Oznaczenia

Umawiamy się, że

$$\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_N) := [x_1 \ldots x_N]^\intercal = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix}$$

Przez e_k oznaczamy k-ty wektor bazowy ze standardowej bazy przestrzeni $\mathbb{R}^N$, a więc

$$e_k := (0, 0, \ldots, \ 0, \overbrace{\ 1\ }^{k\text{-ta pozycja}}, 0, \ldots, 0, 0) = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Jeżeli mamy dany zbiór G i punkt $x \in G$, to $G - x = \{y - x \colon y \in G\}$. Wówczas

$$y \in G - x \iff y + x \in G.$$

Przestrzenie unormowane. Jeżeli X jest przestrzenią liniową nad ciałem $F \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, to *normą* na X jest taka funkcja $x \mapsto \|\mathbf{x}\|$, $\mathbf{x} \in X$, że $\|\mathbf{x}\| \in [0, \infty)$, dla $\mathbf{x} \in X$ oraz

1. $\|\mathbf{x}\| = 0 \iff \mathbf{x} = \mathbf{0}$,
2. $\|a\mathbf{x}\| = |a| \, \|\mathbf{x}\|$ dla $a \in F$, $\mathbf{x} \in X$,
3. $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \leqslant \mathbf{x} + \mathbf{y}$ dla $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$.

Pochodne kierunkowe i cząstkowe

Definicja 1. *Pochodną cząstkową* funkcji $f\colon D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$ po zmiennej x_k definiujemy jako granicę (jeśli istnieje)

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_1, x_2, \dots, x_k + h, \dots, x_n) - f(x_1, x_2, \dots, x_k, \dots, x_n)}{h}$$

i oznaczamy jako

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(x_1, \dots, x_n) \text{ lub } \frac{\partial f(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_k}$$

Definicja 2 (Pochodna Kierunkowa)**.** Niech dana będzie funkcja $f\colon U \to \mathbb{R}$, gdzie $U \subseteq \mathbb{R}^n$ jest zbiorem niepustym i otwartym. *Pochodną kierunkową* funkcji f w punkcie a w kierunku niezerowego wektora $u \in U$ nazywamy (jeżeli istnieje) granicę

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(a + tu) - f(a)}{t}.$$

Oznaczamy powyższą granicę symbolem $\nabla_u f(a)$ lub $\partial_u f(a)$.

Stosowane są także oznaczenia $\dfrac{\partial f}{\partial u}(a)$ i $f'_u(a)$.
Oczywisty jest związek

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(a) = \nabla_{e_k} f(a).$$

Definicja 3. Definiujemy *gradient* funkcji f w punkcie a jako

$$\operatorname{grad} f(a) = \nabla f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\right).$$

Symbol ∇ (tzw. nabla) oznacza „operator różniczkowy”, możemy rozumieć, że danej funkcji przyporządkowuje on funkcję wektorową postaci:

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right).$$

Gradient funkcji w punkcie jest wektorem wskazującym kierunek najszybszego wzrostu funkcji w danym punkcie. Zatem pochodna kierunkowa liczona w kierunku gradientu będzie mieć największą wartość.

Różniczka i pochodna Frécheta

Rozważamy przestrzenie unormowane $(X, \|\cdot\|_X)$ i $(Y, \|\cdot\|_Y)$.

Niech $f\colon G \to Y$ odwzorowaniem, gdzie $G \subseteq X$ i niech $a \in \operatorname{int} G$. Mówimy, że funkcja f jest różniczkowalna w sensie Frécheta w punkcie f, gdy istnieje takie odwzorowanie liniowe i **ciągłe** $A\colon X \to Y$, że

$$\lim_{h\to 0} \frac{\|f(a+h) - f(a) - Ah\|_Y}{\|h\|_X} = 0. \tag{F}$$

Odwzorowanie A nazywamy *różniczką* odwzorowania f w punkcie a i oznaczamy $A = \mathrm{d}f\,(a)$. Stosowane są różne inne oznaczenia: $f'(a)$, $\mathrm{d}_a f$, etc.

