

1. Wykazać, że dane granice nie istnieją:

$$(a) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x}{x+y}$$

$$(c) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2}{x^4 + y^2}$$

$$(b) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

$$(d) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - 2y^2}{2x^2 + y^2}$$

2. Wykazać, że

$$(a) \lim_{(x,y) \rightarrow (1,-1)} \frac{x^2 - y^2}{x + y} = 2,$$

$$(b) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4}{x^2 + y^2} = 0.$$

3. Zbadać istnienie granic (obliczyć, jeśli istnieją):

$$(1) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2},$$

$$(5) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + 2y^2}{x^2 + y^2},$$

$$(2) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2x^3 + y^3}{x^2 + y^2},$$

$$(6) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{3x^3 + 2y^2}{x^2 + y^2},$$

$$(3) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3}{x^2 + y^2},$$

$$(4) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2}{x^2 + y^2},$$

$$(7) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^3},$$

4. Zbadać ciągłość funkcji dwóch zmiennych:  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ , gdzie

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\cos(xy)}{x}, & \text{dla } x \neq 0, y \in \mathbb{R}, \\ 0, & \text{gdzie } x = 0, y \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

5. Zbadać ciągłość funkcji  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  takiej, że

$$f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}, \text{ dla } (x, y) \neq (0, 0) \text{ oraz } f(0, 0) = 0.$$

6. Obliczyć granice:

$$(a) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} \frac{1 - xy}{x^2 + y^2}$$

$$(c) \lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} \frac{\ln(x + e^y)}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$(b) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin y}{x}$$

$$(d) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - 1}$$

$$\begin{array}{ll} \text{(e)} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} & \text{(g)} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1 - \cos(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^2} \\ \text{(f)} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x^3 + y^3)}{x + y} & \text{(h)} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{e^{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{array}$$

7. Pokazać, że dla funkcji

$$f(x, y) = \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (x - y)^2}$$

mamy

$$\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) = \lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) = 0,$$

a mimo to, granica  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$  **nie** istnieje.

8. Obliczyć obie pochodne cząstkowe następujących funkcji dwóch zmiennych:

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} \quad f(x, y) = x \sin(x + y) & \text{(d)} \quad f(x, y) = \ln(x + y^2) \\ \text{(b)} \quad f(x, y) = x^2 + y^2 - 3xy^2 & \text{(e)} \quad f(x, y) = ax + y^2, \text{ gdzie } a \text{ jest} \\ \text{(c)} \quad f(x, y) = xy + \frac{x}{y} & \text{dowolną stałą.} \end{array}$$

9. Obliczyć pochodne cząstkowe funkcji  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  danej wzorem  $f(x, y, z) = x^{yz}$ ,  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ .

10. Unormować wektor  $\mathbf{u}$  i obliczyć w jego kierunku pochodną kierunkową w punkcie  $a$ , dla

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} \quad f(x, y) = x^2 + y^2, \quad \mathbf{u} = \left[\frac{1}{2} \frac{1}{2}\right]^T, \quad a = \left(\frac{1}{2}, -2\right) \\ \text{(b)} \quad f(x, y) = x^2 + xy - y^2, \quad \mathbf{u} = [4 \ 3]^T, \quad a = (1, -1) \\ \text{(c)} \quad f(x, y) = x \sin y, \quad \mathbf{u} = [1 \ 1], \quad a = (0, \frac{\pi}{2}) \\ \text{(d)} \quad f(x, y, z) = \sqrt[3]{x + y + z}, \quad \mathbf{u} = \left[-\frac{1}{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{3}}\right]^T, \quad a = (1, 2, 1) \end{array}$$

11. Sprawdzić, że  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y)$ , gdy

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} \quad f(x, y) = \sin(xy) \\ \text{(b)} \quad f(x, y) = x^{y^2} \end{array}$$

