Analiza Matematyczna

Ziemowit Wójcicki

16 sierpnia 2020

Streszczenie

Wprowadzenie do analizy matematycznej (w tym elementy topologii przestrzeni metrycznych), rachunku różniczkowego i całkowego funkcji jednej zmiennej z podstawami różniczkowania i całkowania i analizy funkcji wektorowych. Początek pisany z myślą o kompletnym laiku lub entuzjaście nauk ścisłych, rozdziały dalsze obejmują możliwie szeroki zestaw przykładów twierdzeń i pojęć, które wydały się autorowi (w *jego* matematycznych zabawach i *subjektywnym* odczuciu) edukacyjne, przydatne i ciekawe.

Spis treści

1 Preliminaria

Ten dokument zaczął swoje życie jako moje osobiste notatki elektroniczne w oparciu o wykłady na które uczęszczałem oraz literaturę i służył głównie utrwalaniu i przypominaniu sobie szczególnie istotnych faktów z analizy. Ćwiczyłem też formułowanie i redagowanie twierdzeń i ich dowodów. W pewnym momencie język zaczął przypominać skrypt pisany do neutralnego czytelnika a nie notatki osobiste. Jest to w 100% amatorski "skrypt studencki", a ja nie jestem ani wybitnym studentem a już tym bardziej żadnym autorytetem w dziedzinie. Proszę mieć to na uwadze.
Uwagi: rozdział o ciągłości funkcji to na razie szczególny „szkicobałagan". Dowodzę twierdzeń powołując się na twierdzenia, które wprowadzam później, albo jeszcze nie wskazałem, etc. Ciągły Work-in-progress i nie mogę tego poukładać tak jak chcę.

Klasycznie - gwiazdką „*" oznaczone są paragrafy, punkty, podpunkty, przykłady, twierdzenia i zadania a nawet rozdziały, których lektura jest opcjonalna/niezalecana podczas „pierwszego czytania", gdyby patrzeć na ten dokument jak na podręcznik, czego nie zalecam studentom(, ale wierzę w istnienie entuzjastów-amatorów matematyki :)).

Krótki esej o poznawaniu matematyki i w szczególności Analizy Matematycznej:

1.1 Dwa słowa o logice i metodzie matematyki

1.2 Elementy Teorii mnogości i „żargon matematyczny"

Na początku spędzimy trochę czasu przyzwyczajając się do „matematycznego żargonu", terminologii i stylu zapisywania matematycznych rozumowań. Niestety, z tego względu dla nawet **odrobinę** doświadczonego studenta (a nawet ambitnego ucznia lub (o zgrozo) matematycznego olimpijczyka który by sięgnąłby po mój tekst), rozdział ten będzie niestrawny, stąd nie jest on dobrym wprowadzeniem ani przypomnieniem teorii mnogości. Dobre przypomnienie stanowi pierwszy rozdział z *Wykładów z analizy matematycznej* profesora Ryszarda Rudnickiego. Świetną książką wprowadzającą w Teorię Mnogości jako „wstęp do matematyki" są *Wykłady ze wstępu do matematyki, wprowadzenie do teorii mnogości* (Wojciech Guzicki, Piotr Zakrzewski).

Pojęcia pierwotne - zbiór i należenie do zbioru. Pojęć „zbioru" oraz relacji „należenia do" zbioru nie definiujemy. Typowe zbiory *przeważnie* będziemy oznaczać dużymi literami alfabetu łacińskiego, np. A, B, X, Y, Z.
Zdanie

„element a należy do zbioru A"

zapisujemy symbolicznie następująco:

$$a \in A$$

Mówimy też wtedy, że a jest „elementem zbioru A". Elementami zbiorów mogą być inne zbiory. a w powyższym przykładzie może jest jakimś zbiorem. Możemy napisać $B \in A$ i mieć na myśli „jakieś" zbiory A i B. To na razie nie jest ważne.

Zbiory skończone (o skończonej liczbie elementów) możemy opisać wypisując ich elementy, otoczone nawiasami klamrowymi $\{,\}$, np. moglibyśmy zdefiniować następujące zbiory A, B:

$$A = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$B = \{\alpha, 1, x, A\}$$

$$C = \{a, b, c, d, \ldots, x, y, z\}$$

W ostanim przypadku nie wypisaliśmy wszystkich elementów zbioru C ale zasugerowaliśmy (wielokropkiem „...”), że chodzi o wszystkie litery od a do z alfabetu. Z takim zapisem musimy być ostrożni: czy np. ś $\in C$? Czyli, czy uwzględniamy w naszym zbiorze „polskie" znaki? Stosowanie polskich znaków diaktrycznych (liter z ogonkami i kropkami) jako symbole matematyczne nie jest przyjęte, jednak realnie można mieć wątpliwości co autor (w tym wypadku ja) miał na myśli.

Przypomnijmy znane ze szkoły zbiory liczb:

- Zbiór liczb **r**zeczywisych, oznaczany $\mathbb{R}$
- Zbiór liczb **n**aturalnych, oznaczany $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$
- Zbiór liczb całkowitych, oznaczany $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ (takie jest niestety oznaczenie międzynarodowe, od niemieckiego Zahlen).

W dalszym ciągu poznamy również liczby zespolone, których zbiór oznacza się... literą $\mathbb{C}$ (możemy skojarzyć np. z ich angielską nazwą „**C**omplex numbers").

Definicja 1.1. Mówimy, że zbiór B *zawiera się* w zbiorze A, gdy każdy element zbioru B należy również do zbioru A, czyli gdy

$$\text{dla każdego } b \in B \text{ zachodzi } b \in A.$$

Widzimy też, że $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$. Wystarczy rozpisać: $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\} \subseteq \{0, 1, 2, \ldots\} = \mathbb{N}$ Ogólnie:

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$$

Uwaga. Nie należy mylić pojęć **zawierania** się zbiorów ($\subseteq$) oraz **należenia do** zbioru ($\in$).
Np. w poprzednim przykładzie, określiliśmy zbiory $A = \{1, 2, 3, 4\}$ i $B = \{\alpha, 1, x, A\}$. Zbiór A **należy** do zbioru B ale **nie** *zawiera się* w tym zbiorze. Np. $2 \in A$ ale $2 \notin B$ wbrew definicji zawierania się zbiorów.

Symbol tego typu: $\varphi(x)$ (grecka litera jest dowolna) jest oznaczeniem na pewne „zdanie logiczne" o obiekcie x. Możemy np. umówić się w ramach danego rozumowania, że $\delta(y)$ **oznacza** „y jest liczbą wymierną" (cokolwiek to znaczy). Znaczek $\equiv$ oznacza „równoważność" różnych zdań. Np. moglibyśmy zdefiniować (i oznaczyć):

- $\varphi(x) \equiv$„x jest figurą geometryczną",
- $\Psi(x) \equiv$„x jest większe od zera"$\equiv x > 0$,
- $\psi(n) \equiv$„n jest liczbą naturalną"$\equiv n \in \mathbb{N}$.
- $\Xi(p) \equiv$„p jest prostą na płaszczyźnie".

W tej chwili może się to wydawać skomplikowane i być może zbędnie, ale wielokrotnie zobaczymy, że zapis symboliczny pozwala nam wyrażać i analizować ogólne struktury, podstawiając odpowiedni symbol za „nieokreślone zdanie logiczne". Na przykład, omówimy przy jego pomocy kolejną konwencję notacyjną.

Zapis $\{x \in X : \varphi(x)\}$ czytamy „x należące do X **takie, że** $\varphi(x)$". Przy czym, każdy element x z osobna spełnia warunek φ. Np. $A = \{n \in \mathbb{N} : n = 2k, \text{ dla pewnego } k \in \mathbb{N}\}$ można wyrazić jako

- „A jest zbiorem liczb $n \in \mathbb{N}$ takich, że $n = 2k$ dla pewnego $k \in \mathbb{N}$"
- „A jest zbiorem liczb n należących do zbioru liczb naturalnych i takich, że każda (z osobna) liczba n jest równa $2k$ dla pewnego $k \in \mathbb{N}$"
- A jest zbiorem liczb naturalnych n takich, że $n = 2k$ dla pewnego $n = 2k$, dla pewn. $k \in \mathbb{N}$.
- A jest zbiorem liczb naturalnych podzielnych przez 2.

ale oczywiście wszystko to znaczy to samo: A jest zbiorem liczb parzystych[1]. $A = \{0, 2, 4, 8, 10, 12, \ldots\}$.

Definicja 1.2. *Sumą* zbiorów A i B nazywamy zbiór

$$A \cup B = \{a : a \in B \text{ lub } a \in B\}.$$

A więc zbiór elementów a takich, że a należy do chociaż jednego ze zbiorów A, B.

Przykład. $A = \{1, 2, b, \alpha\}$, $B = \{1, \alpha, 3, 5\}$. Wtedy $A \cup B = \{1, 2, 3, 5, b, \alpha\}$.

Definicja 1.3. *Iloczynem* albo *przekrojem* zbiorów A i B nazywamy zbiór

$$A \cap B = \{a : a \in A \text{ i } a \in B\}.$$

A więc zbiór elementów wspólnych zbiorów A i B.

[1] taki zbiór też często bywa oznaczany jako $2\mathbb{N}$, tzn. $2\mathbb{N} := \{n \in \mathbb{N} : n = 2k, \text{ dla pewnego } k \in \mathbb{N}\}$

Przykład. $A = \{1, 2, b, \alpha\}$, $B = \{1, \alpha, 3\}$. Wtedy $A \cap B = \{1, \alpha\}$.

Definicja 1.4. *Różnicą* zbiorów A i B nazywamy zbiór

$$A \setminus B = \{a\colon a \in A \text{ i } a \notin B\}\,.$$

A więc zbiór powstający przez usunięcie ze zbioru A elementów, które należą też do zbioru B.

Przykład. $A = \{1, 2, b, \alpha\}$, $B = \{1, \alpha, 3\}$. Wtedy $A \setminus B = \{2, b\}$.

Ćwiczenie. $A = \{f, g, h, \delta\}$, $B = \{\delta, f, g, 1, 2, 3\}$. Wyznaczyć zbiory $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$ oraz $B \setminus A$.

Twierdzenie 1.1. *Zbiór $A \cap B$ jest największym (w sensie zawierania albo inaczej inkluzji, tzn. ze względu na relację porządku „$\subseteq$") zbiorem zawartym zarówno w zbiorze A jak i w zbiorze B, czyli*

- *$A \cap B \subseteq A$ i $A \cap B \subseteq B$,*
- *Jeżeli C jest takim zbiorem, że $C \subseteq A$ i $C \subseteq B$, to[2] $C \subseteq A \cap B$.*

Dowód. TO-DO □

Definicja 1.5. *Parą uporządkowaną* liczb a i b nazywamy zbiór (a, b) taki, że

TO-DO

a nazywamy poprzednikiem pary (a, b) a b następnikiem tej pary.

Twierdzenie 1.2. *Parę uporządkowaną (a, b) można zdefiniować jako **zbiór** dany w ten sposób:*

$$(a, b) = \{\{a, b\}, \{b\}\}\,.$$

Tzn. zbiór zdefiniowany w powyższy sposób spełnia założenia poprzedniej definicji.

Poprzednie twierdzenie służy głównie zademonstrowaniu, że różne pojęcia matematyczne mogą być zdefiniowane przy pomocy niewielkiego zestawu prostszych pojęć pierwotnych. Nie będziemy szerzej dyskutować metodologicznych (albo filozoficznych) zalet takiego postępowania, warto jednak mieć świadomość że wiele objektów, którymi będziemy się posługiwać, na odpowiednim poziomie ma bardziej abstrakcyjne definicje. Nie omówimy np. jak w ramach teorii mnogości definiuje się wszystkie **liczby** jako pewne **zbiory**, ale tak właśnie są one określone w ramach współczesnej matematyki. Informacje na ten temat może czytelnik znaleźć w **świetnej** książce *Wykłady ze wstępu do matematyki Wprowadzenie do teorii mnogości.* (Wojciech Guzicki, Piotr Zakrzewski.)

[2] właśnie jest „mniejszy" w „sensie zawierania" od $A \cap B$.

Definicja 1.6. Dla dowolnych zbiorów A, B zbiór

$$A \times B = \{(a, b) \colon a \in A \text{ oraz } b \in B\}$$

nazywamy *iloczynem kartezjańskim*(albo *produktem kartezjańskim* zbiorów A, B. Definicję możemy uogólnić indukcyjnie na dowolną skończoną ilość zbiorów: Ustalmy dow. rodzinę $\{A_n \colon n \in \mathbb{N}\}$, wtedy uogólniony iloczyn kartezjański n zbiorów określamy następująco:

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \{(a_1, \ldots, a_n) \colon a_1 \in A_1, \ldots, a_n \in A_n\}.$$

Przykład. Niech $a_1, a_2, \ldots, a_n$ i $b_1, b_2, \ldots, b_n$ będą takimi liczbami, że $a_i < b_i$, $i = 1, \ldots, n$. Wtedy zbiór $\bigtimes_{i=1}^{n}[a_i, b_i] = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \ldots \times [a_n, b_n]$ nazywamy kostką n-wymiarową.

Moc zbioru, równoliczność i nieskończoność. Podajemy kilka bez dowodu kilka ważnych twierdzeń, których sens jest intuicyjny, jednak ścisłe dowody nie są tak oczywiste. Po odpowiedni wykład ponownie odsyłam do książek wprowadzających do teorii mnogości albo przedmiotu „wstęp do matematyki" jaki obecnie realizuje się na kierunkach matematycznych.

Twierdzenie 1.3 (Cantora o przekątni)**.** *Dla dowolnego zbioru X, zachodzi $|\mathcal{P}(X)| \neq |X|$.*

Twierdzenie 1.4. *Dla dowolnego zbioru X, $\mathcal{P}(X) = 2^{|X|}$.*

Twierdzenie 1.5 (Cantora-Bernsteina)**.** *Dla dowolnych zbiorów X, Y zachodzi implikacja*

$$\textit{jeśli } |X| \leqslant |Y| \textit{ oraz } |Y| \leqslant |X| \textit{ to } |X| = |Y|.$$

1.3 Relacje, funkcje i zasada abstrakcji

Relacje - podstawowe intuicje Definicja okazuje się śmiesznie prosta:

Definicja 1.7. Zbiór $R \subseteq X \times X$ nazywamy *relacją* na zbiorze X. Zatem relacja R na zbiorze X jest po prostu podzbiorem iloczynu kartezjańskiego zbioru X z samym sobą.

Mówimy, że relacja R jest

- *zwrotna*, gdy $\forall_{x \in X.}\ (x, x) \in R$.
- *przechodnia*, gdy $\forall_{x,y,z \in X.}$ jeśli $(x, y) \in R$ i $(y, z) \in R$, to $(x, z) \in R$.

TO-DO

1.3.1 Zasada Abstrakcji

Definicja 1.8. Mówimy, że relacja $R \subseteq X \times X$ (na ustalonym zbiorze X) jest *relacją równoważności*, gdy jest zwrotna, przechodnia i [TO-DO]

Definicja 1.9. Zbiór $\Pi = \{P_t \colon t \in T\}$ nazywamy *rozbiciem* albo *podziałem* (a czasem jeszcze *partycją*) zbioru X, gdy

1. $X = \bigcup \Pi = \bigcup\limits_{t \in T} P_t$,
2. $P_k \cap P_l = \varnothing$ dla każdych $k, l \in T$ takich, że $k \neq l$.

Zbiory $P_t, t \in T$ nazywamy klasami podziału Π.

Definicja 1.10. Załóżmy, że R jest relacją równoważności w zbiorze X. Dla każdego $x \in X$ zbiór

$$[x]_R := \{y \in X \colon (y, x) \in R\}$$

nazywamy *klasą abstrakcji wyznaczoną przez element* x. Rodzinę wszystkich klas abstrakcji relacji równoważności R w zbiorze X oznaczamy symbolem X/R i nazywamy ją *przestrzenią ilorazową* zbioru X względem relacji R. Zatem

$$X/R = \{[x]_R \colon x \in X\}.$$

Przykład. Jeżeli X jest zbiorem wszystkich prostych na płaszczyźnie, a R relacją równoległości, to klasami abstrakcji względem tej relacji są kierunki.

Przykład. Jeżeli X jest zbiorem wszystkich trójkątów, jakie można narysować na płaszczyźnie, a R relacją przystawania trójkątów, to każda klasa tej abstrakcji jest zbiorem wszystkich trójkątów przystających. Np. jeżeli ΔABC jest pewnym trójkątem o kątach o miarach kolejno $90°$, $60°$, $30°$, to $[\Delta ABC]_R$ jest zbiorem wszystkich trójkątów prostokątnych takich, że jeden z pozostałych kątów ma miarę $30°$ a drugi $60°$.

Twierdzenie 1.6. *Niech X będzie dowolnym zbiorem a $R \subseteq X^2$ relacją równoważności w tym zbiorze. Wówczas*

1. $X = \bigcup \{[x]_R \colon x \in X\}$,
2. *dla dowolnych $x, y \in X$, jeżeli $[x]_R \cap [y]_R \neq \varnothing$, to $[x]_R = [y]_R$.*

Czyli X/R jest rozbiciem zbioru X.

Dowód. Ustalmy dowolne $z \in [x]_R \cap [y]_R$. Jeżelu $t \in [x]_R$, to tRx. Wówczas tRy z przechodniości relacji, bo xRz i zRy. Zatem $t \in [y]_R$, a więc $[x]_R \subseteq [y]_R$. Analogcznie dowodzimy, że $[y]_R \subseteq [x]_R$. Pokazaliśmy zatem prawdziwość warunku 1. Warunek 2. jest oczywisty, gdyż z definicji $x \in [x]_R$ dla każdego $x \in X$ oraz $[x]_R \subseteq X$. $\square$

Zachodzi twierdzenie odwrotne:

Twierdzenie 1.7. *Jeżeli* Π *jest rozbiciem zbioru* X*, to istnieje taka relacja równoważności* R *w zbiorze* X*, że zbiór klas abstrakcji relacji* R *jest równy rodzinie* Π*.*

Dwa powyższe twierdzenia możemy zapisać razem:

Twierdzenie 1.8 (Zasada Abstrakcji)**.** *Niech* X *będzie dowolnym zbiorem. Jeżeli* R *jest relacją równoważności w zbiorze* X*, to* X/R *jest rozbiciem zbioru* X*. W drugą stronę: jeżeli* Π *jest rozbiciem zbioru* X*, to istnieje taka relacja równoważności* $R \subseteq X^2$ *w zbiorze* X*, że* $X/R = \Pi$*.*

1.3.2 Funkcje

Intuicje:

1.3.3 Ścisłe określenie. Funkcje jako zbiory.

Definicja 1.11. Relację $f \subseteq X \times Y$ nazywamy *funkcją* z X albo *odwzorowaniem* między zbiorami $X \to Y$ - co czytamy „ze zbioru X w zbiór Y", gdy

$$\text{Dla każdych } x \in X \text{ i } y, z \in X \text{ jeśli } (x, y) \in f \text{ oraz } (x, z) \in f \text{ to } z = y.$$

Uwaga. Warunek powyższy nazywa się *prawostronną jednoznacznością relacji* f. Zauważmy, że nazawa ta jest intuicyjna, oraz że warunek ten dobrze oddaje naszą intuicję, że przyporządkowanie elementowi $x \in X$ elementu ze zbioru Y jest *jednoznaczne.*

Uwaga (Konwencja notacyjna 1)*.* Piszemy $\boxed{y = f(x),\ \varphi(x)}$ gdy **dla każdego** x spełniającego $\varphi(x)$ zachodzi $y = f(x)$. Najczęściej warunek φ będzie w postaci „x należy do pewnego podzbioru D_f".

Np. mówimy, że funkcja jest „nieujemna", gdy $f(x) > 0, x \in D_f$ (tzn. „dla **każdego** $x \in D_f$").

Przykład. Zdefiniujmy funkcję $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ wzorem $f(x) = (-1)^x$. Wtedy możemy napisać:

$$f(x) > 0,\ x \text{ parzyste}$$

albo

$$f(x) = 1,\ x \in \{0, 2, 4, \ldots\}.$$

Obydwa wyrażenia są poprawne i dla naszej funkcji prawdziwe.

