

1. *Wariacje* k -elementowe zbioru n -elementowego bez powtórzeń: ciągi k -wyrazowe (długości $k \leq n$), utworzone z elementów n -elementowego zbioru, w których nie powtarza się żaden element.

Ilość wariacji bez powtórzeń: $V_n^k = n^{\underline{k}} = n(n-1)(n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$.

2. *Wariacje* k -wyrazowe zbioru n -elementowego z powtórzeniami: ciągi k -wyrazowe (długości k) elementów zbioru n -elementowego:

Ilość wariacji z powtórzeniami: $\overline{V}_n^k = n^k$.

3. *Kombinacje* k -wyrazowe zbioru n -elementowego: podzbiory k -elementowe zbioru n -elementowego.

Ilość kombinacji: $C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)k!}$.

4. *Kombinacje* k -elementowe z powtórzeniami zbioru n -elementowego: multizbiory k -elementowe utworzone z wyrazów zbioru n -elementowego.

Ilość kombinacji z powtórzeniami: $\overline{C}_n^k = \binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)^{\underline{k}}}{k!}$

5. *Permutacja* zbioru n -elementowego bez powtórzeń: ciąg n -wyrazowy, utworzony z elementów n -wyrazowego zbioru.

Ilość n -elementowych permutacji: $P_n = n!$

Uwaga: $P_n = V_n^n$.

6. *Permutacje* n -wyrazowe z powtórzeniami k wyrazów: ciągi n -wyrazowe wyrazów multizbioru n -elementowego, w którym występuje k wyrazów, każdy kolejno n_i razy, $i = 1, 2, \dots, k$; czyli: $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$.

Ilość permutacji z powtórzeniami: $P_n^{n_1, n_2, \dots, n_k} = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}$.

Przydatne tożsamości kombinatoryczne:

1. Tożsamość symetrii:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

2. Tożsamość Pascala:

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$$

3. Tożsamość pochłaniania:

$$k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$$

4. Dla dowolnych $n, k \in \mathbb{N}$, $k \leq n$:

$$k \binom{n}{k} = (n-k+1) \binom{n}{k-1}$$

5. Tożsamość podkomisji: dla dowolnych $0 \leq k \leq m \leq n$:

$$\binom{n}{m} \binom{m}{k} = \binom{n}{k} \binom{n-k}{m-k}$$

6. Tożsamość Cauchy'ego-Vandermonde'a: dla dowolnych $n, k, l, d \in \mathbb{R}$

$$\sum_{k=0}^n \binom{l}{k} \binom{d}{n-k} = \binom{l+d}{n}.$$

7. Dla dowolnych $n, k \in \mathbb{N}$, $k \leq n$:

$$\sum_{l=1}^{n-k} \binom{k+l}{k} = \binom{n+1}{k+1}$$

8. Moc zbioru potęgowego dowolnego zbioru n -elementowego:

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$$

9. Dla dowolnych $n, k \in \mathbb{N}$, $k \leq n$:

$$\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} = n 2^{n-1}$$

10. Dla dowolnych $n, k \in \mathbb{N}$, $k \leq n$:

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$