

## Oznaczenia

Umawiamy się, że

$$\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_N) := [x_1 \dots x_N]^\top = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix}$$

Przez  $e_k$  oznaczamy  $k$ -ty wektor bazowy ze standardowej bazy przestrzeni  $\mathbb{R}^N$ , a więc

$$e_k := (0, 0, \dots, 0, \overbrace{1}^{k\text{-ta pozycja}}, 0, \dots, 0, 0) = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Jeżeli mamy dany zbiór  $G$  i punkt  $x \in G$ , to  $G - x = \{y - x : y \in G\}$ . Wówczas

$$y \in G - x \iff y + x \in G.$$

**Przestrzenie unormowane.** Jeżeli  $X$  jest przestrzenią liniową nad ciałem  $F \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ , to *normą* na  $X$  jest taka funkcja  $x \mapsto \|\mathbf{x}\|$ ,  $\mathbf{x} \in X$ , że  $\|\mathbf{x}\| \in [0, \infty)$ , dla  $\mathbf{x} \in X$  oraz

1.  $\|\mathbf{x}\| = 0 \iff \mathbf{x} = \mathbf{0}$ ,
2.  $\|a\mathbf{x}\| = |a| \|\mathbf{x}\|$  dla  $a \in F$ ,  $\mathbf{x} \in X$ ,
3.  $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$  dla  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$ .

## Pochodne kierunkowe i cząstkowe

**Definicja 1.** Pochodną cząstkową funkcji  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  po zmiennej  $x_k$  definiujemy jako granicę (jeśli istnieje)

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1, x_2, \dots, x_k + h, \dots, x_n) - f(x_1, x_2, \dots, x_k, \dots, x_n)}{h}$$

i oznaczamy jako

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(x_1, \dots, x_n) \text{ lub } \frac{\partial f(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_k}$$

**Definicja 2** (Pochodna Kierunkowa). Niech dana będzie funkcja  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ , gdzie  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  jest zbiorem niepustym i otwartym. Pochodną kierunkową funkcji  $f$  w punkcie  $a$  w kierunku niezerowego wektora  $u \in U$  nazywamy (jeżeli istnieje) granicę

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + tu) - f(a)}{t}.$$

Oznaczamy powyższą granicę symbolem  $\nabla_u f(a)$  lub  $\partial_u f(a)$ .

Stosowane są także oznaczenia  $\frac{\partial f}{\partial u}(a)$  i  $f'_u(a)$ .

Oczywisty jest związek

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(a) = \nabla_{e_k} f(a).$$

**Definicja 3.** Definiujemy gradient funkcji  $f$  w punkcie  $a$  jako

$$\text{grad } f(a) = \nabla f(a) = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \right).$$

Symbol  $\nabla$  (tzw. nabla) oznacza „operator różniczkowy”, możemy rozumieć, że danej funkcji przyporządkowuje on funkcję wektorową postaci:

$$\nabla f = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right).$$

Gradient funkcji w punkcie jest wektorem wskazującym kierunek najbliższego wzrostu funkcji w danym punkcie. Zatem pochodna kierunkowa liczona w kierunku gradientu będzie mieć największą wartość.

## Różniczka i pochodna Frécheta

Rozważamy przestrzenie unormowane  $(X, \|\cdot\|_X)$  i  $(Y, \|\cdot\|_Y)$ .

Niech  $f: G \rightarrow Y$  odwzorowaniem, gdzie  $G \subseteq X$  i niech  $a \in \text{int } G$ . Mówimy, że funkcja  $f$  jest różniczkowalna w sensie Frécheta w punkcie  $f$ , gdy istnieje takie odwzorowanie liniowe i ciągłe  $A: X \rightarrow Y$ , że

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|f(a + h) - f(a) - Ah\|_Y}{\|h\|_X} = 0. \quad (\text{F})$$

Odwzorowanie  $A$  nazywamy *różniczką* odwzorowania  $f$  w punkcie  $a$  i oznaczamy  $A = df(a)$ . Stosowane są różne inne oznaczenia:  $f'(a)$ ,  $d_a f$ , etc.

