1. Wykazać, że dane granice nie istnieją:

(a) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x}{x+y}$

(b) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$

(c) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{x^4+y^2}$

(d) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-2y^2}{2x^2+y^2}$

2. Wykazać, że

(a) $\lim_{(x,y)\to(1,-1)} \frac{x^2-y^2}{x+y} = 2,$

(b) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4}{x^2+y^2} = 0.$

3. Zbadać istnienie granic (obliczyć, jeśli istnieją):

(1) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2},$

(2) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^3+y^3}{x^2+y^2},$

(3) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3}{x^2+y^2},$

(4) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{x^2+y^2},$

(5) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+2y^2}{x^2+y^2},$

(6) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^3+2y^2}{x^2+y^2},$

(7) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^3},$

4. Zbadać ciągłość funkcji dwóch zmiennych: $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$, gdzie

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\cos(xy)}{x}, & \text{dla } x \neq 0, y \in \mathbb{R}, \\ 0, & \text{gdy } x = 0, y \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

5. Zbadać ciągłość funkcji $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ takiej, że

$$f(x,y) = \frac{x^2y}{x^2+y^2}, \text{ dla } (x,y) \neq (0,0) \text{ oraz } f(0,0) = 0.$$

6. Obliczyć granice:

(a) $\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{1-xy}{x^2+y^2}$

(b) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin y}{x}$

(c) $\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y}}$

(d) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$

(e) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$

(f) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sin(x^3+y^3)}{x+y}$

(g) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2}$

(h) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{e^{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}$

7. Pokazać, że dla funkcji
$$f(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$$
mamy
$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y) = \lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y) = 0,$$
a mimo to, granica $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ **nie** istnieje.

8. Obliczyć obie pochodne cząstkowe nastepujących funkcji dwóch zmiennych:

(a) $f(x,y) = x\sin(x+y)$

(b) $f(x,y) = x^2+y^2-3xy^2$

(c) $f(x,y) = xy + \dfrac{x}{y}$

(d) $f(x,y) = \ln(x+y^2)$

(e) $f(x,y) = ax+y^2$, gdzie a jest dowolną stałą.

9. Obliczyć pochodne cząstkowe funkcji $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ danej wzorem $f(x,y,z) = x^{yz}$, $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$.

10. Unormować wektor $\mathbf{u}$ i obliczyć w jego kierunku pochodną kierunkową w punkcie a, dla

(a) $f(x,y) = x^2+y^2$, $\quad \mathbf{u} = \left[\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\right]^{\mathsf{T}}$, $a = \left(\dfrac{1}{2}, -2\right)$

(b) $f(x,y) = x^2+xy-y^2$, $\quad \mathbf{u} = [4\ 3]^{\mathsf{T}}$, $a = (1,-1)$

(c) $f(x,y) = x\sin y$, $\quad \mathbf{u} = [1\ 1]$, $a = (0, \frac{\pi}{2})$

(d) $f(x,y,z) = \sqrt[3]{x+y+z}$, $\quad \mathbf{u} = \left[-\frac{1}{\sqrt{3}}\ \frac{1}{\sqrt{3}}\ \frac{1}{\sqrt{3}}\right]^{\mathsf{T}}$, $a = (1,2,1)$

11. Sprawdzić, że $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y)$, gdy

(a) $f(x,y) = \sin(xy)$

(b) $f(x,y) = x^{y^2}$

12. Zbadać w jakich punktach różniczkowalna jest funkcja f i wyznaczyć $\operatorname{grad} f$, gdy

(a) $f(x,y) = \sqrt{|xy|}$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$
(b) $f(x,y) = |x-y|$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$
(c) $f(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$
(d) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$
(e) $f(x,y) = \sqrt{x^4+y^4}$
(f) $f(x,y) = \sqrt[3]{x^3+y^3}$

13. Obliczyć mieszane pochodne drugiego rzędu funkcji

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}, & \text{dla } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{dla } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

14. Wykazać, że funkcja

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2}, & \text{gdy } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{gdy } x = y = 0; \end{cases}$$

ma pochodną kierunkową w kierunku dowolnego wektora, ale nie jest różniczkowalna w sensie Frécheta.

15. Wykazać, że funkcja

$$f(x,y) = \begin{cases} x + y + \dfrac{x^3y}{x^4+y^2}, & \text{gdy } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{gdy } x = y = 0; \end{cases}$$

ma pochodną kierunkową w kierunku dowolnego wektora, ale nie jest różniczkowalna w sensie Frécheta.

