Zbiór przyjaznych zadań z analizy matematycznej

Ziemowit Wójcicki

18 stycznia 2021

1. Rozwiązać w liczbach rzeczywistych

$$x^5 - x^4 - x + 1 = 0$$

2. Podać dziedzinę, przeciwdziedzinę następujących funkcji oraz naszkicować ich wykresy

$$y = \sqrt{2x^2 + 5x - 3}$$

$$y = \sin(\arccos x)$$

3. Czy funkcja f określona na zbiorze liczb rzeczywistych dana wzorem

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x+1}{x-1} & \text{dla } x \neq 1, \\ 0 & \text{dla } x = 1, \end{cases}$$

jest funkcją róznowartościową? Czy jest funkcją na $\mathbb{R}$?

4. Zbadać parzystość funkcji $\operatorname{sinc}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (tzw. funkcji Bessela), danej wzorem

$$\operatorname{sinc}(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & \text{dla } x \neq 0, \\ 1 & \text{dla } x = 0. \end{cases}$$

5. Zbadać parzystość funkcji

$$f(x) = \sin x \cdot \frac{4^x + 1}{1 - 4^x}$$

6. Narysować wykres funkcji $x \mapsto |\sin x| + |\cos x|$ i zbadać, czy jest parzysta bądź nieparzysta oraz czy jest okresowa - jeśli tak to wyznaczyć jej okres bazowy.

7. Udowodnić, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzi

$$\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{2n}{2n+1}$$

8. Udowodnić prawdziwość Tożsamości Abela:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i = \sum_{i=1}^{n-1} \left((a_i - a_{i+1}) \sum_{j=1}^{i} b_j \right) + a_n \sum_{i=1}^{n} b_i$$

9. Udowodnić prawdziwość Tożsamości Lagrange'a:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} b_i^2 \quad - \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} (a_i b_j - a_j b_i)^2.$$

10. Udowodnić prawdziwość Tożsamości Czebyszewa:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{i=1}^{n} b_i = n \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i b_i - \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} (a_i - a_j)(b_i - b_j).$$

11. Obliczyć sumę

$$\sum_{i=1}^{10} \sum_{j=1}^{10} \sum_{k=1}^{10} \min\{i, j, k\}.$$

12. Obliczyć sumę

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \min\{i, j\}.$$

13. Udowodnić, że jeżeli $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest funkcją addytywną (tzn. $f(x+y) = f(x) + f(y)$ dla dow. $x, y \in \mathbb{R}$), to

$$\forall_{n\in\mathbb{N}} \forall_{x_1,\ldots,x_n\in\mathbb{R}}.\ f\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)$$

14. Udowodnić, że

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},\ n \in \mathbb{N}$$

15. Udowodnić, że dla każdej liczby naturalnej n spełniona jest nierówność $n! \geqslant 2^{n-1}$.

16. Udowodnić, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$:

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2n-1)^2 = \frac{n(4n^2-1)}{3}.$$

17. Udowodnić, że

$$\frac{1}{n}\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) < \frac{1}{n\sqrt{n}},\ n \in \mathbb{N}$$

18. Udowodnić, że dla dowolnych liczby rzeczywistych a i b, $a \neq b$ oraz liczby naturalnej n zachodzi

$$a^n + a^{n-1}b + \ldots + ab^{n-1} + b^n = \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a-b}$$

19. Udowodnić, że dla dowolnej liczby rzeczywistej $x > -1$ i dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzi następująca *nierówność Bernoulliego*

$$(1+x)^n \geqslant 1 + nx$$

20. Udowodnić, że
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}} = \sqrt{n+1} - 1$$

21. Udowodnić, że $(1+2+\ldots+n)^2 = 1^3 + 2^3 + \ldots + n^3$.

22. Udowodnić, że zbiór liczb naturalnych i zbiór liczb całkowitych są równoliczne.

23. Udowodnić, że zbiór $\mathbb{N}$ oraz zbiór
$$\left\{\frac{1}{2n-1} : n \in \mathbb{N}\right\}$$
są równoliczne.

24. Udowodnić, że zbiory $\left\{\frac{1}{n+1} : n \in \mathbb{N}\right\}$ i $\left\{\frac{1}{n+2} : n \in \mathbb{N}\right\} \cup \mathbb{N}$ są równoliczne.

25. Udowodnić, że jeżeli A jest zbiorem nieskończonym oraz S jest skończonym podzbiorem zbioru A, to zbiór dopełnienie zbioru S względem zbioru A jest zbiorem nieskończonym.

0.1 Ciągi

1. Pokazać, że następujące twierdzenia są równoważne

   Twierdzenie. *Każdy ograniczony z góry podzbiór zbioru liczb rzeczywistych ma kres górny.*

   Twierdzenie. *Każdy rosnący i ograniczony z góry ciąg liczb rzeczywistych jest zbieżny.*

2. Wyznaczyć kresy następujących zbiorów:
$$A = \left\{x \in \mathbb{R} : x^2 < 2\right\}$$
$$B = \left\{1 + \frac{(-1)^n}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$$
$$C = \left\{\frac{n+1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$$
$$D = \left\{\sqrt{2 - \frac{1}{n^3}} + \sqrt{2 + \frac{1}{n^3}} : n \in \mathbb{N}\right\}$$

3. Obliczyć następujące granice
$$(1)\ \lim_{n\to\infty} \frac{n^4 + 2n^2 + 4}{3n^3 + n^2 + n + 1}$$
$$(2)\ \lim_{n\to\infty} \frac{n^3 + \sqrt{2}n^2}{n^4 + 2}$$
$$(3)\ \lim_{n\to\infty} \frac{2n^3 + 7n + 4}{\sqrt{5}n^3 + n^2 + 3}$$
$$(4)\ \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{1}{3}\right)^n + 7^n + 13}$$

(5) $\lim_{n\to\infty} \frac{2^n + 4^n}{5^n + 3^n}$

(6) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{5 \cdot 2^n + 3 \cdot 7^n}$

(7) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3 \cdot 7^n + \sin n}$

(8) $\lim_{n\to\infty} \frac{n \sin n!}{n^2 + 1}$

(9) $\lim_{n\to\infty} \frac{(2n+1)^3(3n+1)^3}{(6n^2+2n+1)^4}$

(10) $\lim_{n\to\infty} \frac{7n^2 - 4n + 3}{\sqrt{n^4 - 2n} + \sqrt[3]{n^2+1}}$

(11) $\lim_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n}$

(12) $\lim_{n\to\infty} \frac{\sin n}{2n^2}$

(13) $\lim_{n\to\infty} \frac{\sin 7n}{n}$

(14) $\lim_{n\to\infty} (n-1) \sin\left(\frac{1}{n-1}\right)$

(15) $\lim_{n\to\infty} \frac{\sin n}{3n}$

(16) $\lim_{n\to\infty} \frac{\sin 3n}{4n}$

(17) $\lim_{n\to\infty} \frac{\tan 5n}{n}$

4. Udowodnić, że dla dowolnego ciągu $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} \leqslant \liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} \leqslant \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} \leqslant \limsup_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$$

5. Obliczyć

$$\lim_{n\to\infty} n(\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2-1})$$

6. Obliczyć

$$\lim_{n\to\infty} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{a}{n} \\ \frac{a}{n} & 1 \end{bmatrix}^n$$

gdzie $a \in \mathbb{R}$.

7. Udowodnić, że

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right) = e^a$$

8. Obliczyć

$$(a)\ \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{4-3n^2}\right)^{9n^2+37n}$$

$$(b)\ \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{4-3n^2}\right)^{7n+2}$$

$$(c)\ \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2+n^2}{n^2}\right)^{n^2}$$

$$(d)\ \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2}{n^2+1}\right)^{n}$$

$$(e)\ \lim_{n\to\infty}\left(n\cdot\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)$$

9. Obliczyć

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$$

10. Obliczyć

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-\arctan n}{n+\arctan n}\right)^{\ln 2^n}$$

11. Udowodnić, że jeśli ciąg liczb dodatnich jest *podaddytywny*, tzn. taki że $a_{n+m}\leqslant a_n+a_m$ dla $n,m=1,2,3,\ldots$ to ciąg $\frac{a_n}{n}$ jest zbieżny.

Rozwiązanie.

Niech $s=\inf\limits_{m\in\mathbb{N}}\frac{a_m}{m}$. Wykażemy, że $\lim\limits_{m\to\infty}\frac{a_m}{m}=s$.

Najpierw łatwo indukcyjnie pokazujemy, że dla dowolnych $n,k\in\mathbb{N}$ jest $a_{k\cdot n}\leqslant k\cdot a_n$.

Ustalmy $\varepsilon>0$. Oczywiście dla każdego $n\in\mathbb{N}$ mamy $\frac{a_m}{m}\geqslant s$, zatem pozostaje wykazać, że od pewnego miejsca jest $\frac{a_m}{m}\leqslant s+\varepsilon$. Weźmy więc $n\in\mathbb{N}$ spełniające nierówność $\frac{a_n}{n}\leqslant s+\varepsilon$ i niech $A=\max\{a_r:0\leqslant r<n\}$ (przy czym przyjmujemy, że $a_0=0$). Dowolne $m\in\mathbb{N}$ możemy przedstawić w postaci $m=k\cdot n+r$, gdzie $k\in\mathbb{N}i0\leqslant r<n$, a następnie oszacować: $\frac{a_m}{m}=\frac{a_{k\cdot n+r}}{k\cdot n+r}\leqslant\frac{k\cdot a_n+a_r}{k\cdot n}=\frac{a_n}{n}+\frac{a_r}{k\cdot n}\leqslant s+\varepsilon+\frac{A}{k\cdot n}$.