**Twierdzenie 1.** Następujące warunki są równoważne:

- (i) funkcja  $f: G \rightarrow Y$  jest różniczkowalna w sensie Frécheta w punkcie  $a$ ;
- (ii) istnieje taka funkcja  $r: X \rightarrow Y$ , że

$$f(a + h) - f(a) = Ah + r(h), \quad \text{dla } h \in G - a \quad (1)$$

przy czym

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(h)}{\|h\|_X} = 0; \quad (1.1)$$

- (iii) istnieje taka funkcja  $r: X \rightarrow Y$ , ciągła w zerze, że  $r(0) = 0$  oraz dla każdego  $h \in G - a$  zachodzi

$$f(a + h) - f(a) = Ah + \|h\|_X r(h). \quad (2)$$

Oczywiście w punktach (i)-(ii),  $A = df(0, 0)$ . Funkcja  $r$  w punkcie (i) jest inną od funkcji  $r$  z punktu (ii).

*Dowód Twierdzenia 1.* (i)  $\Rightarrow$  (ii). Wystarczy położyć

$$r(h) = \begin{cases} \frac{\|f(a + h) - f(a) - Ah\|}{\|h\|}, & \text{dla } h \in G - a \setminus \{0\}; \\ 0, & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases}$$

Wówczas,

$$\lim_{h \rightarrow 0} r(h) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|f(a + h) - f(a) - Ah\|}{\|h\|} \stackrel{(\text{F})}{=} 0 = r(0).$$

(ii)  $\Rightarrow$  (iii). Zakładamy, że istnieje odwzorowanie liniowe  $A$  oraz funkcja  $r_1$  spełniająca warunki (1) i (1.1), tj. ciągła w zerze,  $r_1(0) = 0$  oraz  $f(a+h) - f(a) = Ah + \|h\|_X r_1(h)$  dla  $h \in G - a$ . Wówczas, warunek (iii) jest spełniony z tym samym odwzorowaniem  $A$  i z funkcją  $r$  zdefiniowaną wzorem  $r(h) = \|h\| r_1(h)$ ,  $h \in X$ . Warunek (2) jest oczywiście spełniony oraz mamy

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(h)}{\|h\|} = \lim_{h \rightarrow 0} r_1(h) = r_1(0) = 0,$$

co było do wykazania.

(iii)  $\Rightarrow$  (i). Warunek (2) zapisujemy w postaci

$$r(h) = f(a+h) - f(a) - Ah.$$

Stąd,

$$\frac{f(a+h) - f(a) - Ah}{\|h\|} = \frac{r(h)}{\|h\|},$$

a ponieważ  $\frac{r(h)}{\|h\|} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$ , to również  $\left\| \frac{r(h)}{\|h\|} \right\| \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$  i mamy

$$\frac{\|f(a+h) - f(a) - Ah\|}{\|h\|} = \frac{\|r(h)\|}{\|h\|} = \left\| \frac{r(h)}{\|h\|} \right\| \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0. \quad \square$$

**Twierdzenie 2.** Jeżeli  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ , gdzie  $U \subseteq \mathbb{R}^N$  jest niepustym zbiorem otwartym, jest funkcją różniczkowalną w sensie Frécheta w punkcie  $a \in U$ , to wówczas

(i) w punkcie  $a$  istnieje pochodna kierunkowa  $\nabla_u f(a)$  funkcji  $f$  w kierunku dowolnego wektora  $u \in \mathbb{R}^N$ , a ponadto  $\nabla_u f(a) = df(a)u$ ;

(ii) istnieją wszystkie pochodne cząstkowe  $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ ,  $i \in \{1, \dots, N\}$  i zachodzi równość

$$df(a)h = \sum_{k=1}^N \frac{\partial f}{\partial x_k}(a)h_k,$$

dla dowolnego  $h = (h_1, \dots, h_N) \in \mathbb{R}^N$ .

*Dowód.* Z założenia, istnieje  $\varepsilon > 0$ , takie że kula  $B(a, \varepsilon)$  zawiera się w  $U$ . Dla  $|t| < \varepsilon \|u\|^{-1}$  punkt  $a + tu$  leży w kuli  $B(a, \varepsilon)$  i wobec założenia o różniczkowalności  $f$ , mamy

$$f(a + tu) - f(a) = df(a)tu + r(tu),$$

gdzie  $r$  jest taką funkcją, że  $\frac{r(tu)}{\|tu\|} \rightarrow 0$  przy  $\|tu\| \rightarrow 0$ . Mamy, dla odpowiednio małych  $t$ ,

