

Oznaczenia

Umawiamy się, że

$$\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_N) := [x_1 \dots x_N]^\top = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix}$$

Przez e_k oznaczamy k -ty wektor bazowy ze standardowej bazy przestrzeni \mathbb{R}^N , a więc

$$e_k := (0, 0, \dots, 0, \overset{k\text{-ta pozycja}}{\overbrace{1}}, 0, \dots, 0, 0) = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Jeżeli mamy dany zbiór G i punkt $x \in G$, to $G - x = \{y - x : y \in G\}$. Wówczas

$$y \in G - x \iff y + x \in G.$$

Przestrzenie unormowane. Jeżeli X jest przestrzenią liniową nad ciałem $F \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, to *normą* na X jest taka funkcja $x \mapsto \|\mathbf{x}\|$, $\mathbf{x} \in X$, że $\|\mathbf{x}\| \in [0, \infty)$, dla $\mathbf{x} \in X$ oraz

1. $\|\mathbf{x}\| = 0 \iff \mathbf{x} = \mathbf{0}$,
2. $\|a\mathbf{x}\| = |a| \|\mathbf{x}\|$ dla $a \in F$, $\mathbf{x} \in X$,
3. $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$ dla $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$.

Pochodne kierunkowe i cząstkowe

Definicja 1. *Pochodną cząstkową* funkcji $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$ po zmiennej x_k definiujemy jako granicę (jeśli istnieje)

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1, x_2, \dots, x_k + h, \dots, x_n) - f(x_1, x_2, \dots, x_k, \dots, x_n)}{h}$$

i oznaczamy jako

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(x_1, \dots, x_n) \text{ lub } \frac{\partial f(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_k}$$

Definicja 2 (Pochodna Kierunkowa). Niech dana będzie funkcja $f: U \rightarrow \mathbb{R}$, gdzie $U \subseteq \mathbb{R}^n$ jest zbiorem niepustym i otwartym. *Pochodną kierunkową* funkcji f w punkcie a w kierunku niezerowego wektora $u \in U$ nazywamy (jeżeli istnieje) granicę

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + tu) - f(a)}{t}.$$

Oznaczamy powyższą granicę symbolem $\nabla_u f(a)$ lub $\partial_u f(a)$.

Stosowane są także oznaczenia $\frac{\partial f}{\partial u}(a)$ i $f'_u(a)$.

Oczywisty jest związek

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(a) = \nabla_{e_k} f(a).$$

Definicja 3. Definiujemy *gradient* funkcji f w punkcie a jako

$$\text{grad } f(a) = \nabla f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \right).$$

Symbol ∇ (tzw. nabla) oznacza „operator różniczkowy”, możemy rozumieć, że danej funkcji przyporządkowuje on funkcję wektorową postaci:

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right).$$

Gradient funkcji w punkcie jest wektorem wskazującym kierunek najszybszego wzrostu funkcji w danym punkcie. Zatem pochodna kierunkowa liczona w kierunku gradientu będzie mieć największą wartość.

Różniczka i pochodna Fréchet'a

Rozważamy przestrzeń unormowaną $(X, \|\cdot\|_X)$ i $(Y, \|\cdot\|_Y)$.

Niech $f: G \rightarrow Y$ odwzorowaniem, gdzie $G \subseteq X$ i niech $a \in \text{int } G$. Mówimy, że funkcja f jest różniczkowalna w sensie Fréchet'a w punkcie a , gdy istnieje takie odwzorowanie liniowe i **ciągłe** $A: X \rightarrow Y$, że

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|f(a+h) - f(a) - Ah\|_Y}{\|h\|_X} = 0. \quad (\text{F})$$

Odwzorowanie A nazywamy *różniczką* odwzorowania f w punkcie a i oznaczamy $A = df(a)$. Stosowane są różne inne oznaczenia: $f'(a)$, $d_a f$, etc.