12. Zbadać w jakich punktach różniczkowalna jest funkcja  $f$  i wyznaczyć grad  $f$ , gdy

- (a)  $f(x, y) = \sqrt{|xy|}$ ,  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$       (d)  $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$   
 (b)  $f(x, y) = |x - y|$ ,  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$       (e)  $f(x, y) = \sqrt{x^4 + y^4}$   
 (c)  $f(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|$ ,  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$       (f)  $f(x, y) = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$

13. Obliczyć mieszane pochodne drugiego rzędu funkcji

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}, & \text{dla } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{dla } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

14. Wykazać, że funkcja

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2 + y^2}, & \text{gdy } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{gdy } x = y = 0; \end{cases}$$

ma pochodną kierunkową w kierunku dowolnego wektora, ale nie jest różniczkowalna w sensie Fréchet'a.

15. Wykazać, że funkcja

$$f(x, y) = \begin{cases} x + y + \frac{x^3 y}{x^4 + y^2}, & \text{gdy } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{gdy } x = y = 0; \end{cases}$$

ma pochodną kierunkową w kierunku dowolnego wektora, ale nie jest różniczkowalna w sensie Fréchet'a.

16. Wykazać, że funkcja

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & \text{gdy } x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & \text{gdy } x = y = 0. \end{cases}$$

jest ciągła i ma w otoczeniu punktu  $(0, 0)$  obie (skończone) pochodne cząstkowe, ale nie jest różniczkowalna w sensie Fréchet'a w punkcie  $(0, 0)$ .

17. Wykazać, że funkcja

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x + y)}{x^2 + y^2}, & \text{gdy } x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & \text{gdy } x = y = 0. \end{cases}$$

jest ciągła i ma w otoczeniu punktu  $(0, 0)$  obie pochodne cząstkowe, ale nie jest różniczkowalna w sensie Fréchet'a w punkcie  $(0, 0)$ .

18. Wykazać, że funkcja

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{x^2 + y^2}, & \text{gdy } x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & \text{gdy } x = y = 0. \end{cases}$$

ma w otoczeniu punktu  $(0, 0)$  ograniczone obie pochodne cząstkowe nieciągłe oraz niegoracznione, a mimo to jest różniczkowalna w sensie Fréchéta w punkcie  $(0, 0)$ .

19. Zbadać różniczkowalność funkcji  $f$ , danej równaniem

$$f(x, y) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}, & \text{gdy } x^2 + y^2 > 0, \\ 0, & \text{dla } x = y = 0. \end{cases}$$

20. Zbadać różniczkowalność funkcji  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , gdzie

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \sin \frac{1}{x^2 + y^2}, & \text{gdy } x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & \text{gdy } x = y = 0. \end{cases}$$

21. Niech  $F(x, y) = (x \cdot y) \sin \left( \frac{x}{y} \right)$ . Obliczyć  $\frac{\partial F}{\partial x}$  oraz  $\frac{\partial F}{\partial y}$ .

22. Niech  $F(x, y) = (x \cdot y)^{x+\ln y}$ . Obliczyć  $\frac{\partial F}{\partial x}$  oraz  $\frac{\partial F}{\partial y}$ .

23. Wyznaczyć macierz różniczki odwzorowania odwrotnego do  $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  danego równaniem  $\varphi(x, y) = (2xy, x^2 - y)$ .

24. Znaleźć punkty krytyczne i ekstrema (jeśli istnieją) funkcji  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  danej równaniem

- |                                       |   |
|---------------------------------------|---|
| (a) $f(x, y) = x^2 - xy + y^2$        | (h) $f(x, y) = x^2 e^{\sqrt{y^2 + x^2}}$        |
| (b) $f(x, y) = x^3 - 3x^2 - 5y^2$     | (i) $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3axy$                |
| (c) $f(x, y) = 3x^2 - 6xy + y^3$      | (j) $f(x, y) = 4xy + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ |
| (d) $f(x, y) = xy + \frac{1}{2(x+y)}$ | (k) $f(x, y) = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$            |
| (e) $f(x, y) = e^{x^2 + y^2 - xy}$    | (l) $f(x, y) = x^2 \sqrt{x^2 + y^2}$            |
| (f) $f(x, y) = (x + y^2)e^{2x}$       | (m) $f(x, y) = 3x^2y - x^3 - y^4$               |
| (g) $f(x, y) = e^{\sqrt{y^2 + x^2}}$  | (n) $f(x, y) = xy \ln(x^2 + y^2)$               |

