье, показать, что функции отсчетов

$$\varphi_k(t) = \frac{\sin 2\pi f_s(t - k\Delta t)}{2\pi f_s(t - k\Delta t)}, \quad \Delta t = \frac{1}{2f_s},$$

³ Напоминание. Для $2l$ -периодической функции $f(x)$, абсолютно интегрируемой на интервале $(-l; l)$ ряд Фурье по системе функций $\phi_m(x) = \exp(jm\frac{\pi}{l}x)$, $m \in \mathbb{Z}$:

$$f(x) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_m \exp(jm\frac{\pi}{l}x), \quad \text{где коэффициенты Фурье } c_m = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x) \exp(-jm\frac{\pi}{l}x) dx$$

имеют конечную удельную энергию $\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt$, и доказать их ортогональность в $L_2(-\infty; \infty)$.

Задача 3.3. Определить, будут ли различимы синусоиды с частотами $f_1 = 20$ кГц и $f_2 = 80$ кГц при их дискретизации с частотой $f_d = 60$ кГц. Будет ли наблюдаться эффект наложения?

Список литературы

В качестве литературы рекомендуются учебные пособия [1]–[3]. Эти книги есть в библиотеке МФТИ.

1. Романюк Ю.А. Основы цифровой обработки сигналов. В 3-х ч. Ч.1. Свойства и преобразования дискретных сигналов. Изд. 2-Е, . М.: МФТИ, 2007. 332 с.
2. Романюк Ю.А. Дискретное преобразование Фурье в цифровом спектральном анализе. Учебное пособие. М.: МФТИ, 2007. 120 с.
3. Солонина А.И. Цифровая обработка сигналов в зеркале Matlab. СПб.: БХВ-Петербург, 2021. 560 с.