Jeśli m jest dostatecznie duże, to składnik $\frac{A}{k\cdot n}$ staje się mniejszy od ε, a wtedy: $\frac{a_m}{m}\leqslant s+2\varepsilon$, co kończy dowód. □

12. Udowodnić, że jeżeli $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest ciągiem *podmultiplikatywnym* (tzn. $\forall_{m,n\in\mathbb{N}.}\ a_{n+m}\leqslant a_n\cdot a_m$) oraz $a_n\geqslant 0, a_n\in\mathbb{R}, n\in\mathbb{N}$, to ciąg $(\sqrt[n]{a_n})_{n\in\mathbb{N}}$ jest zbieżny oraz

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\inf\{\sqrt[n]{a_n}: n\in\mathbb{N}\}.$$

13. Ustalmy dowolny zbiór $A\subset\mathbb{R}$ i liczbę rzeczywistą G. Udowodnić, że jeżeli dla każdego $a\in A$ zachodzi $a\leqslant G$ oraz istnieje taki ciąg $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wyrazów zbioru A, że $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=G$, to $G=\sup A$.
Sformułować i udowodnić analogiczne twierdzenie dla kresu dolnego.

14. Wyznaczyć kresy następujących zbiorów:

$$M = \left\{ \frac{n^2+2n-3}{4n^3} \colon n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$N = \left\{ \frac{7n^2+3n-12}{2n^2+3} \colon n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$K = \left\{ \frac{1}{x} \sin x \colon x > 0 \right\}$$

$$S = \{ x \sin x \colon x \geqslant 0 \}$$

$$F = \{ \sqrt[n]{n} \colon n \in \mathbb{N} \setminus \{1\} \}$$

$$G = \left\{ \frac{m}{n} \colon m, n \in \mathbb{N} \right\}$$

Rozwiązanie. Zbiory M i N wymagają jedynie umiejętności obliczania prostych granic oraz twierdzenia z poprzedniego zadania. Dla zbioru K podobnie: potrzebujemy dodatkowo wzorów $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$ oraz $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, liczymy granice funkcji i uogólniamy wnioski z poprzedniego zadania na funkcje (def. ciągowa Heinego granicy funkcji).
Zbiór F: $\sup\{ \sqrt[n]{n} \colon n \in \mathbb{N} \setminus \{1\} \} = \sqrt[3]{3}$, $\inf\{ \sqrt[n]{n} \colon n \in \mathbb{N} \setminus \{1\} \} = 1$.
Wyznaczymy kresy zbioru G. Najmniejszą liczbą naturalną jest 0 oraz $G \subseteq \mathbb{N}$. Zauważmy, że dla $m = 0$ i $n > 0$ mamy $0 \in G$ zatem $0 = \inf G$.
Dla dowolnych $m, n \in \mathbb{N}$ jeśli $m < n$, to $\frac{m}{n} < 1$. Jedynka jest zatem *ograniczeniem* górnym zbioru A. Ustalamy dowolne $\varepsilon > 0$ i szukamy takich $m, n \in G$, żeby było $\frac{m}{n} > 1 - \varepsilon$. Ponownie możemy wziąć dowolne $n \in \mathbb{N}$ i tak dobrać m, że $m > n \cdot (1-\varepsilon)$. Starczy przyjąć $m = \lfloor n(1-\varepsilon) \rfloor + 1$ (jest to czywiście pewna liczba naturalna, spełniająca porządane włanośći[1]). □

15. Obliczyć granicę ciągu $\left(\frac{n^2+2}{(3n+2)^2}, \frac{1}{n} \right)_{n\in\mathbb{N}}$.

16. Obliczyć granice ciągów danych następującymi równaniami rekurencyjnymi

$$(a) \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_1 = 1 \\ x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + x_{n-1}) \text{ dla } n > 1 \end{cases}$$

$$(b) \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_1 = 1 \\ x_{n+1} = \frac{2}{3}x_n + \frac{1}{3}x_{n-1} \text{ dla } n > 1 \end{cases}$$

$$(c) \begin{cases} x_1 = 4 \\ x_{n+1} = \frac{2}{3}x_n + 2 \text{ dla } n > 1 \end{cases}$$

[1] W ogólności $\lceil x \rceil - 1 < x < \lfloor x+1 \rfloor$ dla $x \in \mathbb{R}$ (ćwiczenie)

17. Zbadać zbieżność ciągu zadanego równaniem rekurencyjnym

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = a_n + \frac{1}{2a_n} \qquad \text{dla } n > 1 \end{cases}$$

18. Jaka jest wartość wyrażenia $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots}}}$?

19. Obliczyć następujące granice, jeśli istnieją. W przeciwnym wypadku podać granice jednostronne

$$(a) \lim_{x\to -2} \frac{x+2}{x^3+4x^2+4x}$$

$$(b) \lim_{x\to 3} \frac{x^3-3x^2+x-3}{x-3}$$

$$(c) \lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x}$$

$$(d) \lim_{x\to -1} \frac{x^2-1}{x+1}$$

$$(e) \lim_{x\to -1} \frac{x^2-1}{|x+1|}$$

$$(f) \lim_{x\to 2} \frac{2x^2-3x-2}{x^2-x-2}$$

$$(g) \lim_{x\to 1} \frac{-3x^2+x+2}{1-x}$$

$$(h) \lim_{x\to \infty} \frac{5x^3-2x+7}{2x^3+7x^2-x+1}$$

$$(i) \lim_{x\to \infty} (\sqrt[3]{x^3+4x^2}-x)$$

20. Udowodnić następujące

Twierdzenie (Stolza)**.** *Jeżeli* $x_n \to \infty$, $y_n \to \infty$ *oraz istnieje* $N \in \mathbb{N}$ *tak, że* $y_{n+1} > y_n, n > N$, *to*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}},$$

o ile granica po prawej stronie istnieje (skończona lub nie).

21. Pokazać, że $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1^p+2^p+\ldots+n^p}{n^{p+1}} = \frac{1}{p+1}$, $p \in \mathbb{N}$.

22. Udowodnić, że

$$\text{jeżeli } \lim_{n\to\infty} a_n = g, \text{ to } \lim_{n\to\infty} \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} = g.$$

23. Udowodnić, że

$$\text{jeżeli dla każdego } n \in \mathbb{N}, a_n \geqslant 0 \text{ oraz } \lim_{n\to\infty} a_n = g, \text{ to } \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_n} = g,$$

1 Funkcje jednej zmiennej i funkcje wektorowe

1.1 Ciągłość, ciągłość jednostajna

1. Udowodnić, że każda funkcja spełniająca warunek Lipschitza jest jednostajnie ciągła.

2. Udowodnić, że następujące funkcje są ciągłe

   $(a)\, w\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ w(x) = x^n + x^{n-1} + \dots + x^2 + x^1 + 1$

   (b) $\sin\colon \mathbb{R} \to [-1, 1]$

3. Czy funkcja Bessela z zadania 4 jest ciągła w zerze?

4. Zbadać ciągłość funkcji $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ określonej następująco

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{\sin^2 x}}{x} & \text{dla } x \neq 0; \\ 1 & \text{dla } x = 0. \end{cases}$$

5. Zbadać ciągłość funkcji danej równaniem $y = \operatorname{sgn} \sin \pi x$.

6. Zbadać, że następujące funkcje mają własnośc Darboux ale nie są ciągłe

   (a) $f\colon [-1, 1] \to [1, 1]$ dana wzorem

$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & \text{dla } x \neq 0; \\ 0 & \text{dla } x = 0. \end{cases}$$

   (b) $g\colon [-1, 1] \to \mathbb{R}$ dana wzorem

$$g(x) = \begin{cases} -x, & \text{dla } x \in [-1, 0], \\ x + 1 & \text{dla } x \in (0, 1]. \end{cases}$$

7. Udowodnić, że równanie $e^x - x^3 = 0$ ma co najmniej jedno rozwiązanie w przedziale $[-1, 1]$

8. Udowodnić, że równanie $e^x \sin x - 2x = 0$ ma co najmniej jedno rozwiązanie w przedziale $[\frac{\pi}{2}, \pi]$

9. Udowodnić, że funkcja dirichleta $\delta\colon \mathbb{R} \to \{1, 0\}$ dana wzorem

$$\delta(x) = \begin{cases} 1 \text{ dla } x \in \mathbb{Q}; \\ 0 \text{ dla } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

   nie jest ciągła w żadnym punkcie swojej dziedziny.

10. Udowodnić, że funkcja $D\colon \mathbb{R} \to \{1, 0\}$

$$D(x) = x\delta(x)$$

   jest ciągła w zerze i tylko w zerze.

11. Zbadać ciągłość funkcji danej równaniem $f(x) = x^2 - x\lfloor x \rfloor$.

12. Czy funkcja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ określona następująco

$$f(x) = \frac{x}{1 + |x|}$$

   jest jednostajnie ciągła na $\mathbb{R}$?

13. Czy istnieje funkcja $f\colon [a, b] \to \{a, b\}$ ciągła i taka, że $f(a) = a$ oraz $f(b) = b$.

1.2 Różniczkowanie, ciągłość i różniczkowalność

1. Obliczyć pochodne funkcji danych następującymi wyrażeniami

    $(a)\ y = \ln x \cdot \tan x$

    $(b)\ y = \dfrac{\sin x}{\ln x}$

    $(c)\ y = \dfrac{\ln x}{\tan x}$

    $(d)\ y = \ln(\tan x)$

    $(e)\ y = \tan(\ln x)$

    $(f)\ y = \tan(x \ln x)$

    $(g)\ y = \ln(x \tan x)$

    $(h)\ y = \ln(\sin^3 e^x)$

    $(i)\ y = x^x$

    $(j)\ y = e^x \ln x$

    $(k)\ y = \sin e^x$

    $(l)\ y = \arcsin(x - x^2)$

    $(m)\ y = \dfrac{x}{x+3}$

    $(n)\ y = \dfrac{\cos x}{\ln x}$

    $(o)\ y = \sqrt[3]{\dfrac{1+x^3}{1-x^3}}$

    $(p)\ y = \sin\cos x$

    $(r)\ y = \dfrac{x \ln x}{\cos x}$

2. Zbadać przebieg zmienności funkcji $x \mapsto \dfrac{x}{\ln x}$.

3. Niech f będzie funkcją daną wzorem:

    $$f(x) = \begin{cases} e^x, & \text{gdy } x \leqslant 0; \\ 1 + x, & \text{gdy } x > 0. \end{cases}$$

    Wyznaczyć dziedzinę i zbiór wartości funkcji f oraz udowodnić, że jest ciągła i różniczkowalna w całej dziedzinie.