25. Wyznaczyć ekstrema funkcji  $f$  na ograniczonym obszarze  $D$ , gdzie

- (a)  $f(x, y) = 2xy$ ,  $D = \{(x, y): x^2 + y^2 \leq 1\}$ ;

- (b)  $f(x, y) = x^2y - x - 3y$ ,  $D$  jest trójkątem o wierzchołkach w punktach  $(0, 0)$ ,  $(0, 4)$  i  $(5, 0)$ ;  
 (c)  $f(x, y) = 2x^2 - 2y^2$ ,  $D = \{(x, y): x^2 + y^2 \leq 4\}$ ;

26. Wyznaczyć ekstrema warunkowe funkcji  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

- (a)  $z = f(x, y) = xy$  przy warunku  $x + y = 1$ ,  
 (b)  $z = f(x, y) = \frac{x}{a} + \frac{y}{b}$  przy warunku  $x^2 + y^2 = 1$ ,  
 (c)  $z = f(x, y) = x^2 + y^2$  przy warunku  $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ ,  
 (d)  $z = f(x, y) = xy$  przy warunku  $x^2 + y^2 = 2$ ,  
 (e)  $z = f(x, y) = \cos^2 x + \cos^2 y$  przy warunku  $x - y = \frac{\pi}{2}$ ,  
 (f)  $z = f(x, y) = x^2 + xy + y^2$  przy warunku  $x + y = 1$ .

27. Zbadać istnienie ekstremów i kresów funkcji  $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ , gdzie

- (a)  $f(x_1, \dots, x_n) = x_1x_2 \cdots x_{n-1}x_n$ ,  
 $E = \{(x_1, \dots, x_n): x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1} + x_n \leq 1, x_1, \dots, x_n \geq 0\}$

- (b)  $f(x_1, \dots, x_n) = x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1} + x_n$ ,  
 $E = \{(x_1, \dots, x_n): x_1x_2x_3 \cdots x_{n-1}x_n \geq 1, x_1, \dots, x_n > 0\}$

- (c)  $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1x_2x_3x_4$ ,  
 $E = \{(x_1, x_2, x_3, x_4): x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = c, x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0\}$ ,  
 gdzie  $c > 0$  jest dane.

- (d)  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1^p + x_2^p + \dots + x_n^p, p \in \mathbb{N}, p \geq 2$ ,  
 $E = \{(x_1, x_2, \dots, x_n): x_1 + x_2 + \dots + x_n = a\}, a > 0$ .

*Wskazówka:* w (c) i (d) zastosować metodę mnożników Lagrange'a.

28. W okrąg wpisać trójkąt o największym polu.

29. Wyznaczyć pochodną  $\frac{dy}{dx}$  funkcji  $y$  uwikłanej równaniem

- (a)  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ , gdzie  $a, b > 0$  są dane,  
 (b)  $2y^2 - 4x^3y + 5x^2 - 12 = 0$ ,  
 (c)  $xe^{2y} - ye^{2x} = 0$ .

30. Wyznaczyć ekstrema lokalne funkcji zmiennej  $x$  uwikłanej, zadanej równaniem:

- (a)  $x^2 - 4x + y^2 = 5$  (c)  $x^3 + y^3 = 3xy$   
 (b)  $x^2 = xy - 1$  (d)  $x^{2y} + y^2 = 1$

31. Czy do krzywej o równaniu  $x^4 - x^2 + y^2 = 0$  (*Lemniskaty Gerona*) stosuje się twierdzenie o funkcji uwikłanej? W jakich punktach?  
 32. Czy do krzywej o równaniu  $x^{2y} + y^2 = 1$  stosuje się twierdzenie o funkcji uwikłanej? W jakich punktach?  
 33. Wyznaczyć  $x$ , dla którego równanie  $y - \ln(x+y) = 0$  określa  $y$  jako funkcję zmiennej  $x$ . Obliczyć  $\frac{dy}{dx}$ .

