Oznaczenia

Umawiamy się, że

$$(x_1, \ldots, x_N) := [x_1 \ldots x_N]^\intercal = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix}$$

Przez e_k oznaczamy k-ty wektor bazowy ze standardowej bazy przestrzeni $\mathbb{R}^N$, a więc

$$e_k := (0, 0, \ldots, 0, \overbrace{1}^{k\text{-ta pozycja}}, 0, \ldots, 0, 0) = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Jeżeli mamy dany zbiór G i punkt $x \in G$, to $G - x = \{y - x \colon y \in G\}$. Wówczas

$$y \in G - x \iff y + x \in G.$$

Pochodne kierunkowe i cząstkowe

Definicja 1. *Pochodną cząstkową* funkcji $f\colon D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$ po zmiennej x_k definiujemy jako granicę (jeśli istnieje)

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_1, x_2, \ldots, x_k + h, \ldots, x_n) - f(x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots, x_n)}{h}$$

i oznaczamy jako

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(x_1, \ldots, x_n) \ \text{ lub } \ \frac{\partial f(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_k}$$

Definicja 2 (Pochodna Kierunkowa)**.** Niech dana będzie funkcja $f\colon U \to \mathbb{R}$, gdzie $U \subseteq \mathbb{R}^n$ jest zbiorem niepustym i otwartym. *Pochodną kierunkową* funkcji f w punkcie a w kierunku niezerowego wektora $u \in U$ nazywamy (jeżeli istnieje) granicę

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(a + tu) - f(a)}{t}.$$

Oznaczamy powyższą granicę symbolem $\nabla_u f(a)$ lub $\partial_u f(a)$.

Stosowane są także oznaczenia $\frac{\partial f}{\partial u}(a)$ i $f'_u(a)$.
Oczywisty jest związek

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(a) = \nabla_{e_k} f(a).$$

Definicja 3. Definiujemy *gradient* funkcji f w punkcie a jako

$$\operatorname{grad} f(a) = \nabla f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\right).$$

Symbol ∇ (tzw. nabla) oznacza „operator różniczkowy”, możemy rozumieć, że danej funkcji przyporządkowuje on funkcję wektorową postaci:

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right).$$

Gradient funkcji w punkcie jest wektorem wskazującym kierunek najszybszego wzrostu funkcji w danym punkcie. Zatem pochodna kierunkowa liczona w kierunku gradientu będzie mieć największą wartość.

Różniczka i pochodna Frécheta

Rozważamy przestrzenie unormowane $(X, \|\cdot\|_X)$ i $(Y, \|\cdot\|_Y)$.

Niech $f\colon G \to Y$ odwzorowaniem, gdzie $G \subseteq X$ i niech $a \in \operatorname{int} G$. Mówimy, że funkcja f jest różniczkowalna w sensie Frécheta w punkcie f, gdy istnieje takie odwzorowanie liniowe i **ciągłe** $A\colon X \to Y$, że

$$\lim_{h\to 0} \frac{\|f(a+h) - f(a) - Ah\|_Y}{\|h\|_X} = 0. \tag{F}$$

Odwzorowanie A nazywamy *różniczką* odwzorowania f w punkcie a i oznaczamy $A = \mathrm{d}f(a)$. Stosowane są różne inne oznaczenia: $f'(a)$, $\mathrm{d}_a f$, etc.

Twierdzenie 1. *Nastepujące warunki są równoważne:*

(i) funkcja $f\colon G \to Y$ jest różniczkowalna w sensie Frécheta w punkcie a;

(ii) istnieje taka funkcja $r\colon X \to Y$, że

$$f(a+h) - f(a) = Ah + r(h), \quad \textit{dla } h \in G - a \tag{1}$$

przy czym

$$\lim_{h\to 0} \frac{r(h)}{\|h\|_X} = 0; \tag{1.1}$$

(iii) istnieje taka funkcja $r\colon X \to Y$, ciągła w zerze, że $r(0) = 0$ oraz dla każdego $h \in G - a$ zachodzi

$$f(a+h) - f(a) = Ah + \|h\|_X\, r(h). \tag{2}$$

Dowód Twierdzenia 1. $(i) \Rightarrow (ii)$. Wystarczy położyć

$$r(h) = \begin{cases} \dfrac{\|f(a+h) - f(a) - Ah\|}{\|h\|}, & \text{dla } h \in G - a \setminus \{0\}; \\ 0, & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases}$$