4. Obliczyć pochodne (dla argumentów, dla których istnieją) dla następujących funkcji oraz wyznaczyć ich dziedziny i narysować ich wykresy

    $$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = |x|$$

    $$g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = |\sin x|$$

5. Obliczyć pochodną funkcji $x \mapsto |\log x|$

6. Korzystając z reguły de l'Hospitala obliczyć następujące granice

$$(a)\ \lim_{x\to 0}\frac{x-\arctan x}{x^3}$$

$$(b)\ \lim_{x\to 2}\frac{3x^2-12x+12}{x-2}$$

$$(c)\ \lim_{x\to -1}\frac{x^4+3x^2-4}{x+1}$$

$$(d)\ \lim_{x\to +\infty}\frac{x^4}{e^{x^2}}$$

$$(e)\ \lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{x}$$

$$(f)\ \lim_{x\to\ 0}\frac{\sin x}{x}$$

7. (a) Udowodnić, że dla dowolnych ciągów $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$:
jeśli $a_n\to 0,\ b_n\to\infty$, to

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=0$$

(b) Czy do granicy $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\ln x}$ trzeba (i można?) zastosować regułę de l'Hospitala?

8. Narysować wykresy funkcji

$$w(x)=x^3-9x^2+27x+3$$

$$f(x)=\frac{x^2+1}{(x+1)^2}$$

$$g(x)=x^3\ln(x)$$

$$h(x)=\frac{2x}{x+1}+x^2$$

9. Zbadać wszystkie asymptoty funkcji $f(x)=xe^{\frac{x}{x+1}}$

10. Zbadać przebieg zmienności i naszkicować wykresy następujących funkcji

$$f(x)=\frac{x}{x^2-1}$$

$$g(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$h(x)=\frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}$$

$$k(x)=\frac{2x^2}{x-3}$$

$$p(x)=x\sqrt{4x-x^2}$$

$$s(x)=\sin^2 x$$

$$t(x)=\frac{x^4}{2-x^3}$$

11. Obliczyć

$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sin x \cdot \ln x)$$

12. Obliczyć

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} x^{x^x}$$

13. Zbadać ciągłość funkcji w punkcie $x = 1$ dla funkcji zdefiniowanej w następujący sposób

$$f(x) = \begin{cases} -(x-1)^2 & \text{dla } x \in (-\infty, 1] \\ \sqrt{-x^2+6x-8} & \text{dla } x \in [2, 4] \end{cases}$$

14. Wykazać, że każde ciągłe odzworowanie f przedziału $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ w siebie ma co najmniej jeden punkt stały, tj. punkt $x \in [a, b]$ taki, że $f(x) = x$.

15. Udowodnić następujące

Twierdzenie (Rolle'a)**.** *Niech funkcja $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą w przedziale $[a, b]$, różniczkowalną w przedziale (a, b). Jeżeli $f(a) = f(b)$, to istnieje taki punkt $\xi \in (a, b)$, że $f(\xi) = 0$.*

16. Zastosować twierdzenie Rolle'a do funkcji $f(x) = 2x^2 - 8x + 12$.

17. Wykazać, że równanie $x^5 + 10x + 3 = 0$ ma dokładnie jeden pierwiastek rzeczywisty.

18. Znaleźć

$$\sup_{x\in[1,4]} \left\{x^3 - 6x^2 + 11x - 6 \colon x \in \mathbb{R}\right\}$$

19. Jakiej wielkości kwadraty trzeba wyciąć z prostokątnego arkusza kartonu o wymiarach 30×24, aby pojemność otrzymanego po sklejeniu pudełka była największa?

20. Udowodnić, że

$$\frac{b-a}{b} \leqslant \ln\frac{b}{a} \leqslant \frac{b-a}{a}$$

21. Udowodnić, że

$$\frac{x}{1+x} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$$

22. Równanie $e^x = x + 1$ ma oczywiste rozwiązanie $x = 0$. Wykazać, że jest to jedyne rozwiązanie.

23. Udowodnić, że jeżeli $f, g\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ są ciągłe na przedziale $[a, b]$, różniczkowalne we wnętrzu tego przedziału oraz $f(a) = f(g)$, $f(b) = g(a)$, to istnieje taki punkt $c \in (a, b)$, że $f'(c) = -g'(c)$.

24. Sprawdzić, korzystając z twierdzenia Darboux, czy równanie $x \ln x = 2$ ma rozwiązanie.

25. Dla jakich wartości parametru a funkcja f dana wzorem

$$f(x) = \begin{cases} \left(\sin\frac{1}{x}\right) \cdot (\sqrt{x^2+1} - 1)^a, & \text{dla } x \neq 0, \\ 0, & \text{dla } x = 0. \end{cases}$$

jest różniczkowalna? A ogólniej: klasy C^n?

1.3 Zadania różne I

1. Niech $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą, okresową i różną od stałej a $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcją ciągłą. Wykazać, że istnieje $x_0 \in \mathbb{R}$ takie, że $f(g(x_0)) = f(x_0)$.

2. Udowodnić, że jeżeli funkcja f jest ciągła na półprostej $[a, \infty)$ i ma skończoną granicę $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ to funkcja ta jest ograniczona na $[a, \infty)$.

3. Udowodnić, że jeżeli $f\colon (a, b) \to \mathbb{R}$ jest funkcją różniczkowalną, to f spełnia warunek Lipschitza ze stałą Lipschitza L wtedy i tylko wtedy, gdy jej pochodna jest ograniczona przez L.

4. Udowodnić, że jeżeli $f\colon [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ jest ciągła i ma skończoną granicę $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$, to jest jednostajnie ciągła.

   Rozwiązanie. Przyjmijmy, że $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = g \in \mathbb{R}$. Ustalmy dowolny $\varepsilon > 0$. Istnieje $A > 0$ takie, że

   $$x \geqslant A \Rightarrow |f(x) - g| < \frac{\varepsilon}{2},\ x \in [0, +\infty).$$

   Funkcja f jest ciągła w $[0, +\infty)$. więc istnieje $\lambda_1 > 0$ takie, że

   $$\forall_{x\in[0,+\infty).}\ |x - A| < \lambda_1 \Rightarrow |f(x) - f(A)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

   Dla $x, y \in [0, A]$ funkcja $f_{[0,A]}$ jest jednostajnie ciągła, jako f. ciągła określona na zbiorze zwartym. Zatem istnieje takie $\lambda_2 > 0$, że

   $$\forall_{0\leqslant x,y\leqslant A.}\ |x - y| < \lambda_2 \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

   Przyjmijmy $\delta = \min\{\lambda_1, \lambda_2\}$. Wtedy jeżeli $|x - y| < \delta$, to:

   i) dla $x, y \leqslant A$: $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$ (gdyż $|x - y| < \delta \leqslant \lambda_2$).

   ii) dla $x, y \geqslant A$: $|f(x) - f(y)| \leqslant |f(x) - g| + |g - f(y)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

   iii) dla $x < A$ i $y \geqslant A$: mamy następujące oszacowania: $|x - A| < |x - y|$ oraz $|y - A| < |x-y|$ stąd $|x-A| < \delta \leqslant \lambda_1$ i podobnie $|y-A| < \lambda_1$. Z określenia λ_1 oraz z nierówności trójkąta szacujemy: $|f(x) - f(y)| \leqslant |f(x) - f(A)| + |f(A) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

   Pokazaliśmy, że $\forall_{\varepsilon>0}\exists_{\delta>0}\forall_{x,y\in[0,+\infty).}|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$, czyli f jest jednostajnie ciągła. □

5. Udowodnić, że jeżeli funkcja f jest monotoniczna na przedziale (a, b) i ma w nim własność Darboux, to jest ciągła na (a, b).

6. Funkcję $f\colon (a, b) \to \mathbb{R}$ nazywamy *wypukłą*, gdy dla dowolnych $x, y \in (a, b)$ i $\lambda \in (0, 1)$ zachodzi $f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leqslant \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$. Uzasadnić, że każda funkcja wypukła jest ciągła.

7. Metodą kolejnych przybliżeń rozwiązać równania:

   (a) $2x + \sin x = 1$,

   (b) $x^3 + 5x^2 - 15x - 7 = 0$ dla $2,5 < x < 4$.

8. Niech $f(x) = \frac{\pi}{2} + x - \arctan x,\ x \in \mathbb{R}$. Pokazać, że dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}$ istnieje stała $\lambda < 1$, że $|f(x) - f(y)| \leqslant \lambda |x - y|$ ale odwzorowanie f nie ma punktu stałego na prostej $\mathbb{R}$.

9. Pokazać, że dla dow. $m \in \mathbb{N}$ równanie

$$x^m - (1+m)(1-x) = 0$$

ma w przedziale $(0, 1)$ dokładnie jedno rozwiązanie.

10. Obliczyć

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n^2+1} + \frac{1}{n^2+2} + \cdots + \frac{1}{n^2+n} \right)$$

11. Funkcja f spełnia warunek

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) + f'(x)) = 0.$$

Wykazać, że

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.$$

12. Niech $\lambda > 0$ będzie ustaloną liczbą rzeczywistą i $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest takim ciągiem liczb, że $\lim\limits_{n\to\infty} n x_n = \lambda$. Udowodnić, że wówczas $\lim\limits_{n\to\infty} \binom{n}{k} x_n^k (1-x_n)^{n-k} = e^{-\lambda} \dfrac{\lambda^k}{k!}$.