Twierdzenie 1. *Nastepujące warunki są równoważne:*

(i) funkcja $f\colon G \to Y$ jest różniczkowalna w sensie Frécheta w punkcie a;

(ii) istnieje taka funkcja $r\colon X \to Y$, że

$$f(a+h) - f(a) = Ah + r(h), \quad \textit{dla } h \in G - a \tag{1}$$

przy czym

$$\lim_{h\to 0} \frac{r(h)}{\|h\|_X} = 0; \tag{1.1}$$

(iii) istnieje taka funkcja $r\colon X \to Y$, ciągła w zerze, że $r(0) = 0$ oraz dla każdego $h \in G - a$ zachodzi

$$f(a+h) - f(a) = Ah + \|h\|_X\, r(h). \tag{2}$$

Oczywiście w punktach (i)-(ii), $A = \mathrm{d}f(0,0)$. Funkcja r w punkcie (i) jest inna od funkcji r z punktu (ii).

Dowód Twierdzenia 1. $(i) \Rightarrow (ii)$. Wystarczy położyć

$$r(h) = \begin{cases} \dfrac{\|f(a+h) - f(a) - Ah\|}{\|h\|}, & \text{dla } h \in G - a \setminus \{0\}; \\ 0, & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases}$$

Wówczas,

$$\lim_{h\to 0} r(h) = \lim_{h\to 0} \frac{\|f(a+h) - f(a) - Ah\|}{\|h\|} \overset{\text{(F)}}{=} 0 = r(0).$$

$(ii) \Rightarrow (iii)$. Zakładamy, że istnieje odwzorowanie liniowe A oraz funkcja r_1 spełniająca warunki (1) i (1.1), tj. ciągła w zerze, $r_1(0) = 0$ oraz $f(a+h) - f(a) = Ah + \|h\|_X r_1(h)$ dla $h \in G - a$. Wówczas, warunek (iii) jest spełniony z tym samym odwzorowaniem A i z funkcją r zdefiniowaną wzorem $r(h) = \|h\| r_1(h)$, $h \in X$. Warunek (2) jest oczywiście spełniony oraz mamy

$$\lim_{h\to 0} \frac{r(h)}{\|h\|} = \lim_{h\to 0} r_1(h) = r_1(0) = 0,$$

co było do wykazania.

$(iii) \Rightarrow (i)$. Warunek (2) zapisujemy w postaci

$$r(h) = f(a+h) - f(a) - Ah.$$

Stąd,

$$\frac{f(a+h) - f(a) - Ah}{\|h\|} = \frac{r(h)}{\|h\|},$$

a ponieważ $\frac{r(h)}{\|h\|} \xrightarrow{h\to 0} 0$, to również $\left\|\frac{r(h)}{\|h\|}\right\| \xrightarrow{h\to 0} 0$ i mamy

$$\frac{\|f(a+h) - f(a) - Ah\|}{\|h\|} = \frac{\|r(h)\|}{\|h\|} = \left\|\frac{r(h)}{\|h\|}\right\| \xrightarrow{h\to 0} 0. \qquad \square$$

Twierdzenie 2. *Jeżeli $f\colon U \to \mathbb{R}$, gdzie $U \subseteq \mathbb{R}^N$ jest niepustym zbiorem otwartym, jest funkcją różniczkowalną w sensie Frécheta w punkcie $a \in U$, to wówczas*

(i) w punkcie a istnieje pochodna kierunkowa $\nabla_u f(a)$ funkcji f w kierunku dowolnego wektora $u \in \mathbb{R}^N$, a ponadto $\nabla_u f(a) = \mathrm{d}f\,(a)\,u$;

(ii) istnieją wszystkie pochodne cząstkowe $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a), i \in \{1, \dots, N\}$ i zachodzi równość

$$\mathrm{d}f\,(a)\,h = \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial x_k}(a) h_k,$$

dla dowolnego $h = (h_1, \dots, h_N) \in \mathbb{R}^N$.

