

1. Wykazać, że dane granice nie istnieją:

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x}{x+y} & \text{(c)} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2}{x^4 + y^2} \\ \text{(b)} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2} & \text{(d)} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - 2y^2}{2x^2 + y^2} \end{array}$$

2. Wykazać, że

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (1,-1)} \frac{x^2 - y^2}{x + y} = 2, & \\ \text{(b)} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4}{x^2 + y^2} = 0. & \end{array}$$

3. Zbadać istnienie granic (obliczyć, jeśli istnieją):

$$\begin{array}{ll} \text{(1)} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}, & \text{(5)} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + 2y^2}{x^2 + y^2}, \\ \text{(2)} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2x^3 + y^3}{x^2 + y^2}, & \text{(6)} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{3x^3 + 2y^2}{x^2 + y^2}, \\ \text{(3)} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3}{x^2 + y^2}, & \\ \text{(4)} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2}{x^2 + y^2}, & \text{(7)} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^3}, \end{array}$$

4. Zbadać ciągłość funkcji dwóch zmiennych: $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$, gdzie

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\cos(xy)}{x}, & \text{dla } x \neq 0, y \in \mathbb{R}, \\ 0, & \text{gdzie } x = 0, y \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

5. Zbadać ciągłość funkcji $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ takiej, że

$$f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}, \text{ dla } (x, y) \neq (0, 0) \text{ oraz } f(0, 0) = 0.$$

6. Obliczyć granice:

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} \frac{1 - xy}{x^2 + y^2} & \text{(c)} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} \frac{\ln(x + e^y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ \text{(b)} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin y}{x} & \text{(d)} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - 1} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{(e)} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} & \text{(g)} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1 - \cos(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^2} \\ \text{(f)} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x^3 + y^3)}{x + y} & \text{(h)} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{e^{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{array}$$

7. Pokazać, że dla funkcji

$$f(x, y) = \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (x - y)^2}$$

mamy

$$\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) = \lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) = 0,$$

a mimo to, granica $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ **nie** istnieje.

8. Obliczyć obie pochodne cząstkowe następujących funkcji dwóch zmiennych:

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} \quad f(x, y) = x \sin(x + y) & \text{(d)} \quad f(x, y) = \ln(x + y^2) \\ \text{(b)} \quad f(x, y) = x^2 + y^2 - 3xy^2 & \text{(e)} \quad f(x, y) = ax + y^2, \text{ gdzie } a \text{ jest} \\ \text{(c)} \quad f(x, y) = xy + \frac{x}{y} & \text{dowolną stałą.} \end{array}$$

9. Obliczyć pochodne cząstkowe funkcji $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ danej wzorem $f(x, y, z) = x^{yz}$, $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

10. Unormować wektor \mathbf{u} i obliczyć w jego kierunku pochodną kierunkową w punkcie a , dla

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} \quad f(x, y) = x^2 + y^2, \quad \mathbf{u} = \left[\frac{1}{2} \frac{1}{2}\right]^T, \quad a = \left(\frac{1}{2}, -2\right) \\ \text{(b)} \quad f(x, y) = x^2 + xy - y^2, \quad \mathbf{u} = [4 \ 3]^T, \quad a = (1, -1) \\ \text{(c)} \quad f(x, y) = x \sin y, \quad \mathbf{u} = [1 \ 1], \quad a = (0, \frac{\pi}{2}) \\ \text{(d)} \quad f(x, y, z) = \sqrt[3]{x + y + z}, \quad \mathbf{u} = \left[-\frac{1}{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{3}}\right]^T, \quad a = (1, 2, 1) \end{array}$$

11. Sprawdzić, że $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y)$, gdy

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} \quad f(x, y) = \sin(xy) \\ \text{(b)} \quad f(x, y) = x^{y^2} \end{array}$$

12. Zbadać w jakich punktach różniczkowalna jest funkcja f i wyznaczyć grad f , gdy

- (a) $f(x, y) = \sqrt{|xy|}$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ (d) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$
 (b) $f(x, y) = |x - y|$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ (e) $f(x, y) = \sqrt{x^4 + y^4}$
 (c) $f(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$ (f) $f(x, y) = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$

13. Obliczyć mieszane pochodne drugiego rzędu funkcji

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}, & \text{dla } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{dla } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

14. Wykazać, że funkcja

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2 + y^2}, & \text{gdy } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{gdy } x = y = 0; \end{cases}$$

ma pochodną kierunkową w kierunku dowolnego wektora, ale nie jest różniczkowalna w sensie Fréchet'a.