Uwaga (Konwencja notacyjna 2)*.* Gdy funkcja określona na liczbach rzeczywistych dla wszystkich argumentów przyjmuje wartości dodatnie (nieujemne), tzn. $f(x) \geqslant 0, x \in D_f$ ($f(x) > 0$), to fakt ten w tekście dla uproszczenia zapisujemy $f \geqslant 0$ ($f > 0$). Analogicznie gdy funkcja jest „ujemna" (tzn. $f(x) < 0, x \in D_f$), to piszemy $f < 0$.

Definicja 1.12. Niech $f\colon X \to Y$. Zbiór X nazywamy *dziedziną* funkcji a zbiór Y jego *przeciwdziedziną*. Zbiór Y w powyższym zapisie nie musi być *zbiorem wartości* funkcji f, tj. zbiorem $\{y \in Y\colon (x,y) \in f \subseteq Y$. Dziedzinę funkcji f oznaczamy czasami jako D_f albo $\mathrm{dom}(f)$ a przeciwdziedzinę jako R_f lub $\mathrm{range}(f)$ - od angielskiego „range", czyli „zasięg" funkcji.

Z powyższego określenia, dwie funkcje f i g są równe (piszemy wtedy $f = g$ wtedy i tylko wtedy gdy

1. $D_f = D_g$
2. $f(x) = g(x)$ dla każdego $x \in D_f (= D_g)$.

Z warunku drugiego wynika, że musi być również $R_f = R_g$. Warunek 2. **nie** jest wystarczający, aby uznać, że $f = g$!

Przykład. Niech f i g będą dane wzorami:

$$f(x) = \frac{x^2}{x} \quad \text{oraz} \quad g(x) = x.$$

Czy $f = g$? Odpowiedź brzmi nie! Otóż $f(x) = \frac{x^2}{x} = x$ dla $x \neq 0$. Dla $x = 0$ funkcja f nie jest w ogóle określona, gdyż nie możemy dzielić przez 0. Dla każdego $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ mamy więc $f(x) = g(x)$, jednak $g(x) = 0$ a $f(0)$ nie istnieje i stąd $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} = D_f \neq D_g = \mathbb{R}$.

Definicja 1.13. Mówimy, że funkcja $f\colon X \to Y$ jest **monotoniczna**, gdy spełnia jeden z poniższych (wzajemnie się wykluczających) warunków:

- Dla każdych $x_1, x_2 \in X$, jeśli $x_1 \leqslant x_2$, to $f(x_1) \leqslant f(x_2)$ i wtedy mówimy, że funkcja f jest *nierosnąca* albo *słabo malejąca*;
- Dla każdych $x_1, x_2 \in X$, jeśli $x_1 \geqslant x_2$, to $f(x_1) \geqslant f(x_2)$ i wtedy mówimy, że funkcja f jest *niemalejąca* albo *słabo rosnąca.*

Gdy nierówność w pierwszym punkcie jest ostra, to oczywiście mówimy, że funkcja f jest *malejąca* a gdy nierówność w drugim punkcie jest ostra, to mówimy, że funkcja f jest *rosnąca.* W obu przypadkach powiemy, że funkcja f jest ***ściśle*** *monotoniczna.*

Uwaga. Niektórzy autorzy przyjmują inne definicje:

- Funkcję (przy naszej definicji) *monotoniczną* określają jako *słabo monotoniczną*,
- a funkcję (w naszym rozumieniu) *ściśle monotoniczną* określają jako *monotoniczną.*

Można by więc też przyjąć, że funkcja monotoniczna to: albo „ściśle monotoniczna" albo „słabo monotoniczna" i operować wszystkimi trzema pojęciami w sposób jednoznaczny...

Definicja 1.14. Funkcję $f\colon X \to Y$ nazywamy *różnowartościową* i zapisujemy też jako $f\colon X \overset{1-1}{\to} Y$, gdy dla każdych $x_1, x_2 \in X$ takich, że $x_1 \neq x_2$, zachodzi $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Definicja 1.15. Funkcję $f\colon X \to Y$ nazywamy funkcją *„na”* (zbiorze Y) i zapisujemy też jako $f\colon X \overset{\text{na}}{\to} Y$, gdy **dla każdego** $y \in Y$ istnieje $x \in X$ takie, że $y = f(x)$.

Definicja 1.16. Funkcję $f\colon X \to Y$, która jest zarówno funkcją „na” jak i funkcją różnowartościową nazywamy *wzajemnie jednoznaczną* i zapisujemy też jako $f\colon X \underset{\text{na}}{\overset{1-1}{\to}} Y$ (lub $f\colon X \underset{1-1}{\overset{\text{na}}{\to}} Y$).

Uwaga. Funkcja wzajemnie jednoznaczna jest inaczej nazywana *bijekcją*. Bijekcje mają szczególne znaczenie w matematyce i w niektórych dziedzinach matematyki, bijekcje między szczególnymi zbiorami mają swoje własne nazwy i określenia. Np. jako „izomorfizmy” w topologii i algebrze.

Historycznie młodsze są określenia: *surjekcja* na funkcję „na” oraz *injekcja* na funkcję różnowartościową. Trzeba je niestety znać ze względu na ich obecność matematyce (tym samym w literaturze matematycznej), natomiast autor skryptu postara się ich unikać, więc czytelnik na początku nie musi się nimi przejmować i ograniczyć do (chyba) intuicyjnych określeń podanych w definicjach.

Ćwiczenie. Zauważmy, że definicję 1.14 mogliśmy zapisać za pomocą kwantyfikatorów:

$$\text{funkcja } f \text{ jest róznowartościowa, gdy } \forall_{x_1,x_2 \in X.}\ x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2).$$

Zapisać kolejno definicje funkcji różnowartościowej i funkcji wzajemnie jednoznacznej przy pomocy kwantyfikatorów.

Definicja 1.17. Niech $f\colon X \underset{\text{na}}{\overset{1-1}{\to}} Y$ będzie dowolną bijekcją. Funkcję $g\colon Y \to X$ taką, że

$$\text{jeśli } (x,y) \in f, \text{ to } (y,x) \in g$$

nazywamy *funkcją odwrotną do funkcji* f i przyjmujemy oznaczenie $g = f^{-1}$.

Zatem dla bijekcji $f\colon X \to Y$ jej funkcja odwrotna f^{-1} to funkcja taka, że dla każdego $y \in Y$ $f^{-1}(y) = x$ jeżeli $y = f(x)$ dla pewnego $x \in X$.

Definicja 1.18. Niech $f\colon P \to Y$ i $g\colon X \to P$ będą dowlnymi funkcjami na dow. zbiorach X, Y, P. *Złożeniem funkcji g z funkcją f* nazywamy zbiór (relację na zbiorze $X \times Y$)

$$f \circ g = \{(x,y)\colon \text{istnieje } p \in P \text{ takie, że } (x,p) \in g \text{ oraz } (p,y) \in f\}\,.$$

Zauważmy, że dla $x \in X$ oraz $y \in Y$ takich, że $(x,y) \in f \circ g$ „poprawnym” jest wyrażenie $y = f(g(x))$, z którego możemy „obliczać y-ka w zależności od x-a”. Możemy więc pisać, że $f \circ g = \{(x,y)\colon \exists_{p \in P.}\ g(x) = p \text{ oraz } f(p) = y\}$. Fakt, że f jest funkcją odwzorowującą zbiór X w zbiór Y możemy też narysować w formie diagramu:

$$X \xrightarrow{f} Y$$

Relacje[3] między funkcjami f, g i $f \circ g$ ilustruje poniższy diagram:

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dr, "f"] & \\ X \arrow[ur, "g"] \arrow[rr, "f \circ g"] & & Y \end{tikzcd}$$

Albo inaczej patrząc:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend right, "f \circ g"'] & P \arrow[r, "f"] & Y \end{tikzcd}$$

Teraz zapowiedziane

Twierdzenie 1.9. *Złożenie $f \circ g$ funkcji $f\colon P \to Y$ i $g\colon X \to P$ jest funkcją $f \circ g\colon X \to Y$.*

Dowód. Z definicji mamy, że $f \circ g \subseteq X \times Y$. Pokażemy, że relacja $f \circ g$ jest prawostronnie jednoznaczna. $\square$

Twierdzenie 1.10. *Składanie funkcji jest łączne, tj. dla odwzorowań $h\colon X \to U$, $g\colon U \to V$, $f\colon V \to Y$ zachodzi tożsamość*

$$f \circ (g \circ g) = (f \circ g) \circ h.$$

Tożsamość tę można obrazowo zilustrować kolejnym diagramem:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "h"] & Y \\ U \arrow[r, "g"] & V \arrow[u, "f"'] \end{tikzcd}$$

Dowód. Ustalmy funkcje pomocnicze: niech $G = g \circ h$ oraz $F = f \circ g$. G i F są poprawnie zdefiniowanymi funkcjami na mocy twierdzenia 1.9. Uzupełnijmy nasz diagram:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "h"] \arrow[dr, dashed, "G"] & Y \\ U \arrow[r, "g"] \arrow[ur, dashed, "F"'] & V \arrow[u, "f"'] \end{tikzcd}$$

[3]Nieformalnie mowiąc!

Widzimy, że $G\colon X \to V$ oraz $F\colon U \to Y$. Wtedy $G \circ f\colon X \to Y$ oraz $h \circ F\colon X \to Y$. Z definicji złożenia

$$f\circ$$

$\square$

Składanie odwzorowań $X \to X$ na ogół nie jest przemienne, czyli zdarzyć się może, że $f \circ g \neq g \circ f$ dla pewnych funkcji $f, g\colon X \to Y$.

Przykład. Niech $X = \{a, b\}$, gdzie $a \neq b$ oraz $f(a) = b$, $f(b) = a$, $g(a) = a$, $g(b) = a$.

Twierdzenie 1.11. *Dla dowolnej funkcji $f\colon X \to Y$ zachodzą tożsamości:*

$$f^{-1} \circ f = Id_X$$

$$f \circ f^{-1} = Id_Y$$

Dowód. Powyższe twierdzenia można by skwitować stwierdzeniem, że są oczywiste. Spójrzmy jednak na diagram:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[loop left, "\mathrm{Id}_X"] \arrow[rr, bend right, "f"'] & & Y \arrow[ll, bend right, "f^{-1}"'] \arrow[loop right, "\mathrm{Id}_Y"] \end{tikzcd}$$

Mamy:

$$f^{-1} \circ f = \{(x, y) \in X \times X\colon \exists_{z \in X} (x, z) \in f, (z, y) \in f^{-1}\} \subseteq X \times X$$

Niech $(x, y) \in X \times X$, to z definicji $(x, y) \in f$ oraz $(y, x) \in f^{-1}$, czyli $(x, x) \in f^{-1} \circ f$ i z prawostronnej jednoznaczności relacji $f^{-1} \circ f$ dla każdego $z \in X$, jeśli $(x, z) \in f^{-1} \circ f$, to $z = x$. Zatem $f^{-1} \circ f = X \times X = \mathrm{Id}_X$. Analogicznie można rozumowanie przeprowadzić dla złożenia $f \circ f^{-1}$. $\square$

Twierdzenie 1.12. *Dla dowolnych funkcji f, gz achodzi $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.*

Zwróćmy uwazę na zmianę porządku funkcji f i g w powyższym twierdzeniu!

*Struktura ilorazowa

Definicja 1.19. Relacja równoważności R na zbiorze X wyznacza jednoznacznie odwzorowanie $\kappa\colon X \to X/R$ dane wzorem $\kappa(x) = [x]_R$. Nazywamy je *odwzorowaniem kanonicznym.*

Niech dane będą przestrzenie X, X^* oraz określone na nich relacje równoważności $R \subseteq X$, $R^* \subseteq X^*$.

Definicja 1.20. Mówimy, że odwzorowanie $F\colon X \to X^*$ jest *zgodne z relacjami* R i R^*, gdy $xRy \Leftrightarrow F(x)R^*F(y)$, tj.

$$(x,y) \in R \Leftrightarrow (F(x), F(y)) \in R^*.$$

Gdy $F\colon X \to X^*$ jest zgodne z relacjami R i R^*, to istnieje takie odwzorowanie $G\colon X/R \to X/R^*$ przestrzeni ilorazowych, że

$$H \circ \varphi = \varphi \circ F,$$

gdzie $\varphi\colon X \to X/R$, $\varphi\colon X^* \to X/R^*$ są odwozorawniami kanonicznym między odpowiednimi przestrzeniami, co ilustruje następny diagram[4].

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\quad F \quad} & X^* \\ \big\downarrow{\scriptstyle\varphi} & & \big\downarrow{\scriptstyle\varphi^*} \\ X/R & \xrightarrow{\ G\ } & X^*/R^* \end{array}$$

1.3.4 Wielomiany

Wielomiany[5] bada algebra, ale są bardzo ważne w wielu gałęziach matematyki. My wielomiany będziemy rozumieć jako pewne szczególne funkcje.

Definicja 1.21. Niech $a_0, a_1, \ldots, a_n$ będą ustalonymi liczbami, $a_n \neq 0$. *Wielomianem* stopnia n nazywamy funkcję[6] W postaci

$$W(x) = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + \ldots + a_n \cdot x^n = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k.$$

Stopień wielomianu oznaczamy następująco[7]: $\deg W = n$. Każdą liczbę $a \in X$ taką, że $W(a) = 0$ nazywamy *pierwiastkiem* wielomianu W.

Jeśli wielomiany W i Q mają te same współczynniki przy odpowiadających potęgach parametru, to oczywiście $W(x) = Q(x)$ dla każd. x. W drugą stronę: zachodzi następujące

[4] diagramy *skierowane*, w których wybierając dowolną drogę skierowaną między dwoma wierzchołkami, otrzymamy ten sam wynik względem składania morfizmów nazywamy *diagramami przemiennymi.*

[5] Znane też jako *sumy algebraiczne*

[6] Funkcja $W\colon \mathbb{K} \to \mathbb{K}$, gdzie $\mathbb{K}$ może być dowolnym ciałem (patrz dodatek) - na razie czytelnik może przyjąć, że po prostu pewnym „zbiorem". W naszym przypadku: zbiorem liczb rzeczywistych (ogólniej: zespolonych)

[7] Od ang. „degree" - stopień.

Twierdzenie 1.13. *Niech dane będą wielomiany W i Q:*

$$W(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n,$$

$$Q(x) = b_0 + b_1x + \ldots + b_{n-1}x^{n-1} + b_nx^n.$$

Jeżeli dla każdego $x \in \mathbb{R}$ wielomiany $W(x)$ i $Q(x)$ przyjmują te same wartości to $a_i = b_i$ dla każdego $i = 0, 1, \ldots, n$.

Dowód. Indukcja względem stopni wielomianu. □

Twierdzenie 1.14 (Bezouta)**.** *Dla każdego W liczba $a \in \mathbb{R}$ jest pierwiastkiem wielomianu W wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taki wielomian P, że dla każdego $x \in \mathbb{R}$ prawdziwa jest równość*

$$W(x) = (x - a)P(x).$$

Ponadto stopień wielomianu P jest niższy niż wielomianu W.

Dowód. Musimy skorzystać z twierdzenia 1.21, które udowodnimy omawiając zasadę indukcji matematycznej. We wzorze 1.21 przyjmujemy inne oznaczenia: $a = x$, $b = a$ i przemnażamy ją obustronnie przez $(x - a)$. W ten sposób mamy, że

$$x^n - a^n = (x - a)(x^{n-1} + x^{n-2}a + \ldots + xa^{n-2} + a^{n-1}).$$

Gdy $W(a) = 0$, to

$$W(x) = W(x) - W(a) = (a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n) - (a_0 + a_1a + a_2a^2 + \ldots + a_na^n) =$$

$$= a_1(x - a) + a_2(x^2 - a^2) + a_3(x^3 - a^3) + \ldots + a_{n-1}(x^{n-1} - a^{n-1}) + a_n(x^n - a^n) =$$

$$= (x - a)[a_1 + a_2(x + a) + \ldots + a_{n-1}(x^{n-2} + x^{n-3}a + \ldots + xa^{n-3} + a^{n-2}) +$$

$$+ a_n(x^{n-1} + x^{n-2}a + x^{n-3}a^2 + \ldots + x^2a^{n-3} + xa^{n-2} + a^{n-1})]$$

Stąd $W(x) = (x - a)P(x)$, gdzie P jest wielomianem i $\deg P < n$. □

Twierdzenie 1.15 (Viete'a)**.** *Niech $x_1, x_2, \ldots, x_n$ będą pierwiastkami wielomianu $W(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, $a_n \neq 0$. Wówczas:*

$$\sum_{k=1}^{n} x_k = x_1 + x_2 + \ldots x_{n-1} + x_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$$

$$\sum_{j=1}^{n-1} \sum_{k=j+1}^{n} x_j x_k = x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_1x_n + x_2x_3 + x_2x_4 + \ldots + x_2x_n + \ldots + x_{n-1}x_n = \frac{a_{n-2}}{a_n}$$

$$\sum_{i=1}^{n-2} \sum_{j=i+1}^{n-1} \sum_{k=j+2}^{n} x_i x_j x_k = -\frac{a_{n-3}}{a_n}$$

$$\vdots$$

$$\prod_{k=1}^{n} x_k = x_1 x_2 \cdots x_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}$$

Albo inaczej:

$$\sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqslant n}^{n} x_{i_1} x_{i_2} x_{i_3} \cdots x_{i_k} = (-1)^k a_{n-k}, \quad \textit{dla każdego } k \in \mathbb{N}, 1 \leqslant k \leqslant n.$$

(Bez dowodu)

Twierdzenie 1.16. *Jeżeli ułamek nieskracalny $\frac{p}{q}$ jest pierwiastkiem wielomianu W danego:*

$$W(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + a_n x^n,$$

przy czym $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$, to:

- a_n jest podzielne przez q,

- a_0 jest podzielne przez p.

Dowód.

$$\text{Jeśli } W\left(\frac{p}{q}\right) = 0, \quad \text{to: } a_0 + a_1\frac{p}{q} + \ldots + a_{n-1}\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + a_n\left(\frac{p}{q}\right)^n = 0.$$

Mnożąc obydwie strony przez q^n otrzymujemy, że

$$a_0 q^n + a_1 q^{n-1} p + \ldots + a_{n-1} q p^{n-1} + a_n p^n = 0.$$

a więc $a_n p^n = q(aq^{n-1} + \ldots + a_{n-1}p^{n-1})$, czyli $a_n p^n$ jest podzielne przez q. Podobnie $a_0 q^n$ jest podzielne przez p. W teorii liczb dowodzi się, że:

jeżeli liczby całkowite a, b nie mają wspólnego dzielnika innego niż 1 oraz a dzieli bc (c - całkowite), to a dzieli c.

Ułamek $\frac{p}{q}$ z założenia jest nieskracalny, czyli p i q nie mają wspólnego dzielnika innego niż 1 i:

$$q \text{ nie dzieli } p \text{ a więc również nie dzieli } p^n$$

więc q musi dzielić a_n. Podobnie wywnioskujemy, że p dzieli a_0. □

1.3.5 Funkcje cyklometryczne, elementy trygonometrii

Cały ten paragraf będzie stanowił przykład do definicji 1.17.

1.4 Liczby

1.4.1 Liczby naturalne.

Zasada Indukcji Matematycznej

Twierdzenie 1.17 (Zasada Minimum). *Jeżeli $A \subseteq \mathbb{N}$ jest zbiorem niepustym, to istnieje w nim liczba najmniejsza* $\min A$ *czyli taka, że dla każdego $a \in A$ zachodzi $a \geqslant \min A$.*

Definicja 1.22. Mówimy, że zbiór A jest ograniczony z góry w zbiorze B, gdy istnieje $b \in B$ takie, że dla każdego $a \in A$ mamy $a \leqslant b$. Analogicznie określamy ograniczenie z dołu.