$$\begin{aligned}\nabla_u f(a) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + tu) - f(a)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{df(a)(tu) - r(tu)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \left( \frac{t df(a) u}{t} - \frac{r(tu)}{t} \right) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \left( df(a) u - \frac{r(tu)}{t} \cdot \frac{\|u\|}{\|u\|} \right) \\ &= df(a) u - \|u\| \lim_{t \rightarrow 0} \frac{r(tu)}{t \|u\|},\end{aligned}$$

a ponieważ  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{r(tu)}{t \|u\|} = \lim_{t \rightarrow 0} \text{sgn}(t) \frac{r(tu)}{\|tu\|} = \pm \lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(h)}{\|h\|} = 0$ , to mamy porządkaną równość.

Aby wykazać (ii), zauważmy, że dowolny wektor  $h = (h_1, \dots, h_N) \in \mathbb{R}^N$  możemy zapisać w postaci

$$h = \sum_{k=1}^N h_k e_k,$$

gdzie  $e_k$  jest  $k$ -tym wektorem bazy standardowej  $\mathbb{R}^N$ . Mamy

$$\begin{aligned}df(a)h &= df(a) \sum_{k=1}^N h_k e_k = \sum_{k=1}^N h_k df(a) e_k \\ &= \sum_{k=1}^N h_k \nabla_{e_k} f(a) = \sum_{k=1}^N \frac{\partial f}{\partial x_k}(a) h_k.\end{aligned}\quad \square$$

**Twierdzenie 3.** *Niech  $f: G \rightarrow \mathbb{R}$ , gdzie  $G \subseteq \mathbb{R}^N$  jest zbiorem otwartym. Wówczas, jeżeli funkcja  $f$  ma wszystkie pochodne cząstkowe pierwszego rzędu i są one ciągłe w punkcie  $a \in G$ , to funkcja  $f$  jest w punkcie  $a$  różniczkowalna w sensie Frécheta.*

## Szukanie ekstremów funkcji dwóch zmiennych

Niech  $f$  będzie funkcją określoną w otoczeniu punktu  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ . Jeżeli funkcja  $f$  ma ciągłe drugie pochodne cząstkowe w punkcie  $(a, b)$  to jest różniczkowalna dwukrotnie w jego otoczeniu. Warunkiem koniecznym istnienia ekstremum jest aby zachodziło  $\nabla f(a, b) = 0$ , dla każdego  $h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$ . Taka zależność zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = 0 \end{cases}$$

Wtedy niech

$$H = \det d^2f(a, b) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a, b) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b) \end{vmatrix}$$

1. Jeżeli  $H = 0$ , to sprawa istnienia ekstremum jest nierozstrzygnięta.
2. Jeżeli  $H < 0$ , to funkcja  $f$  nie ma w punkcie  $(a, b)$  ekstremum, ma natomiast punkt siodłowy.
3. Jeżeli  $H > 0$ , to funkcja  $f$  ma w punkcie  $(a, b)$  ekstremum lokalne właściwe. Co więcej, ma w tym punkcie:
  - (a) minimum, gdy  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) > 0$ ,
  - (b) maksimum, gdy  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) < 0$ .

## Szukanie ekstremów funkcji trzech zmiennych

Niech  $f$  będzie funkcją określoną w otoczeniu punktu  $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ . Jeżeli funkcja  $f$  ma ciągłe drugie pochodne cząstkowe w punkcie  $(a, b, c)$  to jest różniczkowalna dwukrotnie w jego otoczeniu. Warunkiem koniecznym istnienia ekstremum jest aby było  $\mathrm{d}f(a, b, c)h = 0$  dla  $h = (h_1, h_2, h_3) \in \mathbb{R}^3$ . Równoważnie: gdy

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(a, b, c) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(a, b, c) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial z}(a, b, c) = 0 \end{cases}$$

Oznaczamy:

$$H_1 = \left| \frac{\partial f}{\partial x^2}(a, b) \right| = \frac{\partial f}{\partial x^2}(a, b),$$

$$H_2 = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b, c) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b, c) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a, b, c) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b, c) \end{vmatrix}$$

$$H_3 = \det \mathrm{d}^2 f(a, b, c) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b, c) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b, c) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a, b, c) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b, c) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}(a, b, c) & \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}(a, b, c) & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \end{vmatrix}$$

Jeżeli

1.  $H_1 > 0, H_2 > 0, H_3 > 0$ , to funkcja  $f$  ma minimum w punkcie  $(a, b, c)$ ,
2.  $H_1 < 0, H_2 > 0, H_3 < 0$ , to funkcja  $f$  ma maksimum w punkcie  $(a, b, c)$ .