Dowód. Z założenia, istnieje $\varepsilon > 0$, takie że kula $B(a,\varepsilon)$ zawiera się w U. Dla $|t| < \varepsilon \|u\|^{-1}$ punkt $a + tu$ leży w kuli $B(a,\varepsilon)$ i wobec założenia o różniczkowalności f, mamy

$$f(a+tu) - f(a) = \mathrm{d}f\,(a)\,tu + r(tu),$$

gdzie r jest taką funkcją, że $\frac{r(tu)}{\|tu\|} \to 0$ przy $\|tu\| \to 0$. Mamy, dla odpowiednio małych t,

$$\begin{aligned}
\nabla_u f(a) &= \lim_{t\to 0} \frac{f(a+tu) - f(a)}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{\mathrm{d}f\,(a)\,(tu) - r(tu)}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \left(\frac{t\,\mathrm{d}f\,(a)\,u}{t} - \frac{r(tu)}{t} \right) \\
&= \lim_{t\to 0} \left(\mathrm{d}f\,(a)\,u - \frac{r(tu)}{t} \cdot \frac{\|u\|}{\|u\|} \right) \\
&= \mathrm{d}f\,(a)\,u - \|u\| \lim_{t\to 0} \frac{r(tu)}{t\,\|u\|},
\end{aligned}$$

a ponieważ $\lim_{t\to 0} \frac{r(tu)}{t\,\|u\|} = \lim_{t\to 0} \mathrm{sgn}(t) \frac{r(tu)}{\|tu\|} = \pm \lim_{h\to 0} \frac{r(h)}{\|h\|} = 0$, to mamy porządaną równość.

Aby wykazać (ii), zauważmy, że dowolny wektor $h = (h_1, \ldots, h_N) \in \mathbb{R}^N$ możemy zapisać w postaci

$$h = \sum_{k=1}^{N} h_k e_k,$$

gdzie e_k jest k-tym wektorem bazy standardowej $\mathbb{R}^N$. Mamy

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}f\,(a)\,h &= \mathrm{d}f\,(a) \sum_{k=1}^{N} h_k e_k = \sum_{k=1}^{N} h_k\, \mathrm{d}f\,(a)\, e_k \\
&= \sum_{k=1}^{N} h_k \nabla_{e_k} f(a) = \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial x_k}(a) h_k. \qquad \square
\end{aligned}$$

Twierdzenie 3. *Niech $f\colon G \to \mathbb{R}$, gdzie $G \subseteq \mathbb{R}^N$ jest zbiorem otwartym. Wówczas, jeżeli funkcja f ma wszystkie pochodne cząstkowe pierwszego rzędu i <u>są one ciągłe</u> w punkcie $a \in G$, to funkcja f jest w punkcie a różniczkowalna w sensie Frécheta.*

Szukanie ekstremów funkcji dwóch zmiennych

Niech f będzie funkcją określoną w otoczeniu punktu $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Jeżeli funkcja f ma ciągłe drugie pochodne cząstkowe w punkcie (a,b) to jest różniczkowalna dwukrotnie w jego otoczeniu. Warunkiem koniecznym istnienia ekstremum jest aby zachodziło $\mathrm{d}f\,(a,b)\,h = 0$, dla każdego $h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$. Taka zależność zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b) = 0 \end{cases}$$

Wtedy niech

$$H = \det \mathrm{d}^2 f(a,b) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a,b) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b) \end{vmatrix}$$

1. Jeżeli $H = 0$, to sprawa istnienia ekstremum jest nierozstrzynięta.
2. Jeżeli $H < 0$, to funkcja f nie ma w punkcie (a,b) ekstremum, ma natomiast punkt siodłowy.
3. Jeżeli $H > 0$, to funkcja f ma w punkcie (a,b) ekstremum lokalne właściwe. Co więcej, ma w tym punkcie:
   (a) minimum, gdy $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) > 0$,
   (b) maksimum, gdy $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) < 0$.