Twierdzenie 1.18 (Zasada Maksimum). *Jeżeli $A \subseteq \mathbb{N}$ jest zbiorem niepustym i ograniczonym z góry w zb. $\mathbb{N}$, to istnieje w nim liczba największa* $\max A$ *czyli taka, że dla każdego $a \in A$ zachodzi $a \leqslant \max A$.*

Twierdzenie 1.19 (Zasada Indukcji Matematycznej). *Niech $S \subseteq \mathbb{N}$ będzie zbiorem o następujących własnościach:*

1. *$1 \in S$,*
2. *$n \in S$ pociąga, że $n + 1 \in S$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$;*

Wtedy $\mathbb{N} \subseteq S$. (Czyli $S = \mathbb{N}$)

Możemy zamiast 1 przyjąć w powyższym twierdzeniu dowolne $n_0 \in \mathbb{N}$ i wtedy otrzymamy, że $S = \{n_0, n_0 + 1, n_0 + 2, \ldots\}$.
Prostą konsekwencją (właściwie przeformułowaniem powyższego twierdzenia) jest następujące

Stwierdzenie: Niech φ będzie dowolnym zdaniem logicznym o liczbach naturalnych. Jeżeli

1. $\varphi(n_0)$ dla pewnego $n_0 \in \mathbb{N}$ (tzn. zdanie φ jest prawdziwe dla n_0),
2. $\varphi(n)$ pociąga, że $\varphi(n + 1)$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$;

to $\varphi(n), n \in \mathbb{N}$ (tzn. zdanie φ jest prawdziwe dla dowolnej liczby naturalnej).

Powyższa procedura stanowi jedną z metod dowodzenia twierdzeń dotyczących liczb naturalnych.

Twierdzenie 1.20. *Zasada Indukcji Matematycznej, Zasada Minimum i Zasada Maksimum są równoważne.*

Dowód. Załóżmy prawdziwość Zasady Minimum. Wykażemy, że stąd wynika Zasada Indukcji Matematycznej. Niech φ będzie pewnym zdaniem dotyczącym liczb naturalnych i niech $\varphi(m) \Rightarrow \varphi(m+1), m \in \mathbb{N}$ oraz $\varphi(1)$. Zdefinujmy: $S = \{n \in \mathbb{N} \colon \varphi(n)\}$. Oczywiście $S \subseteq \mathbb{N}$. Sprawdzimy, że $\mathbb{N} \subseteq S$. Niech

$$\overline{S} = \{n \in \mathbb{N} \colon \neg\varphi(n)\} = \{n \in \mathbb{N} \colon \text{Nieprawda, że } \varphi(n)\ \}.$$

Wtedy $\overline{S} = \mathbb{N} \setminus S \subseteq \mathbb{N}$. Jeżeli $\overline{S}$ jest niepusty, to istnieje liczba $n_0 = \min \overline{S}$, $n_0 \neq 1 \notin \overline{S}$. Wtedy oczywiście $n_0 - 1 \notin \overline{S}$, czyli $\varphi(n_0 - 1)$ a więc $n_0 - 1 \in S$. Ale wtedy, z założenia zachodzi również $\varphi(n_0)$, czyli $n_0 \in S$ - sprzeczność, bo $S \cap \overline{S} = \varnothing$ z definicji. Zatem $\mathbb{N} \setminus S = \varnothing$ i $S \subseteq \mathbb{N}$ a stąd już $S = \mathbb{N}$.

Teraz załóżmy prawdziwość Zasady Indukcji Matematycznej. Niech $\varphi(m)$ oznacza, że „każdy zbiór niepusty, zawierający liczby niewiększe niż m ma element największy”. $\varphi(1)$ - oczywiste. Załózmy, że $\varphi(n)$ dla pewnego $n \in \mathbb{N}$. Pokażemy, że stąd wynika iż $\varphi(n+1)$. Niech A będzie zbiorem takim, że

1. $A \neq \varnothing$
2. $A \subseteq \mathbb{N}$
3. $a \in A \Rightarrow a \leqslant n + 1$

Jeżeli $n+1 \in A$, to $n+1 = \max A$ z definicji. Załóżmy, że $n+1 \notin A$. Wtedy A zawiera liczby niewiększe niż $n < n + 1 \notin A$ i na mocy założenia indukcyjnego ma element największy. Zatem $\varphi(1)$ oraz $\varphi(n) \Rightarrow \varphi(n+1), n \in \mathbb{N}$ i stąd na mocy Zasady Indukcji Matematycznej $\varphi(n)$ dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$, co oznacza, że Zasada Maksimum jest prawdziwa.

Na koniec załóżmy, że Zasada Maksimum jest prawdziwa i pokażemy, że wynika stąd Zasada Minimum. Ustalmy dowolny zbiór $A \subseteq \mathbb{N}$ i niech $S = \{n \in \mathbb{N} \colon \forall_{a \in A} n \leqslant a\}$. Jeżeli $1 \in A$, to po prostu $S = \varnothing$ i $1 = \min A$, gdyż $A \subseteq \mathbb{N}$. Zbiór S jest więc ograniczony z góry, przez każdy element zbioru A. Z Zasady Maksimum istnieje liczba $s_0 = \max S$. Załóżmy, że byłoby $s_0 \notin A$. Wtedy $s_0 + 1$ jest liczbą naturalną taką, że $s_0 < s_0 + 1 \leqslant a, a \in \mathbb{A}$, czyli $s_0 + 1 \in S$ i $s_0 + 1 > \max S$ - sprzeczność. Zatem musi być $s_0 \in A$ i każda liczba $a \in A$ jest większa lub równa od s_0. Na mocy definicji $s_0 = \min A$. Z dowolności zbioru A wynika prawdziwość Zasady Minimum.

Ostatecznie mamy, że Zasada Minimum pociąga Zasadę Indukcji Matematycznej, z Zasady Indukcji wynika Zasada Maksimum a z niej Zasada Minimum. Czyli twierdzenia te są równoważne. □

Przydatne twierdzenia i tożsamości, które dają się udowodnić przy pomocy indukcji matematycznej:

Twierdzenie 1.21. *Jeżeli a, b są dowolnymi liczbami* ***rzeczywistymi*** *i $a \neq b$, to dla dowolnej liczby naturalnej n prawdziwa jest równość:*

$$a^n + a^{n-1}b + a^{n-2}b^2 + \ldots + ab^{n-1} + b^n = \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a - b}. \tag{1}$$

Dowód. Dla $n = 1$ wzór 1.21 przyjmuje postać

$$a + b = \frac{a^2 - b^2}{a - b},$$

i po przekształceniu przyjmuje postać znanego wzoru na różnicę kwadratów dwóch liczb[8] $a^2 - b^2 = (a+b)(b-a)$. Łatwo go sprawdzić wymnażając nawiasy. Załóżmy, że wzór 1.21 dla pewnego $m \in \mathbb{N}$ zachodzi $a^m + a^{m-1}b + a^{m-2}b^2 + \ldots + ab^{m-1} + b^m = \frac{a^{m+1} - b^{m+1}}{a-b}$. Pomnóżmy tę nierówność obustronnie przez b, a następnie dodajmy do obydwu stron a^{m+1}. Mamy wtedy

$$a^{m+1} + a^m b + a^{m-1}b^2 + \ldots + a^2 b^{m-1} + ab^m + a^{m+1} = a^{m+1} + b \cdot \left(\frac{a^{m+1} - b^{m+1}}{b - a} \right) =$$

$$= \frac{a^{m+1}(a-b) + b(^{m+1} - b^{m+1})}{a - b} = \frac{a^{m+1} + b^{m+1}}{a - b}.$$

Zatem nasz wzór jest prawdziwy również dla $m + 1$. Na mocy Zasady Indukcji Matematycznej wzór 1.21 zachodzi dla **dowolnej** liczby naturalnej n. □

Twierdzenie 1.22 (Wzór dwumienny Newtona)**.** *Dla dowolnych $a, b \in \mathbb{R}$ i $n \in \mathbb{N}$ zachodzi tożsamość*

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k. \tag{2}$$

1.4.2 Krótko o liczbach rzeczywistych.

Definicja 1.23. Liczbę nazywamy wymierną, jeśli jest (czyli, gdy **daje się przedstawić w postaci**) ułamka dwóch liczb całkowitych.

Np. liczba $0,5 = \frac{1}{2}$ - jest liczbą wymierną. Podobnie $5 = \frac{5}{1}$ i ogólnie: każda liczba całkowita $c \in \mathbb{Z}$, gdyż można ją przedstawić jako $\frac{c}{1}$. Zbiór liczb wymiernych oznaczamy jako $\mathbb{Q}$. Zauważmy, że z powyższych obserwacji wynika iż $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$. Ciekawszy będzie następny

[8] to jeden ze szkolnych wzorów skróconego mnożenia

Przykład. Liczba $8,3333\ldots = 8,(3)$ **jest** liczbą wymierną. Daje się on sprowadzić do postaci ułamka liczb całkowitych:

$$\text{Niech } x = 8,(3). \text{ Wtedy } 10x = 83,(3).$$

$$9x = 10x - x = 83,(3) - 8,(3) = 72$$

Czyli $x = \frac{75}{9} = \frac{25}{3}$ - ułamek liczb całkowitych, a więc liczba wymierna. Inne uzasadnienie zobaczymy w rozdziale poświęconym szeregom liczbowym.

Szybko odkryjemy, że w zastosowaniach, niezależnie czy w czystej matematyce czy np. fizyce, pojawiają się liczby, które nie są liczbami wymiernymi.

Przykład. Rozważmy trójkąt prostokątny o przyprostokątnych długości 1 i przez p oznaczmy długość przeciwprostokątnej. Wtedy z twierdzenia Pitagorasa $p^2 = 1^2 + 1^2 = 2$. Czyli $p = \sqrt{2}$.

Przykład. Rozważmy wielomian (funkcję) wyrażoną równaniem $f(x) = x^2 - 2$. Funkcja ta przyjmuje wartość ujemną dla $x = 1$ oraz dodatnią dla $x = 2$ oraz wartość równą zero dla $x = \sqrt{2}$. Gdybyśmy jednak przyjęli, że $D_f = \mathbb{Q}$, to równanie $f(x) = 0$ nie ma rozwiązania.

Liczba $\sqrt{2}$ **nie** jest jest jednak liczbą wymierną. Dla dowodu, załóżmy nie wprost, że byłoby $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ - wtedy $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ dla pewnych $p, q \in \mathbb{Z}$ oraz ułamek $\frac{p}{q}$ jest nieskracalny. Dalej, przekształcamy równoważnie:

$$2 = \frac{p^2}{q^2}$$

$$p^2 = 2 \cdot q^2$$

$$p = \left(2 \cdot \frac{q}{p}\right) \cdot q \in \mathbb{Z}$$

Sprzeczność z założeniem - $\left(2 \cdot \frac{q}{p}\right) \cdot q$ nie jest liczbą niepodzielną przez q. Zatem nie może być $\sqrt{2} = r/s$ dla r, s całkowiych, co było do udowodnienia.

Pokażemy ogólniejsze stwierdzenie. Przy pierwszej lekturze dowód można pominąć[9].

Twierdzenie 1.23. *Jeżeli liczba naturalna n nie jest kwadratem liczby całkowitej, to nie jest też kwadratem liczby wymiernej.*

Łatwo pokazać, że suma, różnica a także iloczyn i iloraz dwóch liczb wymiernych jest również liczbą wymierną (dobre ćwiczenie).

Definicja 1.24. Mówimy, że zbiór $A \subseteq \mathbb{R}$ jest *ograniczony z góry [z dołu]*, gdy istnieje taka liczba $M > 0$, że

$$a \in A \Rightarrow a \leqslant M \, [a \in A \Rightarrow a \geqslant M]$$

Liczbę M nazywamy *ograniczeniem górnym [dolnym]* zbioru A. Gdy zbiór A jest ograniczony równocześnie z góry i z dołu, to mówimy po prostu, że jest *ograniczony.*

[9] a na pewno nie należy się przejmować, jeśli w tej chwili prześledzenie rozumowania jest trudne.

Definicja 1.25. Ustalmy zbiór $A \subseteq \mathbb{R}$.

Kresem górnym nazywamy **najmniejsze** z ograniczeń górnych zbioru A. Czyli M jest kresem górnym zbioru $A \subseteq \mathbb{R}$, gdy

$$\forall_{M' \in \mathbb{R}.} \text{ Jeżeli } M' \text{ jest ograniczeniem górnym zb. } A, \text{ to } M \leqslant M'.$$

Kresem dolnym nazywamy **największe** z ograniczeń dolnych zbioru A. Czyli M jest kresem dolnym zbioru $A \subseteq \mathbb{R}$, gdy

$$\forall_{M' \in \mathbb{R}.} \text{ Jeżeli } M' \text{ jest ograniczeniem dolnym zb. } A, \text{ to } M' \leqslant M.$$

Uwaga. M jest kresem górnym zbioru $A \subseteq \mathbb{R}$, gdy

$$M \text{ jest ograniczeniem górnym zbioru } A \text{ oraz } \forall_{\varepsilon >} \exists_{a \in A.}\ a > M - \varepsilon.$$

Podobnie M jest kresem dolnym zbioru $A \subseteq \mathbb{R}$, gdy

$$M \text{ jest ograniczeniem dolnym zbioru } A \text{ oraz } \forall_{\varepsilon >} \exists_{a \in A.}\ a < M + \varepsilon.$$

Kres górny zbioru A oznaczamy przez $\sup A$ - od łac. supremum - i tak też czasem będziemy kres górny nazywać. Kres dolny zbioru A oznaczamy $\inf A$ od łac. infimum.

Twierdzenie 1.24. *Dla dowolnego zbioru $A \subseteq \mathbb{R}$ możemy przyjąć oznaczenie: $-A := \{-a \in \mathbb{R} \colon a \in A\}$. Wówczas*

$$\inf(-A) = -\sup A,$$
$$\sup(-A) = -\inf A.$$

Aksjomat (Aksjomat ciągłości)**.** *Jeśli zbiór $A \subseteq \mathbb{R}$ jest niepusty i ograniczony z góry, to ma kres górny.*

Łatwo pokazać, że powyższe jest równoważne następującemu twierdzeniu

Twierdzenie 1.25. *Jeśli zbiór $A \subseteq \mathbb{R}$ jest niepusty i ograniczony z dołu, to ma kres dolny.*

Aksjomat ciągłości możemy wyrazić przez równoważną, intuicyjniejszą własność zbioru liczb rzeczywistych:

Twierdzenie 1.26. *Jeżeli A i B są niepustymi podzbiorami $\mathbb{R}$ takimi, że*

- $\mathbb{R} = A \cup B$, $A \cap B = \varnothing$;
- *Jeżeli $x \in A$ oraz $y \in B$, to $x < y$;*

to albo zbiór A ma element największy, albo zbiór B ma element najmniejszy.

Dowód. Zbiór B jest ograniczony z dołu, więc ma kres dolny. Niech $b = \inf B$. Ponieważ dowolny element $a \in A$ ogranicza zbiór B z dołu, to $a \leqslant b$.
Jeżeli $b \in A$, to z ostatniej nierówności wynika, że b jest elementem największym zbioru A. Jeżeli $b \in B$, to z definicji kresu dolnego b jest elementem najmniejszym zbioru B. $\square$

Stwierdzenie: Między dowolnymi liczbami wymiernymi istnieje trzecia l. wymierna. Jeżeli np. $r, s \in \mathbb{Q}$, to $r < \frac{r+s}{2} < s$ oraz zgodnie z tym co powiedzieliśmy $\frac{r+s}{2} \in \mathbb{Q}$.

Stwierdzenie: Między dowolnymi liczbami rzeczywistymi istnieje trzecia l. rzeczywista. Jeżeli np. $r, s \in \mathbb{R}$, to $r < \frac{r+s}{2} < s$ oraz niewątpliwie $\frac{r+s}{2} \in \mathbb{R}$.

Lemat 1.1. *Jeżeli $\frac{m}{n}$ oraz $\frac{r}{s}$ są liczbami wymiernymi oraz $\frac{r}{s} \neq 0$, to $\frac{m}{n} + \left(\frac{r}{s}\right)\sqrt{2}$ jest liczbą niewymierną.*

Dowód.

Załóżmy, że $\frac{m}{n} + \left(\frac{r}{s}\right)\sqrt{2}$ jest l. wymierną. Czyli jest równa $\frac{p}{q}$ dla pewnych liczb $p, q \in \mathbb{Z}$.

$$\text{Ale wtedy } \sqrt{2} = \frac{s(pn - mq)}{qnr} \text{ i stąd } \sqrt{2} \text{ jest liczbą wymierną - sprzeczność.}$$

□

Twierdzenie 1.27. *Między dowolnymi dwiema różnymi liczbami wymiernymi istnieje liczba niewymierna.*

Dowód. Ustalmy liczby wymierne $\frac{m}{n}$ oraz $\frac{r}{s}$ tak, że $\frac{m}{n} < \frac{r}{s}$. Wtedy

$$\frac{m}{n} < \frac{m}{n} + \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{r}{s} - \frac{m}{n}\right) < \frac{r}{s}. \text{ (Ponieważ } \frac{\sqrt{2}}{2} < 1 \text{).}$$

Na mocy poprzedniego lematu - liczba pomiędzy nierównościami jest niewymierna. □

Twierdzenie 1.28. *Pomiędzy dowolnymi dwiema różnymi liczbami niewymiernymi istnieje liczba wymierna.*

Dowód. Ustalmy liczby niewymierne a i b takie, że $a < b$. Rozważmy ich rozwinięcia dziesiętne i niech n-te miejsce dziesiętne będzie pierwszym, w którym a i b się różnią. Wtedy

$$a = a_0, a_1 a_2 \dots a_{n-1} a_n \dots,$$

$$b = a_0, a_1 a_2 \dots a_{n-1} b_n \dots,$$

gdzie $a_n \neq b_n$. Niech $x = a_0, a_1 \dots a_{n-1} b_n$. Wtedy x jest liczbą wymierną oraz oczywiste jest, że $a < x \leqslant b$. Jednak b jest liczbą niewymierną, zatem musi być $x \neq b$ i stąd mamy, że $a < x < b$. □

Ogólnie: czytelnik musi wiedzieć, że między dowolnymi liczbami rzeczywistymi znajduje się liczba wymierna oraz liczba niewymierna. Należy również wiedzieć, że

- suma jak i różnica liczby wymiernej i liczby niewymiernej jest l. niewymierną.

- iloczyn liczby wymiernej (różnej od zera) i niewymiernej jest l. niewymierną.
- suma, różnica jak i iloczyn (a tym samym iloraz) dwóch liczb niewymiernych **nie** musi być l. niewymierną!

$$\text{Np. } \underbrace{(1+\sqrt{2})}_{\substack{\text{liczba}\\ \text{niewymierna}}} - \sqrt{2} = 1 \in \mathbb{Q}.$$

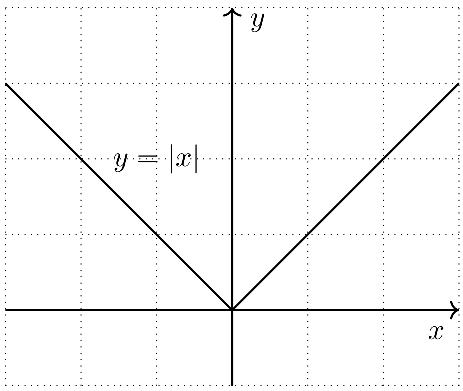
$$\text{Podobnie mamy } (1-\sqrt{2}) + \sqrt{2} = 1.$$

$$\text{Iloczyn/iloraz: } \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1 \text{ i } \sqrt{2}\cdot\sqrt{2} = 2.$$

Definicja 1.26. *Modułem* albo *wartością bezwzględną* liczby $x \in \mathbb{R}$ nazywamy liczbę $|x|$ daną w następujący sposób:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{dla } x \geqslant 0, \\ -x & \text{dla } x < 0. \end{cases}$$

Możemy rozważyć funkcję $x \mapsto |x|$. Jej wykres wygląda następująco:



Twierdzenie 1.29. *Dla dowolnych liczb rzeczywisych $x, y, z \in \mathbb{R}$:*

$$|x| \geqslant 0 \tag{3}$$

$$|x| \leqslant a \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } -a \leqslant x \leqslant a \tag{4}$$

$$|x+y| \leqslant |x| + |y| \tag{5}$$

$$||x| - |y|| \leqslant |x-y| \tag{6}$$

$$|xy| = |x| \cdot |y| \tag{7}$$

Dowód. Własności 3, 4 oraz 7 wynikają wprost z definicji. Dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}$ mamy

$$-|x| \leqslant x \leqslant |x| \text{ oraz } -|y| \leqslant y \leqslant |y|.$$

Dodając te nierówności stronami, otrzymujemy że

$$-(|x| + |y|) \leqslant x + y \leqslant |x| + |y|$$

i na mocy wzoru 4 mamy $|x + y| \leqslant |x| + |y|$. Teraz korzystając z tej własności, możemy napisać, że

$$|x| = |(x - y) + y| \leqslant |x - y| + |y|.$$

Stąd $|x| - |y| \leqslant |x - y|$. Analogicznie możemy pokazać, że

$$|y - x| = -|x - y| \leqslant |x| - |y|$$

czyli razem:

$$-|x - y| \leqslant |x| - |y| \leqslant |x - y|$$

i ponownie z własności 4 otrzymujemy, że $||x| - |y|| \leqslant |x - y|$. □

Definicja 1.27. Funkcje $\min\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ i $\max\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dane są w następujący sposób:

$$\min(x, y) = \begin{cases} y, & \text{dla } x \geqslant y; \\ x, & \text{dla } y > x. \end{cases}$$

$$\max(x, y) = \begin{cases} x, & \text{dla } x \geqslant y; \\ y, & \text{dla } y > x. \end{cases}$$

Ćwiczenie. Sprawdzić, że $|x| = \max(-x, x) = -\min(-x, x)$.