Twierdzenie 1. *Następujące warunki są równoważne:*

- (i) *funkcja $f: G \rightarrow Y$ jest różniczkowalna w sensie Fréchet'a w punkcie a ;*
- (ii) *istnieje taka funkcja $r: X \rightarrow Y$, że*

$$f(a+h) - f(a) = Ah + r(h), \quad \text{dla } h \in G - a \quad (1)$$

przy czym

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(h)}{\|h\|_X} = 0; \quad (1.1)$$

- (iii) *istnieje taka funkcja $r: X \rightarrow Y$, ciągła w zerze, że $r(0) = 0$ oraz dla każdego $h \in G - a$ zachodzi*

$$f(a+h) - f(a) = Ah + \|h\|_X r(h). \quad (2)$$

Oczywiście w punktach (i)-(ii), $A = df(0,0)$. Funkcja r w punkcie (i) jest inna od funkcji r z punktu (ii).

Dowód Twierdzenia 1. (i) \Rightarrow (ii). Wystarczy położyć

$$r(h) = \begin{cases} \frac{\|f(a+h) - f(a) - Ah\|_Y}{\|h\|_X}, & \text{dla } h \in G - a \setminus \{0\}; \\ 0, & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases}$$

Wówczas,

$$\lim_{h \rightarrow 0} r(h) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|f(a+h) - f(a) - Ah\|_Y}{\|h\|_X} \stackrel{(\text{F})}{=} 0 = r(0).$$

(ii) \Rightarrow (iii). Zakładamy, że istnieje odwzorowanie liniowe A oraz funkcja r_1 spełniająca warunki (1) i (1.1), tj. ciągła w zerze, $r_1(0) = 0$ oraz $f(a+h) - f(a) = Ah + \|h\|_X r_1(h)$ dla $h \in G - a$. Wówczas, warunek (iii) jest spełniony z tym samym odwzorowaniem A i z funkcją r zdefiniowaną wzorem $r(h) = \|h\| r_1(h)$, $h \in X$. Warunek (2) jest oczywiście spełniony oraz mamy

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(h)}{\|h\|} = \lim_{h \rightarrow 0} r_1(h) = r_1(0) = 0,$$

co było do wykazania.

(iii) \Rightarrow (i). Warunek (2) zapisujemy w postaci

$$r(h) = f(a+h) - f(a) - Ah.$$

Stąd,

$$\frac{f(a+h) - f(a) - Ah}{\|h\|} = \frac{r(h)}{\|h\|},$$

a ponieważ $\frac{r(h)}{\|h\|} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$, to również $\left\| \frac{r(h)}{\|h\|} \right\| \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$ i mamy

$$\frac{\|f(a+h) - f(a) - Ah\|}{\|h\|} = \frac{\|r(h)\|}{\|h\|} = \left\| \frac{r(h)}{\|h\|} \right\| \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0. \quad \square$$

Twierdzenie 2. *Jeżeli $f: U \rightarrow \mathbb{R}$, gdzie $U \subseteq \mathbb{R}^N$ jest niepustym zbiorem otwartym, jest funkcją różniczkowalną w sensie Frécheta w punkcie $a \in U$, to wówczas*

(i) *w punkcie a istnieje pochodna kierunkowa $\nabla_u f(a)$ funkcji f w kierunku dowolnego wektora $u \in \mathbb{R}^N$, a ponadto $\nabla_u f(a) = df(a)u$;*

(ii) *istnieją wszystkie pochodne cząstkowe $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$, $i \in \{1, \dots, N\}$ i zachodzi równość*

$$df(a)h = \sum_{k=1}^N \frac{\partial f}{\partial x_k}(a)h_k,$$

dla dowolnego $h = (h_1, \dots, h_N) \in \mathbb{R}^N$.

Dowód. Z założenia, istnieje $\varepsilon > 0$, takie że kula $B(a, \varepsilon)$ zawiera się w U . Dla $|t| < \varepsilon \|u\|^{-1}$ punkt $a + tu$ leży w kuli $B(a, \varepsilon)$ i wobec założenia o różniczkowalności f , mamy

$$f(a + tu) - f(a) = df(a)tu + r(tu),$$

gdzie r jest taką funkcją, że $\frac{r(tu)}{\|tu\|} \rightarrow 0$ przy $\|tu\| \rightarrow 0$. Mamy, dla odpowiednio małych t ,