1.4 Całki i ich zastosowania

1. Obliczyć następujące antypochodne/całki (dowolnym sposobem)

(1) $\displaystyle\int x e^x \,\mathrm{d}x$

(2) $\displaystyle\int x^3 e^x \,\mathrm{d}x$

(3) $\displaystyle\int x^2 \sin x \,\mathrm{d}x$

(4) $\displaystyle\int \sin x \cos x \,\mathrm{d}x$

(5) $\displaystyle\int \operatorname{tg} x \,\mathrm{d}x$

(6) $\displaystyle\int \left(e^{4x} + \sqrt{e^x} \right) \mathrm{d}x$

(7) $\displaystyle\int \ln x \,\mathrm{d}x$

(8) $\displaystyle\int \log_a x \,\mathrm{d}x,\ a \in \mathbb{R}$

(9) $\displaystyle\int e^{ax} \,\mathrm{d}x,\ a \in \mathbb{R}$

(10) $\displaystyle\int \frac{2}{x^2} \,\mathrm{d}x$

(11) $\displaystyle\int \frac{1+x}{x} \,\mathrm{d}x$

(12) $\int x^5 e^{-x} \, \mathrm{d}x$

(13) $\int \frac{1}{x(1+\ln x)} \, \mathrm{d}x$

(14) $\int \frac{\cos x}{1+\sin x} \, \mathrm{d}x$

2. Udowodnić, że

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} \, \mathrm{d}x = \ln|f(x)| + C$$

3. Udowodnić, że

$$\int \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}} \, \mathrm{d}x = \sqrt{f(x)} + C$$

4. Udowodnić, że

$$\int f'(x) f(x) \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2} f^2(x) + C$$

5. Niech $g = f^{-1}$. Udowodnić, że

$$\int f(x) \, \mathrm{d}x = x f(x) - F(f(x)) + C_1, \text{ gdzie}$$

$$F(x) = \int g(x) \, \mathrm{d}x + C_2.$$

6. Obliczyć następujące całki funkcji wymiernych

(1) $\int \frac{2x}{(1+x)^2} \, \mathrm{d}x$

(2) $\int \frac{3}{4x^2 - 4x + 3} \, \mathrm{d}x$

(3) $\int \frac{2x+1}{x^2 - 7x + 6} \, \mathrm{d}x$

(4) $\int \frac{16x^3 + 6x^2 - 6x + 5}{4x^4 + 2x^3 - 3x^2 + 5x - 2} \, \mathrm{d}x$

(5) $\int \frac{6x^2 - 4x + 5}{x^3 - 2x^2 + x - 2} \, \mathrm{d}x$

(6) $\int \frac{2x^2 + 3}{(x+4)(x-3)} \, \mathrm{d}x$

(7) $\int \frac{2x^3 + 3x - 5}{x^2 + x - 6} \, \mathrm{d}x$

(8) $\int \frac{1}{(x+2)^3 (x-3)(x^2+1)} \, \mathrm{d}x$

(9) $\int \frac{x^2 + 2}{(x-1)(x+4)(x^2+3x+3)} \, \mathrm{d}x$

7. Wykazać, że

$$(a)\ \int \frac{\mathrm{d}x}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctan}\frac{x}{a} + C,\ \text{postawiając } x = a\operatorname{tg} t;$$

$$(b)\ \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C,\ \text{podstawiając } x = a\sin t;$$

$$(c)\ \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+k}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2+k}\right| + C,\ \text{podstawiając } \sqrt{x^2+k} = t - x;$$

$$(d)\ \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C,\ \text{stosując rozwinięcie}$$

$$\frac{1}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\cdot\frac{x+x+a-x}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a}\right).$$

8. Obliczyć następujące całki

(a) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-9}$

(b) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+49}$

(c) $\int \sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x$

(d) $\int \sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x$

(e) $\int x\sqrt{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x$

(f) $\int \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{x^2+1}$

(g) $\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{5-x^2}}$

(h) $\int \frac{\mathrm{d}x}{(1-x^2)\sqrt{1+x^2}}$

(i) $\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{3-x^4}}$

9. Obliczyć całki

$$(1)\ \int \frac{\ln^2 x + 3\ln x}{4x}\,\mathrm{d}x$$

$$(2)\ \int e^x \sin x\,\mathrm{d}x$$

$$(3)\ \int e^x \sin e^x\,\mathrm{d}x$$

$$(4)\ \int \frac{\mathrm{d}x}{x\ln x}$$

$$(5)\ \int \frac{\sin\ln x}{x}\,\mathrm{d}x$$

$$(6)\ \int (x^2+3x^5)\sin x\,\mathrm{d}x$$

(7) $\int \sin^3 \varphi \, \mathrm{d}\varphi$

(8) $\int x^4 \ln x \, \mathrm{d}x$

(9) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x}$

(10) $\int \frac{x^2+2}{(x-1)^2(x+2)(x^2+x+2)} \, \mathrm{d}x$

(11) $\int \frac{2x+3}{x^3+2x^2+2x-5} \, \mathrm{d}x$

(12) $\int \frac{y^2-3}{y^3+3y^2-4} \, \mathrm{d}y$

(13) $\int \frac{5x^3+2}{x^3-5x^2+4x} \, \mathrm{d}x$

(14) $\int \frac{x^3-2x+10}{(x-2)^2(2+4)(x^2+x+2)} \, \mathrm{d}x$

(15) $\int \frac{x^2+4-x}{x^4-3x^3+2x^2-4x+8} \, \mathrm{d}x$

(16) $\int \left(3\sin^2 x + 2^{\sin x}\right) \cos x \, \mathrm{d}x$

(17) $\int x\sqrt{1+x^2} \, \mathrm{d}x$

(18) $\int \sin^3 x \cos^4 x \, \mathrm{d}x$

(19) $\int \sin(3x)\cos(5x) \, \mathrm{d}x$

(20) $\int \frac{2\sin x}{\sqrt{4-\cos^2 x}} \, \mathrm{d}x$

(21) $\int \frac{2e^x \, \mathrm{d}x}{3e^x+1}$

(22) $\int \frac{x^4+1}{x^3-x^2+x-1} \, \mathrm{d}x$

(23) $\int \frac{x^2-1}{x^3+x^2+2x+2} \, \mathrm{d}x$

(24) $\int xe^{-x^2} \, \mathrm{d}x$

(25) $\int 2^y \sin y \, \mathrm{d}y$

(26) $\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{\arcsin x} \, \mathrm{d}x$

(27) $\int \frac{3x^2+x}{2x^3+x^2+2} \, \mathrm{d}x$

(28) $\int \frac{\cos x \, \mathrm{d}x}{1+\sin^2 x}$

(29) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\operatorname{tg} x \cos^2 x}$

(30) $\displaystyle\int \frac{\sin(2x)}{1-\sin^2 x}\ \mathrm{d}x$

(31) $\displaystyle\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{1+x^4}$

(32) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}\arcsin x}$

(33) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{-x^2+2x+3}}$

(34) $\displaystyle\int \frac{2\ln(x)\sin(\ln^2 x)}{x\cos(\ln^2 x)}\,\mathrm{d}x$

(35) $\displaystyle\int \operatorname{ctg} x \cdot \ln(\sin x)\,\mathrm{d}x$

(36) $\displaystyle\int \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x+3}}\,\mathrm{d}x$

(37) $\displaystyle\int \frac{2x}{1+x^2}\ \mathrm{d}x$

(38) $\displaystyle\int \sqrt{3x+1}\ \mathrm{d}x$

(39) $\displaystyle\int \frac{6x^2-2x\,\mathrm{d}x}{2\sqrt{x^3-x^2+3}}$

(40) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x}{2+x^2}$

(41) $\displaystyle\int \frac{\ln(\arctan x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$

(42) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}\,\mathrm{d}x$

(43) $\displaystyle\int \arcsin x\,\mathrm{d}x$

(44) $\displaystyle\int \frac{x^2+2x+1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$

(45) $\displaystyle\int \frac{3x+3}{\sqrt{3x^2+6x+1}}\,\mathrm{d}x$

(46) $\displaystyle\int \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}$

(47) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{e^x}}$

(48) $\displaystyle\int \frac{dx}{(\arcsin^2 x+1)\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$

(49) $\displaystyle\int e^x a^{e^x}\ \mathrm{d}x,\ a \in \mathbb{R}$

10. Obliczyć całki

$$(a) \int_0^3 [x] \, \mathrm{d}x$$

$$(b) \int_0^2 \max\{x, 1\} \, \mathrm{d}x$$

$$(c) \int_0^2 |x-1| \, \mathrm{d}x$$

11. Udowodnić, że jeżeli funkcja $f\colon [-a, a] \to \mathbb{R}$ jest funkcją nieparzystą, to

$$\int_{-a}^{a} f(x) \, \mathrm{d}x = 0.$$

12. Udowodnić, że jeżeli funkcja $f\colon [-a, a] \to \mathbb{R}$ jest funkcją parzystą, to

$$\int_{-a}^{a} f(x) \, \mathrm{d}x = 2 \int_0^a f(x) \, \mathrm{d}x.$$

13. Obliczyć pole powierzchni ograniczonej osią Ox i krzywą $y = x^3 - 12x^2 + 44x - 48$.

14. Obliczyć pole powierzchni ograniczonej krzywą $y = 2x^2 - 16x + 30$ oraz prostą $y = x - 4$.

15. Obliczyć całkę

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t) \, \mathrm{d}t$$

funkcji $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ gdzie $f(t) = (2t^2, \sin t, t)$

16. Obliczyć całkę

$$\int_1^2 f(x) \, \mathrm{d}x$$

gdzie $f\colon [1, +\infty) \to \mathbb{C}$, $f(x) = 2x^2 - i\frac{1}{x}$

17. Oblicz pole powierzchni ograniczonej krzywymi $y = \ln x$ oraz $y = \ln^2 x$.

18. Obliczyć pole obszaru ograniczonego krzywymi:

$$(x-1)^2 + y^2 = 1$$

$$x^2 + (y-1)^2 = 1$$

19. Obliczyć długość krzywej $x^2 + y^2 = a^2$.

20. Obliczyć długość krzywej $y = \sqrt{x}$, $0 \leqslant x \leqslant 1$.

21. Obliczyć długość łuku $y^2 = x^3$ odciętego linią $x = \frac{2}{3}$.

22. Obliczyć pole ograniczone krzywą $r = 2\sin(\varphi)$ dla $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

23. Obliczyć długość krzywej $y = 1 - \ln \cos x$, $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{4}$.

24. Obliczyć długość krzywej K zadanej parametrycznie $x = a\cos^3 t, y = a\sin^3 t$, $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

25. Obliczyć pole powierzchni ograniczonej krzywymi: $y = x^2 - x - 6$ i $y = -x^2 + 5x + 14$.

26. Obliczyć pole i objętość bryły obrotowej powstałej przez obrót krzywej funkcji $y = -x^2 + 2x$, gdzie $x \in [1, 4]$ dookoła osi Ox.