15. Wykazać, że funkcja

$$f(x, y) = \begin{cases} x + y + \frac{x^3 y}{x^4 + y^2}, & \text{gdy } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{gdy } x = y = 0; \end{cases}$$

ma pochodną kierunkową w kierunku dowolnego wektora, ale nie jest różniczkowalna w sensie Fréchet'a.

16. Wykazać, że funkcja

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & \text{gdy } x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & \text{gdy } x = y = 0. \end{cases}$$

jest ciągła i ma w otoczeniu punktu $(0, 0)$ obie (skończone) pochodne cząstkowe, ale nie jest różniczkowalna w sensie Fréchet'a w punkcie $(0, 0)$.

17. Wykazać, że funkcja

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x + y)}{x^2 + y^2}, & \text{gdy } x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & \text{gdy } x = y = 0. \end{cases}$$

jest ciągła i ma w otoczeniu punktu $(0, 0)$ obie pochodne cząstkowe, ale nie jest różniczkowalna w sensie Fréchet'a w punkcie $(0, 0)$.

18. Wykazać, że funkcja

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{x^2 + y^2}, & \text{gdy } x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & \text{gdy } x = y = 0. \end{cases}$$

ma w otoczeniu punktu $(0, 0)$ ograniczone obie pochodne cząstkowe nieciągłe oraz niegoracznione, a mimo to jest różniczkowalna w sensie Fréchéta w punkcie $(0, 0)$.

19. Zbadać różniczkowalność funkcji f , danej równaniem

$$f(x, y) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}, & \text{gdy } x^2 + y^2 > 0, \\ 0, & \text{dla } x = y = 0. \end{cases}$$

20. Zbadać różniczkowalność funkcji $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, gdzie

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \sin \frac{1}{x^2 + y^2}, & \text{gdy } x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & \text{gdy } x = y = 0. \end{cases}$$

21. Niech $F(x, y) = (x \cdot y) \sin \left(\frac{x}{y} \right)$. Obliczyć $\frac{\partial F}{\partial x}$ oraz $\frac{\partial F}{\partial y}$.

22. Niech $F(x, y) = (x \cdot y)^{x+\ln y}$. Obliczyć $\frac{\partial F}{\partial x}$ oraz $\frac{\partial F}{\partial y}$.

23. Wyznaczyć macierz różniczki odwzorowania odwrotnego do $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ danego równaniem $\varphi(x, y) = (2xy, x^2 - y)$.

24. Znaleźć punkty krytyczne i ekstrema (jeśli istnieją) funkcji $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ danej równaniem

- | | |
|---------------------------------------|---|
| (a) $f(x, y) = x^2 - xy + y^2$ | (h) $f(x, y) = x^2 e^{\sqrt{y^2 + x^2}}$ |
| (b) $f(x, y) = x^3 - 3x^2 - 5y^2$ | (i) $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3axy$ |
| (c) $f(x, y) = 3x^2 - 6xy + y^3$ | (j) $f(x, y) = 4xy + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ |
| (d) $f(x, y) = xy + \frac{1}{2(x+y)}$ | (k) $f(x, y) = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$ |
| (e) $f(x, y) = e^{x^2 + y^2 - xy}$ | (l) $f(x, y) = x^2 \sqrt{x^2 + y^2}$ |
| (f) $f(x, y) = (x + y^2)e^{2x}$ | (m) $f(x, y) = 3x^2y - x^3 - y^4$ |
| (g) $f(x, y) = e^{\sqrt{y^2 + x^2}}$ | (n) $f(x, y) = xy \ln(x^2 + y^2)$ |

25. Wyznaczyć ekstrema funkcji f na ograniczonym obszarze D , gdzie

- (a) $f(x, y) = 2xy$, $D = \{(x, y): x^2 + y^2 \leq 1\}$;