Szukanie ekstremów funkcji trzech zmiennych

Niech f będzie funkcją określoną w otoczeniu punktu $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. Jeżeli funkcja f ma ciągłe drugie pochodne cząstkowe w punkcie (a, b, c) to jest różniczkowalna dwukrotnie w jego otoczeniu. Warunkiem koniecznym istnienia ekstremum jest aby było $\mathrm{d}f\,(a, b, c)\,h = 0$ dla $h = (h_1, h_2, h_3) \in \mathbb{R}^3$. Równoważnie: gdy

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b,c) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b,c) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial z}(a,b,c) = 0 \end{cases}$$

Oznaczamy:

$$H_1 = \left| \frac{\partial f}{\partial x^2}(a,b) \right| = \frac{\partial f}{\partial x^2}(a,b),$$

$$H_2 = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b,c) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b,c) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a,b,c) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b,c) \end{vmatrix}$$

$$H_3 = \det \mathrm{d}^2 f(a,b,c) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b,c) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b,c) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a,b,c) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b,c) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}(a,b,c) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}(a,b,c) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial^2 z} \end{vmatrix}$$

Jeżeli

1. $H_1 > 0$, $H_2 > 0$, $H_3 > 0$, to funkcja f ma <u>minimum</u> w punkcie (a, b, c),

2. $H_1 < 0$, $H_2 > 0$, $H_3 < 0$, to funkcja f ma <u>maksimum</u> w punkcie (a, b, c).

Szukanie ekstremów warunkowych

Niech $G \subseteq \mathbb{R}^N$ będzie otwartym otoczeniem punktu a, funkcja $f\colon G \to \mathbb{R}$ oraz funkcje $g\colon G \to \mathbb{R}$, mają ciągłe pierwsze pochodne cząstkowe, a ponadto $\nabla f(a), \nabla g(a) \neq 0$. Wówczas, jeżeli f ma w punkcie a ekstremum pod warunkiem $g(a) = 0$, to istnieje taka liczba rzeczywista λ, że funkcja $L\colon G \to \mathbb{R}$ określona wzorem

$$L(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) - \lambda g(\mathbf{x}),\ \mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_N) \in G$$

spełnia warunek

$$\frac{\partial L}{\partial x_i}(a) = 0, \quad \text{dla } i = 1, \ldots, N.$$

Załóżmy dodatkowo, że f i g mają ciągłe drugie pochodne cząstkowe. Wówczas, jeżeli dla każdego wektora $\mathbf{h} = (h_1, \ldots, h_N) \neq 0$ takiego, że

$$\sum_{j=1}^{N} \frac{\partial g}{\partial x_j}(a) h_j = 0,$$

zachodzi

$$\mathrm{d}^2 L(\mathbf{x})\mathbf{h} > 0,$$

to funkcja f ma w punkcie a lokalne minimum przy warunku $g = 0$, a jeżeli

$$\mathrm{d}^2 L(\mathbf{x})\mathbf{h} < 0,$$

dla $\mathbf{h}$ jak uprzednio, to f ma w punkcie a lokalne maksimum przy warunku $g = 0$.

Przykłady

1.

$$f(x,y) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}, & \text{gdy } x^2+y^2 \neq 0, \\ 0, & \text{gdy } x=y=0. \end{cases}$$

Zbadamy różniczkowalność (w sensie Frécheta) funkcji f w punkcie $(0,0)$. Mamy

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{e^{-\frac{1}{h^2}}-0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} e^{-\frac{1}{h^2}} = 0. \end{aligned}$$

Analogicznie $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$. Jeżeli funkcja f jest różniczkowalna w $(0,0)$, to (na mocy twierdzenia 2):

Jest to oczywiste ze względu na symetrię w definicji f.

$$\mathrm{d}f(0,0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\,\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\,\mathrm{d}y = 0.$$

Inaczej mówiąc,

$$\mathrm{d}f(0,0)(h,k) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)h + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)k = 0, \quad \text{dla } (h,k) \in \mathbb{R}^2.$$

Musimy sprawdzić, czy

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(0+h,0+k)-f(0,0)-\mathrm{d}f(0,0)(h,k)}{\|(h,k)\|} = 0.$$

Ponieważ $f(0,0)=0$, $\mathrm{d}f(0,0)(h,k)=0$, to mamy

$\|(h,k)\| = \sqrt{h^2+k^2}$

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{1}{\sqrt{h^2+k^2}} e^{-\frac{1}{h^2+k^2}}. \tag{3}$$

Zauważmy, że gdy $h,k\to 0$, to $t = \frac{1}{\sqrt{h^2+k^2}} \to \infty$, zatem prawa strona równania (3) jest równa $\lim\limits_{t\to\infty} te^{-t^2} = 0$. Pokazaliśmy w ten sposób, że funkcja f jest różniczkowalna w punkcie $(0,0)$ i jej różniczka Frécheta w tym punkcie jest tożsamościowo równa zero: $\mathrm{d}f(0,0) \equiv 0$. (Tzn. $\mathrm{d}f(0,0)(h,k) = 0$ dla dow. $(h,k)\in\mathbb{R}^2$!)