27. Obliczyć pole obszaru ograniczonego krzywą K określoną parametrycznie:

$$\begin{cases} x = 3t^2, \\ y = 3t - t^3, \quad t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

28. Obliczyć pole obszaru ograniczonego *Lemniskatą Gerona*, wyrażoną jako wykres równania $x^4 - x^2 + y^2 = 0$.

29. Obliczyć pole obszaru ograniczonego lemniskatą o równaniu $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$.

30. Obliczyć pole obszaru ograniczonego prostą $x = 0$ i łukiem cykloidy o równaniu:

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(t - \cos t), \quad t \in [0, 2\pi] \end{cases}$$

31. Obliczyć całkę

$$\int_{-3}^{3} x^2 \sin x \cos x \, \mathrm{d}x$$

32. Zbadać całkowalność funkcji Dirichleta

33. Udowodnić, że następująca funkcja $f\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$ jest niemalejącą, nieciągłą w całej dziedzinie funkcją całkowalną w sensie Riemanna

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ dla } x \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q}; \\ \frac{1}{q} \text{ dla } x = \frac{p}{q}, p, q \in \mathbb{N}, NWD(p, q) = 1; \\ 1 \text{ dla } x = 0. \end{cases}$$

34. Udowodnić, że

$$\int_{1}^{3} \frac{\ln x}{x} \, \mathrm{d}x \leqslant \frac{2}{e}$$

Rozwiązanie. Przyjmujemy $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ i korzystając z pochodnej f' sprawdzamy, że f osiąga maximum w punkcie $x = e \in [1, 3]$.

$$\int_{1}^{3} \frac{\ln x}{x} \, \mathrm{d}x \leqslant (3 - 1) \cdot \sup_{x \in [1,3]} \frac{\ln x}{x} = 2 \cdot \frac{\ln e}{e} = \frac{2}{e}.$$

□

35. Wykazać, że dla pewnego $y \in (0, \frac{\pi}{2})$ zachodzi

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x \, \mathrm{d}x = e^y$$

36. Znaleźć wszystkie funkcje f ciągłe i różniczkowalne takie, że

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) \quad \text{dla } a,b \in \mathbb{R}.$$

37. Niech $a > 0$ i $f\colon [0,a] \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą i ściśle rosnącą oraz $f(0) = 0$. Wykazać, że

$$\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^{f(a)} f^{-1}(y)\,\mathrm{d}y = af(a)$$

Rozwiązanie. Korzystając z twierdzenia o całkowaniu przez części otrzymujemy

$$\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x = xf(x)\big|_0^a - \int_0^a xf'(x)\,\mathrm{d}x = af(a) - \int_0^a f^{-1}(f(x))f'(x)\,\mathrm{d}x.$$

Podstawmy $y = f(x)$. Wtedy $\mathrm{d}y = f'(x)\,\mathrm{d}x$. Ponadto, gdy $x = 0$, to $y = f(0) = 0$ a gdy $x = a$, to $y = f(a)$. Stąd

$$\int_0^a f^{-1}(f(x))f'(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{f(a)} f^{-1}(y)\,\mathrm{d}y$$

i twierdzenie jest udowodnione. □

38. Niech $f\colon [0,\delta] \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą i ściśle rosnącą w przedziale $[0,\delta]$, $f(0) = 0$ oraz $a \in [0,\delta]$, $b \in [0, f(\delta)]$ będą dane. Udowodnić, że wówczas prawdziwa jest *nierówność Younga*:

$$\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^b f^{-1}(x)\,\mathrm{d}x \geqslant ab.$$

39. Obliczyć granicę

$$\lim_{x\to+\infty} \int_0^x \frac{f(t)}{x}\,\mathrm{d}t$$

wiedząc, że całka $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ jest zbieżna.

40. Niech f będzie funkcją ciągłą na przedziale $[1,\infty)$ oraz $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 2$. Wyznaczyć granicę

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}\int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

41. Udowodnić, że jeżeli $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest ciągłą funkcją taką, że dla każdego $x \in \mathbb{R}$

$$\int_0^1 f(xt)\,\mathrm{d}t = 0,$$

to $f = 0$, tzn. $f(x) = x$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$.

Rozwiązanie. Podstawmy $u = xt$, to wówczas $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = x$, czyli mamy

$$\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}u}{x}.$$

Ponadto $t=0$, to $u=0$ a gdy $t=1$, to $u=x$. Zatem

$$\int_0^1 f(xt)\,\mathrm{d}t = \int_0^x f(u)\frac{\mathrm{d}u}{x} = \frac{1}{x}\int_0^x f(u)\,\mathrm{d}u = 0,\ x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}.$$

$$F(x) := \int_0^x f(u)\,\mathrm{d}u = 0\cdot x = 0,\ \text{dla } x \neq 0.$$

Z ciągłości funkcji f i twierdzenia Newtona-Leibniza: $F'(x) = f(x), x \in (0,1]$. Mamy więc, że $f(x) = F'(x) = 0, x \in (0,1]$. Zatem $f(x) = 0$ dla $x \in [0,1]$, czyli $f = 0$. □

42. Niech f będzie ciągłą funkcją rzeczywistą, określoną na przedziale $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$, taką że

$$\int_a^b f(x)x^n\,\mathrm{d}x = 0 \text{ dla } n \in \{0,1,\ldots\}.$$

Pokazać, że $f(x) = 0$, $x \in [a,b]$.

43. Obliczyć

$$\int_1^n x^m \ln x\,\mathrm{d}x,\quad m,n \in \mathbb{N}.$$

44. Niech $f\colon [0,1] \to [0,\infty)$ jest ciągłą funkcją taką, że

$$f^2(t) \leqslant 1 + 2\int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x,\ t \in [0,1].$$

Udowodnić, że $f(t) \leqslant 1+t$ dla każdego $t \in [0,1]$.

Rozwiązanie. Zdefiniujmy funkcję pomocniczą wzorem $g(t) = 1 + 2\int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x, t \in [0,1]$. Z ciągłości funkcji i Zasadniczego Twierdzenia Rachunku Całkowego mamy, że $g'(t) = \left(1 + 2\int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x\right)' = 2f(t)$. Mamy

$$g'(t) = 2f(t) \leqslant 2\sqrt{1 + 2\int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x} = 2\sqrt{g(t)}.$$

Stąd zanotujmy dwie nierówności:

(a) $f(t) \leqslant \sqrt{g(t)},\ t \in [0,1]$,

(b) $\dfrac{g'(t)}{2\sqrt{g(t)}} \leqslant 1,\quad t \in [0,1]$.

Całkujemy nierówność (44b) obustronnie w granicach od 0 do t, $t \in [0,1]$:

$$\int_0^t \frac{g'(u)}{2\sqrt{g(u)}}\,\mathrm{d}u = \sqrt{g(t)} - \sqrt{g(0)} \leqslant \int_0^t \mathrm{d}u = u\big|_0^t = t.$$

(Porównaj zadanie 3.) Zauważmy też, że $g(0) = 1 + 2\int_0^0 f(x)\,\mathrm{d}x = 1 + 0 = 1$. Zatem dla $t \in [0,1]$:

$$\sqrt{g(t)} - \sqrt{g(0)} = \sqrt{g(t)} - 1 \leqslant t.$$

Czyli $\sqrt{g(t)} \leqslant t+1, t \in [0,1]$, ale z (44a) oznacza to, że

$$f(t) \leqslant 1+t, t \in [0,1].\qquad \textbf{c.b.d.o.}$$

□

45. Obliczyć całkę

$$\int_{-1}^{0} (x+1)e^{-x}\,\mathrm{d}x$$

46. Wykazać, że równanie funkcyjne $2f(t) - 2 = \int_0^1 \exp(t-s)\,f(s)\,\mathrm{d}x, t \in [0,1]$ ma dokładnie jedno rozwiązanie w przedziale $[0,1]$.

47. Niech $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie ciągła i okresowa o okresie $T > 0$. Udowodnić, że:

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f(nx)\,\mathrm{d}x = \frac{b-a}{T} \int_0^T f(x)\,\mathrm{d}x, \text{ dla dowolnych } a < b.$$

48. Udowodnić, że dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi równość

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{2}{\pi}} (2\sin x)^{2n}\,\mathrm{d}x = \binom{2n}{n}.$$

49. Ustalmy $a > 0$ i niech $f\colon [0,a] \to \mathbb{R}$ będzie funkcją klasy C^1. Udowodnić, że

$$\int_0^a \lfloor t \rfloor\,\mathrm{d}t = \lfloor a \rfloor f(a) - \sum_{k=1}^{\lfloor a \rfloor} f(k).$$

50. Obliczyć całkę

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{\ln x}{x-1}\,\mathrm{d}x$$

51. Obliczyć całkę

$$\int \frac{\ln(x+1)}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$$

52. Niech $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ będzie jest funkcją klasy C^1. Pokazać, że f jest wypukła wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\frac{1}{y-x} \int_x^y f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{f(x)-f(y)}{2},$$

dla każdych $x, y \in [a,b]$, $x \neq y$.

1.5 Szeregi i całki niewłaściwe

1. Wyznaczyć sumę szeregu

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

$$(b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{2(\sqrt{n}+\frac{1}{2})(\sqrt{n+1}+\frac{1}{2})}$$

$$(c)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(n+1)(n+2)}(n+1+\sqrt{n(n+2)})}$$

$$(d)\ \sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$$

$$(e)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$$

$$(f)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a}{(2n+3)(2n+5)} \text{ gdzie } a \in \mathbb{R}.$$

2. Zbadać zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\binom{n}{2}} \left(\frac{n^{100}}{2^n}\right)$$

3. Zbadać zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^3}$$

4. Zbadać zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} (x_n y_n)^{-2}$$

wiedząc, że $y_n, x_n \geqslant 0$, $x_{n+1} \leqslant x_n, n \in \mathbb{N}$ oraz $\lim_{n\to\infty} y_n = 0$.