16. Wykazać, że funkcja

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{gdy } x^2+y^2 \neq 0, \\ 0, & \text{gdy } x = y = 0. \end{cases}$$

jest ciągła i ma w otoczeniu punktu $(0,0)$ obie (skończone) pochodne cząstkowe, ale nie jest różniczkowalna w sensie Frécheta w punkcie $(0,0)$.

17. Wykazać, że funkcja

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x+y)}{x^2+y^2}, & \text{gdy } x^2+y^2 \neq 0, \\ 0, & \text{gdy } x = y = 0. \end{cases}$$

jest ciągła i ma w otoczeniu punktu $(0,0)$ obie pochodne cząstkowe, ale nie jest różniczkowalna w sensie Frécheta w punkcie $(0,0)$.

18. Wykazać, że funkcja
$$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, & \text{gdy } x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & \text{gdy } x=y=0.\end{cases}$$
ma w otoczeniu punktu $(0,0)$ ograniczone obie pochodne cząstkowe nieciągłe oraz niegoracznione, a mimo to jest różniczkowalna w sensie Frécheta w punkcie $(0,0)$.

19. Zbadać różniczkowalność funkcji f, danej równaniem
$$f(x,y)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}, & \text{gdy } x^2+y^2>0,\\ 0, & \text{dla } x=y=0.\end{cases}$$

20. Zbadać różniczkowalność funkcji $f\colon \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, gdzie
$$f(x,y)=\begin{cases}xy\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, & \text{gdy } x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & \text{gdy } x=y=0.\end{cases}$$

21. Niech $F(x,y)=(x\cdot y)\sin\left(\dfrac{x}{y}\right)$. Obliczyć $\dfrac{\partial F}{\partial x}$ oraz $\dfrac{\partial F}{\partial y}$.

22. Niech $F(x,y)=(x\cdot y)^{x+\ln y}$. Obliczyć $\dfrac{\partial F}{\partial x}$ oraz $\dfrac{\partial F}{\partial y}$.

23. Wyznaczyć macierz różniczki odwzorowania odwrotnego do $\varphi\colon \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ danego równaniem $\varphi(x,y)=(2xy,x^2-y)$.

24. Znaleźć punkty krytyczne i ekstrema (jeśli istnieją) funkcji $f\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ danej równaniem

(a) $f(x,y)=x^2-xy+y^2$
(b) $f(x,y)=x^3-3x^2-5y^2$
(c) $f(x,y)=3x^2-6xy+y^3$
(d) $f(x,y)=xy+\dfrac{1}{2(x+y)}$
(e) $f(x,y)=e^{x^2+y^2-xy}$
(f) $f(x,y)=(x+y^2)e^{2x}$
(g) $f(x,y)=e^{\sqrt{y^2+x^2}}$
(h) $f(x,y)=x^2e^{\sqrt{y^2+x^2}}$
(i) $f(x,y)=x^3+y^3-3axy$
(j) $f(x,y)=4xy+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$
(k) $f(x,y)=1-\sqrt{x^2+y^2}$
(l) $f(x,y)=x^2\sqrt{x^2+y^2}$
(m) $f(x,y)=3x^2y-x^3-y^4$
(n) $f(x,y)=xy\ln(x^2+y^2)$

25. Wyznaczyć ekstrema funkcji f na ograniczonym obszarze D, gdzie

(a) $f(x,y)=2xy$, $D=\{(x,y)\colon x^2+y^2\leqslant 1\}$;

(b) $f(x,y) = x^2y - x - 3y$, D jest trójkątem o wierzchołkach w punktach $(0,0)$, $(0,4)$ i $(5,0)$;

(c) $f(x,y) = 2x^2 - 2y^2$, $D = \{(x,y)\colon x^2 + y^2 \leqslant 4\}$;

26. Wyznaczyć ekstrema warunkowe funkcji $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

(a) $z = f(x,y) = xy$ przy warunku $x + y = 1$,

(b) $z = f(x,y) = \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b}$ przy warunku $x^2 + y^2 = 1$,

(c) $z = f(x,y) = x^2 + y^2$ przy warunku $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$,

(d) $z = f(x,y) = xy$ przy warunku $x^2 + y^2 = 2$,

(e) $z = (x,y) = \cos^2 x + \cos^2 y$ przy warunku $x - y = \dfrac{\pi}{2}$,

(f) $z = f(x,y) = x^2 + xy + y^2$ przy warunku $x + y = 1$.