## Szukanie ekstremów warunkowych

Niech  $G \subseteq \mathbb{R}^N$  będzie otwartym otoczeniem punktu  $a$ , funkcja  $f: G \rightarrow \mathbb{R}$  oraz funkcje  $g: G \rightarrow \mathbb{R}$ , mają ciągłe pierwsze pochodne cząstkowe, a ponadto  $\nabla f(a), \nabla g(a) \neq 0$ . Wówczas, jeżeli  $f$  ma w punkcie  $a$  ekstremum pod warunkiem  $g(a) = 0$ , to istnieje taka liczba rzeczywista  $\lambda$ , że funkcja  $L: G \rightarrow \mathbb{R}$  określona wzorem

$$L(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) - \lambda g(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_N) \in G$$

spełnia warunek

$$\frac{\partial L}{\partial x_i}(a) = 0, \quad \text{dla } i = 1, \dots, N.$$

Założymy dodatkowo, że  $f$  i  $g$  mają ciągłe drugie pochodne cząstkowe. Wówczas, jeżeli dla każdego wektora  $\mathbf{h} = (h_1, \dots, h_N) \neq 0$  takiego, że

$$\sum_{j=1}^N \frac{\partial g}{\partial x_j}(a) h_j = 0,$$

zachodzi

$$d^2 L(\mathbf{x}) \mathbf{h} > 0,$$

to funkcja  $f$  ma w punkcie  $a$  lokalne minimum przy warunku  $g = 0$ , a jeżeli

$$d^2 L(\mathbf{x}) \mathbf{h} < 0,$$

dla  $\mathbf{h}$  jak uprzednio, to  $f$  ma w punkcie  $a$  lokalne maksimum przy warunku  $g = 0$ .

## Różniczkowanie funkcji uwikłanych

**Twierdzenie.** Rozważmy niepusty zbiór otwarty  $G \subseteq \mathbb{R}^2$ . Niech  $F: G \rightarrow \mathbb{R}$  będzie funkcją różniczkowalną o ciągłych pochodnych cząstkowych. Jeżeli w punkcie  $(a, b) \in G$ :

1.  $F(a, b) = 0$ ,

2.  $\frac{\partial F}{\partial y}(a, b) \neq 0$ ,

to istnieje takie  $\delta > 0$  oraz funkcja  $f: (a - \delta, a + \delta) \rightarrow \mathbb{R}$ , że

$$y = f(x), \quad \text{dla } x \in (a - \delta, a + \delta)$$

oraz

$$F(x, f(x)) = 0, \quad \text{dla } x \in (a - \delta, a + \delta).$$

Ponadto,

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, f(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}}$$

dla każdego  $x \in (a - \delta, a + \delta)$ .

**Uwaga.** Przy założeniach powyższego twierdzenia, jeżeli dodatkowo

$$\frac{\partial F}{\partial x}(a, b) = 0,$$

to funkcja  $f$  ma w punkcie  $(a, b)$ :

- minimum lokalne, gdy  $\alpha > 0$ ,
- maksimum lokalne, gdy  $\alpha < 0$ ,

$$\text{gdzie } \alpha = -\frac{\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(a, b)}{\frac{\partial F}{\partial y}}. \text{ (O ile oczywiście } \alpha \neq 0\text{)}$$

## Przykłady

1.

$$f(x, y) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}, & \text{gdy } x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & \text{gdy } x = y = 0. \end{cases}$$

Zbadamy różniczkowalność (w sensie Frécheta) funkcji  $f$  w punkcie  $(0, 0)$ . Mamy

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h, 0) - f(0, 0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{1}{h^2}} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} e^{-\frac{1}{h^2}} = 0. \end{aligned}$$

Analogicznie  $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$ . Jeżeli funkcja  $f$  jest różniczkowalna w  $(0, 0)$ , to (na mocy twierdzenia 2):

$$df(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) dx + \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) dy = 0.$$

