Programowanie Funkcyjne
WPPT
Lista zadań

Jacek Cichoń, WPPT, PWr, 2018/19

Zadania oznaczone * są nieco trudniejsze od zadań bez gwiazdki. Zadania oznaczone ** są jeszcze trudniejsze.

1 Wstęp

1.1 Wprowadzenie do Haskell'a

Zadanie 1 — Zrób wszystkie zadania z książki Real World Haskell po rozdziale pierwszym.

Zadanie 2 — Oblicz w GHCI wartości wyrażeń $2 \wedge 3 \wedge 2$, $(2 \wedge 3) \wedge 2$ i $2 \wedge (2 \wedge 3)$. Dowiedz się jaka jest łączność operatora $\wedge$ za pomocą polecenia :i $(\wedge)$.

Zadanie 3 — Funkcją Eulera ϕ nazywamy funkcję określoną wzorem

$$\phi(n) = \mathrm{card}(\{k \leq n : \gcd(k, n) = 1\}) .$$

o dziedzinie $\mathbb{N}^+$.

1. Oprogramuj funkcję ϕ (funkcja gcd jest w bibliotece Prelude)
2. Napisz funkcję, która dla danej liczby naturalnej n wyznacza liczbę $\sum_{k|n} \phi(k)$.

Zadanie 4 — Trójkę liczb naturalnych (a, b, c) nazywamy właściwą trójką pitagorejską jeśli $a^2 = b^2 + c^2$ oraz $\gcd(b, c) = 1$. Wyznacz wszystkie właściwe trójki pitegorejskie takie, że $a \leq 200$.

Zadanie 5 — Zaimplementuj na kilka sposobów funkcję służącą do wyznaczania liczb Fibbonacciego: rekurencyjnie, rekurencyjnie za pomocą wzorców.

Zadanie 6 — Zaimplementuj funkcję $\binom{n}{k}$. Nie stosuj tożsamości $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ - jest to kosztowne rozwiązanie; zastosuj wzór rekurencyjny na $\binom{n+1}{k+1}$.

Zadanie 7 — Liczbę naturalną n nazywamy doskonałą jeśli $n = \sum\{d < n : d|n\}$. Np. $6 = 1 + 2 + 3$. Wyznacz wszystkie liczby doskonałe mniejsze od 10000.

1.2 Elementy teorii kategorii

Zadanie 8 — Które z następujących struktur są monoidami?

1. $([0, 1], 0, \vee)$, gdzie $x \vee y = \max\{x, y\}$
2. $([0, 1], 1, \wedge)$, gdzie $x \wedge y = \min\{x, y\}$
3. $((0, \infty), 1, \star)$, gdzie $x \star y = x^y$
4. $(X^X, \mathrm{Id}_x, \circ)$ (X jest ustalonym zbiorem)
5. $(X^*, [], ++)$, (gdzie X jest ustalonym zbiorem)

Zadanie 9 — Pokaż, że strzałka Id_A jest jednoznaczna, czyli, że jeśli $\mathrm{Id1}_A$ oraz $\mathrm{Id2}_A$ spełniają własności identyczności to $\mathrm{Id1}_A = \mathrm{Id2}_A$.

Zadanie 10 — Pokaż, że złożenie monomorfizmów jest monomorfizmem.

Zadanie 11 — Pokaż, że złożenie epimorfizmów jest epimorfizmem. Spróbuj podać proste uzasadnienie tego faktu oparte o poprzednie zadanie.

Zadanie 12 — Pokaż, że jeśli $f : A \to B$ jest izomorfizmem, to odwrotność f^{-1} jest wyznaczona jednoznacznie.

Zadanie 13 — Pokaż, że jeśli f^{-1} jest odwrotnością $f : A \to B$ i g^{-1} jest odwrotnością $g : B \to C$, to $f^{-1} \circ g^{-1}$ jest odwrotnością $g \circ f : A \to C$.

Zadanie 14 — Podaj przykład kategorii ze strzałką która jest monomorfizmem oraz epimorfizmem, ale nie jest izomorfizmem.

Zadanie 15 — Rozważamy kategorię zbudowaną z częściowego porządku $(X, \leq)$. Kiedy istnieją w niej elementy początkowe i końcowe?

Zadanie 16 — Zinterpretuj w języku informatyki komutowanie następującego diagramu

$$\begin{tikzcd} Int \arrow[r, "succ_{Int}"] \arrow[d, "toReal"'] & Int \arrow[d, "toReal"] \\ Real \arrow[r, "succ_{Real}"'] & Real \end{tikzcd}$$

Zadanie 17 — Pokaż, że obiekty końcowe (terminalne) w ustalonej kategorii są wyrażone jednoznacznie z dokładnością do izomorfizmu. Pokaż podobną własność obiektów początkowych.

Zadanie 18 — Wyznacz obiekty końcowe i początkowe w następujących kategoriach:

1. w kategorii grup $\mathbf{Grp}$
2. w kategorii ciał
3. w kategorii częściowych porządków $\mathbf{Pos}$
4. w kategorii monoidów $\mathbf{Mon}$
5. $\mathbf{Set} \times \mathbf{Set}$
6. $\mathbf{Set}^{\to}$

Zadanie 19 — Pokaż, że produkt $(A \times B, \pi_A, \pi_B)$ jest wyznaczony jednoznacznie z dokładnością do izomorfizmu w kategorii $\mathbf{Set}$. Wskazówka: Skorzystaj z jednoznaczności mediatora w definicji produktu.

C.D.N.

Powodzenia,
Jacek Cichoń