27. Zbadać istnienie ekstremów i kresów funkcji $f\colon E \to \mathbb{R}$, gdzie

(a) $f(x_1, \ldots, x_n) = x_1 x_2 \cdots x_{n-1} x_n$,

$$E = \{(x_1, \ldots, x_n)\colon x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1} + x_n \leqslant 1,\ x_1, \ldots, x_n \geqslant 0\}$$

(b) $f(x_1, \ldots, x_n) = x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1} + x_n$,

$$E = \{(x_1, \ldots, x_n)\colon x_1 x_2 x_3 \cdots x_{n-1} x_n \geqslant 1,\ x_1, \ldots, x_n > 0\}$$

(c) $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 x_2 x_3 x_4$,

$$E = \{(x_1, x_2, x_3, x_4)\colon ,x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = c,\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geqslant 0\},$$

gdzie $c > 0$ jest dane.

(d) $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1^p + x_2^p + \ldots + x_n^p, p \in \mathbb{N}, p \geqslant 2$,

$$E = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n)\colon x_1 + x_2 + \ldots + x_n = a\}, a > 0.$$

Wskazówka: w (c) i (d) zastosować metodę mnożników Lagrange'a.

28. W okrąg wpisać trójkąt o największym polu.

29. Wyznaczyć pochodną $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ funkcji y uwikłanej równaniem

(a) $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, gdzie $a, b > 0$ są dane,

(b) $2y^2 - 4x^3y + 5x^2 - 12 = 0$,

(c) $xe^{2y} - ye^{2x} = 0$.

30. Wyznacz ekstrema lokalne funkcji zmiennej x uwikłanej, zadanej równaniem:

(a) $x^2 - 4x + y^2 = 5$

(b) $x^2 = xy - 1$

(c) $x^3 + y^3 = 3xy$

(d) $x^{2y} + y^2 = 1$

31. Czy do krzywej o równaniu $x^4 - x^2 + y^2 = 0$ (*Lemniskaty Gerona*) stosuje się twierdzenie o funkcji uwikłanej? W jakich punktach?

32. Czy do krzywej o równaniu $x2^y + y^2 = 1$ stosuje się twierdzenie o funkcji uwikłanej? W jakich punktach?

33. Wyznaczyć x, dla którego równanie $y - \ln(x+y) = 0$ określa y jako funkcję zmiennej x. Obliczyć $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

34. Niech
$$F(x,y) = x^3y^2 - y\ln x - 2e^{2x-2} + y.$$
Wykazać, że istnieją funkcje rzeczywiste g, h klasy C^1 określone w pewnym otoczeniu U punktu $x = 1$ takie, że $F(x, g(x)) = 0 = f(x, h(x))$ oraz $g(x) < h(x)$ dla $x \in U$. Znaleźć $g(1)$, $h(1)$, $g'(1)$, $h'(1)$.

35. Sprawdzić z definicji, czy funkcja dana wzorem $f(x,y) = 5 - (x^6 + y^4)$ ma w punkcie $(x_0, y_0) = (0,0)$ ekstremum lokalne.

36. Obliczyć $\displaystyle\int_0^a \int_0^b xy(x-y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$

37. Obliczyć $\displaystyle\int_P f(x,y)\,\mathrm{d}P$, gdzie

    (a) $f(x,y) = x^3y^2$, $P = [1,2] \times [0,2]$,

    (b) $f(x,y) = xe^y$, $P = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\colon\ |x| \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1\big\}$,

    (c) $f(x,y) = (x-y)^2$, $\quad P = [0,-1] \times [1,2]$.

    (d) $f(x,y) = \dfrac{y}{x}$, $\quad P = [1,e] \times [1,2]$,

    (e) $f(x,y) = y\ln(xy)$, $\quad P = [1,2] \times [0,1]$,

    (f) $f(x,y) = e^y \cos x$, $\quad P = \big[0, \frac{\pi}{2}\big] \times [0,1]$,

38. Obliczyć
$$\int\limits_{[0,1]\times[-1,1]\times[0,1]} xyz\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z.$$

39. Niech $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą. Udowodnić, że
$$\left(\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 \leqslant (b-a)\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x,$$
rozważając całkę iterowaną
$$\int_a^b \int_a^b \big(f(x) - f(y)\big)^2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x.$$

40. Niech $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, $g\colon [c,d] \to \mathbb{R}$ będą funkcjami ciągłymi. Wykazać, że wówczas

$$\int\limits_a^b \int\limits_c^d \big(f(x)+g(y)\big)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = (d-c)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_a^b \int\limits_c^d g(y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

$$= (b-a)\int_c^d g(y)\,\mathrm{d}y + \int\limits_a^b \int\limits_c^d f(x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

41. Niech $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, $g\colon [c,d] \to \mathbb{R}$ będą funkcjami całkowalnymi. Wykazać, że

$$\int_a^b \int_c^d \big(yf(x)+xg(y)\big)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(d^2-c^2)\left(\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right)+\frac{1}{2}(b^2-a^2)\left(\int_c^d g(y)\,\mathrm{d}y\right).$$

42. Obliczyć $\iint\limits_D xy^2\,\mathrm{d}D$ gdzie D jest obszarem ograniczonym parabolą $y^2 = 2px$ i prostą $x = \frac{p}{2}$, gdzie $p > 0$.