Wówczas,

$$\lim_{h\to 0} r(h) = \lim_{h\to 0} \frac{\|f(a+h) - f(a) - Ah\|}{\|h\|} \overset{(F)}{=} 0 = r(0).$$

$(ii) \Rightarrow (iii)$. Zakładamy, że istnieje odwzorowanie liniowe A oraz funkcja r_1 spełniająca warunki (1) i (1.1), tj. ciągła w zerze, $r_1(0) = 0$ oraz $f(a+h) - f(a) = Ah + \|h\|_X\, r_1(h)$ dla $h \in G - a$. Wówczas, warunek (iii)

jest spełniony z tym samym odwzorowaniem A i z funkcją r zdefiniowaną wzorem $r(h) = \|h\| \, r_1(h)$, $h \in X$. Warunek (2) jest oczywiście spełniony oraz mamy

$$\lim_{h \to 0} \frac{r(h)}{\|h\|} = \lim_{h \to 0} r_1(h) = r_1(0) = 0,$$

co było do wykazania.

$(iii) \Rightarrow (i)$. Warunek (2) zapisujemy w postaci

$$r(h) = f(a+h) - f(a) - Ah.$$

Stąd,

$$\frac{f(a+h) - f(a) - Ah}{\|h\|} = \frac{r(h)}{\|h\|},$$

a ponieważ $\frac{r(h)}{\|h\|} \xrightarrow{h \to 0} 0$, to również $\left\| \frac{r(h)}{\|h\|} \right\| \xrightarrow{h \to 0} 0$ i mamy

$$\frac{\|f(a+h) - f(a) - Ah\|}{\|h\|} = \frac{\|r(h)\|}{\|h\|} = \left\| \frac{r(h)}{\|h\|} \right\| \xrightarrow{h \to 0} 0. \qquad \square$$

Twierdzenie 2. *Jeżeli $f\colon U \to \mathbb{R}$, gdzie $U \subseteq \mathbb{R}^N$ jest niepustym zbiorem otwartym, jest funkcją różniczkowalną w sensie Frécheta w punkcie $a \in U$, to wówczas*

(i) w punkcie a istnieje pochodna kierunkowa $\nabla_u f(a)$ funkcji f w kierunku dowolnego wektora $u \in \mathbb{R}^N$, a ponadto $\nabla_u f(a) = \mathrm{d}f\,(a)\,u$;

(ii) istnieją wszystkie pochodne cząstkowe $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a), i \in \{1, \ldots, N\}$ i zachodzi równość

$$\mathrm{d}f\,(a)\,h = \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial x_k}(a) h_k,$$

dla dowolnego $h = (h_1, \ldots, h_N) \in \mathbb{R}^N$.

Dowód. Z założenia, istnieje $\varepsilon > 0$, takie że kula $B\,(a, \varepsilon)$ zawiera się w U. Dla $|t| < \varepsilon \, \|u\|^{-1}$ punkt $a + tu$ leży w kuli $B\,(a, \varepsilon)$ i wobec założenia o różniczkowalności f, mamy

$$f(a+tu) - f(a) = \mathrm{d}f\,(a)\,tu + r(tu),$$

gdzie r jest taką funkcją, że $\dfrac{r(tu)}{\|tu\|} \to 0$ przy $\|tu\| \to 0$. Mamy, dla odpowiednio małych t,

$$\begin{aligned}\nabla_u f(a) &= \lim_{t\to 0} \frac{f(a+tu)-f(a)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{\mathrm{d}f\,(a)\,(tu) - r(tu)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \left(\frac{t\,\mathrm{d}f\,(a)\,u}{t} - \frac{r(tu)}{t} \right) \\ &= \lim_{t\to 0} \left(\mathrm{d}f\,(a)\,u - \frac{r(tu)}{t} \cdot \frac{\|u\|}{\|u\|} \right) \\ &= \mathrm{d}f\,(a)\,u - \|u\| \lim_{t\to 0} \frac{r(tu)}{t\,\|u\|},\end{aligned}$$

a ponieważ $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{r(tu)}{t\,\|u\|} = \lim\limits_{t\to 0} \operatorname{sgn}(t) \dfrac{r(tu)}{\|tu\|} = \pm \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{r(h)}{\|h\|} = 0$, to mamy porządaną równość.