- (b) $f(x, y) = xy - x = 3y$, D jest trójkątem o wierzchołkach $(0, 0)$, $(0, 4)$ i $(5, 0)$;
- (c) $f(x, y) = 2x^2 - 2y^2$, $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 4\}$;
26. Wyznaczyć ekstrema warunkowe funkcji $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$
- (a) $z = f(x, y) = xy$ przy warunku $x + y = 1$,
- (b) $z = f(x, y) = \frac{x}{a} + \frac{y}{b}$ przy warunku $x^2 + y^2 = 1$,
- (c) $z = f(x, y) = x^2 + y^2$ przy warunku $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$,
- (d) $z = f(x, y) = xy$ przy warunku $x^2 + y^2 = 2$,
- (e) $z = f(x, y) = \cos^2 x + \cos^2 y$ przy warunku $x - y = \frac{\pi}{2}$,
- (f) $z = f(x, y) = x^2 + xy + y^2$ przy warunku $x + y = 1$.
27. Zbadać istnienie ekstremów i kresów funkcji $f: E \rightarrow \mathbb{R}$, gdzie
- (a) $f(x_1, \dots, x_n) = x_1 x_2 \cdots x_{n-1} x_n$,
- $$E = \{(x_1, \dots, x_n) : x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1} + x_n \leq 1, x_1, \dots, x_n \geq 0\}$$
- (b) $f(x_1, \dots, x_n) = x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1} + x_n$,
- $$E = \{(x_1, \dots, x_n) : x_1 x_2 x_3 \cdots x_{n-1} x_n \geq 1, x_1, \dots, x_n > 0\}$$
- (c) $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 x_2 x_3 x_4$,
- $$E = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = c, x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0\},$$
- gdzie $c > 0$ jest dane.
- (d) $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1^p + x_2^p + \dots + x_n^p, p \in \mathbb{N}, p \geq 2$,
- $$E = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_1 + x_2 + \dots + x_n = a\}, a > 0.$$
- Wskazówka:* w (c) i (d) zastosować metodę mnożników Lagrange'a.
28. W okrąg wpisać trójkąt o największym polu.
29. Wyznaczyć pochodną $\frac{dy}{dx}$ funkcji y uwikłanej równaniem
- (a) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, gdzie $a, b > 0$ są dane,
- (b) $2y^2 - 4x^3y + 5x^2 - 12 = 0$,
- (c) $xe^{2y} - ye^{2x} = 0$.
30. Wyznaczyć ekstrema lokalne funkcji zmiennej x uwikłanej, zadanej równaniem:

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} \quad x^2 - 4x + y^2 = 5 & \text{(c)} \quad x^3 + y^3 = 3xy \\ \text{(b)} \quad x^2 = xy - 1 & \text{(d)} \quad x^{2y} + y^2 = 1 \end{array}$$

31. Czy do krzywej o równaniu $x^4 - x^2 + y^2 = 0$ (*Lemniskaty Gerona*) stosuje się twierdzenie o funkcji uwikłanej? W jakich punktach?
32. Czy do krzywej o równaniu $x^{2y} + y^2 = 1$ stosuje się twierdzenie o funkcji uwikłanej? W jakich punktach?
33. Wyznaczyć x , dla którego równanie $y - \ln(x + y) = 0$ określa y jako funkcję zmiennej x . Obliczyć $\frac{dy}{dx}$.

34. Niech

$$F(x, y) = x^3 y^2 - y \ln x - 2e^{2x-2} + y.$$

Wykazać, że istnieją funkcje rzeczywiste g, h klasy C^1 określone w pewnym otoczeniu U punktu $x = 1$ takie, że $F(x, g(x)) = 0 = f(x, h(x))$ oraz $g(x) < h(x)$ dla $x \in U$. Znaleźć $g(1)$, $h(1)$, $g'(1)$, $h'(1)$.

35. Sprawdzić z definicji, czy funkcja dana wzorem $f(x, y) = 5 - (x^6 + y^4)$ ma w punkcie $(x_0, y_0) = (0, 0)$ ekstremum lokalne.

36. Obliczyć $\int_0^a \int_0^b xy(x - y) dy dx$

37. Niech $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą. Udowodnić, że

$$\left(\int_a^b f(x) dx \right)^2 \leq (b - a) \int_a^b f^2(x) dx,$$

rozważając całkę iterowaną

$$\int_a^b \int_a^b (f(x) - f(y))^2 dy dx.$$

38. Obliczyć $\iint_D xy^2 dD$ gdzie D jest obszarem ograniczonym parabolą $y^2 = 2px$ i prostą $x = \frac{p}{2}$, gdzie $p > 0$.