5. Wykazać, że jeżeli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ jest zbieżny, to zbieżny bezwzględnie jest szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$$

6. Uzasadnić, że jeżeli $f\colon [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ jest ciągła i istnieje $M \in \mathbb{N}$ takie, że $|f(x)| \leqslant M$ dla każdego $x \geqslant 1$, to ze zbieżności szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ wynika zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot f(n).$$

7. Zbadać zbieżność szeregów

$$(a)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^n + 3^n}{6^n}$$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n+1)}{n}$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin\frac{1}{n}$

(f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n}$

(g) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$

(h) $\sum_{n=1}^{\infty} (1-\frac{1}{n})^n$

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[\pi]{n^3}}$

(j) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[e]{n^3}}$

(k) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$

(l) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+e^n}$

(m) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6^n+3^n}{9^n}$

(n) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin n|}{n\sqrt{n}}$

(o) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan n}{n^2+1}$

(p) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{1}{n} \operatorname{tg}\frac{1}{\sqrt{n}}$

8. Zbadać zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n a_{n+1}}$, gdzie $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest ciągiem arytmetycznym, o dodatnich wyrazach.

9. Zbadać zbieżność szeregu

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+e^{-n}}$$

10. Zbadać zbieżnosc całek niewłaściwych, w miarę możliwości - obliczyć

(a) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x}$

(b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}$

(c) $\displaystyle\int_{-2}^1 \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$

(d) $\displaystyle\int_0^2 \sqrt{x-x^2}\,\mathrm{d}x$

(e) $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x,\ \text{gdzie } a>0$

(f) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$

(g) $\displaystyle\int_0^1 \ln x\,\mathrm{d}x$

(h) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^3}\,\mathrm{d}x$

(i) $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{\ln(x+1)}\,\mathrm{d}x$

(j) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^x}{(1+e^x)^2}\,\mathrm{d}x$

(k) $\displaystyle\int_{-\infty}^1 e^x\,\mathrm{d}x$

(l) $\displaystyle\int_{-\infty}^0 xe^x\,\mathrm{d}x$

(m) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{e^x+x}\,\mathrm{d}x$

11. Obliczyć całkę

$$\int_1^{+\infty} \frac{x-1}{(1+x^2)(x+x^2)}\,\mathrm{d}x$$

12. Zbadać zbieżnosc w zależności od p całki

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x.$$

13. Pokazać, że

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^n}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2(n-1)} x\,\mathrm{d}x$$

14. Uzasadnić, że jeżeli całka niewłaściwa

$$\int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$$

jest zbieżna oraz funkcja $g\colon [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ jest ciągła i ograniczona, to całka niewłaściwa

$$\int_1^{+\infty} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$$

również jest zbieżna.

1.6 Ciągi i szeregi funkcyjne

1. Zbadać zbieżność ciągów funkcyjnych $f_n \colon X \to \mathbb{R}$, gdzie

   (a) $f_n(x) = \dfrac{1}{n+x}$

   (b) $f_n(x) = \dfrac{n}{n+x}$

   (c) $f_n(x) = \dfrac{nx}{n+x}$

2. Zbadać zbieżność ciągów funkcyjnych $f_n, g_n \colon [0,1] \to \mathbb{R}$

   $f_n(x) = x^n - x^{n+1}$

   $g_n(x) = x^n(1-x)^n$

3. Zbadać dziedzinę i zbieżność w swojej dziedzinie ciągu funkcyjnego $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, gdzie f_n dane jest wzorem:

   (a) $f_n(x) = \dfrac{1}{nx}$

   (b) $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+n^2x}$

   (c) $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+n^2x^2}$

   (d) $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+nx^2}$

   (e) $f_n(x) = x\sin\left(\dfrac{x}{n}\right)$

   (f) $f_n(x) = \dfrac{\sin x}{x}$

   (g) $f_n(x) = \cos\left(\dfrac{x}{n}\right)$

   (h) $f_n(x) = \dfrac{nx}{n^2+x^2}$

   (i) $f_n(x) = nxe^{-nx}$

   (j) $f_n(x) = \dfrac{\ln(2^n+x^n)}{n}$

   (k) $f_n(x) = \sqrt{1+x^n}$

   (l) $f_n(x) = \sqrt[n]{x}$

   (m) $f_n(x) = \dfrac{nx^2}{nx+1}$

   (n) $f_n(x) = \dfrac{2nx}{1+n^2x^2}$

4. Zbadać zbieżność ciągu funkcyjnego $f_n \colon [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ danego wzorem:

   $$f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n}$$

5. Zbadać zbieżność szeregu funkcyjnego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3}} \exp\left(\lambda \sin\left(\sqrt[3]{\frac{x^2-1}{x}}\right)\right), \ \lambda \in (0,1)$$

6. Zbadać zbieżność następujących szeregów funkcyjnych

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} x^n(1-x), \ x \in [0,1]$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}, \ x \in [-1,1]$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{1+nx^2}$

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1+n^2x^2}$

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1+n^4x^2}$

(f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{1+n^5x^2}$

(g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$

(h) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{\cos x!}{n^3}}$

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{\sqrt{n^4+x^2}}$

(j) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{2n\pi}{3}}{\sqrt{n^2+x^2}}$

(k) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x^{2n}+1}$

(l) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x+2^n}$ dla $x \in (-2,+\infty)$

(m) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$

(n) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n!x)}{n^3}$

(o) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2x^n}{(2n)!}$

(p) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{e^{nx}}$, dla $x \in [0,+\infty)$

(r) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!x^n}$

7. Wyznaczyć promień zbieżności następujących szeregów potęgowych i zbadać zbieżność na krańcach ich przedziałów zbieżności

   (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2n}$

   (b) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n x^n$

   (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^n}$

   (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

   (e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n}$

   (f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{3^n \cdot n^3}$

   (h) $\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^n$

   (i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n$

   (j) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n} (x+1)^n$

   (k) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$

8. Wyznaczyć sumy następujących szeregów

   (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n7^n}$

   (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$

   (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{5^n}$

   (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{3^n}$

   (e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{4^n}$

   (f) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$

(g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n3^n}$

(h) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin^n x$

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$

(j) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n}{4^n}$

9. Rozwinać w szereg Taylora wokół punktu $x_0 = 0$ funkcję f daną wzorem $f(x) = xe^x$ dwoma sposobami:

   - wyznaczając wzór na n-tą pochodną i podstawiając do wzoru,
   - korzystając z rozwinięcie w szereg potęgowy funkcji $x \mapsto e^x$.

10. Rozwinąć w szereg Taylora wokół $x_0 = 0$ funkcję daną wzorem

$$f(x) = \int \frac{\sin x}{x}\, \mathrm{d}x.$$

11. Udowodnić, że dla każdego $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$:

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} k \binom{n}{k} = 0.$$

1.7 Zadania różne II

1. Obliczyć

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n + n^2 + n^3 + \cdots + n^n}{1^n + 2^n + 3^n + \cdots + n^n}$$

2. Udowodnić, że jeżeli równanie

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x = 0$$

ma dodatnie rozwiązanie $x = x_0$, to równanie

$$n a_0 x^{n-1} + (n-1) a_1 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} = 0$$

ma również dodatnie rozwiązanie $x = x_1 < x_0$.

3. Udowodnić, że każde równanie postaci $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$, gdzie n jest nieparzyste, ma przynajmniej jeden pierwiastek rzeczywisty.

4. Udowodnić, że jeżeli $C_0 + \frac{C_1}{2} + \frac{C_2}{3} + \ldots + \frac{C_{n-1}}{n} + \frac{C_n}{n+1} = 0$, gdzie $C_0, \ldots, C_n$ są stałymi, to równanie $C_0 + C_1 x + \ldots + C_{n-1}x^{n-1} + C_n x^n = 0$ ma co najmniej jeden pierwiastek rzeczywisty zawarty między 0 a 1.

5. Udowodnić, że

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1^4+2^4+\ldots+n^4}{n^5} = \dfrac{1}{5}$,

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\ldots+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}} = \dfrac{2}{3}$,

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1^p+2^p+\ldots+n^p}{n^{p+1}} = \dfrac{1}{p+1}$, $p>0$,

(d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[n]{e^1}+\sqrt[n]{e^2}+\ldots+\sqrt[n]{e^n}}{n} = e-1$,

(e) $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\dfrac{1}{1^2+n^2}+\dfrac{1}{2^2+n^2}+\ldots+\dfrac{1}{n^2+n^2}\right) = \dfrac{\pi}{4}$,

(f) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a}{n}\left(\sin\dfrac{a}{n}+\sin\dfrac{2a}{n}+\ldots+\sin\dfrac{na}{n}\right) = \cos a - 1$,

6. Obliczyć granice

   (a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\ldots+\dfrac{1}{3n}\right)$,

   (b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{n}{k^2+n^2}$,

   (c) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{n2^{\frac{k}{n}}}{n+\frac{k}{n}}$.

7. Dla liczby $n\in\mathbb{N}$ niech x_n oznacza pierwiastek równania $e^{-x}=nx$. Obliczyć granicę

$$\lim_{n\to\infty}\left(n(nx_n-1)\right).$$

8. Funkcja f jest ciągła i ma okres $T=1$. Pokazać, że istnieje liczba x_0, dla której zachodzi równośc $f(x_0+\pi)=f(x_0)$.

9. Zbadać, czy istnieją funkcje wypukłe f i g takie, że $f(x)-g(x)=\sin x$, $x\in\mathbb{R}$.

10. Funkcja f spełnia warunek $|f(x)-f(y)|\leqslant|x-y|^3$ dla dowolnych $x,y\in\mathbb{R}$. Uzasadnić, że jest stała na $\mathbb{R}$.

