Definicja. *Permutacją* nazywamy każde wzajemne jednoznaczne przekształcenie $\sigma\colon X \to X$ pewnego skończonego zbioru X na siebie. Zbiór wszystkich permutacji zbioru n-elementowego $\{1, \dots, n\}$ oznaczamy S_n.

Twierdzenie. *Zbiór S_n razem z działaniem $\circ\colon S_n \to S_n$ składania funkcji jest grupą. Ponadto, jeżeli X jest zbiorem n-elementowym, to zbiór $S(X)$ wszystkich permutacji zbioru X wraz z działaniem składania funkcji stanowi grupę (nazyw. grupą permutacji) izomorficzną z S_n.*

Twierdzenie. *Liczba P_n permutacji zbioru n-elementowego jest równa $n!$.*

Stosujemy konwencję notacyjną: $\sigma\colon \{1, 2, 3, \dots, n\} \to \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$$

Przykład. Składanie permutacji:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 3 & 1 & 6 & 5 \end{pmatrix}, \ \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\sigma \circ \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 6 & 2 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

Twierdzenie. *Skladanie permutacji nie jest przemienne*

Definicja. *Nośnikiem* permutacji $\sigma\colon X \to X$ nazywamy zbiór

$$\operatorname{supp}(\sigma) = \{x \in X\colon \sigma(x) \neq x\}.$$

Definicja. Permutacje σ i τ nazwywamy *rozłącznymi*, gdy

$$\operatorname{supp}(\sigma) \cap \operatorname{supp}(\tau) = \varnothing.$$

Twierdzenie. *Składanie permutacji rozłącznych jest przemienne.*

Definicja. *Cyklem* o długości k nazywamy każdą permutację $\rho\colon \{1, \dots, k\} \to \{a_1, \dots, a_k\}$ taką, że $\rho(a_i) = a_{i+1}$ dla $i = 1, \dots, k-1$ oraz $\rho(k) = 1$.

Twierdzenie. *Każdą permutację można przedstawić w postaci złożenia cykli rozłącznych. Rozkład taki jest jednoznaczny z dokładności do kolejnosci cykli.*

Definicja. Cykl o długości 2 nazywamy *transpozycją*.

Twierdzenie. *Każdy cykl jest złożeniem transpozycji.*

Twierdzenie. *Każda permutacja jest złożeniem transpozycji. Przedstawienie to* ***nie*** *jest jednoznaczne, jednak parzystość liczby transpozycji w każdym takim rozkładzie jest taka sama.*

Definicja. Permutację nazywamy *parzystą*, gdy może zostać przedstawiona w postaci złożenia parzystej liczby transpozycji. Jeżeli permutacja nie jest parzysta to nazywamy ją po prostu permutacją *nieparzystą*.

Definicja. Znakiem permutacji σ nazywamy liczbę

$$\operatorname{sgn}(\sigma) = \begin{cases} +1, & \text{jeżeli } \sigma \text{ jest perm. parzystą}, \\ -1, & \text{jeżeli } \sigma \text{ jest perm. nieparzystą}. \end{cases}$$

Twierdzenie. *Znak cyklu długości* k *jest równy* $(-1)^{k-1}$. *Znak złożenia permutacji jest równy iloczynowi znaków tych permutacji:* $\operatorname{sgn}(\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_p) = \operatorname{sgn}(\sigma_1)\cdot\operatorname{sgn}(\sigma_2)\cdot\ldots\cdot\operatorname{sgn}(\sigma_p)$.

Uwaga. Permutację σ^{-1} odwrotną do permutacji σ możemu uzyskać zamieniając porządek wierszy. Warto też uporządkować kolumny rosnąco.

Macierzowy zapis permutacji: Permutację $\sigma \in S_n$ można zapisać jako macierz $A^\sigma = [a_{i,j}]_{n\times n}$, dla której wyraz $a_{i,j}$ jest określony następująco

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{dla } \sigma(i) = j, \\ 0, & \text{dla } \sigma(i) \neq j. \end{cases}$$

Przykład.

$$\text{Permutacja } \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 2 & 5 & 3 \end{pmatrix} \text{ ma macierz:}$$

$$A^\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Twierdzenie. *Niech* σ *będzie permutacją zbioru* n*-elementowego i* A^σ *będzie macierzą tej permutacji. Wtedy*

1. *macierz* A^σ *jest ortogonalna:* $(A^\sigma)^T A^\sigma = I$,
2. *macierz permutacji* σ^{-1} *jest transpozycją macierzy permutacji* σ*, czyli* $A^{\sigma^{-1}} = (A^\sigma)^T$.

Twierdzenie. *Niech* σ, τ *będą permutacjami zbioru* X, $|X| = n$ *i* A^σ, A^τ *będą odpowiednimi macierzami tych permutacji. Wtedy* $A^\tau \cdot A^\sigma = A^{\sigma\circ\tau}$.

Twierdzenie. *Znak permutacji jest równy znakowi wyznacznika macierzy tej permutacji.*

Uwaga (Permutacyjna definicja wyznacznika macierzy). Wyznacznik macierzy kwadratowej $A = [a_{i,j}]_{n\times n}$ można zdefiniować jako liczbę

$$\sum_{\sigma\in S_n}\left(\operatorname{sgn}\sigma\prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}\right) = \sum_{\sigma\in S_n}\operatorname{sgn}\sigma\cdot a_{1,\sigma(1)}a_{2,\sigma(2)}\cdot\ldots\cdot a_{n,\sigma(n)}.$$