Inaczej mówiąc,

$$df(0, 0)(h, k) = \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)h + \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)k = 0, \quad \text{dla } (h, k) \in \mathbb{R}^2.$$

Musimy sprawdzić, czy

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{f(0+h, 0+k) - f(0, 0) - df(0, 0)(h, k)}{\|(h, k)\|} = 0.$$

Ponieważ  $f(0, 0) = 0$ ,  $df(0, 0)(h, k) = 0$ , to mamy

$$\|(h, k)\| = \sqrt{h^2 + k^2}$$

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{f(h, k)}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{1}{\sqrt{h^2 + k^2}} e^{-\frac{1}{h^2+k^2}}. \quad (3)$$

Zauważmy, że gdy  $h, k \rightarrow 0$ , to  $t = \frac{1}{\sqrt{h^2+k^2}} \rightarrow \infty$ , zatem prawa strona równania (3) jest równa  $\lim_{t \rightarrow \infty} te^{-t^2} = 0$ . Pokazaliśmy w ten sposób, że funkcja  $f$  jest różniczkowalna w punkcie  $(0, 0)$  i jej różniczka Frécheta w tym punkcie jest tożsamściowo równa zero:  $df(0, 0) \equiv 0$ . (Tzn.  $df(0, 0)(h, k) = 0$  dla dow.  $(h, k) \in \mathbb{R}^2$ !)

Zwróćmy uwagę, że stąd wynika też, że f.  $f$  jest ciągła w punkcie  $(0, 0)$ !

Jest to oczywiste ze względu na symetrię w definicji  $f$ .

**2.** Niech

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & \text{gdy } x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & \text{gdy } x = y = 0. \end{cases}$$

Funkcja  $f$  jest ciągła i ma w otoczeniu punktu  $(0, 0)$  skończone pochodne cząstkowe, ale **nie** jest różniczkowalna w punkcie  $(0, 0)$ .

Aby sprawdzić, że funkcja  $f$  jest ciągła, weźmy dowolny ciąg  $(x_n, y_n) \rightarrow (0, 0)$ . Niech  $a_n = \max\{|x_n|, |y_n|\}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Wtedy, jak łatwo sprawdzić,  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ . Mamy

$$0 \leq \left| \frac{x_n y_n}{\sqrt{x_n^2 + y_n^2}} \right| \leq \frac{a_n^2}{\sqrt{a_n^2}} = a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

a więc  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n, y_n) = 0 = f(0, 0)$ . To oznacza, że

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0 = f(0, 0),$$

wobec dowolności wyboru ciągu  $(x_n, y_n)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

Mamy  $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h \cdot 0}{\sqrt{h^2 + 0^2}} = 0$  i analogicznie  $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$ . Zatem, jeżeli funkcja  $f$  jest różniczkowalna w sensie Frécheta w p.  $(0, 0)$ , to  $df(0, 0) = 0$ . Badamy granicę postaci

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{f(0+h, 0+k) - f(0,0) - df(0,0)}{\|(h, k)\|} = 0.$$

Powyższa granica (wstawiamy  $df(0, 0) = 0$ ,  $f(0, 0) = 0$ ) ma postać

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{\frac{hk}{\sqrt{h^2+k^2}} - 0 - 0}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{hk}{h^2 + k^2}.$$

Jeżeli rozważymy ciąg  $(h_n, k_n) = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ , to okaże się, że nie może być ona równa zero, gdyż  $\lim_{n \rightarrow 0} \frac{h_n k_n}{h_n^2 + k_n^2} = \frac{1}{2}$ . Dodatkowo, jeżeli rozpatrzmy np. ciąg  $(h_n, k_n) = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2})$ , to zobaczymy, że granica ta w ogóle nie istnieje.

Pokazaliśmy, że funkcja  $f$  nie jest różniczkowalna w p.  $(0, 0)$ .