Ćwiczenie. Udowodnić, że

$$\min(x, y) = \frac{x + y - |x - y|}{2},$$

$$\max(x, y) = \frac{x + y + |x - y|}{2}.$$

Ćwiczenie. Udowodnić, że

$$\max(x, y) = x + y - \min(x, y),$$

$$\min(x, y) = x + y - \max(x, y).$$

Definicja 1.28. Dla funkcji $f\colon A \to \mathbb{R}$ oznaczamy:

$$\sup_{x \in A} f(x) := \sup\{f(x)\colon x \in A\},$$

$$\inf_{x \in A} f(x) := \inf\{f(x)\colon x \in A\}.$$

Ćwiczenie. Udowodnić, że jeżeli $f, g \colon A \to \mathbb{R}$ są funkcjami ograniczonymi z góry, to

$$\sup_{x\in A} f(x) + \sup_{x\in A} g(x) \leqslant \sup_{x\in A} \left(f(x) + g(x)\right).$$

Twierdzenie 1.30. *Niech $f, g \colon A \to \mathbb{R}$ będą funkcjami ograniczonymi z góry. Wówczas*

$$|\sup_{x\in A} f(x) - \sup_{x\in A} g(x)| \leqslant \sup_{x\in A} |f(x) - g(x)|.$$

Dowód. Zauważmy, że $f(x) = (f(x) - g(x)) + g(x) \leqslant |f(x) - g(x)| + g(x)$. Wówczas

$$\begin{aligned}\sup_{x\in A} f(x) = \sup_{x\in A} ((f(x) - g(x)) + g(x)) &\leqslant \sup_{x\in A} (|f(x) - g(x)| + g(x)) \leqslant \\ &\leqslant \sup_{x\in A} |f(x) - g(x)| + \sup_{x\in A} g(x)\end{aligned}$$

a stąd $\sup_{x\in A} f(x) - \sup_{x\in A} g(x) \leqslant \sup_{x\in A} |f(x) - g(x)|$. Podobnie $g(x) = (g(x) - f(x)) + f(x) \leqslant |g(x) - f(x)| + f(x)$ i stąd otrzymamy

$$\sup_{x\in A} g(x) \leqslant \sup_{x\in A} |g(x) - f(x)| + \sup_{x\in A} f(x) = \sup_{x\in A} |f(x) - g(x)| + \sup_{x\in A} f(x),$$

i stąd $-\sup_{x\in A} |f(x) - g(x)| \leqslant \sup_{x\in A} f(x) - \sup_{x\in A} g(x)$, czyli . Łącząc obydwie uzyskane nieróności otrzymujemy tezę twierdzenia. $\square$

2 Granica ciągu liczbowego

Intuicje Rozważmy dowolny zbiór elementów. Np. zbiór $\{1, 2, 4\}$ albo zbiór $\{a, b, c, \ldots, x, y, z\}$. Ustawmy np. wyrazy pierwszego zbioru następująco:

$$1, 2, 1, 2, 1, 4, 1, 2, 1, 2, 1, 4, \ldots$$

Albo tak:

$$1, 2, 4, 1, 2, 4, 1, 2, 4, \ldots$$

Obydwa te "ciągi" składają się z elementów takiego samego zbioru, ale są to różne "byty", gdyż określiliśmy pewną kolejność występowania elementów. Podobnie ciąg wyrazów drugiego z naszych zbiorów: $a, b, c, d, x, y, z, a, b, c, d, \ldots$ jest innym ciągiem niż ciąg $x, z, x, y, b, a, c, x, z, x, y, b, a, c, \ldots$; chociaż mają ten sam zbiór „wyrazów".

Przykład. Rozważmy ciąg $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5} \ldots$. Domyślamy się, jaka jest **reguła**, według której określa się następny wyraz ciągu. Mianowicie: n-ty wyraz ciągu ma postać $\frac{1}{n}$. I tak np. dla $n = 1$ mamy

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{1} = 1.$$

a dla $n = 2$:

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{2}.$$

Kiedy rozważamy różne ciągi, często chcemy nadać im nazwy albo symboliczne oznaczenia podobnie jak funkcjom. Rozważamy np. ciąg elementów $a_1, a_2, a_3, \ldots$. W powyższym przykładzie $a_n = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$.

Przykład. Zdefiniujmy taki ciąg $b_1, b_2, b_3 \ldots$, że $b_n = 2n$, $n \in \mathbb{N}$. Pierwsze wyraz tego ciągu są następujące:

$$2, 4, 6, 8, 10, 12, \ldots$$

W ciągach zatem, w przeciwieństwie do zbiorów, ważna jest *kolejność* elementów. Żeby zdefiniować ciąg przy pomocy już znanych pojęć matematycznych, możemy przyjąć $f \colon \mathbb{N} \to Y$ tak, że $a_n = f(n)$. Ciąg jest zatem funkcją określoną na zbiorze liczb naturalnych. Lepiej, niech oznacznie dla wyrazu ciągu i dla funkcji będzie tożsame:

Definicja 2.1. Ciągiem nazywamy funkcję $a \colon \mathbb{N} \to Y$ i przyjmujemy oznaczenie: $a(n) = a_n$. Ciąg jest tożsamy z nieskończoną krotką $(a_1, a_2, \ldots)$. Sam ciąg oznaczamy symbolicznie jako $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

W tym rozdziale rozważamy ciągi "liczbowe" i mamy na myśli liczby rzeczywiste, zatem $Y = \mathbb{R}$. Zajmiemy się teraz kluczowym pojęciem **granicy** ciągu. Zauważmy, że każdy kolejny wyraz ciągu $\left(\frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ jest coraz mniejszy, ale zawsze pozostaje większy od zera. W tym wypadku "granicą" do której dążą wyrazy ciągu jest właśnie zero. Mówimy też, że *ciąg* „dąży" do zera. Np. ciąg $\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)_{n \in \mathbb{N}}$ dąży do 1, ciąg $(n)_{n \in \mathbb{N}}$ dąży do *nieskończoności.*

Definicja 2.2. Mówimy, że ciąg $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest *zbieżny* do granicy g lub ma *granicę* g i piszemy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = g$, gdy dla dla dowolnej liczby rzeczywistej $\varepsilon > 0$ istnieje taka liczba naturalna N, że dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant N$ zachodzi $|a_n - g| < \varepsilon$.
Możemy zapisać ten warunek symbolicznie:

$$\forall_{\varepsilon>0}\exists_{N\in\mathbb{N}}\forall_{\substack{n\in\mathbb{N}\\ n\geqslant N}}|a_n - g| < \varepsilon.$$

W praktyce warunek w powyższej definicji pisze się pomijając "$n \in \mathbb{N}$" pod kwantyfikatorem, mając w domyśle, że "wskaźnik" n wyrazu ciągu jest liczbą naturalną. Możemy też powiedzieć, że:
Mówimy, że ciąg $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest *zbieżny* do granicy g i piszemy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = g$, gdy dla dowolnego $\varepsilon > 0$ *począwszy od pewnego n* zachodzi nierówność $|a_n - g| < \varepsilon$.

Spróbujmy jeszcze wzbogacić nasz język i wyrazić definicję w jeszcze bardziej naturalny a mniej symboliczny sposób. Weźmy takie nieprecyzyjne, niematematyczne wręcz stwierdzenie:

Prawie wszystkie liczby ze zbioru A mają własność $\mathcal{X}$.

Nie ważne co to za hipotetyczny zbiór A i tajemnicza własność X. Może A jest zbiorem kotów w domu pewnego matematyka a $\mathcal{X}$ to "jest czarny". Problem: co to znaczy "prawie wszystkie"? 90%? Czy może "prawie wszystkie" zaczyna się dopiero od 99%? W tekście matematycznym i ścisłych definicjach nie używamy takich nieprecyzyjnych stwierdzeń. Ale np. A mogłoby być zbiorem liczb naturalnych, a własność $\mathcal{X}$ oznaczać "jest większa od 1000". Rzeczywiście, tylko skończona liczba elementów zbioru A **nie** posiada tej własności, więc istotnie - jak wielka by ona nie była, jest "znacząco" mniejsza od nieskończoności, a tyle jest elementów zbioru A **mających** tę własność.

> **Umówmy się** więc, że dla zbioru **nieskończonego** A zdanie *prawie wszystkie elementy zbioru A spełniają własność $\mathcal{X}$* oznacza, że "własność $\mathcal{X}$ zachodzi dla wszystkich elementów zbioru A za wyjątkiem pewnej skończonej ilości".

Pamiętając, że $|x - y|$ wyraża odległość między liczbami na osi rzeczywistej, możemy teraz napisać, że $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = g$, gdy dla dowolnego $\varepsilon > 0$ odległość między liczbą g a prawie wszystkimi wyrazami ciągu $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest mniejsza od ε.

Uwaga. Nie należy mylić ciągu $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ze zbiorem jego wartości $\{a_n \colon n \in \mathbb{N}\}$ (oznaczanym czasem $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ale w starszych książkach w ten sposób oznaczano też sam ciąg, więc będziemy tego unikać. My w każdym razie staramy się rezerwować symbole otoczone nawiasami klamrowymi $\{,\}$ dla zbiorów.). Ciąg $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest odwzorowaniem, funkcją. Zbiór wartości... cóż, zbiorem.

Przykład. Pokażemy z definicji, że $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.
Ustalmy dowolną liczbę rzeczywistą $\varepsilon > 0$. Musimy znaleźć taką liczbę naturalną $N \in \mathbb{N}$,

że
$$\left|\frac{1}{n}-0\right| = \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon \text{ dla } n \geqslant N.$$
Ale gdy tylko pomnożymy powyższą nierówność obustronnie przez n i podzielimy przez ε (możemy to zrobić, gdyż z założenia $\varepsilon > 0$), to mamy, że
$$\frac{1}{n} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}.$$
Wystarczy więc przyjąć np. $N = \lfloor \frac{1}{\varepsilon} \rfloor + 1$ - jest to liczba naturalna, większa od $\frac{1}{\varepsilon}$. Zatem dla tak dobranego N dla każdego $n \geqslant N$ mamy $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Z dowolności wyboru $\varepsilon > 0$ (tzn. nie poczyniliśmy żadnych dodatkowych założeń co do ε i stąd wiemy, że dla każdej takiej liczby znajdziemy odpwiadającą mu liczbę N według powyższej procedury) mamy, że $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Ćwiczenie. Udowodnić, że jeżeli $p > 0$, to $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^p} = 0$.

Twierdzenie 2.1. *Ciąg nie może być zbieżny do dwóch różnych granic. Innymi słowy granica ciągu jest wyznaczona jednoznacznie.*

Dowód. Niech $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będzie ciągiem zbieżnym. Załóżmy nie wprost, że byłoby $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = g_1$ i równocześnie $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = g_2$ oraz $g_1 \neq g_2$. Ustalmy dowolny $\varepsilon > 0$. Wtedy istnieją takie $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$, że
$$|a_n - g_1| < \varepsilon \text{ dla } n \geqslant N_1$$
$$|a_n - g_2| < \varepsilon \text{ dla } n \geqslant N_2$$
Przyjmijmy $N = \max\{N_1, N_2\}$. Wtedy dla każdego $n \geqslant N$ prawdziwe są nierówności:
$$|g_1 - a_n| < \varepsilon.$$
$$|a_n - g_2| < \varepsilon.$$
Rozważmy teraz, co by było dla $\varepsilon = \frac{1}{2}|g_1 - g_2|$. Korzystając z nierówności trójkąta otrzymujemy wtedy
$$|g_1 - g_2| \leqslant |g_1 - a_n| + |a_n - g_2| < 2\varepsilon = |g_1 - g_2| \text{ - oczywista sprzeczność.}$$
Zatem ciąg nie może mieć dwóch różnych granic. □

Twierdzenie 2.2 (O zachowaniu nierówności przy przejściu do granicy)**.** *Ustalmy dwa ciągi $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tak, że $a_n < b_n$ począwszy od pewnego wyrazu. Wówczas,*
$$\lim_{n\to\infty} a_n \leqslant \lim_{n\to\infty} b_n,$$
jeśli tylko obydwie granice istnieją.

Dowód. TO-DO □

Uwaga. Możemy w tezie powyższego twierdzenia przyjąć oczywiście $a_n \leqslant b_n$ zamiast ostrej nierówności.

Wniosek. Jeżeli $a_n \leqslant A, n \in \mathbb{N}$, to $\lim_{n\to\infty} a_n \leqslant A$ (jeśli taka granica istnieje). Wystarczy w powyższym twierdzeniu przyjąć ciąg $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ stały: $b_n = A, n \in \mathbb{N}$.

Definicja 2.3. Mówimy, że ciąg $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest ograniczony z góry [z dołu], gdy istnieje taka liczba $M \in \mathbb{N}$, że

$$a_n \leqslant M \ [M \leqslant a_n] \text{ dla każdego } n \in \mathbb{N}.$$

Gdy ciąg jest ograniczony i z góry i z dołu to mówimy po prostu, że "jest ograniczony".

Ciągi rozbieżne do nieskończoności:

Definicja 2.4. Mówimy, że ciąg $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest *rozbieżny do plus-nieskończoności* i piszemy $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$, gdy

$$\forall_{E>0}\exists_{N\in\mathbb{N}}\forall_{n\geqslant N}.\ a_n > E.$$

Definicja 2.5. Mówimy, że ciąg $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest *rozbieżny do minus-nieskończoności* i piszemy $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$, gdy

$$\forall_{E>0}\exists_{N\in\mathbb{N}}\forall_{n\geqslant N}.\ a_n < E.$$

Definicja 2.6. Jeżeli ciąg $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest rozbieżny do plus albo minus-nieskończoności, to mówimy też, że ma *granicę niewłaściwą* równą odpowiednio $+\infty$ albo $-\infty$.

Definicja 2.7. Jeżeli ciąg ma granicę **skończoną**, to mówimy że jest *zbieżny*. W przeciwnym wypadku, gdy granica ta nie istnieje lub jest nieskończona, to mówimy że jest *rozbieżny*.

2.1 Twierdzenia przydatne w badaniu zbieżności ciągu i szukaniu granic

Twierdzenie 2.3 (arytmetyka granic). *Niech $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będą ciągami liczb rzeczywistych i niech $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim_{n\to\infty} b_n = b$, tak że $a, b \in \mathbb{R}$. Wówczas*

1. $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b$,
2. $\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = a - b$,
3. $\lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = a \cdot b$,
4. $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$ *o ile* $b \neq 0$ *i* $b_n \neq 0, n \in \mathbb{N}$.

Bezpośrednio z 2. w poprzednim twierdzeniu wynika

Twierdzenie 2.4. $\lim_{n\to\infty} a_n = g$*, dla* $g \in \mathbb{R}$ *wtedy i tylko wtedy, gdy* $\lim_{n\to\infty} |a_n - g| = 0$*.*

Twierdzenie 2.5. *Każdy ciąg monotoniczny i ograniczony jest zbieżny.*

Ćwiczenie. Udowodnić, że z twierdzenia 2.5 wynika Aksjomat 1.4.2 ciągłości.

Przykład (Ciąg określony rekurencyjnie). Zdefiniujmy ciąg następująco

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_n = \frac{1}{2}a_n \end{cases}$$

Oczywiście łatwo zauważyć, że jest to ciąg geometryczny i $a_n = \frac{1}{2^{n-1}} \to 0$ ale zapomnijmy o tym na chwilę: spróbujemy znaleźć metodę, która pozwoli nam radzić sobie również z bardziej skomplikowanymi ciągami zadanymi rekurencyjnie. Zauważmy, że $a_n \leqslant a_{n-1}$ oraz $1 \geqslant a_n \geqslant 0$, zatem ciąg jest monotoniczny i ograniczony. Wiemy, że granica istnieje - oznaczmy ją a:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a$$

Ale również

$$\lim_{n\to\infty} a_{n-1} = a.$$

Układamy równanie:

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}a_{n-1} = \frac{1}{2}a$$

zatem $2a = a$ - jedyna liczba rzeczywista spełniająca to równanie to 0. Zauważmy, że gdybyśmy nie sprawdzili, że ciąg w ogóle *jest* zbieżny, nie moglibyśmy posługiwać się założeniem, że istnieje skończona granica „a”, którym posłużyliśmy się aby ją wyliczyć.

Twierdzenie 2.6. *Niech* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *będzie ciągiem.*

1. *Jeżeli* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *jest niemalejący (tj. słabo rosnący), to* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *ma granicę (własciwą lub niewłaściwą) oraz*
$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n \colon n \in \mathbb{N}\};$$

2. *Jeżeli* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *jest nierosnący (tj. słabo malejący), to* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *ma granicę (własciwą lub niewłaściwą) oraz*
$$\lim_{n\to\infty} a_n = \inf\{a_n \colon n \in \mathbb{N}\}.$$

Twierdzenie 2.7. *Niech* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *będzie zbieżnym do zera, a* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *ciągiem ograniczonym. Wtedy*

$$\lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = 0.$$

Dowód. Niech M będzie ograniczeniem ciągu $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, tzn. $|b_n| \leqslant M, n \in \mathbb{N}$. Ustalmy dowolny $\varepsilon > 0$. Istnieje $N \in \mathbb{N}$ takie, że $a_n < \dfrac{\varepsilon}{M}, n \geqslant N$. Wówczas $a_n \cdot b_n < \dfrac{\varepsilon}{M} \cdot M = \varepsilon, n \geqslant N$, czyli (z dowolności wyboru ε) oznacza to, że $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 0$. □

Zauważmy, że powyższe twierdzenie można również zastosować do poprzedniego przykładu. Podamy jeszcze jeden:

Przykład.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n} = 0.$$

Zauważmy, że $\sin n \leqslant 1$ oraz oczywiście $\frac{1}{n} \to 0$.

Przykład (Iteracyjne obliczanie pierwiastków). Ustalmy liczbę $a > 0$ i zdefiniujmy rekurencyjnie ciąg $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ biorąc **dowolne** $a_1 > 0$ oraz

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{a}{a_n}\right) \text{ dla } n \geqslant 1.$$

Pokażemy, że wtedy

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sqrt{a}.$$

Twierdzenie 2.8 (O trzech ciągach)**.** *Niech $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będą ciągami liczb rzeczywistych, tak że $a_n \leqslant b_n \leqslant c_n$ od pewnego miejsca, tzn. istnieje $N \in \mathbb{N}$, że nierówności te zachodzą dla każdego $n \geqslant N$. Wówczas, jeżeli $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = g$, to*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} c_n = g.$$

Dowód. TO-DO □

Przykład. Udowodnimy, że $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{q} = 1$ dla dowolnego $q > 0$, $q =$ constans. Skorzystamy z twierdzeń 2.8 oraz 2.4. Najpierw weźmy $q < 1$. Niech $a_n := 1 - \sqrt[n]{q}$. Chcemy pokazać, że $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. (Wówczas $\lim\limits_{n\to\infty} |1 - \sqrt[n]{q}| = 0$ i stąd $\sqrt[n]{q} \to 1$.) Z nierówności Bernoulliego:

$$1 - n \cdot a_n \leqslant (1 - a_n)^n = q$$

i stąd $0 \leqslant a_n \leqslant \dfrac{1-q}{n}$, $n \in \mathbb{N}$. Oczywiście $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{q-1}{n} = 0$ i stąd $a_n \geqslant 0$ i wówczas $a_n \to 0$ na mocy twierdzenia o trzech ciągach. Jeżeli $q > 1$, to bierzemy $a_n := \sqrt[n]{q} - 1$ i wówczas mamy $a_n \geqslant 0$ i ponownie szacujemy: $1 + na_n \leqslant (1 + a_n)^n = q$ a stąd $0 \leqslant a_n \leqslant \dfrac{q-1}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$. Zatem $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, gdzie $a_n = 1 - \sqrt[n]{q}$, czyli $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{q} = 1$.