Aby wykazać (ii), zauważmy, że dowolny wektor $h = (h_1, \ldots, h_N) \in \mathbb{R}^N$ możemy zapisać w postaci

$$h = \sum_{k=1}^{N} h_k e_k,$$

gdzie e_k jest k-tym wektorem bazy standardowej $\mathbb{R}^N$. Mamy

$$\begin{aligned}\mathrm{d}f\,(a)\,h &= \mathrm{d}f\,(a) \sum_{k=1}^{N} h_k e_k = \sum_{k=1}^{N} h_k\, \mathrm{d}f\,(a)\, e_k \\ &= \sum_{k=1}^{N} h_k \nabla_{e_k} f(a) = \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial x_k}(a) h_k. \qquad \square\end{aligned}$$

Twierdzenie 3. *Niech $f\colon G \to \mathbb{R}$, gdzie $G \subseteq \mathbb{R}^N$ jest zbiorem otwartym. Wówczas, jeżeli funkcja f ma wszystkie pochodne cząstkowe pierwszego rzędu i są one ciągłe w punkcie $a \in G$, to funkcja f jest różniczkowalna w sensie Frécheta.*

Szukanie ekstremów funkcji dwóch zmiennych

Niech f będzie funkcją określoną w otoczeniu punktu $P \in \mathbb{R}^2$. Jeżeli funkcja f ma ciągłe drugie pochodne cząstkowe w punkcie P to jest różniczkowalna dwukrotnie w jego otoczeniu. Warunkiem koniecznym istnienia ekstremum jest

$$\mathrm{d}f\,(P)\,h = 0,\ h \in \mathbb{R}^2 \Longleftrightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(P) = \frac{\partial f}{\partial y}(P) = 0.$$

Wtedy niech

$$H = \det \mathrm{d}^2 f(P) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(P) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(P) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(P) \end{vmatrix}$$

1. Jeżeli $H > 0$, to funkcja f ma w punkcie P ekstremum lokalne właściwe:
   (a) minimum, gdy $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P) > 0$,
   (b) maksimum, gdy $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P) < 0$.
2. Jeżeli $H < 0$, to funkcja f nie ma w punkcie P ekstremum, ma natomiast punk siodłowy.
3. Jeżeli $H = 0$, to sprawa istnienia ekstremum jest nierozstrzynięta.

Szukanie ekstremów warunkowych

Niech $G \subseteq \mathbb{R}^N$ będzie otwartym otoczeniem punktu a, funkcja $f\colon G \to \mathbb{R}$ oraz funkcje $g\colon G \to \mathbb{R}$, mają ciągłe pierwsze pochodne cząstkowe, a ponadto $\nabla f(a), \nabla g(a) \neq 0$. Wówczas, jeżeli f ma w punkcie a ekstremum pod warunkiem $g(a) = 0$, to istnieje taka liczba rzeczywista λ, że funkcja $L\colon G \to \mathbb{R}$ określona wzorem

$$L(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) - \lambda g(\mathbf{x}),\ \mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_N) \in G$$

spełnia warunek

$$\frac{\partial L}{\partial x_i}(a) = 0, \quad \text{dla } i = 1, \ldots, N.$$

Załóżmy dodatkowo, że f i g mają ciągłe drugie pochodne cząstkowe. Wówczas, jeżeli dla każdego wektora $\mathbf{h} = (h_1, \ldots, h_N) \neq 0$ takiego, że

$$\sum_{j=1}^{N} \frac{\partial g}{\partial x_j}(a) h_j = 0,$$

zachodzi

$$\mathrm{d}^2 L(\mathbf{x})\mathbf{h} > 0,$$

to funkcja f ma w punkcie a lokalne minimum przy warunku $g = 0$, a jeżeli

$$\mathrm{d}^2 L(\mathbf{x})\mathbf{h} < 0,$$

dla $\mathbf{h}$ jak uprzednio, to f ma w punkcie a lokalne maksimum przy warunku $g = 0$.