Zwróćmy uwagę, że stąd wynika też, że f. f jest ciągła w punkcie $(0,0)$!

2. Niech
$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{gdy } x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & \text{gdy } x=y=0.\end{cases}$$

Funkcja f jest ciągła i ma w otoczeniu punktu $(0,0)$ skończone pochodne cząstkowe, ale **nie** jest różniczkowalna w punkcie $(0,0)$.

Aby sprawdzić, że funkcja f jest ciągła, weźmy dowolny ciąg $(x_n,y_n)\to(0,0)$. Niech $a_n=\max\{|x_n|,|y_n|\}$, $n\in\mathbb{N}$. Wtedy, jak łatwo sprawdzić, $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$. Mamy

$$0\leqslant\left|\frac{x_ny_n}{\sqrt{x_n^2+y_n^2}}\right|\leqslant\frac{a_n^2}{\sqrt{a_n^2}}=a_n\xrightarrow{n\to\infty}0,$$

a więc $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n,y_n)=0=f(0,0)$. To oznacza, że

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0=f(0,0),$$

wobec dowolności wyboru ciągu (x_n,y_n), $n\in\mathbb{N}$.

Mamy $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{h\cdot 0}{\sqrt{h^2+0^2}}=0$ i analogicznie $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$. Zatem, jeżeli funkcja f jest różniczkowalna w sensie Frécheta w p. $(0,0)$, to $\mathrm{d}f(0,0)=0$. Badamy granicę postaci

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{f(0+h,0+k)-f(0,0)-\mathrm{d}f(0,0)}{\|(h,k)\|}=0.$$

Powyższa granica (wstawiamy $\mathrm{d}f(0,0)=0$, $f(0,0)=0$) ma postać

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{\frac{hk}{\sqrt{h^2+k^2}}-0-0}{\sqrt{h^2+k^2}}=\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{hk}{h^2+k^2}.$$

Jeżeli rozważymy ciąg $(h_n,k_n)=(\frac{1}{n},\frac{1}{n})$, to okaże się, że nie może być ona równa zero, gdyż $\lim\limits_{n\to0}\frac{h_nk_n}{h_n^2+k_n^2}=\frac{1}{2}$. Dodatkowo, jeżeli rozpatrzymy np. ciąg $(h_n,k_n)=(\frac{1}{n},\frac{1}{n^2})$, to zobaczymy, że granica ta w ogóle nie istnieje.

Pokazaliśmy, że funkcja f nie jest różniczkowalna w p. $(0,0)$.

3. Niech $f(x,y)=\sqrt{|xy|}$ dla $x,y\in\mathbb{R}$. Zbadamy różniczkowalność funkcji f w punkcie $(0,0)$. Funkcja f jest ciągła w punkcie $(0,0)$ (oczywiste). Badamy pochodne cząstkowe:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{|0\cdot h|}-\sqrt{0}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0}{h}=0,$$

i analogicznie

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0.$$

Rozważmy punkt $(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$. Mamy

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\sqrt{|y|}\frac{\partial}{\partial x}\left(\sqrt{|x|}\right)=\sqrt{|y|}\frac{1}{2\sqrt{|x|}}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{|y|}{|x|}}$$

oraz

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\sqrt{|x|}\frac{\partial}{\partial y}\left(\sqrt{|y|}\right)=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{|x|}{|y|}}.$$

Zauważmy, że biorąc $y=x$, mamy

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{1}{2}\sqrt{\frac{|x|}{|x|}}=\frac{1}{2}\neq 0=\frac{\partial f}{\partial x}(0,0).$$