- 3.** Niech  $f(x, y) = \sqrt{|xy|}$  dla  $x, y \in \mathbb{R}$ . Zbadamy różniczkowalność funkcji  $f$  w punkcie  $(0, 0)$ . Funkcja  $f$  jest ciągła w punkcie  $(0, 0)$  (oczywiste). Badamy pochodne cząstkowe:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{|0 \cdot h|} - \sqrt{0}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = 0,$$

i analogicznie

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0.$$

Rozważmy punkt  $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ . Mamy

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \sqrt{|y|} \frac{\partial}{\partial x}(\sqrt{|x|}) = \sqrt{|y|} \frac{1}{2\sqrt{|x|}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{|y|}{|x|}}$$

oraz

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \sqrt{|x|} \frac{\partial}{\partial y}(\sqrt{|y|}) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{|x|}{|y|}}.$$

Zauważmy, że biorąc  $y = x$ , mamy

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{|x|}{|x|}} = \frac{1}{2} \neq 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0).$$

Zatem pochodna cząstkowa  $\frac{\partial f}{\partial x}$  funkcji  $f$  jest **nieciągła** w punkcie  $(0, 0)$ . Analogicznie, nieciągła w  $(0, 0)$  jest pochodna  $\frac{\partial f}{\partial y}$ . **Mimo to, sprawa różniczkowalności  $f$  w  $(0, 0)$  na razie jest nierozstrzygnięta.** Musimy zbadać granicę

$$\begin{aligned} & \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{f(0 + h, 0 + k) - \overbrace{f(0,0)}^0 - df(0,0)(h,k)}{\|(h,k)\|} \\ &= \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{f(h, k) - df(0,0)(h,k)}{\sqrt{h^2 + k^2}} \\ &= \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{\sqrt{|hk|} - df(0,0)(h,k)}{\sqrt{h^2 + k^2}}. \end{aligned}$$

Jeżeli  $df(0, 0)$  istnieje, to (wobec twierdzenia 2)

$$df(0, 0)(h, k) = \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)h + \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)k = 0, \quad \text{dla } (h, k) \in \mathbb{R}^2,$$

tj.  $d f(0,0)(h,k) = 0$ ,  $(h,k) \in \mathbb{R}^2$ . Chcemy więc sprawdzić, czy granica

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{\sqrt{|hk|}}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \sqrt{\frac{|hk|}{h^2 + k^2}} \quad (4)$$

równa się zeru. Rozważmy ciąg  $(h_n, k_n) = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Wówczas

$$\begin{aligned} \lim_{(h_n, k_n) \rightarrow (0,0)} \sqrt{\frac{|h_n k_n|}{h_n^2 + k_n^2}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2}}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \neq 0, \end{aligned}$$

a więc granica (4) nie może być równa zero. Wykazaliśmy, że funkcja  $f$  nie jest różniczkowalna w punkcie  $(0,0)$ .

4. Niech

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2}, & \text{dla } (x, y) \neq (0, 0); \\ 0, & \text{dla } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Sprawdzamy, że  $f$  ma pochodną kierunkową w punkcie  $(0, 0)$  w kierunku dowolnego wektora, a nie jest różniczkowalna w sensie Frécheta. Rozważamy dowolny wektor  $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$  i mamy

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(0 + tu_1, 0 + tu_2) - f(0, 0)}{t} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(tu_1, tu_2)}{t} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^3 u_1 u_2^2}{t^3(u_1^2 + u_2^2)} = \frac{u_1 u_2^2}{u_1^2 + u_2^2}. \end{aligned}$$

Mamy  $\nabla_{\mathbf{u}} f(0, 0) = \nabla_{(u_1, u_2)} f(0, 0) = \frac{u_1 u_2^2}{u_1^2 + u_2^2}$ . Gdyby funkcja  $f$  była różniczkowalna w sensie Frécheta, to, wobec twierdzenia 2,  $d f(0, 0)(h, k) = \nabla_{(h, k)} f(0, 0) = \frac{hk^2}{h^2+k^2}$ . Ale ta funkcja (zmiennych  $(h, k)$ ) nie jest liniowa i dlatego nie może być różniczką Frécheta! Zatem funkcja  $f$  nie jest różniczkowalna w sensie Frécheta.