39. Obliczyć całkę podwójną $\iint_D (x - y + 1) dD$, gdzie

$$D = \left\{ (x, y) : x + y \geq \frac{1}{2} \right\}.$$

40. Obliczyć całkę podwójną

$$\iint_D \frac{x}{y} dx dy$$

gdzie obszar D jest obszarem ograniczonym parabolami $y = x^2$, $x = y^2$, $y > 0$.

41. Obliczyć

$$\iint_D (x + y) dx dy,$$

gdzie D jest obszarem ograniczonym prostymi o równaniach $x = 0$, $y = 0$ i $x + y = 3$.

42. Obliczyć całkę podwójną

$$\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dS,$$

gdzie $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq a^2\}$.

43. Obliczyć całkę podwójną

$$\iint_D \sin \sqrt{x^2 + y^2} dS,$$

gdzie $D = \{(x, y) : \pi^2 \leq x^2 + y^2 \leq 4\pi^2\}$.

44. Obliczyć

$$\iint_D 2x^2 y dx dy,$$

gdzie D jest obszarem ograniczonym osiami współrzędnych i krzywą o równaniu $\sqrt{y} + \sqrt{x} = 1$.

45. Obliczyć całkę podwójną

$$\iint_D \frac{x^2}{y^2} dx dy,$$

gdzie obszar D jest ograniczony prostymi $x = 4$, $y = x$ i hiperbolą $y = \frac{1}{x}$.

46. Obliczyć $\int_0^1 \int_0^1 x \max\{x, y\} dy dx$.

47. Obliczyć

$$\iint_D \max\{x, y\} dx dy,$$

gdzie $D = [0, 1] \times [1, 2]$.

48. Obliczyć

$$\iint_D xy \, dx \, dy,$$

gdzie D jest obszarem ograniczonym krzywymi o równaniach $xy = 1$ oraz $|x - y| = 1$.

49. Obliczyć

$$\iint_D y^2 \sqrt{R^2 - x^2} \, dx \, dy,$$

gdzie $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq R^2\}$.

50. Obliczyć

$$\int_0^1 \int_0^1 e^{\max\{x, y\}} \, dx \, dy.$$

51. Obliczyć

$$\iint_A \frac{x}{1 + x^2 + y^2} \, dx \, dy,$$

gdzie $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x - y| \leq 2 \text{ oraz } x \in [-2, 2]\}$.

52. Obliczyć pole obszaru ograniczonego krzywą $(x - y)^2 + x^2 = a^2$, gdzie $a > 0$ jest dane.

53. Obliczyć całkę podwójną

$$\iint_D (ax + by + c) \, dx \, dy,$$

gdy obszar całkowania D jest trójkątem o wierzchołkach $(1, 1)$, $(1, 2)$, $(3, 3)$.

54. Obliczyć i zinterpretować geometrycznie całkę

$$\iint_{[-1, 1] \times [0, 2]} (5 - \sqrt{|xy|}) \, dx \, dy$$

55. Wyprowadzić wzór na objętość kuli w przestrzeni \mathbb{R}^3 o promieniu równym R .

56. Niech $a > 0$. Obliczyć całkę

$$\iint_D \frac{dx \, dy}{\sqrt{ax - x^2}},$$

gdzie D jest obszarem ograniczonym parabolą $y^2 = -ax + a^2$ i osią OY .

Teoria miary i całki Lebesgue'a

1. Niech f będzie funkcją daną wzorem

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{gdy } x \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q} \\ 1, & \text{gdy } x \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Obliczyć $\int_{[0,1]} f(x) d\ell(x)$. Stwierdzić, czy całka f jest całkowalna w sensie Riemanna.

2. Niech f będzie funkcją daną wzorem

$$f(x) = \begin{cases} \sin x, & \text{gdy } x \in [0, \pi/2] \setminus \mathbb{Q} \\ \cos x, & \text{gdy } x \in [0, \pi/2] \cap \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Obliczyć $\int_{[0, \pi/2]} f(x) d\ell(x)$.

3. Niech f będzie funkcją daną wzorem

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{gdy } xy \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{gdy } xy \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Obliczyć $\int_{[0,1] \times [0,1]} f(x, y) d\ell_2(x, y)$.