Twierdzenie 2.9. *Jeżeli $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = g$, to $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = |g|$.*

Dowód. Ze wzoru 6:

$$0 \leqslant ||a_n| - |g|| \leqslant |a_n - g|.$$

Stąd i z twierdzenia o trzech ciągach (2.8):

$$\lim_{n\to\infty} |a_n - g| = 0 \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} ||a_n| - |g|| = 0.$$

Z twierdzenia 2.4:
$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} |a_n - a| = 0.$$
Łącząc dwa poprzednie fakty:
$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} ||a_n| - |a|| = 0 \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} |a_n| = |g|.$$
□

Twierdzenie 2.10 (Stolza)**.** *Niech $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będzie dowolnym ciągiem, a $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ciągiem monotonicznym i $\lim_{n\to\infty} y_n = \infty$. Wtedy,*
$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}},$$
o ile granica po prawej stronie istnieje (skończona lub nie).

Dowód. TO-DO □

Ćwiczenie. Obliczyć $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n}$.

2.2 Własności ciągów liczbowych

Definicja 2.8. Niech $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będzie dowolnym ciągiem oraz $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ rosnącym ciągiem liczb rzeczywistych. Ciąg $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ nazywamy podciągiem ciągu $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wyznaczonym przez ciąg wskaźników $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

Przykład. Niech $x_n = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}$ a $n_k = 2k$. Wtedy $x_{n_k} = \frac{1}{2k}, k \in \mathbb{N}$. Czyli mamy ciąg $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$ a wybrany przez nas podciąg tego ciągu to ciąg $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \ldots$.

Lemat 2.1. *Dla dowolnego ciągu wskaźników $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ zachodzi $n_k \geqslant k$.*

Dowód. Dowód przeprowadzimy indukcyjnie. TODO □

Twierdzenie 2.11. *Podciąg ciągu zbieżnego jest zbieżny do tej samej granicy.*

Dowód. Ustalmy ciąg $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zbieżny do granicy g, ciąg wskaźników $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ i dowolny jego podciąg $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$. TODO □

Udowodnimy teraz bardzo pożyteczny lemat, z którego kilkukrotnie będziemy korzystać.

Lemat 2.2 (O przedziałach zstępujących)**.** *Niech $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będą takimi ciągami liczb rzeczywistych, że*
$$a_n \leqslant a_{n+1}, n \in \mathbb{N},$$
$$b_n \geqslant b_{n+1}, n \in \mathbb{N},$$
$$a_n < b_n, n \in \mathbb{N}.$$

Wówczas, jeżeli
$$\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0,$$
to istnieje wspólna granica skończona c tych ciągów:
$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = c.$$

Dowód. Najpierw zauważmy, że ciągi $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ są w istocie zbieżne:

$a \leqslant a_n \leqslant b_n, n \in \mathbb{N}$ - zatem ciąg $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest ograniczony z dołu. Z założenia jest też malejący,

zatem na mocy twierdzenia 2.5 jest zbieżny. Analogicznie możemy pokazać, że zbieżny jest ciąg $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Dalej $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = \lim\limits_{n\to\infty} b_n - \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$ z założenia i stąd już $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

Granica jest wyznaczona jednoznacznie (własności granic) i twierdzenie jest udowodnione. $\square$

Powyższe stwierdznie możemy zinerpretować bardziej "geometrycznie": jeżeli mamy ciąg $([a_n, b_n])_{n\in\mathbb{N}}$ przedziałów spełniających następujące warunki:

- $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subseteq [a_n, b_n], n \in \mathbb{N}$ (mówimy wtedy, że ciąg jest *zstępujący*),

- długości $|b_n - a_n|$ kolejnych przedziałów dążą do zera;

to istnieje dokładnie jeden punkt wspólny c wszystkich przedziałów ciągu:
$$\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] = \{c\}.$$

Pokażemy, że $|\mathbb{R}| \neq \aleph_0$, tj. że zbiór liczb rzeczywistych i zbiór liczb naturalnych nie są równoliczne. Klasyczny dowód tego faktu podał Georg Cantor w 1891 roku, stosując tzw. "Metodę przekątniową", wiązaną do dziś z jego nazwiskiem. Ważne narzędzie w teorii mnogości. My jednak, dla ćwiczenia, dowiedziemy tego twierdzenia korzystając z naszego lematu.

Lemat 2.3. *Przedział $[0,1]$ nie jest równoliczny ze zbiorem liczb naturalnych.*

Dowód. Niech $f\colon \mathbb{N} \to [0,1]$ będzie dowolną funkcją. Niech $f(k) = c_k$ dla $k \in \mathbb{N}$. Widzimy, że funkcja ta jest ciągiem. Podzielmy przedział $[0,1]$ na trzy domknięte podprzedziały, długości $\frac{1}{3}$ każdy i niech $[a_0, b_0]$ będzie tym z nich, do którego należy c_0.
Tak więc $[a_0, b_0] \subseteq [0,1]$, $b_0 - a_0 = \frac{1}{3}$ oraz $c_0 \notin [a_0, b_0]$. Załóżmy, że dla pewnego $k \in \mathbb{N}$ zdefiniowaliśmy już przedział $[a_k, b_k]$ tak, że $[a_k, b_k] \subseteq [0,1]$, $b_k - a_k = \frac{1}{3^{k+1}}$ oraz $c_k \notin [a_k, b_k]$.

Wówczas dzielimy przedział $[a_k, b_k]$ na trzy domknięte podprzedziały równej długości i definiujemy $[a_{k+1}, b_{k+1}]$ jako ten podprzedział, do którego nie należy c_{k+1}. Mamy wtedy:

$$[a_{k+1}, b_{k+1}] \subseteq [a_k, b_k],\ b_{k+1} - a_{k+1} = \frac{1}{3^{k+2}}$$
$$\text{oraz } c_{k+1} \notin [a_{k+1}, b_{k+1}].$$

Mamy zatem zdefiniowany indukcyjnie ciąg przedziałów $[a_n, b_n]$ taki, że dla każdej liczby naturalnej $n \in \mathbb{N}$:

$$[a_{n+1}, b_{n+1}] \subseteq [a_n, b_n],\ b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{1}{3^{n+1}}$$
$$\text{oraz } c_{n+1} \notin [a_n, b_n].$$

Zauważmy, że $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{3^{n+1}} = 0$. Na mocy lematu 2.2 o przedziałach zstępujących ciągi $(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ i $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ są zbieżne do tej samej granicy. Przyjmijmy

$$c = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Zauważmy teraz, że dla każdej liczby naturalnej n mamy $c \in [a_n, b_n]$, podczas gdy $c_n \notin [a_n, b_n]$. Zatem $c \neq c_n$ dla każdego n.
Z dowolności f, nie istnieje funkcja z $\mathbb{N}$ w $[0, 1]$, w której zbiór wartości wyczerpywałby przedział $[0, 1]$ (inaczej: nie istnieje surjekcja $\mathbb{N}$ na $[0, 1]$); tym bardziej nie istnieje funkcja z $\mathbb{N}$ na całe $\mathbb{R}$. □

Twierdzenie 2.12. *Zbiór wszystkich liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$ nie jest równoliczny ze zbiorem wszystkich liczb naturalnych $\mathbb{N}$.*

Dowód. Korzystając z poprzedniego lematu i faktu, że $|[0, 1]| = |\mathbb{R}|$ o czym świadczy chociażby funkcja $\operatorname{tg}\colon (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$, będąca bijekcją. (I oczywiście $[0, 1] \subseteq (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$). □

Twierdzenie 2.13 (Bolzano-Weierstrassa). *Z dowolnego ciągu ograniczonego można wybrać podciąg zbieżny.*

Dowód. Rozważmy dowolny ciąg $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ograniczony. Istnieją zatem liczby rzeczywiste a i b takie, że $x_n \in [a, b], n \in \mathbb{N}$. Skorzystamy z lematu o przedziałach zstępujących. Indukcyjnie określmy ciągi liczb $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$:
Przyjmujemy $a_0 = a$ i $b_0 = b$.
Dzielimy przedział $[a, b]$ na połowy. Co najmniej jedna połowa musi zawierać nieskończenie wiele wyrazów ciągu $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ - w przeciwnym razie wyrazów ciągu byłoby skończenie wiele - sprzeczność z definicją ciągu. Wybieramy tę połowę, która zawiera nieskończenie wiele wyrazów (dowolną, jeśli w obydwu mieści się nieskończenie wiele wyrazów ciągu) i dzielimy ponownie na połowy. Dostajemy np. przedział $[a, \frac{a+b}{2}] = [a_0, \frac{a_0+b_0}{2}]$ i przyjmujemy $a_1 = a_0$, $b_1 = \frac{a_0+b_0}{2}$. Otrzymany przedział $[a_1, b_1]$ ponownie dzielimy na połowy i wybieramy tę, która zawiera nieskończenie wiele wyrazów ciągu $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Postępując w ten sposób nieskończnie wiele razy dostajemy ciągi $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (zarazem ciąg przedziałów $([a_n, b_n])_{n\in\mathbb{N}}$) o następujących własnościach:

1. $a_n \leqslant a_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$

2. $b_{n+1} \leqslant b_n$, $n \in \mathbb{N}$

3. Dla każdego $n \in \mathbb{N}$ istnieje $m \in \mathbb{N}$, że $a_n \leqslant x_k \leqslant b_n$ dla $k \geqslant m$.

4. $b_n - a_n = \frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2^n}$

Z punktów 1, 2 i 4 na mocy lematu o przedziałach zstępujących istnieje granica $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n \in \mathbb{R}$. W podpunkcie trzecim dla każdego $n \in \mathbb{N}$ bieżemy np. x_m i oznaczamy jako y_n. W ten sposób otrzymujemy podciąg $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ciągu $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ taki, że $a_n \leqslant y_n \leqslant b_n$ i na mocy twierdzenia o trzech ciągach

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n \in \mathbb{R}.$$

Czyli podciąg ten jest zbieżny, koniec dowodu. □

Zauważmy, że własność 4. naszego ciągu przdziałów w powyższym dowodzie jest intuicyjna, jednak dla formalności moglibyśmy przeprowadzić łatwy dowód indukcyjny. Oczywiście połowa długości przedziału $[a, b]$ wynosi $\frac{b-a}{2}$.Czyli:

dla dla $n = 1$ mamy $[a_1, b_1]$ - wybrana połowa przedziału $[a, b]$ i stąd

$$b_1 - a_1 = \frac{b-a}{2} = \frac{b_0 - a_0}{2}.$$

Załóżmy, że dla pewnego $m \in \mathbb{N}$ zachodzi $b_m - a_m = \dfrac{b_{m-1} - a_{m-1}}{2^m}$.

Dzielimy przedział $[a_m, b_m]$ na połowy i zgodnie z definicją naszego ciągu podziałów wybieramy jedną, zawierającą nieskończenie wiele wyrazów ciągu $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Np. niech to będzie "prawa" połówka i mamy:

$$[a_{m+1}, b_{m+1}] = \left[\frac{a_m + b_m}{2}, b_m\right]$$

Obliczamy długość przedziału: $b_{m+1} - a_{m+1} =$

$$= b_m - \frac{a_m + b_m}{2} = \frac{2b_m - a_m - b_m}{2} = \frac{1}{2}(b_m - a_m) = \frac{1}{2}\left(\frac{b_{m-1} - a_{m-1}}{2^m}\right) = \frac{b_{m-1} - a_{m-1}}{2^{m+1}}.$$

Analogicznie postąpimy jeśli nieskończenie wiele wyrazów ciągu będzie leżało w lewej połowie przedziału. Z Zasady Indukcji Matematycznej nasz wzór na odległość między wyrazami ciągu jest prawdziwy dla każdej liczby naturalnej. Podobne rozumowanie można by przeprowadzić w dowodzie lematu 2.3
Dla ćwiczenia, pokażemy też inny dowód - bez korzystania z lematu o przedziałach zstępujących.

Lemat 2.4. *Dowolny ciąg liczbowy zawiera podciąg monotoniczny.*

Dowód. Ustalmy ciąg $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Wykażemy, że jeżeli z tego ciągu nie można wybrać podciągu niemalejącego, to można wybrać z niego podciąg malejący. Najpierw pokażemy, że jeśli z ciągu nie można wybrać podciągu ściśle rosnącego, to ciąg ten ma wyraz największy. Załóżmy nie wprost, że byłoby przeciwnie. Załóżmy, że z ciągu $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nie można wybrać podciągu ściśle rosnącego. Wtedy a_1 nie nie jest największym wyrazem ciągu $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Przyjmujemy $n_1 = 1$. Istnieje $n_2 \in \mathbb{N}$ takie, że $a_{n_2} > a_{n_1}$. Jeżeli dla każdego $n > n_2$ zachodzi nierówność $a_n \leqslant a_{n_2}$, to największy z wyrazów $a_1, a_2, \ldots, a_{n_2}$ jest największym wyrazem ciągu $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Jeśli nie, to istnieje taka liczba naturalna $n_3 > n_2$, że $a_{n_3} > a_{n_2}$. Podobne rozumowanie doprowadzi nas do wniosku, że musi istnieć taka liczba naturalna $n_4 > n_3$, że $a_{n_4} > a_{n_3}$. Powtarzając to rozumowanie nieskończenie wiele razy, dochodzimy do wniosku, że z ciągu $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ można wybrać podciąg ściśle rosnący, wbrew założeniu. Zatem procedura nie może być kontynuowana bez ograniczeń, musimy więc trafić na największy wyraz.
Załóżmy teraz, że ciąg $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nie zawiera ciągu niemalejącego. Niech a_{m_1} będzie największym wyrazem ciągu $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Z ciągu $a_{m_1+1}, a_{m_1+2}, \ldots$ nie można wybrać podciągu niemalejącego bo byłby to również podciąg niemalejący ciągu $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Wobec tego ten ciąg ma wyraz największy. Niech a_{m_2} będzie największym spośród wyrazów $a_{m_1+1}, a_{m_1+2}, \ldots$. Dalej, niech a_{m_3} będzie największym spośród wyrazów $a_{m_2+1}, a_{m_2+2}, \ldots$, a_{m_4} największym spośród wyrazów $a_{m_3+1}, a_{m_3+2}, \ldots$itd. Mamy zatem $a_{m_1} \geqslant a_{m_2} \geqslant a_{m_3} \geqslant \ldots$. Przy czym nieskończenie wiele razy muszą wystąpić równości, w przeciwnym razie możliwe byłoby wybranie podciągu stałego, który jest niemalejący i jednocześnie nierosnący. Stąd mamy, że istnieje podciąg ściśle rosnący ciągu $a_{m_1}, a_{m_2}, \ldots$ i jest on oczywiście również podciągiem ciągu $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. □

Teraz zapowiedziany

Dowód. Oczywiście dla ciągu ograniczonego, dowolny jego podciąg również jest ograniczony. Z poprzedniego lematu wynika, że można wybrać taki podciąg aby był monotoniczny i jako również ograniczony - jest on zbieżny. □

2.2.1 Granice ekstremalne

Możemy wprowadzić dodatkowe narzędzie, pozwalające na badanie podciągów, granic i ganic podciągów różnych ciągów liczb **rzeczywistych**. Określmy teraz działania na symbolach $-\infty, +\infty$ i liczbach rzeczywistych (czyli przypomnijmy: elementach **ciała** $\mathbb{R}$)

$$-(+\infty) = -\infty \quad -(-\infty) = +\infty$$

$$c + (+\infty) = c + \infty = +\infty + c = +\infty, \ c \in \mathbb{R}$$

$$c + (-\infty) = c - \infty = -\infty + c = -\infty, \ c \in \mathbb{R}$$

$$c \cdot (\pm\infty) = \pm\infty \cdot c = \pm\infty, \ c \in \mathbb{R}, c > 0$$

$$c \cdot (\pm\infty) = \pm\infty \cdot c = \mp\infty, \ c \in \mathbb{R}, c < 0$$

$$\frac{c}{\pm\infty} = 0, \ c \in \mathbb{R}$$

$$\left|\frac{c}{0}\right| = +\infty \text{ dla l. rzeczywistej } c \neq 0$$

Wyrażenia $(-\infty) + (+\infty)$, $+\infty + (-\infty)$ oraz $\frac{0}{0}$ pozostają niezdefiniowane, podobnie jak $0 \cdot (\pm\infty)$ $((\pm\infty) \cdot 0)$. Porównaj: symbole nieoznaczone.

Uwaga. Nawet dwa ostatnie z powyższych symboli można zdefiniować w użyteczny sposób: np. w teorii miary i teorii prawdopodobieństwa jako 0. Wszystko zależy od kontekstu. W przypadku obliczania granic, są to "symbole nieoznaczone".

Definicja 2.9. Zbiór $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ będziemy nazywali *rozszerzonym zbiorem liczb rzeczywistych.*

Uwaga. Powyższa struktura **nie** jest już ciałem!

Definicja 2.10. Ustalmy dowolny ciąg $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Niech

$$E = \left\{ g \in \overline{\mathbb{R}}\colon \text{ istnieje taki podciąg } (a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} \text{ ciągu } (a_n)_{n\in\mathbb{N}}, \text{ że } \lim_{k\to\infty} a_{n_k} = g. \right\}.$$

Definiujemy *granicę dolną* $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n$ ciągu $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wzorem

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \inf E$$

oraz *granicę górną* $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n$ ciągu $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wzorem

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \sup E.$$

Sam zbiór nazywamy zbiorem punktów skupienia ciągu $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ albo jego granic częściowych.

Twierdzenie 2.14. *Niech $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będzie dowolnym ograniczonym ciągiem liczb rzeczywistych. Wtedy*

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(\inf_{k\geqslant n} a_k\right) = \sup_{n\geqslant 0}\inf_{k\geqslant n} a_k$$

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(\sup_{k\geqslant n} a_k\right) = \inf_{n\geqslant 0}\sup_{k\geqslant n} a_k$$

Twierdzenie 2.15. *Dla dowolnego ciągu $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ liczb rzeczywistych*

$$\liminf_{n\to\infty} a_n \leqslant \limsup_{n\to\infty} a_n.$$

Twierdzenie 2.16. *Niech $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będą ciągami liczb rzeczywistych takimi, że dla pewnego $N\in\mathbb{N}$: $a_n\leqslant b_n$ o ile tylko $n\geqslant N$. Wówczas*

$$\liminf_{n\to\infty} a_n \leqslant \liminf_{n\to\infty} b_n,\ \limsup_{n\to\infty} a_n \leqslant \limsup_{n\to\infty} b_n.$$

Najważniesze twierdzenie z tej części, to

Twierdzenie 2.17. *Dla dowolnego ciągu $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ liczb rzeczywistych granica $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$* ***właściwa*** *(tj. skończona) istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n.$$

Jeżeli granica ta istnieje, to $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \liminf\limits_{n\to\infty} a_n = \limsup\limits_{n\to\infty} a_n$.

Przykład. Zbadamy granicę ciągu $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ danego wzorem

$$a_n = \left(1+(-1)^n\frac{1}{n}\right)^n.$$

Dla $n=2k, k\in\mathbb{N}$ mamy podciągi wyrazów $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ postaci $a_{2k}=\left(1+\frac{1}{2k}\right)^{2k}$. Wtedy z twierdzenia 6.1 mamy, że $\lim\limits_{k\to\infty} a_{2k}=e$.
Z kolei dla $n=2k-1$ otrzymujemy podciągi w postaci

$$a_{2k+1}=\left(1-\frac{1}{2k-1}\right)^{2k-1}\overset{n\to\infty}{\to}\frac{1}{e}.$$

Wtedy mamy zbiór granic częściowych $E=\left\{e,\frac{1}{e}\right\}$ (wyczerpaliśmy wszystkie możliwe podciągi, gdyż każda liczba naturalna $n\in\mathbb{N}$ jest liczbą parzystą lub nieparzystą, czyli: postaci $2k$ lub $2k-1$). Widzimy teraz, że

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = e \text{ oraz } \liminf_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{e}.$$

Granice górna i dolna są różne, zatem granica $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ nie istnieje.