$$\begin{aligned}\nabla_u f(a) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a+tu) - f(a)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{df(a)(tu) - r(tu)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{t df(a)u}{t} - \frac{r(tu)}{t} \right) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \left(df(a)u - \frac{r(tu)}{t} \cdot \frac{\|u\|}{\|u\|} \right) \\ &= df(a)u - \|u\| \lim_{t \rightarrow 0} \frac{r(tu)}{t\|u\|},\end{aligned}$$

a ponieważ $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{r(tu)}{t\|u\|} = \lim_{t \rightarrow 0} \operatorname{sgn}(t) \frac{r(tu)}{\|tu\|} = \pm \lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(h)}{\|h\|} = 0$, to mamy porządaną równość.

Aby wykazać (ii), zauważmy, że dowolny wektor $h = (h_1, \dots, h_N) \in \mathbb{R}^N$ możemy zapisać w postaci

$$h = \sum_{k=1}^N h_k e_k,$$

gdzie e_k jest k -tym wektorem bazy standardowej \mathbb{R}^N . Mamy

$$\begin{aligned}df(a)h &= df(a) \sum_{k=1}^N h_k e_k = \sum_{k=1}^N h_k df(a)e_k \\ &= \sum_{k=1}^N h_k \nabla_{e_k} f(a) = \sum_{k=1}^N \frac{\partial f}{\partial x_k}(a) h_k.\end{aligned}\quad \square$$

Twierdzenie 3. *Niech $f: G \rightarrow \mathbb{R}$, gdzie $G \subseteq \mathbb{R}^N$ jest zbiorem otwartym. Wówczas, jeżeli funkcja f ma wszystkie pochodne cząstkowe pierwszego rzędu i są one ciągle w punkcie $a \in G$, to funkcja f jest w punkcie a różniczkowalna w sensie Fréchet.*

Szukanie ekstremów funkcji dwóch zmiennych

Niech f będzie funkcją określoną w otoczeniu punktu $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Jeżeli funkcja f ma ciągle drugie pochodne cząstkowe w punkcie (a, b) to jest różniczkowalna dwukrotnie w jego otoczeniu. Warunkiem koniecznym istnienia ekstremum jest aby zachodziło $df(a, b)h = 0$, dla każdego $h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$. Taka zależność zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = 0 \end{cases}$$

Wtedy niech

$$H = \det d^2 f(a, b) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a, b) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b) \end{vmatrix}$$

1. Jeżeli $H = 0$, to sprawa istnienia ekstremum jest nierozstrzygnięta.
2. Jeżeli $H < 0$, to funkcja f nie ma w punkcie (a, b) ekstremum, ma natomiast punkt siodłowy.
3. Jeżeli $H > 0$, to funkcja f ma w punkcie (a, b) ekstremum lokalne właściwe. Co więcej, ma w tym punkcie:

(a) minimum, gdy $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) > 0$,

(b) maksimum, gdy $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) < 0$.

Szukanie ekstremów funkcji trzech zmiennych

Niech f będzie funkcją określoną w otoczeniu punktu $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. Jeżeli funkcja f ma ciągle drugie pochodne cząstkowe w punkcie (a, b, c) to jest różniczkowalna dwukrotnie w jego otoczeniu. Warunkiem koniecznym istnienia ekstremum jest aby było $df(a, b, c)h = 0$ dla $h = (h_1, h_2, h_3) \in \mathbb{R}^3$. Równoważnie: gdy

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(a, b, c) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(a, b, c) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial z}(a, b, c) = 0 \end{cases}$$

Oznaczamy:

$$H_1 = \left| \frac{\partial f}{\partial x^2}(a, b, c) \right| = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b, c),$$

$$H_2 = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b, c) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b, c) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a, b, c) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b, c) \end{vmatrix}$$

$$H_3 = \det d^2 f(a, b, c) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b, c) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b, c) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(a, b, c) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a, b, c) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b, c) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(a, b, c) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}(a, b, c) & \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}(a, b, c) & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(a, b, c) \end{vmatrix}$$

Jeżeli

1. $H_1 > 0, H_2 > 0, H_3 > 0$, to funkcja f ma minimum w punkcie (a, b, c) ,
2. $H_1 < 0, H_2 > 0, H_3 < 0$, to funkcja f ma maksimum w punkcie (a, b, c) .