Zatem pochodna cząstkowa $\frac{\partial f}{\partial x}$ funkcji f jest **nie**ciągła w punkcie $(0,0)$. Analogicznie, nieciągła w $(0,0)$ jest pochodna $\frac{\partial f}{\partial y}$. Mimo to, sprawa różniczkowalności f w $(0,0)$ na razie jest nierozstrzygnięta. Musimy zbadać granicę

$$\begin{aligned}\lim_{(h,k)\to(0,0)}&\frac{f(0+h,0+k)-\overbrace{f(0,0)}^{0}-\mathrm{d}f(0,0)(h,k)}{\|(h,k)\|}\\&=\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{f(h,k)-\mathrm{d}f(0,0)(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}}\\&=\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{\sqrt{|hk|}-\mathrm{d}f(0,0)(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}}.\end{aligned}$$

Jeżeli $\mathrm{d}f(0,0)$ istnieje, to (wobec twierdzenia 2)

$$\mathrm{d}f(0,0)(h,k)=\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)h+\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)k=0,\quad\text{dla } (h,k)\in\mathbb{R}^2,$$

tj. $\mathrm{d}f(0,0)(h,k) = 0$, $(h,k) \in \mathbb{R}^2$. Chcemy więc sprawdzić, czy granica

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\sqrt{|hk|}}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \sqrt{\frac{|hk|}{h^2+k^2}} \tag{4}$$

równa się zeru. Rozważmy ciąg $(h_n, k_n) = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$, $n \in \mathbb{N}$. Wówczas

$$\begin{aligned}\lim_{(h_n,k_n)\to(0,0)} \sqrt{\frac{|h_n k_n|}{h_n^2+k_n^2}} &= \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2}}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \neq 0,\end{aligned}$$

a więc granica (4) nie może być równa zero. Wykazaliśmy, że funkcja f nie jest różniczkowalna w punkcie $(0,0)$.

4. Niech
$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy^2}{x^2+y^2}, & \text{dla } (x,y)\neq(0,0);\\ 0, & \text{dla } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$
Sprawdzimy, że f ma pochodną kierunkową w punkcie $(0,0)$ w kierunku dowolnego wektora, a nie jest różniczkowalna w sensie Frécheta. Rozważamy dowolny wektor $\mathbf{u}=(u_1,u_2)$ i mamy

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(0+tu_1,0+tu_2)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{f(tu_1,tu_2)}{t}=$$
$$=\lim_{t\to 0}\frac{t^3u_1u_2^2}{t^3(u_1^2+u_2^2)}=\frac{u_1u_2^2}{u_1^2+u_2^2}.$$

Mamy $\nabla_{\mathbf{u}}f(0,0)=\nabla_{(u_1,u_2)}f(0,0)=\frac{u_1u_2^2}{u_1^2+u_2^2}$. Gdyby funkcja f była różniczkowalna w sensie Frécheta, to, wobec twierdzenia 2, $\mathrm{d}f(0,0)(h,k)=\nabla_{(h,k)}f(0,0)=\frac{hk^2}{h^2+k^2}$. Ale ta funkcja (zmiennych (h,k)) nie jest liniowa i dlatego nie może być różniczką Fécheta! Zatem funkcja f <u>nie</u> jest różniczkowalna w sensie Frécheta.

5. Niech
$$f(x,y)=\begin{cases} x+y+\frac{x^3y}{x^4+y^2}, & \text{dla } (x,y)\neq(0,0);\\ 0, & \text{dla } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

Sprawdzimy, że f ma pochodną kierunkową w punkcie $(0,0)$ w kierunku dowolnego wektora, a nie jest różniczkowalna w sensie Frécheta. Ustalmy dowolny wektor $\mathbf{u}=(u_1,u_2)$. Mamy

$$\begin{aligned}\nabla_{\mathbf{u}}f(0,0)&=\lim_{t\to0}\frac{f(0+tu_1,0+tu_2)-f(0,0)}{t}=\\&=\lim_{t\to0}\frac{f(tu_1,tu_2)-0}{t}=\\&=\lim_{t\to0}\left(\frac{tu_1+tu_2}{t}+\frac{t^4u_1^4u_2}{t^4u_1^4+t^2u_2^2}\right)=u_1+u_2.\end{aligned}$$