**5.** Niech

$$f(x, y) = \begin{cases} x + y + \frac{x^3y}{x^4+y^2}, & \text{dla } (x, y) \neq (0, 0); \\ 0, & \text{dla } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Sprawdzamy, że  $f$  ma pochodną kierunkową w punkcie  $(0, 0)$  w kierunku dowolnego wektora, a nie jest różniczkowalna w sensie Frécheta. Ustalmy dowolny wektor  $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ . Mamy

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{u}} f(0, 0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(0 + tu_1, 0 + tu_2) - f(0, 0)}{t} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(tu_1, tu_2) - 0}{t} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \left( \frac{tu_1 + tu_2}{t} + \frac{t^4 u_1^4 u_2}{t^4 u_1^4 + t^2 u_2^2} \right) = u_1 + u_2. \end{aligned}$$

Pokazaliśmy, że  $\nabla_{\mathbf{u}} f(0, 0) = \nabla_{(u_1, u_2)} f(0, 0) = u_1 + u_2$  dla dowolnego wektora  $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ . Gdyby funkcja  $f$  była różniczkowalna w sensie Frécheta, to (wobec twierdzenia 2), musi być  $\nabla_{(h, k)} f(0, 0) = df(0)(h, k)$  dla dowolnego  $(h, k) \in \mathbb{R}^2$ . Zatem

$$f(0 + h, 0 + k) - f(0, 0) = \nabla_{(h, k)} f(0, 0) + r(h) = h + k + r(h).$$

Zatem

$$f(h) = -h - k + f(h, k) - \overbrace{f(0, 0)}^0 = -h - k + h + k + \frac{h^3 k}{h^4 + k^2} = \frac{h^3 k}{h^4 + k^2}.$$

Mamy

$$\left\| \frac{r(h)}{\|h\|} \right\| = \frac{h^3 k}{(h^4 + k^2) \sqrt{h^2 + k^2}}.$$

Granica  $\lim_{(h, k) \rightarrow (0, 0)} \frac{h^3 k}{(h^4 + k^2) \sqrt{h^2 + k^2}}$  nie jest równa zero: żeby się o tym przekonać, wystarczy rozważyć ciąg  $(h_n, k_n) \rightarrow (0, 0)$  taki, że  $k_n = h_n^2$ . Wówczas mamy

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{h_n^3 k_n}{(h_n^4 + k_n^2) \sqrt{h_n^2 + k_n^2}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{h_n^5}{2h_n^4 \sqrt{h_n^2 + h_n^4}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\sqrt{1 + h_n^2}} = \frac{1}{2} \neq 0. \end{aligned}$$

Zatem  $r$  nie spełnia warunków definicji pochodnej Frécheta. Funkcja  $f$  nie jest różniczkowalna w sensie Frécheta.

6. Wyznaczyć ekstrema funkcji  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  danej wzorem  $f(x, y) = \frac{x}{a} + \frac{y}{b}$  przy warunku  $x^2 + y^2 = 1$ .

Kładziemy  $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$  i w ten sposób otrzymujemy warunek postaci  $g(x, y) = 0$ . Definiujemy funkcję Lagrange'a:

$$L(x, y) = f(x, y) - \lambda g(x, y) = L(x, y) = \frac{x}{a} + \frac{y}{b} - \lambda(x^2 + y^2 - 1).$$

Wyznaczamy pochodne cząstkowe funkcji  $L$ :

$$\frac{\partial L}{\partial x}(x, y) = 2x - \frac{\lambda}{a}, \quad \frac{\partial L}{\partial y}(x, y) = 2y - \frac{\lambda}{b}$$

i tworzymy układ równań przyrównując pochodne cząstkowe do zera i dodając warunek  $g(x, y) = 0$ :

$$\begin{cases} \frac{1}{a} - 2\lambda x = 0 \\ \frac{1}{b} - 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

Wyznaczamy  $x$  i  $y$  z dwóch pierwszych równań:

$$x = \frac{1}{2\lambda a} + \frac{1}{2\lambda b}.$$

Wstawiamy tak wyznaczone wartości do trzeciego równania:

$$1 = x^2 + y^2 = \frac{1}{4\lambda^2 a^2} + \frac{1}{4\lambda^2 b^2}.$$

Stąd,  $\lambda^2 = \frac{1}{4} \left( \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) = \frac{b^2 + a^2}{(2ab)^2}$ . To równanie ma dwa rozwiązania względem  $\lambda$ :

- $\lambda_1 = -\frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2|ab|}$ . Wówczas,

$$x_1 = -\frac{|ab|}{a\sqrt{a^2 + b^2}} \text{ oraz } y_1 = -\frac{|ab|}{b\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

- $\lambda_2 = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2|ab|}$ . Wówczas,

$$x_2 = \frac{|ab|}{a\sqrt{a^2 + b^2}} \text{ oraz } y_2 = \frac{|ab|}{b\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Zbiór  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : g(x, y) = 0\}$  jest zwarty, a ponadto mamy:

$$f(x_1, y_1) = -\frac{|ab|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \left( \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) < 0 < \frac{|ab|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \left( \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) = f(x_2, y_2).$$

Zatem funkcja  $f$  ma w punkcie  $(x_1, y_1)$  minimum i w punkcie  $(x_2, y_2)$  maksimum.