Szukanie ekstremów warunkowych

Niech $G \subseteq \mathbb{R}^N$ będzie otwartym otoczeniem punktu a , funkcja $f: G \rightarrow \mathbb{R}$ oraz funkcje $g: G \rightarrow \mathbb{R}$, mają ciągle pierwsze pochodne cząstkowe, a ponadto $\nabla f(a), \nabla g(a) \neq 0$. Wówczas, jeżeli f ma w punkcie a ekstremum pod warunkiem $g(a) = 0$, to istnieje taka liczba rzeczywista λ , że funkcja $L: G \rightarrow \mathbb{R}$ określona wzorem

$$L(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) - \lambda g(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_N) \in G$$

spełnia warunek

$$\frac{\partial L}{\partial x_i}(a) = 0, \quad \text{dla } i = 1, \dots, N.$$

Założmy dodatkowo, że f i g mają ciągle drugie pochodne cząstkowe. Wówczas, jeżeli dla każdego wektora $\mathbf{h} = (h_1, \dots, h_N) \neq 0$ takiego, że

$$\sum_{j=1}^N \frac{\partial g}{\partial x_j}(a) h_j = 0,$$

zachodzi

$$d^2 L(\mathbf{x}) \mathbf{h} > 0,$$

to funkcja f ma w punkcie a lokalne minimum przy warunku $g = 0$, a jeżeli

$$d^2 L(\mathbf{x}) \mathbf{h} < 0,$$

dla \mathbf{h} jak uprzednio, to f ma w punkcie a lokalne maksimum przy warunku $g = 0$.

Różniczkowanie funkcji uwikłanych

Twierdzenie. *Rozważmy niepusty zbiór otwarty $G \subseteq \mathbb{R}^2$. Niech $F: G \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją różniczkowalną o ciągłych pochodnych cząstkowych. Jeżeli w punkcie $(a, b) \in G$:*

1. $F(a, b) = 0$,
2. $\frac{\partial F}{\partial y}(a, b) \neq 0$,

to istnieje takie $\delta > 0$ oraz funkcja $f: (a - \delta, a + \delta) \rightarrow \mathbb{R}$, że

$$y = f(x), \quad \text{dla } x \in (a - \delta, a + \delta)$$

oraz

$$F(x, f(x)) = 0, \quad \text{dla } x \in (a - \delta, a + \delta).$$

Ponadto,

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}(x, f(x))$$

dla każdego $x \in (a - \delta, a + \delta)$.

Uwaga. Przy założeniach powyższego twierdzenia, jeżeli dodatkowo

$$\frac{\partial F}{\partial x}(a, b) = 0,$$

to funkcja f ma w punkcie (a, b) :

- minimum lokalne, gdy $\alpha > 0$,
- maksimum lokalne, gdy $\alpha < 0$,

gdzie $\alpha = -\frac{\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}}{\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}}(a, b)$. (O ile oczywiście $\alpha \neq 0$)

Przykłady

1.

$$f(x, y) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}, & \text{gdy } x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & \text{gdy } x = y = 0. \end{cases}$$

Zbadamy różniczkowalność (w sensie Frécheta) funkcji f w punkcie $(0, 0)$. Mamy

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0 + h, 0) - f(0, 0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{1}{h^2}-0}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} e^{-\frac{1}{h^2}} = 0. \end{aligned}$$

Analogicznie $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$. Jeżeli funkcja f jest różniczkowalna w $(0, 0)$, to (na mocy twierdzenia 2):

Jest to oczywiste ze względu na symetrię w definicji f .

$$df(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) dx + \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) dy = 0.$$

Inaczej mówiąc,

$$df(0, 0)(h, k) = \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)h + \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)k = 0, \quad \text{dla } (h, k) \in \mathbb{R}^2.$$

Musimy sprawdzić, czy

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{f(0 + h, 0 + k) - f(0, 0) - df(0, 0)(h, k)}{\|(h, k)\|} = 0.$$