43. Obliczyć całkę podwójną $\iint\limits_D (x-y+1)\,\mathrm{d}D$, gdzie

$$D = \left\{(x,y)\colon x+y \geqslant \frac{1}{2}\right\}.$$

44. Obliczyć całkę podwójną

$$\iint\limits_D \frac{x}{y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

gdzie obszar D jest obszarem ograniczonym parabolami $y = x^2$, $x = y^2$, $y > 0$.

45. Obliczyć

$$\iint\limits_D (x+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

gdzie D jest obszarem ograniczonym prostymi o równaniach $x = 0$, $y = 0$ i $x + y = 3$.

46. Obliczyć całkę podwójną

$$\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}S,$$

gdzie $D = \big\{(x,y)\colon x^2+y^2 \leqslant a^2\big\}$.

47. Obliczyć całkę podwójną
$$\iint_D \sin\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}S,$$
gdzie $D = \big\{(x,y)\colon \pi^2 \leqslant x^2+y^2 \leqslant 4\pi^2\big\}$.

48. Obliczyć
$$\iint\limits_D 2x^2y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$
gdzie D jest obszarem ograniczonym osiami współrzędny i krzywą o równaniu
$\sqrt{y}+\sqrt{x}=1$.

49. Obliczyć całkę podwójną
$$\iint\limits_D \frac{x^2}{y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$
gdzie obszar D jest ograniczony prostymi $x=4$, $y=x$ i hiperbolą $y=\dfrac{1}{x}$.

50. Obliczyć $\displaystyle\int_0^1\int_0^1 x\max\{x,y\}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$.

51. Obliczyć
$$\iint\limits_D \max\{x,y\}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$
gdzie $D=[0,1]\times[1,2]$.

52. Obliczyć
$$\iint\limits_D xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$
gdzie D jest obszarem ograniczonym krzywymi o równaniach $xy=1$ oraz $|x-y|=1$.

53. Obliczyć
$$\iint_D y^2\sqrt{R^2-x^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$
gdzie $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\colon x^2+y^2\leqslant R^2\}$.

54. Obliczyć
$$\int_0^1\int_0^1 e^{\max\{x,y\}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

55. Obliczyć
$$\iint\limits_A \frac{x}{1+x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$
gdzie $A = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon |x-y| \leqslant 2 \text{ oraz } x \in [-2,2]\big\}$.

56. Obliczyć pole obszaru ograniczonego krzywą $(x-y)^2 + x^2 = a^2$, gdzie $a > 0$ jest dane.

57. Obliczyć całkę podwójną
$$\iint_D (ax+by+c)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$
gdy obszar całkowania D jest trójkątem o wierzchołkach $(1,1)$, $(1,2)$, $(3,3)$.

58. Obliczyć i zinterpretować geometrycznie całkę
$$\iint\limits_{[-1,1]\times[0,2]} (5-\sqrt{|xy|})\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

59. Wyprowadzić wzór na objętość kuli w przestrzeni $\mathbb{R}^3$ o promieniu równym R.

60. Niech $a > 0$. Obliczyć całkę
$$\iint_D \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\sqrt{ax-x^2}},$$
gdzie D jest obszarem ograniczonym parabolą $y^2 = -ax + a^2$ i osią OY.

Teoria miary i całki Lebesgue'a

1. Niech f będzie funkcją daną wzorem
$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{gdy } x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q} \\ 1, & \text{gdy } x \in [0,1] \cap \mathbb{Q}. \end{cases}$$
Obliczyć $\displaystyle\int_{[0,1]} f(x)\,\mathrm{d}\ell(x)$. Stwierdzić, czy całka f jest całkowalna w sensie Riemanna.

2. Niech f będzie funkcją daną wzorem
$$f(x) = \begin{cases} \sin x, & \text{gdy } x \in [0,\pi/2] \setminus \mathbb{Q} \\ \cos x, & \text{gdy } x \in [0,\pi/2] \cap \mathbb{Q}. \end{cases}$$
Obliczyć $\displaystyle\int_{[0,\pi/2]} f(x)\,\mathrm{d}\ell(x)$.

3. Niech f będzie funkcją daną wzorem

$$f(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{gdy } xy \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{gdy } xy \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Obliczyć $\displaystyle\int_{[0,1]\times[0,1]} f(x,y)\,\mathrm{d}\ell_2(x,y)$.