11. (a) Udowodnić, że $\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}+\mathrm{tg}^2\frac{\beta}{2}+\mathrm{tg}^2\frac{\gamma}{2}\geqslant 1$, jeżeli α,β,γ są kątami pewnego trójkąta. Dla jakiego trójkąta zachodzi równość?

    (b) Udowodnić, że $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma\geqslant\frac{3}{4}$, jeżeli α,β,γ są kątami pewnego trójkąta. Dla jakiego trójkąta zachodzi równość?

12. Niech $f\colon[1,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(1)=1$ oraz

$$f'(x)=\frac{1}{x^2+f^2(x)}.$$

Udowodnić, że $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ istnieje oraz $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)<1+\frac{\pi}{4}$.

Rozwiązanie. Zauważmy, że $f'(x)>0$ dla dowolnego $x\in D_f$, więc funkcja f jest rosnąca w całej dziedzine. Czyli

$$f(x)>f(1)=1 \text{ dla } x>1.$$

Stąd uzyskujemy oszacowanie:

$$f'(x) = \frac{1}{x^2 + f^2(x)} < \frac{1}{x^2+1},\ x > 1$$

Dla każdego $x > 1$ możemy scałkować obustronnie powyższą nierówność i wówczas

$$f(x) - f(1) = \int_1^x f'(t)\,\mathrm{d}t < \int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1} = \arctan t\big|_1^x =$$
$$= \arctan x - \arctan 1 = \arctan x - \frac{\pi}{4}$$

Czyli

$$1 < f(x) < \arctan x - \frac{\pi}{4} + 1.$$

Funkcja f jest ściśle rosnąca i ograniczona, więc granica przy $x \to +\infty$ istnieje, a ponadto z twierdzenia **??** o trzech funkcjach

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) < 1 - \frac{\pi}{4} + \lim_{x\to+\infty} \arctan x = 1 - \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} = 1 + \frac{\pi}{4}.$$

□

13. Pokazać, że dla każdej ciągłej i wypukłej funkcji $f\colon I \to \mathbb{R}$, gdzie $I \subseteq \mathbb{R}$ jest przedziałem otwartym, istnieje jej skończona pochodna wszędzie, ewentualnie poza co najwyżej przeliczalnym zbiorem $A \subseteq \mathbb{R}$.

2 Funkcje wielu zmiennych, funkcje skalarne

1. Unormować wektor $\overrightarrow{u}$ i obliczyć w jego kierunku pochodną kierunkową w punkcie a, dla

   (a) $f(x,y) = e^y x^{x+y},\ \overrightarrow{u} = [-1,3], a = (1,1)$

   (b) $f(x,y) = x^2 + xy - y^2,\ \overrightarrow{u} = [4,3], a = (1,-1)$

   (c) $f(x,y,z) = \sqrt[3]{x+y+z},\ \overrightarrow{u} = [-1,3,2], a = (1,2,1)$

2. Naszkicować dziedzinę funkcji $f(x,y) = \arcsin(x^2+y^2-2) + \sqrt{x-y}$

3. Obliczyć następującą granicę f. dwóch zmiennych: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\cos(xy)}{x}$

4. Udowodnić, że

$$-\frac{1}{2} \leqslant \frac{xy}{x^2+y^2} \leqslant \frac{1}{2}$$

5. Zbadać istnienie granic:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{xy}{x^2+y^2}, \quad \text{oraz} \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2+y^2}{x^2+y^2}$$

6. Zbadać ciągłość funkcji $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ takiej, że

$$f(x,y) = \frac{x^2y}{x^2+y^2},\ \text{dla } (x,y) \neq (0,0) \text{ oraz } f(0,0) = 0.$$

7. Obliczyć

$$(a)\ \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$$

$$(b)\ \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\sin(x^3+y^3)}{x+y}$$

8. Niech $F(x,y) = (x\cdot y)\sin(\frac{x}{y})$. Obliczyć $\frac{\partial F}{\partial x}$ oraz $\frac{\partial F}{\partial y}$.

9. Niech $F(x,y) = (x\cdot y)^{x+\ln y}$. Obliczyć $\frac{\partial F}{\partial x}$ oraz $\frac{\partial F}{\partial y}$.

10. Wyznaczyć macierz różniczki odwzorowania odwrotnego do $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ danego równaniem $\varphi(x,y) = (2xy, x^2-y)$.

11. Znaleźć ekstrema lokalne funkcji $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ danej równaniem $f(x,y) = x^2 - xy + y^2$.

12. Zbadać istnienie ekstremów i kresów funkcji $f\colon E \to \mathbb{R}$, gdzie

    (a) $f(x_1,\ldots,x_n) = x_1x_2\cdots x_{n-1}x_n$,

    $$E = \{(x_1,\ldots,x_n)\colon x_1+x_2+\ldots+x_{n-1}+x_n \leqslant 1,\ x_1,\ldots,x_n \geqslant 0\}$$

    (b) $f(x_1,\ldots,x_n) = x_1+x_2+\ldots+x_{n-1}+x_n$,

    $$E = \{(x_1,\ldots,x_n)\colon x_1x_2x_3\cdots x_{n-1}x_n \geqslant 1,\ x_1,\ldots,x_n > 0\}$$

    (c) $f(x_1,x_2,x_3,x_4) = x_1x_2x_3x_4$,

    $$E = \{(x_1,x_2,x_3,x_4)\colon ,x_1+x_2+x_3+x_4 = c,\ x_1,x_2,x_3,x_4 \geqslant 0\},$$

    gdzie $c > 0$ jest dane.
    Wskazówka: w (c) zastosować metodę mnożników Lagrange'a.

13. Wyrazić w jawnej postaci funkcje określone w sposób uwikłany za pomocą równania

    $$(x^3-1)y + e^x y^2 + \cos x - 1 = 0$$

14. Wyznacz ekstrema lokalne funkcji zmiennej x uwikłanej, zadanej równaniem:

    (a) $x^2 - 4x + y^2 = 5$

    (b) $x^2 = xy - 1$

    (c) $x^3 + y^3 = 3xy$

    (d) $x^{2y} + y^2 = 1$

15. Czy do krzywej o równaniu $x^4 - x^2 + y^2 = 0$ (*Lemniskaty Gerona*) stosuje się twierdzenie o funkcji uwikłanej. W jakich punktach?

16. Czy do krzywej o równaniu $x2^y + y^2 = 1$ stosuje się twierdzenie o funkcji uwikłanej? W jakich punktach?

17. Wyznaczyć x, dla którego równanie $y - \ln(x+y) = 0$ określa y jako funkcję zmiennej x. Obliczyć $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$

18. Niech

$$F(x,y) = x^3y^2 - y\ln x - 2e^{2x-2} + y.$$

Wykazać, że istnieją funkcje rzeczywiste g, h klasy C^1 określone w pewnym otoczeniu U punktu $x = 1$ takie, że $F(x, g(x)) = 0 = f(x, h(x))$ oraz $g(x) < h(x)$ dla $x \in U$. Znaleźć $g(1)$, $h(1)$, $g'(1)$,$h'(1)$.

19. Sprawdzić z definicji, czy funkcja dana wzorem $f(x,y) = 5 - (x^6 + y^4)$ ma w punkcie $(x_0, y_0) = (0,0)$ ekstremum lokalne.

20. Obliczyć i zinterpretować geometrycznie całkę

$$\iint\limits_{[-1,1]\times[0,2]} (5 - \sqrt{|xy|})\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

21. Obliczyć całkę podwójną $\iint_D (x - y + 1)\,\mathrm{d}D$, gdzie

$$D = \left\{(x,y)\colon x + y \geqslant \frac{1}{2}\right\}.$$

22. Obliczyć całkę podwójną

$$\iint\limits_D \frac{x}{y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

gdzie obszar D jest obszarem ograniczonym parabolami $y = x^2$, $x = y^2$, $y > 0$.

23. Obliczyć

$$\iint\limits_D (x+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

gdzie D jest obszarem ograniczonym prostymi o równaniach $x = 0$, $y = 0$ i $x + y = 3$.

24. Obliczyć

$$\iint\limits_D 2x^2y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

gdzie D jest obszarem ograniczonym osiami współrzędny i krzywą o równaniu $\sqrt{y} + \sqrt{x} = 1$.

25. Obliczyć całkę podwójną

$$\iint\limits_D \frac{x^2}{y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

gdzie obszar D jest ograniczony prostymi $x = 4$, $y = x$ i hiperbolą $y = \frac{1}{x}$.

26. Obliczyć $\displaystyle\int_0^1 \int_0^1 x \max\{x,y\}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$.

27. Obliczyć
$$\iint\limits_D \max\{x,y\}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$
gdzie $D = [0,1]\times[1,2]$.

28. Obliczyć
$$\iint\limits_D xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$
gdzie D jest obszarem ograniczonym krzywymi o równaniach $xy = 1$ oraz $|x-y| = 1$.

29. Obliczyć
$$\iint_D y^2\sqrt{R^2-x^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$
gdzie $D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2\colon x^2+y^2 \leqslant R^2\}$.

30. Obliczyć
$$\int_0^1\int_0^1 e^{\max\{x,y\}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

31. Obliczyć
$$\iint\limits_A \frac{x}{1+x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$
gdzie $A = \big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\colon |x-y|\leqslant 2 \text{ oraz } x\in[-2,2]\big\}$.

32. Obliczyć
$$\iint\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{1+x^2+y^2+x^2y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

33. Wyprowadzić wzór na objętość kuli w przestrzeni $\mathbb{R}^3$ o promieniu równym R.

3 Analiza w przestrzeniach metrycznych. Przestrzenie Unormowane. Przestrzenie Banacha.

1. Sprawdzić, że dowolny zbiór X z metryką dyskretną d jest przestrzenią metryczną zupełną.
2. Sprawdzić, czy funkcja $\rho\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ dana wzorem $\rho(x,y) = \frac{|x-y|}{\sqrt{1+x^2}\sqrt{2+y^2}}$ jest metryką na $\mathbb{R}$.
3. Udowodnić, że jeżeli $\rho\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ jest metryką na $\mathbb{R}$, to funkcja $x\mapsto\frac{\rho(x,y)}{1+\rho(x,y)}$ również jest metryką na $\mathbb{R}$.
4. W przestrzeni $\mathbb{R}^2$ wyznaczyć średnicę zbioru $[0,1]\times[0,1]$, kolejno w metryce euklidesowej, maksimum i taksówkowej.