**Dodatkowa uwaga.** Możemy trochę uprościć albo, przynajmniej uzyskać krótszy zapis rozwiązań. Przypomnijmy, że dla  $r \in \mathbb{R}$  stosuje się oznaczenie:

$$\operatorname{sgn} r = \begin{cases} 1, & \text{gdy } r > 0, \\ 0, & \text{gdy } r = 0, \\ -1, & \text{gdy } r < 0. \end{cases}$$

Z definicji  $|r| = (\operatorname{sgn} r) \cdot r$ . Oznaczmy  $\sigma = \operatorname{sgn}(ab)$ . Definicja funkcji  $f$  ma sens tylko dla  $a, b \neq 0$ , czyli  $\sigma \neq 0$ . Mamy

$$x_1 = -\sigma \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad y_1 = -\sigma \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

oraz

$$x_2 = \sigma \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad y_2 = \sigma \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

7. Wyznaczyć ekstrema funkcji  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  danej wzorem  $f(x, y) = x^2 + y^2$  przy warunku  $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ .

Oznaczmy  $g(x, y) = \frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1$ . Wówczas warunek przyjmuje postać  $g(x, y) = 0$ . Definiujemy funkcję Lagrange'a:

$$L(x, y) = f(x, y) - \lambda g(x, y) = x^2 + y^2 - \lambda \left( \frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 \right).$$

Wyznaczamy pochodne cząstkowe:

$$\frac{\partial L}{\partial x}(x, y) = 2x - \frac{\lambda}{a}, \quad \frac{\partial L}{\partial y}(x, y) = 2y - \frac{\lambda}{b}$$

i tworzymy układ równań:

$$\begin{cases} 2x - \frac{\lambda}{a} = 0 \\ 2y - \frac{\lambda}{b} = 0 \\ \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \end{cases}$$

Z pierwszych dwóch równań mamy  $x = \frac{\lambda}{2a}$  oraz  $y = \frac{\lambda}{2b}$ . Wstawiamy wyznaczony  $x$  i  $y$  do trzeciego równania i mamy:

$$1 = \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = \frac{\lambda}{2a^2} + \frac{\lambda}{2b^2} = \lambda \left( \frac{b^2 + a^2}{2a^2b^2} \right),$$

a zatem

$$\lambda = \frac{2a^2b^2}{b^2 + a^2}, \quad x = \frac{ab^2}{a^2 + b^2}, \quad y = \frac{a^2b}{a^2 + b^2}.$$

Pokazaliśmy, że punkt  $\left( \frac{ab^2}{a^2+b^2}, \frac{a^2b}{a^2+b^2} \right)$  jest punktem krytycznym, tj. „punktem podejrzany o istnienie ekstremum”. Wyznaczamy macierz różniczki  $d^2L(x, y)$ :

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Ustalmy wektor  $(h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  i taki, że

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y)h_1 + \frac{\partial g}{\partial y}(x, y)h_2 = \frac{h_1}{a} + \frac{h_2}{b} = 0.$$

Badamy znak wyrażenia  $d^2L(x, y)(h_1, h_2)$ :

$$d^2L(x, y)(h_1, h_2) = [h_1 h_2] \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} = [h_1 h_2] \begin{bmatrix} 2h_1 \\ 2h_2 \end{bmatrix} = 2h_1^2 + 2h_2^2.$$

Oczywiście  $2h_1^2 + 2h_2^2 \geq 0$  dla dowolnych  $h_1, h_2 \in \mathbb{R}$ . Zauważmy jednak, że skoro  $(h_1, h_2) \neq (0, 0)$  z założenia, to przynajmniej jedna z liczb/współrzędnych  $h_1$  lub  $h_2$  musi być różna od zera, zatem mamy ścisłą nierówność  $2h_1^2 + 2h_2^2 > 0$ . To pokazuje, że funkcja  $f$  ma w badanym punkcie minimum warunkowe, przy warunku  $g(x, y) = 0$ .