2.2.2 *Proste zagadnienia interpolacyjne

Definicja 2.11. Zagadnienie *interpolacji* w naukach ścisłych i - szczególnie - technicznych, polega na znalezieniu funkcji $y = f(x)$, która w danych z góry, różnych od siebie punktach (np. wynikach pomiaru, rezultatach przeprowadzonego wielokrtotnie doświadczenia)

$$x_0, x_1, \ldots, x_n;$$

przybiera dane wartości

$$y_0, y_1, \ldots, y_n,$$

tj. funkcji $f\colon X \to Y$, $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\} \subseteq X, \{y_0, y_1, \ldots, y_n\} \subseteq Y$ takiej, że $f(x_k) = y_k, k \in \{1, \ldots, n\}$.

Postawiony powyżej problem ma nieskończenie wiele rozwiązań, ponieważ można poprowadzić nieskończenie wiele krzywych, przechodzących przez skończoną ilość punktów $x_0, x_1, \ldots, x_n$. Załóżmy jednak, że chcemy, aby funkcja f była wielomianem najniższego stopnia. Zachodzi następujące

Twierdzenie 2.18. *Istnieje dokładnie jeden wielomian stopnia co najwyżej n-tego, który w punktach $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ przybiera wartości $\{y_0, y_1, \ldots, y_n\}$.*

Dowód. Zauważmy, że wyrażenie

$$\frac{(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \cdots (x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1) \cdot (x_i - x_{i-1})(x_i + x_{i+1}) \cdots (x_i - x_n)}$$

jest wielomianem stopnia n, przyjmującym w punkcie $x = x_i$ wartość 1, a w pozostałych punktach wartość 0. Wobec tego wyrażenie, dane sumą:

$$W(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \prod_{\substack{0 \leqslant j \leqslant n \\ j \neq i}} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \frac{(x - x_0) \cdots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \cdots (x - x_n)}{(x_i - x_0) \cdot (x_i - x_{i-1})(x_i + x_{i+1}) \cdots (x_i - x_n)}. \tag{8}$$

jest wielomianem stopnia co najwyżej n-tego (pewne wyrazy mogą ulec redukcji), który dla $x = x_i$ przybiera wartość $y_i = f(x_i)$, $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Gdyby istniał inny wielomian, np. P o tej samej własności, to wielomian $W - P$ byłby wielomianem stopnia co najwyżej n-tego mającym $n+1$ punktów zerowych $W(x_0) - P(x_0), W(x_1) - P(x_1), \ldots, W(x_n) - P(x_n)$. □

Wzór 8 nazywamy *wzorem interpolacyjnym Lagrange'a.*

Wzór interpolacyjny Newtona. Każdy wielomian stopnia mniejszego lub równego n można zapisać w postaci

$$W(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)(x - x_1) + \ldots + c_n(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{n-1}) \quad (9)$$

dobierając odpowiednio współczyniki $c_1, \ldots, c_n$. Wyznaczamy je z warunków $W(x_k) = y_k$ dla $k = 0, 1, \ldots, n$. W tym celu przyjmujemy oznaczenia:

$$w_1(x) = \frac{W(x) - W(x_0)}{(x - x_0)}, w_2(x) = \frac{W_1(x) - W_1(x_1)}{(x - x_1)}, \ldots, w_n(x) = \frac{W_{n-1}(x) - W_{n-1}(x_{n-1})}{(x - x_{n-1})}.$$

Łatwo sprawdzić, że funkcje $w_1, w_2, \ldots, w_n$ są znowu wielomianami, bo zgodnie ze wzorem 9

$$w_k(x) = c_1^{(k)} + c_2^{(k)}(x - x_1) + \ldots + c_n^{(k)}(x - x_1) \ldots (x - x_{n-1}), k \in \{1, \ldots, n\}.$$

Zatem $c_0^{(k)} = W(x_0),\ c_1 = w_1(x_1), \ldots, c_n = w_n(x_n)$. Podstawiając te wyniki do wzoru 9 otrzymujemy

$$\begin{aligned} W(x) = W(x_0) + w_1(x_1)(x - x_0) + w_2(x_2)(x - x_0)(x - x_1) + \ldots + \\ + w_n(x_n)(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{n-1}) \end{aligned} \quad (10)$$

Wzór 10 nazywamy *wzorem interpolacyjnym Newtona*. Wzór ma nad wzorem Lagrange'a np. taką przewagę, że gdybyśmy odrzucili z punktów $x_0, x_1, \ldots, x_n$ ostatni, to we wzoreze 10 zniknąłby tylko ostatni wyraz, a inne wyrazy pozostałyby niezmienione.
W praktyce obliczanie współczynników $w_k(x_k)$ wzoru 10 wygodnie wykonuje się tworząc następującą tabelę (wypisujemy dla przypadku $n = 4$):

$$\begin{array}{c|ccccc}
x_0 & W(x_0) & & & & \\
 & & w_1(x_1) & & & \\
x_1 & W(x_1) & & w_2(x_2) & & \\
 & & w_1(x_2) & & w_3(x_3) & \\
x_2 & W(x_2) & & w_2(x_3) & & w_4(x_4) \\
 & & w_1(x_3) & & w_3(x_4) & \\
x_3 & W(x_3) & & w_2(x_4) & & \\
 & & w_1(x_4) & & & \\
x_4 & W(x_4) & & & &
\end{array}$$

Dwie pierwsze kolumny tabeli są z góry dane. Kolumny dalsze obliczamy kolejno dzieląc, zgodnie ze wzorami, różnicę dwu wyrazów kolumny poprzedniej przez różnicę odpowiadających wyrazów kolumny pierwszej. Górne wyrazy wszystkich kolumn, poza pierwszą, są szukanymi współczynnikami.

3 Elementy topologii przestrzeni metrycznych i algebry liniowej

Intuicje:

Ścisłe określenie:

Definicja 3.1. Mówimy, że para (X, ρ) jest przestrzenią metryczną, gdzie X jest dowolnym zbiorem a $\rho\colon X \times X \to [0, +\infty)$ odwzorowaniem, gdy ρ spełnia nast. własności

1. $\rho(x, x) = 0, x \in X$;
2. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ dla dowolnych $x, y \in X$ (symetria);
3. $\rho(x, y) \leqslant \rho(x, z) + \rho(z, y)$ dla dow. $x, y, z \in X$ (warunek trójkąta).

Przykład. Niech X będzie dowolnym zbiorem. Określmy funkcję $d\colon X \to \{0, 1\}$ wzorem

$$d(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{gdy } x = y, \\ 1, & \text{gdy } x \neq y. \end{cases}$$

nazywamy metryką dyskretną i wtedy (X, d) jest przestrzenią metryczną - nazywamy ją przestrzenią dyskretną.

Przykład. Przestrzeń $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, gdzie $|\cdot|$ oznacza metrykę daną jako $(x, y) \mapsto |x - y|$ - nazywamy ją metryką naturalną na prostej.

Produkt kartezjański przestrzeni metrycznych: Niech $(X_1, \rho_1), (X_2, \rho_2), \ldots, (X_n, \rho_n)$ będą przestrzeniami metrycznymi. Wówczas zbiór $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$ jest przestrzenią metryczną o metryce ρ danej wzorem

$$\rho(x, y) = \rho((x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (\rho(x_k, y_k))^2}$$

Dowód tego faktu podamy w paragrafie nt. przestrzeni unormowanych.

Przykład. Przestrzeń $(\mathbb{R}^n, d_e)$, gdzie d_e nazywamy metryką euklidesową i dla dow. punktów $x, y \in \mathbb{R}^n$ czyli $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ i $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ przy czym $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$; jest ona określona wzorem:

$$d_e(x, y) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (x_k - y_k)^2},$$

Zauważmy, że przy $n = 1$ tak naprawdę otrzymujemy metrykę naturalną, czyli jest ona szczególnym przypadkiem metryki euklidesowej.

Sprawdzenie, że d_e jest metryką na $\mathbb{R}^n$ wymaga skorzystania z tzw.: Nierówności Cauchy'ego-Buniakowskiego-Schwarza[10], najczęściej w polskiej literaturze występującej jako „nierówność Cauchy'ego-Schwarza".

[10] w skrócie „nierówność CBS"

Twierdzenie 3.1 (Nierówność Cauchy'ego-Buniakowskiego-Schwarza). *Jeśli* $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$, *to*

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right).$$

Dowód. Ustalmy funkcję $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ daną wzorem:

$$f(t) = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right) t^2 - 2\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right) t + \sum_{k=1}^{n} b_k^2.$$

Zauważmy, że $f \geqslant 0$, gdyż $f(t) = \sum\limits_{k=1}^{n} (a_k t - b_k)^2 \geqslant 0, t \in \mathbb{R}$. Stąd wyróżnik Δ równania kwadratowego $f(t) = 0$ jest mniejszy lub równy zero:

$$\Delta = 4\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 - 4\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k^2\right) \leqslant 0.$$

Ale stąd już widać, że jest to nasza dowodzona nierówność. Koniec dowodu. □

Ćwiczenie. Korzystając z nierówności Cauchy'ego-Schwarza udowodnić, że jeżeli $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$, to

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^2} \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2}.$$

Ćwiczenie. Korzystając z poprzedniego ćwiczenia, sprawdzić, że w istocie odwzorowanie ρ określone na początku paragrafu jest metryką na $X_1 \times \ldots \times X_n$.

3.1 Zbiory otwarte i domknięte

Ustalmy dla tego paragrafu przestrzeń metryczną (X, ρ).

Definicja 3.2. Dla dow. $x \in X$ oraz l. rzeczywistej $r > 0$ zbiór

$$K(x, r) = \{y \in X \colon \rho(x, y) < r\}$$

nazywamy *kulą otwartą* w przestrzeni X o środku x oraz promieniu r.

Kulę otwartą o środku w punkcie x nazywamy też *otoczeniem* punktu x. Zbiór $K(x, r) \setminus \{x\}$ nazywamy sąsiedztwem punktu x.

Kulę w literaturze światowej często oznacza się $B(x, \varepsilon)$ (od ang. *ball*). My będziemy też oznaczać sąsiedztwo przez $S(x, \varepsilon)$ - jednak uwaga: czasami tak oznaczana jest *sfera*, czyli zbiór $\{y \in X \colon \rho(x, y) = r\}$. Często w rozumowaniach teoretycznych rozważamy otoczenia lub sąsiedztwa ustalonego punktu i nie potrzebujemy oznaczenia na promień. Będziemy wtedy oznaczać odpowiednio otoczenie punktu $x \in X$ przez K_x, B_x, U_x, etc. oraz sąsiedztwo przez S_x przy czym zawsze z kontekstu będzie wiadomo o czym mowa.

Definicja 3.3. Mówimy, że zbiór $U \subseteq X$ jest zbiorem *otwartym* (w przetrzeni X), gdy dla każdego $x \in U$ istnieje otoczenie tego punktu zawarte w zbiorze U, tzn. $\exists_{\varepsilon>0.}\ K(x,\varepsilon) \subseteq U$.

Definicja 3.4. Mówimy, że zbiór $F \subseteq X$ jest zbiorem *domkniętym* (w przetrzeni X), gdy zbiór $X \setminus F$ jest zbiorem otwartym.

Uwaga. Zbiór $\overline{K}(x,r) = \{y \in X : \rho(x,y) \leqslant r\}$ często nazywany „kulą domkniętą” **nie** jest zbiorem domkniętym przy *dowolnej* metryce.

Definicja 3.5. Punkt $x \in X$ nazywamy *punktem skupienia* zbioru $A \subseteq X$, gdy dla każdego **sąsiedztwa** S_x punktu x zachodzi

$$S_x \cap A \neq \varnothing$$

Zbiór wszystkich punktów skupienia zbioru A nazywamy *pochodną* zbioru A i oznaczamy A^d.

Twierdzenie 3.2. *Niech $A, B \subseteq X$ i A^d, B^d będą pochodnymi tych zbiorów. Wtedy*

1. $(A \cup B)^d = A^d \cup B^d$.
2. $(A^d)^d \subseteq A^d$.
3. $\bigcup\limits_{i \in I} A_i^d \subseteq \left(\bigcup\limits_{i \in I} A_i\right)^d$ *dla dowolnej rodziny* $\{A_n : n \in I\}$.

Twierdzenie 3.3. *Jeżeli x jest punktem skupienia zbioru A, to dowolne otoczenie punktu x zawiera nieskończenie wiele punktów zbioru A.*

Dowód. Ustalmy zbiór A i jego punkt skupienia x. Załóżmy, że istnieje otoczenie $K(x,\epsilon)$ punktu x takie, że $K(x,\epsilon) \cap A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$. Przyjmijmy $\varepsilon = \min\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} \rho(x, a_k)$. Oczywiście $\varepsilon > 0$. Wtedy otoczenie $K(x,\varepsilon)$ nie zawiera ani jednego punktu zbioru A różnego od x - sprzeczność. □

Wniosek. Skończony zbiór nie ma punktów skupienia.

Twierdzenie 3.4.

1. *Dla dowolnej rodziny $\{U_t : t \in T\}$ zbiorów otwartych zbiór $\bigcup\limits_{t \in T} U_t$ jest otwarty.*
2. *Dla dowolnej rodziny $\{F_t : t \in T\}$ zbiorów domkniętych zbiór $\bigcap\limits_{t \in T} F_t$ jest domknięty.*

Twierdzenie 3.5.

1. *Dla dowolnej skończonej rodziny $U_1, U_2, \dots U_n$ zbiorów otwartych zbiór $\bigcap\limits_{i=1}^{n} U_i$ jest otwarty.*

2. *Dla dowolnej skończonej rodziny $F_1, F_2, \ldots F_n$ zbiorów domkniętych zbiór $\bigcup_{i=1}^{n} F_i$ jest domknięty.*

3.2 Operacje na przestrzeniach metrycznych

Ustalmy przestrzeń metryczną (X, ρ).

Definicja 3.6. Wnętrzem zbioru $A \subseteq X$ w przestrzeni X nazywamy zbiór

$$\operatorname{int} A = \bigcup \{U \subseteq X : U \text{ jest zbiorem otwartym i } U \subseteq A\}.$$

Zbiór $\operatorname{int} A$ jest więc największym (w sensie inkluzji) zbiorem otwartym, zawartym w zbiorze A.

Twierdzenie 3.6. *Niech (X, ρ) będzie przestrzeń metryczną. Wówczas*

1. $\operatorname{int}(\operatorname{int} A) = \operatorname{int} A$ *dla dow.* $A \subseteq X$.
2. $\operatorname{int} X = X$.
3. $\operatorname{int} A \subseteq A$, *dla dow.* $A \subseteq X$.
4. $\operatorname{int} A = A$ *dla dow. zbioru otwartego* $A \subseteq X$.
5. $\operatorname{int}(A \cap B) = \operatorname{int} A \cap \operatorname{int} B$ *dla dow.* $A, B \subseteq X$.

Definicja 3.7. Domknięciem zbioru $A \subseteq X$ w przestrzeni X nazywamy zbiór

$$\operatorname{cl} A = \bigcap \{F \subseteq X : F \text{ jest zbiorem domkniętym i } A \subseteq F\}$$

Zbiór $\operatorname{cl} A$ jest zatem najmniejszym (w sensie inkluzji) zbiorem domkniętym, zawierającym zbiór A. Domknięcie zbioru A bywa też często oznaczane: $\overline{A}$.

Twierdzenie 3.7. *Ustalmy przestrzeń metryczną (X, ρ). Wówczas*

1. $\operatorname{cl}(\operatorname{cl} A) = \operatorname{cl} A$ *dla dow.* $A \subseteq X$.
2. $\operatorname{cl} \varnothing = \varnothing$.
3. $\operatorname{cl} X = X$.
4. $F \subseteq \operatorname{cl} F$ *dla dow.* $F \subseteq X$.
5. $\operatorname{cl} F = F$ *dla dow. zbioru domkniętego* $F \subseteq X$.
6. $\operatorname{cl}(A \cup B) = \operatorname{cl} A \cup \operatorname{cl} B$ *dla dow.* $A, B \subseteq X$.

Ćwiczenie. Pokazać, że $\operatorname{cl}(A \cap B) \subseteq \operatorname{cl} A \cap \operatorname{cl} B$ dla dow. $A, B \subseteq X$, gdzie X - prz. metryczna. Podać przykład pokazujący, że inkluzja nie zachodzi w drugą stronę.

Twierdzenie 3.8. *Dla dowolnego zbioru $A \subseteq X$ zachodzi* $\operatorname{cl} A = A \cup A^d$.

Definicja 3.8. Średnicą zbioru $A \subseteq X$ nazywamy liczbę

$$\operatorname{diam} A = \sup \{\rho(x,y) \colon x, y \in A\}$$

Definicja 3.9. Odległością zbiorów $A, B \subseteq X$ nazywamy liczbę

$$\operatorname{dist}(A,B) = \inf \{\rho(a,b) \colon a \in A, b \in B\}$$

Uwaga. $\operatorname{diam} A = \operatorname{diam} \operatorname{cl} A$, $A \subseteq X$ dla dow. prz. metrycznej X.

Definicja 3.10. *Brzegiem* zbioru $A \subseteq X$ nazywamy zbiór

$$\{x \in X \colon \forall_{\varepsilon > 0.}\ K(x,r) \cap A \neq \varnothing \text{ oraz } K(x,r) \cap (X \setminus A) \neq \varnothing\}.$$

Mówimy, że zbiór A jest *brzegowy*, gdy $\operatorname{int} A = \varnothing$.

Brzeg zbioru A oznaczany jest w literaturze przez ∂A oraz przez $\mathrm{Fr}A$ od and. *frontier* albo $\mathrm{Bd}A$ od ang. *boundary.*

Twierdzenie 3.9. *Niech $A \subseteq X$ i ∂A będzie brzegiem zbioru A. Wówczas*

1. $\partial A = \operatorname{cl} A \cap A^d$,
2. $\operatorname{cl} A = A \cup \partial A$.

3.3 Granica ciągu w przestrzeni metrycznej

Definicja 3.11. Mówimy, że ciąg $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ wyrazów przestrzeni metrycznej (X, ρ) jest zbieżny do granicy $x \in X$, gdy

$$\forall_{\varepsilon > 0} \exists_{N \in \mathbb{N}} \forall_{n \geqslant N.}\ \rho(x_n, x) < \varepsilon.$$

Analogicznie jak dla ciągów rzeczywistych określamy podciąg $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ ciągu $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ w przestrzeni metrycznej, poprzez pewien ciąg $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ liczb naturalnych.

Definicja 3.12. Niech dany będzie ciąg $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ w przestrzeni metrycznej (X, ρ) oraz podciąg $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ zbieżny do pewnej granicy w przestrzeni X. Wówczas $\lim_{k \to \infty} x_{n_k}$ nazywamy *punktem skupienia ciągu* $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$[11].

Definicja 3.13. Mówimy, że ciąg $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ wyrazów przestrzeni metrycznej (X, ρ) jest ograniczony, gdy wszystkie jego wyrazy są zawarte w pewnej kuli. Tzn. istnieją takie $s \in X$, $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$, że $\{x_n \colon n \in \mathbb{N}\} \subseteq K(s, r)$.

Zbadamy związek między ograniczonością a zbieżnością ciągu w przestrzeni metrycznej.

[11] w literaturze mówi się też o *granicach częściowych*

Stwierdzenie 1. Jeżeli ciąg $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest zbieżny, to jest ograniczony.

Dowód. Rozważmy dowolny ciąg $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ taki, że $x_n \to x$ dla pewnego $x \in X$. Wtedy dla pewnego $N \in \mathbb{N}$ $\rho(x_n, x) < 1$ o ile $n \geqslant N$. Niech

$$M = \max\{\rho(x_1, x), \rho(x_2, x), \ldots, \rho(x_{N-1}, x), \rho(x_N, x), 1\}.$$

Wtedy dla $n < N$ mamy $x_n \in K(x, M)$ a dla $n \geqslant N$ $x_n \in K(x, 1) \subseteq K(x, M)$. □

Analogicznie jak pokazaliśmy dla ciągów liczb rzeczywistych można pokazać, że

Stwierdzenie 2. W przestrzeni metrycznej ciąg monotoniczny i ograniczony jest zbieżny.