34. Niech

$$F(x, y) = x^3 y^2 - y \ln x - 2e^{2x-2} + y.$$

Wykazać, że istnieją funkcje rzeczywiste  $g, h$  klasy  $C^1$  określone w pewnym otoczeniu  $U$  punktu  $x = 1$  takie, że  $F(x, g(x)) = 0 = F(x, h(x))$  oraz  $g(x) < h(x)$  dla  $x \in U$ . Znaleźć  $g(1)$ ,  $h(1)$ ,  $g'(1)$ ,  $h'(1)$ .

35. Sprawdzić z definicji, czy funkcja dana wzorem  $f(x, y) = 5 - (x^6 + y^4)$  ma w punkcie  $(x_0, y_0) = (0, 0)$  ekstremum lokalne.

36. Obliczyć  $\int_0^a \int_0^b xy(x-y) dy dx$

37. Obliczyć  $\int_P f(x, y) dP$ , gdzie

- (a)  $f(x, y) = x^3 y^2$ ,  $P = [1, 2] \times [0, 2]$ ,  
 (b)  $f(x, y) = x e^y$ ,  $P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: |x| \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ ,  
 (c)  $f(x, y) = (x-y)^2$ ,  $P = [0, -1] \times [1, 2]$ .  
 (d)  $f(x, y) = \frac{y}{x}$ ,  $P = [1, e] \times [1, 2]$ ,  
 (e)  $f(x, y) = y \ln(xy)$ ,  $P = [1, 2] \times [0, 1]$ ,  
 (f)  $f(x, y) = e^y \cos x$ ,  $P = [0, \frac{\pi}{2}] \times [0, 1]$ ,

38. Obliczyć

$$\int_{[0,1] \times [-1,1] \times [0,1]} xyz dx dy dz.$$

39. Niech  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  będzie funkcją ciągłą. Udowodnić, że

$$\left( \int_a^b f(x) dx \right)^2 \leq (b-a) \int_a^b f^2(x) dx,$$

rozważając całkę iterowaną

$$\int_a^b \int_a^b (f(x) - f(y))^2 dy dx.$$

40. Niech  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$  będą funkcjami ciągłymi. Wykazać, że wówczas

$$\begin{aligned} \int_a^b \int_c^d (f(x) + g(y)) \, dy \, dx &= (d - c) \int_a^b f(x) \, dx + \int_a^b \int_c^d g(y) \, dy \, dx \\ &= (b - a) \int_c^d g(y) \, dy + \int_a^b \int_c^d f(x) \, dx \, dy. \end{aligned}$$

41. Niech  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$  będą funkcjami całkowalnymi. Wykazać, że

$$\int_a^b \int_c^d (yf(x) + xg(y)) \, dy \, dx = \frac{1}{2}(d^2 - c^2) \left( \int_a^b f(x) \, dx \right) + \frac{1}{2}(b^2 - a^2) \left( \int_c^d g(y) \, dy \right).$$

42. Obliczyć  $\iint_D xy^2 \, dD$  gdzie  $D$  jest obszarem ograniczonym parabolą  $y^2 = 2px$  i prostą  $x = \frac{p}{2}$ , gdzie  $p > 0$ .

43. Obliczyć całkę podwójną  $\iint_D (x - y + 1) \, dD$ , gdzie

$$D = \left\{ (x, y) : x + y \geq \frac{1}{2} \right\}.$$

44. Obliczyć całkę podwójną

$$\iint_D \frac{x}{y} \, dx \, dy$$

gdzie obszar  $D$  jest obszarem ograniczonym parabolami  $y = x^2$ ,  $x = y^2$ ,  $y > 0$ .