Pokazaliśmy, że $\nabla_{\mathbf{u}}f(0,0)=\nabla_{(u_1,u_2)}f(0,0)=u_1+u_2$ dla dowolnego wektora $\mathbf{u}=(u_1,u_2)$. Gdyby funkcja f była różniczkowalna w sensie Frécheta, to (wobec twierdzenia 2), musi być $\nabla_{(h,k)}f(0,0)=\mathrm{d}f(0)(h,k)$ dla dowolnego $(h,k)\in\mathbb{R}^2$. Zatem

$$f(0+h,0+k)-f(0,0)=\nabla_{(h,k)}f(0,0)+r(h)=h+k+r(h).$$

Zatem

$$f(h)=-h-k+f(h,k)-\overbrace{f(0,0)}^{0}=-h-k+h+k+\frac{h^3k}{h^4+k^2}=\frac{h^3k}{h^4+k^2}.$$

Mamy

$$\left\|\frac{r(h)}{\|h\|}\right\|=\frac{h^3k}{(h^4+k^2)\sqrt{h^2+k^2}}.$$

Granica $\lim\limits_{(h,k)\to(0,0)}\dfrac{h^3k}{(h^4+k^2)\sqrt{h^2+k^2}}$ nie jest równa zero: żeby się o tym przekonać, wystarczy rozważyć ciąg $(h_n,k_n)\to(0,0)$ taki, że $k_n=h_n^2$. Wówczas mamy

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{h_n^3k_n}{(h_n^4+k_n^2)\sqrt{h_n^2+k_n^2}}&=\lim_{n\to\infty}\frac{h_n^5}{2h_n^4\sqrt{h_n^2+h_n^4}}=\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\sqrt{1+h_n^2}}=\frac{1}{2}\neq0.\end{aligned}$$

Zatem r nie spełnia warunków definicji pochodnej Frécheta. Funkcja f nie jest różniczkowalna w sensie Frécheta.

6. Wyznaczyć ekstrema funkcji $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ danej wzorem $f(x,y) = \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b}$ przy warunku $x^2 + y^2 = 1$.

Kładziemy $g(x,y) = x^2 + y^2 - 1$ i w ten sposób otrzymujemy warunek postaci $g(x,y) = 0$. Definiujemy funkcję Lagrange'a:

$$L(x,y) = f(x,y) - \lambda g(x,y) = L(x,y) = \frac{x}{a} + \frac{y}{b} - \lambda(x^2 + y^2 - 1).$$

Wyznaczamy pochodne cząstkowe funkcji L:

$$\frac{\partial L}{\partial x}(x,y) = 2x - \frac{\lambda}{a}, \quad \frac{\partial L}{\partial y}(x,y) = 2y - \frac{\lambda}{b}$$

i tworzymy układ równań przyrównując pochodne cząstkowe do zera i dodając warunek $g(x,y) = 0$:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{a} - 2\lambda x = 0 \\ \dfrac{1}{b} - 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

Wyznaczamy x i y z dwóch pierwszych równań:

$$x = \frac{1}{2\lambda a} + \frac{1}{2\lambda b}.$$

Wstawiamy tak wyznaczone wartości do trzeciego równania:

$$1 = x^2 + y^2 = \frac{1}{4\lambda^2 a^2} + \frac{1}{4\lambda^2 b^2}.$$

Stąd, $\lambda^2 = \frac{1}{4}\left(\dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2}\right) = \dfrac{b^2 + a^2}{(2ab)^2}$. To równanie ma dwa rozwiązania względem λ:

- $\lambda_1 = -\dfrac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2\,|ab|}$. Wówczas,

$$x_1 = -\frac{|ab|}{a\sqrt{a^2 + b^2}} \text{ oraz } y_1 = -\frac{|ab|}{b\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

- $\lambda_2 = \dfrac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2\,|ab|}$. Wówczas,

$$x_2 = \frac{|ab|}{a\sqrt{a^2 + b^2}} \text{ oraz } y_2 = \frac{|ab|}{b\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Zbiór $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon g(x, y) = 0\}$ jest zwarty, a ponadto mamy:

$$f(x_1, y_1) = -\frac{|ab|}{\sqrt{a^2+b^2}}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right) < 0 < \frac{|ab|}{\sqrt{a^2+b^2}}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right) = f(x_2, y_2).$$

Zatem funkcja f ma w punkcie (x_1, y_1) minimum i w punkcie (x_2, y_2) maksimum.