Ponieważ $f(0, 0) = 0$, $df(0, 0)(h, k) = 0$, to mamy

$$\|(h, k)\| = \sqrt{h^2 + k^2}$$

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{f(h, k)}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{1}{\sqrt{h^2 + k^2}} e^{-\frac{1}{h^2+k^2}}. \quad (3)$$

Zauważmy, że gdy $h, k \rightarrow 0$, to $t = \frac{1}{\sqrt{h^2+k^2}} \rightarrow \infty$, zatem prawa strona równania (3) jest równa $\lim_{t \rightarrow \infty} te^{-t^2} = 0$. Pokazaliśmy w ten sposób, że funkcja f jest różniczkowalna w punkcie $(0, 0)$ i jej różniczka Frécheta w tym punkcie jest tożsamościowo równa zero: $df(0, 0) \equiv 0$. (Tzn. $df(0, 0)(h, k) = 0$ dla dow. $(h, k) \in \mathbb{R}^2$!)

Zwróćmy uwagę, że stąd wynika też, że f jest ciągła w punkcie $(0, 0)$!

2. Niech

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & \text{gdy } x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & \text{gdy } x = y = 0. \end{cases}$$

Funkcja f jest ciągła i ma w otoczeniu punktu $(0, 0)$ skończone pochodne cząstkowe, ale **nie** jest różniczkowalna w punkcie $(0, 0)$.

Aby sprawdzić, że funkcja f jest ciągła, weźmy dowolny ciąg $(x_n, y_n) \rightarrow (0, 0)$. Niech $a_n = \max\{|x_n|, |y_n|\}$, $n \in \mathbb{N}$. Wtedy, jak łatwo sprawdzić, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. Mamy

$$0 \leq \left| \frac{x_n y_n}{\sqrt{x_n^2 + y_n^2}} \right| \leq \frac{a_n^2}{\sqrt{a_n^2}} = a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

a więc $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n, y_n) = 0 = f(0, 0)$. To oznacza, że

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = 0 = f(0, 0),$$

wobec dowolności wyboru ciągu (x_n, y_n) , $n \in \mathbb{N}$.

Mamy $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h \cdot 0}{\sqrt{h^2 + 0^2}} = 0$ i analogicznie $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$.
Zatem, jeżeli funkcja f jest różniczkowalna w sensie Fréchet'a w p. $(0, 0)$, to $df(0, 0) = 0$. Badamy granicę postaci

$$\lim_{(h, k) \rightarrow (0, 0)} \frac{f(0 + h, 0 + k) - f(0, 0) - df(0, 0)}{\|(h, k)\|} = 0.$$

Powyższa granica (wstawiamy $df(0, 0) = 0$, $f(0, 0) = 0$) ma postać

$$\lim_{(h, k) \rightarrow (0, 0)} \frac{\frac{hk}{\sqrt{h^2 + k^2}} - 0 - 0}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \lim_{(h, k) \rightarrow (0, 0)} \frac{hk}{h^2 + k^2}.$$

Jeżeli rozważymy ciąg $(h_n, k_n) = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$, to okaże się, że nie może być ona równa zero, gdyż $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{h_n k_n}{h_n^2 + k_n^2} = \frac{1}{2}$. Dodatkowo, jeżeli rozpatrzymy np. ciąg $(h_n, k_n) = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2})$, to zobaczymy, że granica ta w ogóle nie istnieje.

Pokazaliśmy, że funkcja f nie jest różniczkowalna w p. $(0, 0)$.

3. Niech $f(x, y) = \sqrt{|xy|}$ dla $x, y \in \mathbb{R}$. Zbadamy różniczkowalność funkcji f w punkcie $(0, 0)$. Funkcja f jest ciągła w punkcie $(0, 0)$ (oczywiste). Badamy pochodne cząstkowe:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{|0 \cdot h|} - \sqrt{0}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = 0,$$

i analogicznie

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0.$$

Rozważmy punkt $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Mamy

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \sqrt{|y|} \frac{\partial}{\partial x}(\sqrt{|x|}) = \sqrt{|y|} \frac{1}{2\sqrt{|x|}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{|y|}{|x|}}$$

oraz

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \sqrt{|x|} \frac{\partial}{\partial y}(\sqrt{|y|}) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{|x|}{|y|}}.$$