45. Obliczyć

$$\iint_D (x + y) \, dx \, dy,$$

gdzie  $D$  jest obszarem ograniczonym prostymi o równaniach  $x = 0$ ,  $y = 0$  i  $x + y = 3$ .

46. Obliczyć całkę podwójną

$$\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} \, dS,$$

gdzie  $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq a^2\}$ .

47. Obliczyć całkę podwójną

$$\iint_D \sin \sqrt{x^2 + y^2} \, dS,$$

gdzie  $D = \{(x, y) : \pi^2 \leq x^2 + y^2 \leq 4\pi^2\}$ .

48. Obliczyć

$$\iint_D 2x^2 y \, dx \, dy,$$

gdzie  $D$  jest obszarem ograniczonym osiami współrzędnych i krzywą o równaniu

$$\sqrt{y} + \sqrt{x} = 1.$$

49. Obliczyć całkę podwójną

$$\iint_D \frac{x^2}{y^2} \, dx \, dy,$$

gdzie obszar  $D$  jest ograniczony prostymi  $x = 4$ ,  $y = x$  i hiperbolą  $y = \frac{1}{x}$ .

50. Obliczyć  $\int_0^1 \int_0^1 x \max\{x, y\} \, dy \, dx$ .

51. Obliczyć

$$\iint_D \max\{x, y\} \, dx \, dy,$$

gdzie  $D = [0, 1] \times [1, 2]$ .

52. Obliczyć

$$\iint_D xy \, dx \, dy,$$

gdzie  $D$  jest obszarem ograniczonym krzywymi o równaniach  $xy = 1$  oraz  $|x - y| = 1$ .

53. Obliczyć

$$\iint_D y^2 \sqrt{R^2 - x^2} \, dx \, dy,$$

gdzie  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq R^2\}$ .

54. Obliczyć

$$\int_0^1 \int_0^1 e^{\max\{x, y\}} \, dx \, dy.$$



55. Obliczyć

$$\iint_A \frac{x}{1+x^2+y^2} dx dy,$$

gdzie  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x - y| \leq 2 \text{ oraz } x \in [-2, 2]\}$ .

56. Obliczyć pole obszaru ograniczonego krzywą  $(x - y)^2 + x^2 = a^2$ , gdzie  $a > 0$  jest dane.

57. Obliczyć całkę podwójną

$$\iint_D (ax + by + c) dx dy,$$

gdzie obszar całkowania  $D$  jest trójkątem o wierzchołkach  $(1, 1)$ ,  $(1, 2)$ ,  $(3, 3)$ .

58. Obliczyć i zinterpretować geometrycznie całkę

$$\iint_{[-1,1] \times [0,2]} (5 - \sqrt{|xy|}) dx dy$$

59. Wyprowadzić wzór na objętość kuli w przestrzeni  $\mathbb{R}^3$  o promieniu równym  $R$ .

60. Niech  $a > 0$ . Obliczyć całkę

$$\iint_D \frac{dx dy}{\sqrt{ax - x^2}},$$

gdzie  $D$  jest obszarem ograniczonym parabolą  $y^2 = -ax + a^2$  i osią  $OY$ .

### Teoria miary i całki Lebesgue'a

1. Niech  $f$  będzie funkcją daną wzorem

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{gdy } x \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q} \\ 1, & \text{gdy } x \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Obliczyć  $\int_{[0,1]} f(x) d\ell(x)$ . Stwierdzić, czy całka  $f$  jest całkowna w sensie Riemanna.

2. Niech  $f$  będzie funkcją daną wzorem

$$f(x) = \begin{cases} \sin x, & \text{gdy } x \in [0, \pi/2] \setminus \mathbb{Q} \\ \cos x, & \text{gdy } x \in [0, \pi/2] \cap \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Obliczyć  $\int_{[0, \pi/2]} f(x) d\ell(x)$ .

3. Niech  $f$  będzie funkcją daną wzorem

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{gdy } xy \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{gdy } xy \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Obliczyć  $\int_{[0,1] \times [0,1]} f(x, y) \, d\ell_2(x, y)$ .