Dodatkowa uwaga. Możemy trochę uprościć albo, przynajmniej uzyskać krótszy zapis rozwiązań. Przypomnijmy, że dla $r \in \mathbb{R}$ stosuje się oznaczenie:

$$\operatorname{sgn} r = \begin{cases} 1, & \text{gdy } r > 0, \\ 0, & \text{gdy } r = 0, \\ -1, & \text{gdy } r < 0. \end{cases}$$

Z definicji $|r| = (\operatorname{sgn} r) \cdot r$. Oznaczmy $\sigma = \operatorname{sgn}(ab)$. Definicja funkcji f ma sens tylko dla $a, b \neq 0$, czyli $\sigma \neq 0$. Mamy

$$x_1 = -\sigma\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad y_1 = -\sigma\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

oraz

$$x_2 = \sigma\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad y_2 = \sigma\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

7. Wyznaczyć ekstrema funkcji $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ danej wzorem $f(x,y) = x^2 + y^2$ przy warunku $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$.

Oznaczmy $g(x,y) = \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} - 1$. Wówczas warunek przyjmuje postać $g(x,y) = 0$. Definiujemy funkcję Lagrange'a:

$$L(x,y) = f(x,y) - \lambda g(x,y) = x^2 + y^2 - \lambda\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1\right).$$

Wyznaczamy pochodne cząstkowe:

$$\frac{\partial L}{\partial x}(x,y) = 2x - \frac{\lambda}{a}, \quad \frac{\partial L}{\partial y}(x,y) = 2y - \frac{\lambda}{b}$$

i tworzymy układ równań:

$$\begin{cases} 2x - \dfrac{\lambda}{a} & = 0 \\ 2y - \dfrac{\lambda}{b} & = 0 \\ \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} & = 1 \end{cases}$$

Z pierwszych dwóch równań mamy $x = \dfrac{\lambda}{2a}$ oraz $y = \dfrac{\lambda}{2b}$. Wstawiamy wyznaczony x i y do trzeciego równania i mamy:

$$1 = \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = \frac{\lambda}{2a^2} + \frac{\lambda}{2b^2} = \lambda\left(\frac{b^2 + a^2}{2a^2b^2}\right),$$

a zatem

$$\lambda = \frac{2a^2b^2}{b^2 + a^2}, \;\; x = \frac{ab^2}{a^2 + b^2}, \;\; y = \frac{a^2b}{a^2 + b^2}.$$

Pokazaliśmy, że punkt $\left(\frac{ab^2}{a^2+b^2}, \frac{a^2b}{a^2+b^2}\right)$ jest punktem krytycznym, tj. „punktem podejrzanym o istnienie ekstremum". Wyznaczamy macierz różniczki $\mathrm{d}^2L(x,y)$:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Ustalmy wektor $(h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ i taki, że

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)h_1 + \frac{\partial g}{\partial y}(x,y)h_2 = \frac{h_1}{a} + \frac{h_2}{b} = 0.$$

Badamy znak wyrażenia $\mathrm{d}^2 L(x,y)(h_1,h_2)$:

$$\mathrm{d}^2 L(x,y)(h_1,h_2) = [h_1 h_2]\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} = [h_1 h_2]\begin{bmatrix} 2h_1 \\ 2h_2 \end{bmatrix} = 2h_1^2 + 2h_2^2.$$

Oczywiście $2h_1^2 + 2h_2^2 \geqslant 0$ dla dowolnych $h_1, h_2 \in \mathbb{R}$. Zauważmy jednak, że skoro $(h_1, h_2) \neq (0,0)$ z założenia, to przynajmniej jedna z liczb/współrzędnych h_1 lub h_2 musi być różna od zera, zatem mamy ścisłą nierówność $2h_1^2 + 2h_2^2 > 0$. To pokazuje, że funkcja f ma w badanym punkcie minimum warunkowe, przy warunku $g(x,y) = 0$.