Zauważmy, że biorąc $y = x$, mamy

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{|x|}{|x|}} = \frac{1}{2} \neq 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0).$$

Zatem pochodna cząstkowa $\frac{\partial f}{\partial x}$ funkcji f jest **nieciągła** w punkcie $(0, 0)$. Analogicznie, nieciągła w $(0, 0)$ jest pochodna $\frac{\partial f}{\partial y}$. **Mimo to, sprawa różniczkowalności f w $(0, 0)$ na razie jest nierozstrzygnięta.** Musimy zbadać granicę

$$\begin{aligned} \lim_{(h, k) \rightarrow (0, 0)} \frac{f(0 + h, 0 + k) - \overbrace{f(0, 0)}^0 - df(0, 0)(h, k)}{\|(h, k)\|} \\ = \lim_{(h, k) \rightarrow (0, 0)} \frac{f(h, k) - df(0, 0)(h, k)}{\sqrt{h^2 + k^2}} \\ = \lim_{(h, k) \rightarrow (0, 0)} \frac{\sqrt{|hk|} - df(0, 0)(h, k)}{\sqrt{h^2 + k^2}}. \end{aligned}$$

Jeżeli $df(0, 0)$ istnieje, to (wobec twierdzenia 2)

$$df(0, 0)(h, k) = \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)h + \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)k = 0, \quad \text{dla } (h, k) \in \mathbb{R}^2,$$

tj. $df(0,0)(h,k) = 0$, $(h,k) \in \mathbb{R}^2$. Chcemy więc sprawdzić, czy granica

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{\sqrt{|hk|}}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \sqrt{\frac{|hk|}{h^2 + k^2}} \quad (4)$$

równa się zero. Rozważmy ciąg $(h_n, k_n) = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$, $n \in \mathbb{N}$. Wówczas

$$\begin{aligned} \lim_{(h_n, k_n) \rightarrow (0,0)} \sqrt{\frac{|h_n k_n|}{h_n^2 + k_n^2}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2}}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \neq 0, \end{aligned}$$

a więc granica (4) nie może być równa zero. Wykazaliśmy, że funkcja f nie jest różniczkowalna w punkcie $(0,0)$.

4. Niech

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2}, & \text{dla } (x, y) \neq (0, 0); \\ 0, & \text{dla } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Sprawdzimy, że f ma pochodną kierunkową w punkcie $(0, 0)$ w kierunku dowolnego wektora, a nie jest różniczkowalna w sensie Frécheta. Rozważamy dowolny wektor $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ i mamy

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(0 + tu_1, 0 + tu_2) - f(0, 0)}{t} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(tu_1, tu_2)}{t} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^3 u_1 u_2^2}{t^3 (u_1^2 + u_2^2)} = \frac{u_1 u_2^2}{u_1^2 + u_2^2}. \end{aligned}$$

Mamy $\nabla_{\mathbf{u}} f(0, 0) = \nabla_{(u_1, u_2)} f(0, 0) = \frac{u_1 u_2^2}{u_1^2 + u_2^2}$. Gdyby funkcja f była różniczkowalna w sensie Frécheta, to, wobec twierdzenia 2, $df(0, 0)(h, k) = \nabla_{(h, k)} f(0, 0) = \frac{hk^2}{h^2 + k^2}$. Ale ta funkcja (zmiennych (h, k)) nie jest liniowa i dlatego nie może być różniczką Frécheta! Zatem funkcja f nie jest różniczkowalna w sensie Frécheta.