Biorąc pod uwagę dwa poprzednie fakty możemy sformułować pojedyńcze

Twierdzenie 3.10. *Ciąg monotoniczny jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy jest ograniczony.*

Twierdzenie 3.11 (O trzech ciągach)**.** *Niech $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będą ciągami elementów przestrzeni metrycznej (X, ρ), tak że*

$$x_n \leqslant y_n \leqslant z_n, \ n \geqslant N$$

dla pewnego $N \in \mathbb{N}$. Wówczas, jeżeli $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n$, to

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} x_n.$$

Dowód. Łatwe ćwiczenie (porównaj twierdzenie 2.8). □

Twierdzenie 3.12. *Dla dowolnego zbioru $A \subseteq X$, gdzie X jest prz. metryczną $x \in A$ jest punktem skupienia zbioru A wtedy i tylko wtedy, gdy jest granicą pewnego ciągu $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ takiego, że $x_n \in A \setminus \{x\}, n \in \mathbb{N}$.*

Lemat 3.1. *Jeżeli (X, ρ) jest przestrzenią metryczną, $A \subseteq X$, to $x \in \operatorname{cl} A$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taki ciąg $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ elementów należących do A, że*

$$x = \lim_{n\to\infty} x_n.$$

Dowód. Załóżmy, że $A \subseteq X$ oraz, że $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest ciągiem elementów należących do A zbieżnym do x. Dla dowolnego otoczenia otwartego U_x punktu x istnieje $n_0 \in \mathbb{N}$ takie, że $x_n \in U_x$ dla $n \leqslant n_0$. Wobec tego $U \cap A \neq \varnothing$. Z dowolności U wynika, że $x \in \operatorname{cl} A$.

Załóżmy teraz, że $x \in \operatorname{cl} A$. Dla każdego $n \in \mathbb{N}$ kula otwarta $B(x, \frac{1}{n})$ przecina niepusto zbiór A. Wybierzmy (korzystając z pewnika wyboru) z każdego zbioru $A \cap B(x, \frac{1}{n})$ element x_n. Ponieważ $\rho(x, x_n) \leqslant \frac{1}{n}$, to

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x.$$

□

Twierdzenie 3.13. *Jeżeli X jest przestrzenią metryczną, to zbiór $F \subseteq X$ jest domknięty wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego zbieżnego ciągu $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wyrazów ze zbioru F jego granica należy do F:*

$$\lim_{n\to\infty} x_n \in F.$$

Dowód. Załóżmy najpierw, że F jest domkniętym podzbiorem przestrzeni metrycznej X. Weźmy dowolny ciąg $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zbieżny.

$$\text{Niech } \lim_{n\to\infty} x_n = x. \text{ Wtedy na mocy poprzedniego lematu } x \in F.$$

Załóżmy teraz, że dla każdego zbieżnego ciągu elementów ze zbioru F, jego granica leży w zbiorze F. Weźmy dowolny $x \in \operatorname{cl} F$. Z lematu, istnieje ciąg $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ elementów zbioru F zbieżny do x. Czyli $x \in F$ z założenia i stąd mamy, że $\operatorname{cl} F \subseteq F$. Czyli $F = \operatorname{cl} F$ i F jest zbiorem domkniętym. □

Na koniec jeszcze użyteczny lemat, z którego skorzystamy w rozdziale dotyczącym szeregów (można go opuścić przy pierwszym czytaniu i wrócić kiedy będzie potrzeba).

Lemat 3.2. *Niech $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będzie ciągiem liczb rzeczywistych, E zbiorem jego granic częściowych oraz oznaczmy $\bar{x} = \limsup_{n\to\infty} x_n = \sup E$. Wówczas:*

1. *$\bar{x} \in E$,*
2. *Jeżeli $\mathbb{R} \ni \alpha > \bar{x}$, to istnieje $n_0 \in \mathbb{N}$ taka, że $x_n < \alpha, n \geqslant n_0$.*
3. *$\bar{x}$ jest jedyną liczbą spełniającą warunki 1. i 2.*

Dowód. Niech więc $\bar{x} = \sup E$.

1. Jeżeli $\bar{x} = +\infty$, to istnieje $(n_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ tak, że $x_{n_k} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$, czyli $+\infty \in E$ i oczywiście $\bar{x} \in E$. Załóżmy więc, że $\bar{x} \in \mathbb{R}$. Czyli istnieje przynajmniej jedna liczba $g \in \mathbb{R}$ będąca granicą pewnego podciągu ciągu $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Zbiór granic częściowych ciągu jest zbiorem domkniętym, zatem $\bar{x} = \sup E \in E$.
2. Przypuśćmy, nie wprost, że istnieje liczba $\alpha > \bar{x}$ taka, że $x_n \geqslant \alpha$ dla nieskończenie wielu n. Niech $\{x_{n_k} : k \in \mathbb{N}\}$ będzie zbiorem tych wyrazów ciągu $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, to wtedy $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} \geqslant \alpha > \bar{x}$ - sprzeczność z definicją liczby $\bar{x}$.
3. Dla dowodu jedyności liczby $\bar{x}$ załóżmy, że $p, q \in \mathbb{R}$ spełniają 1. i 2. Dla ustalenia uwagi możemy przyjąć, że $p < q$. Weźmy α leżące między p i q: $p < \alpha < q$. Istnieje więc n_p takie, że $x_n < \alpha, n \geqslant n_p$ - gdyż p spełnia 2. Ale wówczas q nie może należeć do E: $q > x_n, n \geqslant n_p$ a E jest zbiorem granic częściowych ciągu $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

□

Można (ćwiczenie) sformułować analogiczne ćwiczenie dla granicy dolnej.

3.4 *Przestrzenie liniowe i unormowane. Przestrzeń $\mathbb{R}^n$

TO-DO:

1. Ogólna dyskusja przestrzeni współrzędnych.
2. Wzmianka o przestrz. liniowych.
3. Przestrzenie unormowane.
4. Norma wyznaczona przez metrykę.
5. Przestrzeń $\mathbb{R}^n$.
6. Zbieżność ciągów w $\mathbb{R}^n$.

Twierdzenie 3.14. *Niech* $(\bar{x}_k)_{k\in\mathbb{N}} = \left(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ *będzie ciągiem wyrazów przestrzeni* $\mathbb{R}^n$ *oraz* $\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$*. Wówczas* $\lim\limits_{k\to\infty} \bar{x}_k = \bar{x}$ *wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\lim_{k\to\infty} x_j^{(k)} = x_j, \quad \textit{dla każdego } j \in \{1, \ldots, n\}.$$

Dowód. Jeżeli $\bar{x}_k \to \bar{x}$, to z oszacowania

$$|x_j^{(k)} - x_j| \leqslant ||\bar{x}_k - \bar{x}|| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i^{(k)} - x_i)^2}$$

i twierdzenia o trzech ciągach wynika, że $x_j^{(k)} \to x_j, j = 1, \ldots, n$.

Teraz załóżmy, że $x_j^{(k)} \to x_j, j = 1, \ldots, n$. Ustalmy $\varepsilon > 0$. Istnieje $N \in \mathbb{N}$ takie, że dla $k \geqslant N$ zahodzi

$$|x_j^{(k)} - x_j| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}, \ 1 \leqslant j \leqslant k.$$

Stąd mamy, że $||\bar{x}_k - \bar{x}|| = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} (x_i^{(k)} - x_i)^2} < \varepsilon$ i ostatecznie $\bar{x}_k \to \bar{x}$. □

Ćwiczenie. Uogólnić twierdzenie 2.3 o arytmetyce granic na przestrzenie $\mathbb{R}^n$.

Granica w nieskończoności w przestrzeni unormowanej:

$$\lim_{||\bar{x}||\to\infty} f(\bar{x}) = g \in \overline{\mathbb{R}} \Leftrightarrow \forall_{U_g \text{ - otoczenie } g}\, \exists_{E>0} \forall_{\bar{x}\in D_f} ||\bar{x}|| > E \Rightarrow f(\bar{x}) \in U_g.$$

3.5 Różne własności przestrzeni metrycznych

3.5.1 Zupełność

Definicja 3.14. Ciągiem Cauchy'ego nazywamy ciąg $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wyrazów danej przestrzeni metrycznej (X, ρ) spełniający następujący *warunek Cauchy'ego*:

$$\forall_{\varepsilon>0}\exists_{N\in\mathbb{N}}\forall_{\substack{n,m\in\mathbb{N}\\ n,m\geqslant N}}\ \rho(a_n, a_m) < \varepsilon.$$

Inaczej mówiąc, ciąg $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest zbieżny, gdy:

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam}\{x_m\colon m \geqslant n\} = 0.$$

Jeśli ciąg $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest ciągiem Cauchy'ego, to prawie wszystkie jego wyrazy leżą w kuli o dowolnie małym promieniu (tzn. tylko skończona ilość wyrazów leży poza kulą o zadanym promieniu). Zatem jest to ciąg ograniczony.

Definicja 3.15. Przestrzeń metryczną nazywamy *zupełną*, gdy każdy ciąg spełniający warunek Cauchy'ego jest w niej ciągiem zbieżnym.

Podstawowy przykład zapewnia następujące

Twierdzenie 3.15. *Przestrzeń* $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ *jest zupełna.*

Dowód. Ustalmy dowolny ciąg $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ spełniający warunek Cauchy'ego. Istnieje $N \in \mathbb{N}$ takie, że $|a_n - a_N| < 1$ dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$. A więc

$$1 - a_N \leqslant a_n \leqslant 1 + a_N, \text{ dla każdego } n \in \mathbb{N}$$

gdzie a_N jest pewnym konkretnym wyrazem ciągu. Czyli ciąg $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest ograniczony. Na mocy twierdzenia 2.13 Bolzano-Weierstrassa, istnieje podciąg (a_{n_k}) zbieżny, np. do granicy g. Ponieważ $n_k \geqslant k$ dla każdego $k \in \mathbb{N}$ (patrz lemat 2.1), to $|a_k - a_{n_k}| \leqslant \varepsilon$. Z dowolności ε wnosimy, że $\lim\limits_{k\to\infty}(a_k - a_{n_k}) = 0$, czyli $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = \lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = g$[12]. $\square$

3.5.2 Zwartość

Ustalmy przestrzeń metryczną (X, ρ).

Definicja 3.16. Mówimy, że rodzina $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}(X)$ **zbiorów otwartych** jest *pokryciem otwartym* zbioru $A \subseteq X$ jeżeli $A \subseteq \bigcup\mathcal{U}$.

Definicja 3.17. Dowolną podrodzinę pokrycia $\mathcal{U}$ przestrzeni X nazywamy *podpokryciem* przestrzeni X.

[12] w wyrażeniu po lewej stronie ostatniej równości oczywiście bez znaczenia jest, że dla przejrzystości wskaźnik ciągu oznaczyliśmy jako k zamiast n

Definicja 3.18. Mówimy, że podzbiór $A \subseteq X$ przestrzeni metrycznej jest *zwarty*, jeżeli z każdego podpokrycia tego zbioru można wybrać jego podpokrycie skończonym.

Definicja 3.19. Mówimy, że podzbiór $A \subseteq X$ przestrzeni metrycznej jest *ciągowo zwarty*, jeżeli z każdego ciągu wyrazów tego zbirou można wybrać podciąg zbieżny do granicy leżącej w tym zbiorze.

Możemy rozważać zbiory zwarte same w sobie jako przestrzenie metryczne:

Uwaga. Niech $X \subseteq Y \subseteq Z$. Zbiór X jest zwarty względem Z wtedy i tylko wtedy, gdy jest zwarty względem Y.

Pojęcia „przestrzeni otwartej" lub „przestrzeni domkniętej" nie mają zastosowania, gdyż każda przestrzeń metryczna jest swoim podzbiorem otwartym i domkniętym zarazem.

Twierdzenie 3.16. *Przestrzeń metryczna (X, ρ) jest zwarta wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej rodziny $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{P}(X)$ zbiorów domkniętych (pokrycia domkniętego przestrzeni X) istnieje podrodzina (podpokrycie) skończona*

Twierdzenie 3.17 (Borela-Lebesgue'a)**.** *Niech (X, ρ) będzie przestrzenią metryczną. Wówczas X jest zwarta wtedy i tylko wtedy, gdy jest ciągowo zwarta.*

Dowód. Najpierw załóżmy, że X jest ciągowo zwarta. Niech $\{A_i \colon i \in I\}$ będzie pokryciem otwartym przestrzeni X. Wykażemy, że istnieje liczba $\lambda > 0$ taka, że

$$\forall_{x \in X} \exists_{i \in I.}\ K(x, \lambda) \subseteq A_i.$$

Przypuśćmy, że powyższe zdanie nie jest prawdziwe, czyli

$$(*)\ \forall_{n \in \mathbb{N}} \exists_{x_n \in X} \forall_{i \in I.}\ K\left(x_n, \frac{1}{n}\right) \subseteq A_i.$$

Z ciągu można jednak wybrać podciąg $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ zbieżny do $x_0 \in X$. Ponieważ $\{A_i \colon i \in I\}$ jest pokryciem otwartym, więc istnieje $r_0 > 0$ oraz $i_0 \in I$ takie, że $K(x_0, r_0) \subseteq A_{i_0}$. Ze zbieżności $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ mamy, że

$$\exists_{k \in \mathbb{N}} \forall_{k > k_0.}\ |x_{n_k} - x_0| < \frac{1}{2} r_0.$$

Zatem, dobierając k tak, by było $k > k_0$ oraz $n_k > 2/r_0$ otrzymujemy następujący ciąg inkluzji:

$$K\left(x_{n_k}, \frac{1}{n_k}\right) \subseteq K\left(x_{n_k}, \frac{1}{2} r_0\right) \subseteq K(x_0, r_0) \subseteq A_{i_0},$$

co przeczy $(*)$.

Mając $\lambda > 0$ o podanej wyżej własności, postępujemy następująco:

- wybieramy $y_1 \in X$;

- następnie przyjmujemy $y_2 \in X \setminus K(y_1, \lambda)$;
- $y_3 \in X \setminus (K(y_1, \lambda) \cup K(y_2, \lambda))$;
- itd. indukcyjnie przyjmujemy

$$y_n \in X \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} K(y_k, \lambda)$$

otrzymujemy ciąg $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ taki, że $|y_n - y_m| \geqslant \lambda$ dla dowolnych $n, m \in \mathbb{N}$. Ale ciąg taki nie posiada podciągów zbieżnych. Sprzeczność. Zatem nasza konstrukcja może być powtórzona tylko skończoną ilość kroków, tj. dla pewnego $k \in \mathbb{N}$ istnieją $y_1, \ldots, y_k$ takie, że

$$\bigcup_{n=1}^{k} K(y_n, \lambda) = X.$$

Ale każda kula $K(y_n, \lambda)$ zawarta jest w pewnym zbiorze A_{i_n}, czyli

$$\bigcup_{n=1}^{k} A_{i_n} = X.$$

Załóżmy teraz, że przestrzeń X jest zwarta.
Rozważmy ciąg $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, który nie posiada żadnego podciągu zbieżnego. Zatem jego zbiór wyrazów $A = \{x_n \colon n \in \mathbb{N}\}$ jest zbiorem domkniętym. Ponieważ $X \setminus A$ jest zbiorem otwartym, to

$$\forall_{x \in X \setminus A} \exists_{r_x > 0.} \ K(x, r_x) \subseteq X \setminus A.$$

Z drugiej strony dla każdego x_n istnieje $\varepsilon_n > 0$ taki, że $K(x_n, \varepsilon_n) \cap A$ jest zbiorem skończonym. Oczywiście zbiór

$$\{K(x, r_x) \colon x \in X \setminus A\} \cup \{K(x_n, \varepsilon_n) \colon n \in \mathbb{N}\}$$

jest pokryciem otwartym przestrzeni X. Gdy jednak wybierzemy z niego dowolne skończone podpokrycie X, to jego suma będzie zawierać tylko skończoną liczbę kul $K(x_n, \varepsilon_n)$ a zatem tylko skończoną liczbę punktów zbioru A. Ale A jest zbiorem nieskończonym - sprzeczność. $\square$

Jak widzimy, w wypadku przestrzeni metrycznych zwartość i ciągowa zwartość są równoważne (nie jest tak w przypadku ogólniejszych struktur - topologii; przy czym każda przestrzeń metryczna jest przestrzenią topologiczną ale nie odwrotnie - istnieją topologie „niemetryzowalne”, tj. nie dające się zdefiniować jako pewna przestrzeń metryczna).

Twierdzenie 3.18. *Zwarty podzbiór przestrzeni metrycznej jest domknięty.*

Dowód. Niech X będzie przestrzenią zwartą oraz $F \subseteq X$ będzie zbiorem domkniętym. Ustalmy pokrycie otwarte $\mathcal{U}$ zbioru F. Wtedy $\mathcal{U} \cup \{X \setminus F\}$ jest pokryciem otwartym X. Ze zwartości X istnieje podpokrycie skończone $\mathcal{U}_0 \subseteq \mathcal{U} \cup \{X \setminus F\}$. Wtedy rodzina $\mathcal{U}_0 \setminus \{X \setminus F\} \subseteq \mathcal{U}$ jest podpokryciem skończonym $\mathcal{U}$. Pokazaliśmy dla dowolnego pokrycia otwartego zbioru F istnieje podpokrycie skończone, co oznacza, że F jest zwarty. □

Twierdzenie 3.19. *Domknięty podzbiór zwartej przestrzeni metrycznej jest zwartą przestrzenią metryczną.*

Dowód. Niech X będzie przestrzenią metryczną zwartą oraz $F \subseteq X$ zbiorem domkniętym. Ustalmy dowolny ciąg $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tak, że

$$x_n \in F \subseteq X, \ n \in \mathbb{N}$$

i już widzimy, że ze zwartości X musi istnieć podciąg $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ zbieżny. Ale $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} \in F$ z domkniętości F (twierdzenie 3.13). Zatem dowolny ciąg wyrazów przestrzeni F ma podciąg zbieżny do granicy leżącej w F i twierdzenie jest udowodnione. □

Ćwiczenie. Udowodnić twierdzenie 3.18 w oparciu o ciągową definicję zwartości.

Przykład. Dowolny przedział domknięty $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ jest zbiorem zwartym na mocy twierdzenia 2.13 Bolzano-Weierstrassa, gdyż jeżeli wyrazy ciągu leżą w przedziale $[a, b]$, to znaczy że jest on ograniczony. Zauważmy, że granica taka może leżeć na krańcu przedziału (tj. być równa a lub b), zatem wnętrze (a, b) tego przedziału nie musi (i nie jest) być zbiorem zwartym.

Twierdzenie 3.20. *Iloczyn (produkt) kartezjański n przestrzeni metrycznych zwartych jest przestrzenią metryczną zwartą.*

Dowód. Niech $X_1, X_2, \ldots, X_k$ będą przestrzeniami metrycznymi zwartymi. Dla $k = 1$ twierdzenie jest prawdziwe w sposób oczywisty. Założmy jego prawdziwość dla $k - 1$. Ustalmy ciąg $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, tak że $x_n = \left(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \ldots, x_k^{(n)}\right) \in X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_k$. Z założenia ciąg punktów $y_n = \left(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \ldots, x_{k-1}^{(n)}\right) \in X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_{k-1}$ zawiera podciąg zbieżny $(y_{n_i})_{i\in\mathbb{N}}$ - zatem jego ciągi składowe $\left(x_j^{(n_i)}\right)_{i\in\mathbb{N}}$, $j = 1, \ldots, k - 1$ są zbieżne z definicji. Ze zwartości przestrzeni X_k z ciągu $(x_k^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ można wybrać podciąg zbieżny $(x_k^{(n_i)})_{i\in\mathbb{N}}$. Mamy zatem, że zbieżne są ciągi

$$\left(x_1^{(n_i)}\right)_{i\in\mathbb{N}}, \left(x_2^{(n_i)}\right)_{i\in\mathbb{N}}, \ \ldots \ , \left(x_k^{(n_i)}\right)_{i\in\mathbb{N}}$$

Stąd, z definicji zbieżny jest ciąg $(x_{n_i})_{i\in\mathbb{N}}$, gdzie

$$x_{n_i} = \left(\left(x_1^{(n_i)}\right)_{i\in\mathbb{N}}, \left(x_2^{(n_i)}\right)_{i\in\mathbb{N}}, \ \ldots \ , \left(x_k^{(n_i)}\right)_{i\in\mathbb{N}}\right)$$

będący podciągiem ciągu $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Na mocy Zasady Indukcji Matematycznej twierdzenie jest prawdziwe dla dowolnego k. □

Przykład. Kostka n-wymiarowa $[a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n] \subseteq \mathbb{R}^n$, jest prz. metryczną zwartą.