5. Wyznaczyć punkty domknięcia i punkty skupienia zbioru

$$A = \left\{ n + \frac{1}{k} \colon n, k \in \mathbb{N} \right\}$$

w przestrzeni metrycznej $\mathbb{N}$.

6. W przestrzeni $\mathbb{R}$ wyznaczyć pochodną zbioru

$$A = \left\{ (-1)^n m + \frac{1}{n} \colon m, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

7. W przestrzeni $\mathbb{R}$ wyznaczyć A^d oraz brzeg zbioru A, gdzie

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} \colon \sin \frac{1}{x} = 0 \right\}.$$

8. W przestrzeni $C([a,b])$ funkcji ciągłych postaci $f \colon [a,b] \to \mathbb{R}$, metryka dana jest wzorem

$$\rho(f,g) = \max_{a \leqslant x \leqslant b} |f(x) - g(x)|.$$

Sprawdzić, że $(C([a,b]), \rho)$ jest przestrzenią metryczną zupełną.

9. Załóżmy, że $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest ciągiem zbiorów otwartych oraz $[a,b] \subseteq \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} U_n$. Udowodnić, że że $[a,b]$ zawiera się w skończonej ilości zbiorów U_n.

10. Niech f będzie ciągłą funkcją rzeczywistą określoną na przestrzeni metrycznej X. Niech $Z(f)$ będzie zbiorem tych wszystkich $p \in X$, dla których $f(p) = 0$. Pokazać, że zbiór $Z(f)$ jest domknięty.

Rozwiązanie. Przyjmijmy $\bar{Z}(f) = X \setminus Z(f) = \{x \in X \colon f(x) \neq 0\}$. Wykażemy, że $\bar{Z}(f)$ jest zb. otwartym. Niech $x \in \bar{Z}(f)$. Szukamy otoczenia $V_x \subseteq \bar{Z}(f)$ otwartego punktu x. Ustalmy $\varepsilon > 0$. Istnieje $\delta > 0$ takie, iż $y \in K(x,\delta) \Rightarrow f(y) \in K\left(f(x)\varepsilon\right)$. Jeżeli $0 \neq K\left(f(x),\varepsilon\right)$, to przyjmujemy $V_x = K(x, \delta > 0)$. Załóżmy, że $0 \in K\left(f(x),\varepsilon\right)$. Niech $d = \inf\{\rho(x,y) \colon f(y) = 0\}$. d istnieje i $d \geqslant 0$ z własności zbioru liczb rzeczywistych, bo $\{\rho(x,y) \colon f(y) = 0\} \subseteq [0, +\infty)$. Zauważmy, że $d > 0$. Gdyby bowiem było $d = 0$, to $\rho(x,x) = 0 \geqslant d$ a to pociąga, że $f(x) = 0$ wbrew założeniu, że $x \in \bar{Z}(f)$. Zatem $V_x = K(x, \frac{d}{2}), d > 0$ jest szukanym otoczeniem. Zbiór $\bar{Z}(f)$ jest otwarty a zatem $Z(f)$ jest domknięty. □

11. Udowodnić, że funkcja f określonej na prz. X jest ciągła wtedy i tylko wtedy, gdy *wykres* $\{(x, f(x)) : x \in X\}$ tej funkcji jest zbiorem zwartym.

12. Pokazać, że ciągłe i otwarte odwzorowanie $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest monotoniczne.

Przestrzeń funkcji ciągłych między przestrzeniami unormowanymi. Niech X, Y będą przestrzeniami unormowanymi. Gdy nie prowadzi to do nieporozumień oznaczamy normy obydwu przestrzeni poprzez $\|\cdot\|$, np. $y \in Y$ ma normę $\|y\|$. W innym wypadku przez $\|\cdot\|_X$ oznaczamy normę przestrzeni X i analogicznie przez $\|\cdot\|_Y$ normę przestrzeni Y. Przez $\mathcal{L}(X,Y)$ oznaczamy rodzinę wszystkich funkcji ciągłych z przestrzeni X w przestrzeń Y.

13. Niech $\|f\| := \sup\{\|f(x)\|_Y \colon \|x\|_X \leqslant 1.\},\ f \in \mathcal{L}(X,Y)$. Udowodnić, że przestrzeń $(\mathcal{L}(X,Y), \|\cdot\|)$ z tak określoną normą jest przestrzenią Banacha.

14. Udowodnić, że $\|f\| := \inf\{M > 0 \colon \|f(x)\|_Y \leqslant M\|x\|_X.\},\ f \in \mathcal{L}(X,Y)$.

Całka oznaczona z funkcji ciągłej określonej na przedziale rzeczywistym w przestrzeń Banacha. Niech $f\colon D \to Y$, gdzie Y jest przestrzenią Banacha (z normą oznaczaną przez $\|\cdot\|$) a $D \subseteq \mathbb{R}$ przedziałem. Możemy łatwo rozszerzyć pojęcia analityczne funkcji $D \to \mathbb{R}$ na funkcje $D \to Y$:

- Mówimy, że funkcja f ma granicę $y \in Y$ w punkcie $x_0 \in \operatorname{int} X$ w, gdy
$$\forall_{\varepsilon>0}\exists_{\delta>0}\forall_{x\in X}.\ 0 < |x - x_0| < \delta \implies \|f(x) - y\| < \varepsilon.$$
- Funkcja f jest różniczkowalna w punkcie $x_0 \in D$, gdy
  - pewne otoczenie punktu x_0 w D jest przedziałem niezdegenerowanym (tzn. nie jest punktem);
  - istnieje pochodna funkcji f w punkcie czyli granica oznaczana przez $f'(x_0)$ i zdefiniowana następująco:
  $$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$
- Jeżeli $a, b \in D$, bo *całkę oznaczoną z funkcji f w granicach od a do b* możemy zdefiniować jako element $\displaystyle\int_a^b f$ przestrzeni Y zadany równością
$$\int_a^b f = F(b) - F(a),$$
gdzie F jest dowolną funkcją pierwotną funkcji f.
Całkę taką oczywiście również możemy oznaczać klasycznie - $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

15. Sformułować definicję ciągłości funkcji $f\colon D \to Y$, gdzie Y i D są dane tak jak poprzednio.
16. Niech $f\colon D \to Y$, $g\colon D \to (0, +\infty)$ - funkcje ciągłe, Y - prz. Banacha, $D \subseteq \mathbb{R}$ - przedział. Udowodnić, że jeżeli $\|f\| \leqslant g$, $a, b \in D$, to
$$\left\|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right\| \leqslant \left|\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x\right|.$$
Wywnioskować stąd, że dla funkcji ciągłej f (założenia jak poprzednio) zachodzi
$$\left\|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right\| \leqslant \left|\int_a^b \|f(x)\|\,\mathrm{d}x\right|.$$
17. Udowodnić, że jeżeli $f\colon D \to Y$ jest funkcją ciągła (D - przedział rzeczyw., Y - prz. Banacha), a $M \geqslant 0$ liczbą taką, że $\|f\| \leqslant M$, to dla dowolnych $a, b \in D$
$$\left\|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right\| \leqslant M|b - a|.$$
18. Niech $X = C[a, b]$, tzn. X jest przestrzenią liniową wszystkich funkcji ciągłych $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$. Udowodnić, że funkcja
$$f \mapsto \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x,$$
jest normą przestrzeni X oraz, że przestrzeń X z tak określoną normą jest przestrzenią Banacha.

4 Zadania różne III

1. Niech f będzie jednostajnie ciągła na odcinku (a, b). Uzasadnić, że funkcję f można przedłużyć jednoznacznie do funkcji ciągłej (jednostajnie) na odcinku domkniętym $[a, b]$, tzn. istnieje ciągła funkcja $g\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ taka, że $f(x) = g(x)$ dla $x \in (a, b)$.

2. Pokazać, że odwzorowanie $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dane wzorem $f(x, y) = (\frac{1}{2}(1 + y), \frac{1}{3}(3 - x))$ jest kontrakcją przy metryce euklidesowej.

3. Pokazać, że $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dane wzorem

$$f(x, y) = \left(1 - \frac{1}{3}x, 1 + \frac{1}{3}y, 2 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}y\right)$$

jest kontrakcją.

4. Pokazać, że odwozorwanie $g\colon [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ dane wzorem

$$g(x) = \frac{1}{x + 1}$$

nie jest kontrakcją mimo, że $d(g(x), g(y)) \leqslant d(x, y)$, $x, y \leqslant 0$, $x \neq y$.

5. Korzystając z Zasady Banacha pokazać, że układ równań

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}\sin x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{3} \\ y = \frac{1}{3}\cos y + \frac{1}{3}x \end{cases}$$

ma dokładnie jedno rozwiązanie.

6. Metodą kolejnych przybliżeń rozwiązać zagadnienie Cauchy'ego

$$\begin{cases} y'(x) = y(x), x > 0, \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

7. Funkcja f spełnia warunek $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$ oraz jest ciągła na przedziale $[1, \infty)$. Wyznaczyć granicę

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} \int_1^x f(t)\, \mathrm{d}t.$$

8. Wykazać, że równanie funkcyjne

$$\frac{1}{2}f(t) - \frac{1}{2}t^3 = \int_0^1 t^2 s^2 f(s)\, \mathrm{d}s$$

ma rozwiązanie w przedziale $[0, 1]$. Wyznaczyć to rozwiązanie z dokładnością do $\frac{8}{9}$.

9. Pokazać, że dla n i m całkowitych zachodzi

$$\int_0^{2\pi} e^{inx} e^{-imx}\, \mathrm{d}x = \begin{cases} 0 & \text{jeżeli } m \neq n, \\ 2\pi & \text{jeżeli } m = n. \end{cases}$$

Wskazówka: skorzystać z tożsamości $e^{ix} = \cos x + i \sin x$.