5. Niech

$$f(x, y) = \begin{cases} x + y + \frac{x^3 y}{x^4 + y^2}, & \text{dla } (x, y) \neq (0, 0); \\ 0, & \text{dla } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Sprawdzimy, że f ma pochodną kierunkową w punkcie $(0, 0)$ w kierunku dowolnego wektora, a nie jest różniczkowalna w sensie Fréchet. Ustalmy dowolny wektor $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$. Mamy

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{u}} f(0, 0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(0 + tu_1, 0 + tu_2) - f(0, 0)}{t} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(tu_1, tu_2) - 0}{t} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{tu_1 + tu_2}{t} + \frac{t^4 u_1^4 u_2}{t^4 u_1^4 + t^2 u_2^2} \right) = u_1 + u_2. \end{aligned}$$

Pokazaliśmy, że $\nabla_{\mathbf{u}} f(0, 0) = \nabla_{(u_1, u_2)} f(0, 0) = u_1 + u_2$ dla dowolnego wektora $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$. Gdyby funkcja f była różniczkowalna w sensie Fréchet, to (wobec twierdzenia 2), musi być $\nabla_{(h, k)} f(0, 0) = df(0)(h, k)$ dla dowolnego $(h, k) \in \mathbb{R}^2$. Zatem

$$f(0 + h, 0 + k) - f(0, 0) = \nabla_{(h, k)} f(0, 0) + r(h) = h + k + r(h).$$

Zatem

$$f(h) = -h - k + f(h, k) - \overbrace{f(0, 0)}^0 = -h - k + h + k + \frac{h^3 k}{h^4 + k^2} = \frac{h^3 k}{h^4 + k^2}.$$

Mamy

$$\left\| \frac{r(h)}{\|h\|} \right\| = \frac{h^3 k}{(h^4 + k^2) \sqrt{h^2 + k^2}}.$$

Granica $\lim_{(h, k) \rightarrow (0, 0)} \frac{h^3 k}{(h^4 + k^2) \sqrt{h^2 + k^2}}$ nie jest równa zero: żeby się o tym przekonać, wystarczy rozważyć ciąg $(h_n, k_n) \rightarrow (0, 0)$ taki, że $k_n = h_n^2$. Wówczas mamy

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{h_n^3 k_n}{(h_n^4 + k_n^2) \sqrt{h_n^2 + k_n^2}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{h_n^5}{2h_n^4 \sqrt{h_n^2 + h_n^4}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\sqrt{1 + h_n^2}} = \frac{1}{2} \neq 0. \end{aligned}$$

Zatem r nie spełnia warunków definicji pochodnej Fréchet. Funkcja f nie jest różniczkowalna w sensie Fréchet.

6. Wyznaczyć ekstrema funkcji $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ danej wzorem $f(x, y) = \frac{x}{a} + \frac{y}{b}$ przy warunku $x^2 + y^2 = 1$.

Kładziemy $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ i w ten sposób otrzymujemy warunek postaci $g(x, y) = 0$. Definiujemy funkcję Lagrange'a:

$$L(x, y) = f(x, y) - \lambda g(x, y) = L(x, y) = \frac{x}{a} + \frac{y}{b} - \lambda(x^2 + y^2 - 1).$$

Wyznaczamy pochodne cząstkowe funkcji L :

$$\frac{\partial L}{\partial x}(x, y) = 2x - \frac{\lambda}{a}, \quad \frac{\partial L}{\partial y}(x, y) = 2y - \frac{\lambda}{b}$$

i tworzymy układ równań przyrównując pochodne cząstkowe do zera i dodając warunek $g(x, y) = 0$:

$$\begin{cases} \frac{1}{a} - 2\lambda x = 0 \\ \frac{1}{b} - 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

Wyznaczamy x i y z dwóch pierwszych równań:

$$x = \frac{1}{2\lambda a} + \frac{1}{2\lambda b}.$$

Wstawiamy tak wyznaczone wartości do trzeciego równania:

$$1 = x^2 + y^2 = \frac{1}{4\lambda^2 a^2} + \frac{1}{4\lambda^2 b^2}.$$

Stąd, $\lambda^2 = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) = \frac{b^2 + a^2}{(2ab)^2}$. To równanie ma dwa rozwiązania względem λ :

$$\bullet \lambda_1 = -\frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2|ab|}. \text{ Wówczas,}$$

$$x_1 = -\frac{|ab|}{a\sqrt{a^2 + b^2}} \text{ oraz } y_1 = -\frac{|ab|}{b\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

$$\bullet \lambda_2 = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2|ab|}. \text{ Wówczas,}$$

$$x_2 = \frac{|ab|}{a\sqrt{a^2 + b^2}} \text{ oraz } y_2 = \frac{|ab|}{b\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Zbiór $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : g(x, y) = 0\}$ jest zwarty, a ponadto mamy:

$$f(x_1, y_1) = -\frac{|ab|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) < 0 < \frac{|ab|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) = f(x_2, y_2).$$

Zatem funkcja f ma w punkcie (x_1, y_1) minimum i w punkcie (x_2, y_2) maksimum.