Przykłady

1.

$$f(x,y) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}, & \text{gdy } x^2+y^2 \neq 0, \\ 0, & \text{gdy } x = y = 0. \end{cases}$$

Zbadamy różniczkowalność (w sensie Frécheta) funkcji f w punkcie $(0,0)$. Mamy

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{e^{-\frac{1}{h^2}}-0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} e^{-\frac{1}{h^2}} = 0. \end{aligned}$$

Analogicznie $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$. Jeżeli funkcja f jest różniczkowalna w $(0,0)$, to (na mocy twierdzenia 2):

Jest to oczywiste ze względu na symetrię w definicji f.

$$\mathrm{d}f(0,0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\,\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\,\mathrm{d}y = 0.$$

Inaczej mówiąc,

$$\mathrm{d}f(0,0)(h,k) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)h + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)k = 0, \quad \text{dla } (h,k) \in \mathbb{R}^2.$$

Musimy sprawdzić, czy

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(0+h,0+k) - f(0,0) - \mathrm{d}f(0,0)(h,k)}{\|(h,k)\|} = 0.$$

Ponieważ $f(0,0) = 0$, $\mathrm{d}f(0,0)(h,k) = 0$, to mamy

$\|(h,k)\| = \sqrt{h^2+k^2}$

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{1}{\sqrt{h^2+k^2}} e^{-\frac{1}{h^2+k^2}}. \tag{3}$$

Zauważmy, że gdy $h,k \to 0$, to $t = \frac{1}{\sqrt{h^2+k^2}} \to \infty$, zatem prawa strona równania (3) jest równa $\lim_{t\to\infty} te^{-t^2} = 0$. Pokazaliśmy w ten sposób, że funkcja f jest różniczkowalna w punkcie $(0,0)$ i jej różniczka Frécheta w tym punkcie jest tożsamościowo równa zero: $\mathrm{d}f(0,0) \equiv 0$. (Tzn. $\mathrm{d}f(0,0)(h,k) = 0$ dla dow. $(h,k) \in \mathbb{R}^2$!)

Zwróćmy uwagę, że stąd wynika też, że f. f jest ciągła w punkcie $(0,0)$!

2. Niech

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{gdy } x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & \text{gdy } x=y=0.\end{cases}$$

Funkcja f jest ciągła i ma w otoczeniu punktu $(0,0)$ skończone pochodne cząstkowe, ale **nie** jest różniczkowalna w punkcie $(0,0)$.

Aby sprawdzić, że funkcja f jest ciągła, weźmy dowolny ciąg $(x_n,y_n)\to(0,0)$. Niech $a_n=\max\{|x_n|,|y_n|\}$, $n\in\mathbb{N}$. Wtedy, jak łatwo sprawdzić, $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$. Mamy

$$0\leqslant\left|\frac{x_ny_n}{\sqrt{x_n^2+y_n^2}}\right|\leqslant\frac{a_n^2}{\sqrt{a_n^2}}=a_n\xrightarrow{n\to\infty}0,$$

a więc $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n,y_n)=0=f(0,0)$. To oznacza, że

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0=f(0,0),$$

wobec dowolności wyboru ciągu (x_n,y_n), $n\in\mathbb{N}$.

Mamy $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{h\cdot 0}{\sqrt{h^2+0^2}}=0$ i analogicznie $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$. Zatem, jeżeli funkcja f jest różniczkowalna w sensie Frécheta w p. $(0,0)$, to $\mathrm{d}f(0,0)=0$. Badamy granicę postaci

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{f(0+h,0+k)-f(0,0)-\mathrm{d}f(0,0)}{\|(h,k)\|}=0.$$

Powyższa granica (wstawiamy $\mathrm{d}f(0,0)=0$, $f(0,0)=0$) ma postać

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{\frac{hk}{\sqrt{h^2+k^2}}-0-0}{\sqrt{h^2+k^2}}=\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{hk}{h^2+k^2}.$$

Jeżeli rozważymy ciąg $(h_n,k_n)=(\frac{1}{n},\frac{1}{n})$, to okaże się, że nie może być ona równa zero, gdyż $\lim\limits_{n\to 0}\frac{h_nk_n}{h_n^2+k_n^2}=\frac{1}{2}$. Dodatkowo, jeżeli rozpatrzymy np. ciąg $(h_n,k_n)=(\frac{1}{n},\frac{1}{n^2})$, to zobaczymy, że granica ta w ogóle nie istnieje.

Pokazaliśmy, że funkcja f nie jest różniczkowalna w p. $(0,0)$.