Dodatkowa uwaga. Możemy trochę uprościć albo, przynajmniej uzyskać krótszy zapis rozwiązań. Przypomnijmy, że dla $r \in \mathbb{R}$ stosuje się oznaczenie:

$$\operatorname{sgn} r = \begin{cases} 1, & \text{gdy } r > 0, \\ 0, & \text{gdy } r = 0, \\ -1, & \text{gdy } r < 0. \end{cases}$$

Z definicji $|r| = (\operatorname{sgn} r) \cdot r$. Oznaczmy $\sigma = \operatorname{sgn}(ab)$. Definicja funkcji f ma sens tylko dla $a, b \neq 0$, czyli $\sigma \neq 0$. Mamy

$$x_1 = -\sigma \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad y_1 = -\sigma \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

oraz

$$x_2 = \sigma \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad y_2 = \sigma \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

7. Wyznaczyć ekstrema funkcji $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ danej wzorem $f(x, y) = x^2 + y^2$ przy warunku $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$.

Oznaczmy $g(x, y) = \frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1$. Wówczas warunek przyjmuje postać $g(x, y) = 0$. Definiujemy funkcję Lagrange'a:

$$L(x, y) = f(x, y) - \lambda g(x, y) = x^2 + y^2 - \lambda \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 \right).$$

Wyznaczamy pochodne cząstkowe:

$$\frac{\partial L}{\partial x}(x, y) = 2x - \frac{\lambda}{a}, \quad \frac{\partial L}{\partial y}(x, y) = 2y - \frac{\lambda}{b}$$

i tworzymy układ równań:

$$\begin{cases} 2x - \frac{\lambda}{a} = 0 \\ 2y - \frac{\lambda}{b} = 0 \\ \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \end{cases}$$

Z pierwszych dwóch równań mamy $x = \frac{\lambda}{2a}$ oraz $y = \frac{\lambda}{2b}$. Wstawiamy wyznaczony x i y do trzeciego równania i mamy:

$$1 = \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = \frac{\lambda}{2a^2} + \frac{\lambda}{2b^2} = \lambda \left(\frac{b^2 + a^2}{2a^2b^2} \right),$$

a zatem

$$\lambda = \frac{2a^2b^2}{b^2 + a^2}, \quad x = \frac{ab^2}{a^2 + b^2}, \quad y = \frac{a^2b}{a^2 + b^2}.$$

Pokazaliśmy, że punkt $\left(\frac{ab^2}{a^2+b^2}, \frac{a^2b}{a^2+b^2} \right)$ jest punktem krytycznym, tj. „punktem podejrzanym o istnienie ekstremum”. Wyznaczamy macierz różniczkową $d^2L(x, y)$:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Ustalmy wektor $(h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ i taki, że

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y)h_1 + \frac{\partial g}{\partial y}(x, y)h_2 = \frac{h_1}{a} + \frac{h_2}{b} = 0.$$

Badamy znak wyrażenia $d^2L(x, y)(h_1, h_2)$:

$$d^2L(x, y)(h_1, h_2) = [h_1 h_2] \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} = [h_1 h_2] \begin{bmatrix} 2h_1 \\ 2h_2 \end{bmatrix} = 2h_1^2 + 2h_2^2.$$

Oczywiście $2h_1^2 + 2h_2^2 \geq 0$ dla dowolnych $h_1, h_2 \in \mathbb{R}$. Zauważmy jednak, że skoro $(h_1, h_2) \neq (0, 0)$ z założenia, to przynajmniej jedna z liczb/współrzędnych h_1 lub h_2 musi być różna od zera, zatem mamy ściśle nierówność $2h_1^2 + 2h_2^2 > 0$. To pokazuje, że funkcja f ma w badanym punkcie minimum warunkowe, przy warunku $g(x, y) = 0$.