Twierdzenie 3.21. *Podzbiór zwarty dowolnej przestrzeni metrycznej jest domknięty i ograniczony (tj. zawarty w pewnej kuli).*

Dowód. Ustalmy przestrzeń metryczną (X, ρ). Niech $A \subseteq X$ będzie podzbiorem zwartym - wtedy musi on być też domknięty. Wybierzmy punkt $a_0 \in A$ i rozważmy funkcję $x \mapsto \rho(a_0, x)$ $(X \to \mathbb{R})$. Ponieważ A jest zbiorem zwartym, istnieje $E > 0$ takie, że dla każdego $a \in A$ zachodzi nierówność $\rho(a_0, a) \leqslant E$, stąd zbiór A jest zawarty w kuli $B(a_0, E)$. □

Twierdzenie 3.22. *Jeżeli $E \subseteq \mathbb{R}^n$, to następujące warunki są równoważne:*

1. *E jest zwarty,*
2. *Każdy nieskończony podzbiór*[13] *zbioru E ma punkt skupienia należący do E,*
3. *E jest ograniczony i domknięty.*

Dowód. **TO-DO: jeszcze raz przejrzeć i poprawić dowód.**

- (1) $\Rightarrow$ (2). Niech $A \subseteq E$ będzie zbiorem nieskończonym. Załóżmy, że żaden punkt zbioru E nie jest punktem skupienia zbioru A. x jest punktem skupienia zbioru A, gdy każde otoczenie punktu x zawiera co najmniej jeden punkt $y \neq x$ taki, że $y \in A$. Zatem z naszego założenia wynka, że każdy punkt $x \in E$ ma otoczenie $K(x, \varepsilon)$ zawierające nie więcej niż jeden punkt zbioru A (jeśli $x \in A$ to właśnie x jest tym jedynym punktem). Żadna skończona podrodzina rodziny $\{K(x, \varepsilon) : x \in E, \varepsilon \text{ dowolne}\}$ nie może pokryć zbioru A, więc również jego nadzbioru E. Sprzeczność, gdyż zbiór E jest zwarty[14].

- (2) $\Rightarrow$ (3). Załóżmy, że zbiór E nie jest ograniczony. Wtedy istnieje ciąg $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ punktów, takich że $|x_n| > n$, $n \in \mathbb{N}$. Zbiór $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ jest nieskończony i z założeń nie ma punktów skupienia w $\mathbb{R}^n$ a więc tym bardziej w E. Mamy, że E musi być ograniczony. Załóżmy, że E nie byłby domknięty. Wtedy istnieje $x_0 \in \mathbb{R}^n$, taki że $x_0 \in E^d$ i $x_0 \notin E$. Istnieje ciąg $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ wyrazów zbioru E taki, że $|x_n - x_0| < \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}$. Niech S będzie zbiorem tych punktów. Wówczas S jest zbiorem nieskończonym (w przeciwnym razie wyrażenie $|x_n - x_0|$ byłoby od pewnego n stałą). x_0 jest punktem skupienia zbioru S i jedynym takim punktem skupienia S, który równocześnie należy do $\mathbb{R}^n$. Gdyby np. $x_1 \in \mathbb{R}^n$, $x_1 \neq x_0$, to

$$|x_n - x_1| \geqslant |x_0 - x_1| - |x_n - x_0| \geqslant |x_0 - x_1| - \frac{1}{n} \geqslant \frac{1}{2}|x_0 - x_1|, \text{ od pewnego } n,$$

  co dowodzi, że $x_1 \notin S^d$. S nie ma punktów skupienia w E i E jest domknięty.

[13]niejawnie zakładamy, że dodatkowo E jest nieskończony.

[14]Możemy zauważyć, że nie korzystamy tu właściwie z własności specyficznych dla przestrzeni $\mathbb{R}^n$. Implikacja ta zachodzi tak naprawdę dla dowolnej przestrzeni zwartej.

- (3) $\Rightarrow$ (1). Niech $E \subseteq \mathbb{R}^n$ będzie domkniętym i ograniczonym podzbiorem przestrzeni euklidesowej. Wtedy istnieje odcinek $[a,b]$ taki, że $E \subseteq [a,b]^n \subseteq \mathbb{R}^n$. Ponieważ kostka $[a,b]^n$ jest zwarta, to E jako jej podzbiór domknięty jest zbiorem zwartym (na mocy twierdzenia 3.21).

Mamy, że (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (1). Możemy jeszcze dodatkowo zauważyć, że (1) $\Rightarrow$ (3) wynika z poprzedniego twierdzenia (3.21). $\square$

Twierdzenie 3.23. *Każdy nieskończony i ograniczony podzbiór przestrzeni $\mathbb{R}^n$ ma punkt skupienia w $\mathbb{R}^n$.*

Dowód. Niech $E \subseteq \mathbb{R}^n$ będzie nieskończony i ograniczony. Ograniczony, zatem zawarty w pewnej kuli otwartej. Możemy wziąć n-wymiarową kostkę K zawierającą tę kulę i wtedy, mamy że E jest zwarty w zbiorze zwartym. Z poprzedniego twierdzenia wynika, że E ma punkt skupienia należący do K. $\square$

Twierdzenie 3.24. *Przestrzeń metryczna zwarta jest zupełna.*

Uogólnimy jeszcze lemat 2.2 o przedziałach zstępujących.

Twierdzenie 3.25. *Ustalmy przestrzeń metryczną X. Niech $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będzie zstępującym ciągiem podzbiorów przestrzeni X zwartych oraz $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{diam} C_n = 0$. Wówczas zbiór $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} C_n$ składa się dokładnie z jednego punktu.*

3.5.3 Spójność

Definicja 3.20. Mówimy, że dwa zbiory $A, B \subseteq X$ ustalonej przestrzeni metrycznej X są *oddzielone*, jeżeli

$$A \cap \operatorname{cl} B = \varnothing \text{ oraz } \operatorname{cl} A \cap B = \varnothing$$

Mówimy, że zbiór $C \subseteq X$ jest *spójny*, gdy **nie** jest sumą dwóch zbiorów odddzielonych.

Uwaga. Zbiory rozłączne nie muszą być oddzielone. Np. przedziały $[-1,0)$ i $[0,1]$ nie są oddzielone, bo $0 \in \operatorname{cl}[-1,0)$:

$$\operatorname{cl}[-1,0) \cap [0,1] = [-1,0] \cap [0,1] = \{0\} \neq \varnothing.$$

Ćwiczenie. Podać przykład zbiorów oddzielonych.

Twierdzenie 3.26. *Zbiór $C \subseteq \mathbb{R}$ jest spójny wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\forall_{x,y\in C}\forall_{z\in\mathbb{R}.}\ \textit{jeżeli } x < z < y \textit{ to } z \in C.$$

4 Granica funkcji

Intuicje:

4.1 Granica w przestrzeni metrycznej

Definicja 4.1. Mówimy, że funkcja $f\colon X \to Y$ ma granicę $g \in Y$ w punkcie skupienia $x_0 X$ przestrzeni X w sensie Cauchy'ego, gdy

$$\forall_{\varepsilon>0}\exists_{\delta>0}\forall_{x\in X} 0 < \rho(x, x_0) < \delta \Rightarrow \sigma(f(x), g) < \varepsilon.$$

Definicja 4.2. Mówimy, że funkcja $f\colon X \to Y$ ma granicę $g \in Y$ w punkcie skupienia x_0 przestrzeni X w sensie Heinego, gdy dla każdego ciągu $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wyrazów przestrzeni X takiego, że $x_n \neq x_0, n \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ zachodzi $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = g$.

4.2 Przypadek rzeczywisty

$\rho\colon D \to \mathbb{R}$, gdzie $D \subseteq \mathbb{R}$ i $\rho(x, y) = |x - y|$.

4.2.1 Granica funkcji w nieskończoności

Definicja 4.3. Mówimy, że funkcja $f\colon (a, +\infty) \to \mathbb{R}$ ma granicę $g \in \mathbb{R}$ w *plus* nieskończoności (w sensie Cauchy'ego) i piszemy $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = g$ albo, że $f(x) \to g$, przy $x \to \infty$, gdy

$$\forall_{\varepsilon>0}\exists_{A\in(a,+\infty)}\forall_{x>A}. \, |f(x) - g| < \varepsilon.$$

Analogicznie, mówimy że funkcja $f\colon (-\infty, b) \to \mathbb{R}$ ma granicę $g \in \mathbb{R}$ w *minus* nieskończoności i piszemy $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = g$, gdy

$$\forall_{\varepsilon>0}\exists_{A\in(-\infty,b)}\forall_{x<A}. \, |f(x) - g| < \varepsilon.$$

W powyższych przypadkach, mówimy też, że f ma granicę skończoną (w odpowiednio plus/minus nieskończoności).

Definicja 4.4. Mówimy, że funkcja $f\colon (a, \infty) \to \mathbb{R}$ ma granicę g w *plus* nieskończoności (w sensie Heinego) i piszemy $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x) = g$ albo, że $f(x) \to g$, przy $x \to \infty$, gdy dla każdego ciągu $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ takiego, że $x_n > a, n \in \mathbb{N}$ oraz $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$ ciąg $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ wartości funkcji dąży do g przy $n \to \infty$, czyli

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = g.$$

Analogicznie mówimy, że $f\colon (-\infty, b)$, gdy dla każdego ciągu $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ takiego, że $x_n < b, n \in \mathbb{N}$ oraz $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$ zachodzi $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = g$.

4.2.2 Granica niewłaściwa

Definicja 4.5. Mówimy, że funkcja $f\colon D \to \mathbb{R}$ dąży do $\pm\infty$ gdy x dąży do $x_0 \in D$ albo, że ma w punkcie $x_0 \in D$ granicę $\pm\infty$, gdy dla każdego ciągu $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ zachodzi $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \pm\infty$. Mówimy wtedy, że f ma w x_0 granicę *niewłaściwą* i piszemy $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$. Przez $\pm\infty$ rozumiemy, że w powyższej definicji można przyjąć (równocześnie za każde wystąpienie tego symbolu) plus albo minus nieskończoność.

Ćwiczenie. Zdefiniować granicę **niewłaściwą** funkcji $f\colon D \to \mathbb{R}$ w (plus/minus) **nieskończoności**.

4.2.3 Granice lewo i prawostronne

Definicja 4.6. Mówimy, że funkcja[15] $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ ma *granicę lewostronną* (właściwą) w punkcie $x_0 \in (a,b)$, gdy istnieje taka liczba $g \in \mathbb{R}$, że

$$\forall_{\varepsilon>0}\exists_{\delta>0}\forall_{x\in(a,x_0).}\ \text{jeśli } x_0-\delta < x < x_0 \text{ to } |g-f(x)| < \varepsilon.$$

Piszemy wtedy $f(x-) = \lim\limits_{x\to x_0-} f(x) = g$.

Zauważmy, że $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} f(x-\varepsilon) = \lim\limits_{x\to x_0-} f(x)$. Stąd czasem widujemy też w literaturze zapis $\lim\limits_{x\to x_0-\varepsilon} f(x)$ albo $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$.

Analogicznie mamy definicję granicy prawostronnej:

Definicja 4.7. Mówimy, że funkcja $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ ma *granicę prawostronną* (właściwą) w punkcie $x_0 \in (a,b)$, gdy istnieje taka liczba $g \in \mathbb{R}$, że

$$\forall_{\varepsilon>0}\exists_{\delta>0}\forall_{x\in(a,x_0).}\ \text{jeśli } x_0 < x < x_0+\delta \text{ to } |g-f(x)| < \varepsilon.$$

Piszemy wtedy $f(x+) = \lim\limits_{x\to x_0+} f(x) = g$.

Twierdzenie 4.1. *Funkcja $f\colon D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$ ma granicę w punkcie $x_0 \in \operatorname{cl} D$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją w tym punkcie granica lewo i prawostronna oraz są sobie równe. Wtedy*

$$\lim_{x\to x_0-} f(x) = \lim_{x\to x_0+} f(x) = \lim_{x\to x_0} f(x).$$

Przykład. Funkcja $f(x) = \frac{1}{x}$ określona jest na $D = \mathbb{R}\setminus\{0\}$ oraz $0 \in \operatorname{cl} D = \mathbb{R}$. Mamy

$$\lim_{x\to 0-} \frac{1}{x} = -\infty \neq +\infty = \lim_{x\to 0+} \frac{1}{x}$$

[15] w szczególności może być $(a,b) = (-\infty,+\infty) = \mathbb{R}$

zatem f nie ma granicy w 0.
Rozważmy funkcję $g(x) = \frac{1}{|x|}$. Jest ona również określona na D oraz

$$\lim_{x\to 0-} \frac{1}{|x|} = \lim_{x\to 0+} \frac{1}{|x|} = +\infty,$$

zatem $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{|x|} = +\infty$.

Definicja 4.8. Mówimy, że funkcja $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ ma *granicę lewostronną* niewłaściwą $+\infty$ $[-\infty]$ w punkcie $x_0 \in (a,b)$, gdy

$$\forall_{E>0}\exists_{\delta>0}\forall_{x\in(a,b).}\ x_0 - \delta < x < x_0 \Rightarrow f(x) > E[f(x) < -E].$$

Twierdzenie 4.2. *Funkcja $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ ma granicę lewostronną w punkcie $x_0 \in (a,b)$ równą $g \in \overline{\mathbb{R}}$, gdy dla każdego ciągu $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ takiego, że*

1. $x_n < x_0$, $n \in \mathbb{N}$,
2. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$;

zachodzi $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = g$.

Twierdzenie 4.3. *Funkcja $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ ma granicę lewostronną w punkcie $x_0 \in (a,b)$ równą $g \in \overline{\mathbb{R}}$, gdy dla każdego ciągu $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ takiego, że*

1. $x_n > x_0$, $n \in \mathbb{N}$,
2. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$;

zachodzi $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = g$.

Twierdzenie 4.4. *Funkcja f monotoniczna w przedziale $I \subseteq \mathbb{R}$ ma w każdym punkcie tego przedziału granice jednostronne (skończone lub nie).*

Twierdzenie 4.5. *Jeżeli f jest funkcją monotoniczną o wartościach rzeczywistych, to zbiór jej punktów nieciągłości jest przeliczalny.*

4.2.4 Obliczanie granic

Granice specjalne: Wyróżnia się jeszcze kilka tożsamości, do których daje się sprowadzić niektóre trudniejsze granice:

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a. \tag{11}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log_a(x+1)}{x} = \log_a e \text{ dla } a > 0 \text{ i } a \neq 1.$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^a - 1}{x} = a.$$

5 Ciągłość funkcji

Niech (X,ρ), (Y,σ) będą przestrzeniami metrycznymi.

Definicja 5.1. Mówimy, że funkcja $f\colon X \to Y$ jest ciągła w punkcie $x_0 \in X$ w sensie Heinego, gdy dla każdego ciągu $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wyrazów X zbieżnego do x_0 ciąg wartości $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ jest zbieżny do $f(x_0)$.

Definicja 5.2. Mówimy, że funkcja $f\colon X \to Y$ jest *ciągła* w sensie Cauchy'ego w punkcie $x_0 \in X$, gdy

$$\forall_{\varepsilon>0}\exists_{\delta>0}\forall_{x\in X}.\ \rho(x_0,x) < \delta \Rightarrow \sigma(f(x_0), f(x)) < \varepsilon.$$

Definicja 5.3. Mówimy, że funkcja $f\colon X \to Y$ jest *ciągła* w sensie Cauchy'ego (Heinego), gdy jest ciągła w każdym punkcie $x \in X$ w sensie Cauchy'ego (Heinego).

Twierdzenie 5.1. *Definicje Cauchy'ego i Heinego ciągłości funkcji są równoważne.*

Dowód. Rozważamy dowolną funkcję $f\colon X \to Y$ między przestrzeniami metrzycznymi (X,ρ), (Y,σ).

Załóżmy najpierw, że funkcja f jest ciągła w sensie Heinego. Ustalmy dowolny $\varepsilon > 0$. □

Przykład. Funkcje trygonometryczne są ciągłe. Dla przykładu pokażemy, że sinus jest funkcją ciągłą. Ustalmy $x_0 \in \mathbb{R}$. Z podstaw trygonometrii wiadomo, że

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}, \alpha, \beta \in \mathbb{R},$$

Biorąc pod uwagę, że $\cos(\alpha) \leqslant 1$ dla dowolnego α, mamy oszacowanie

$$|\sin x - \sin x_0| \leqslant 2\left|\sin\frac{x-x_0}{2}\right|, \text{ dla dowolnego } x \in \mathbb{R}.$$

Weźmy dowolny ciąg $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zbieżny do x_0. Wówczas $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n-x_0}{2} = 0$ a więc

$$0 \leqslant \lim_{n\to\infty} |\sin x_n - \sin x_0| \leqslant 2\lim_{n\to\infty}\left|\sin\frac{x_n-x_0}{2}\right| = 0.$$

A więc $\lim\limits_{n\to\infty} \sin x_n = \sin x_0$, czyli funkcja sin jest ciągła w x_0. Punkt ten wybraliśmy dowolnie, więc wnioskujemy że jest ciągła w całej dziedzinie.

Twierdzenie 5.2. *Niech X będzie przestrzenią metryczną, Y dowolnym zbiorem i $f\colon X \to Y$ będzie funkcją ciągłą. Dla dowolnego ciągu $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wyrazów przestrzeni X, zachodzi:*

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right).$$

Dowód. W opracowaniu. □

Punkty nieciągłości: Ustalmy funkcję $f\colon X \to Y$.

Definicja 5.4. Mówimy, że $x_0 \in X$ jest *punktem nieciągłości pierwszego rodzaju* funkcji f, jeżeli istnieją skończone granice $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ oraz $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ ale są one różne.

Definicja 5.5. Mówimy, że $x_0 \in X$ jest *punktem nieciągłości drugiego rodzaju* funkcji f, gdy nie istnieje choć jedna z granic $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ **lub** $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$.

Definicja 5.6. Mówimy, że funkcja $f\colon X \to Y$ jest *jednostajnie ciągła*, gdy

$$\forall_{\varepsilon>0}\exists_{\delta>0}\forall_{x_1,x_2\in X}.\ \rho(x_1,x_2)<\delta \Rightarrow \sigma(f(x_1),f(x_2))<\varepsilon.$$

Przykład. Funkcja $x \mapsto \sqrt{x}$ jest jednostajnie ciągła na $[0,+\infty)$.

Przykład. Funkcja $x \mapsto x^2$ jest ciągła na $\mathbb{R}$ ale nie jest jednostajnie ciągła.

Ćwiczenie. Pokazać, że funkcja $f\colon \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$ nie jest jednostajnie ciągła na $(0,+\infty)$ mimo, że jest ciągła na tym przedziale.

Przy pomocy twierdzeń o arytmetyce granic możemy udowodnić

Twierdzenie 5.3. *Niech $f,g\colon X \to Y$ będą funkcjami ciągłymi określonymi na przestrzni metrycznej X. Wówczas ciągłe są funkcje $f+g$, $f\cdot g$ oraz $\frac{f}{g}$ (pod warunkiem, że $g(x)\neq 0, x\in X$).*

Twierdzenie 5.4. *Niech X,Y,Z będą przestrzeniami metrycznymi, $A\subseteq X$ oraz*

$$f\colon A\to Y,\ g\colon f[A]\to Z.$$

Wówczas funkcja $h := g\circ f$ jest ciągła w punkcie $x\in A$, gdy f jest ciągła w punkcie x a funkcja g jest ciągła w punkcie $f(x)$.

Twierdzenie 5.5. *Niech $f\colon X\to Y$ będzie różnowartościowa i ciągła. Wówczas f^{-1} jest funkcją ciągłą.*

Następne twierdzenie daje nam do dyspozycji szeroką klasę funkcji, dla których możemy stosować warunek jednostajnej ciągłości; jednak za chwilę pokażemy twierdzenie ogólniejsze, zatem poniższy dowód ma wyłącznie charakter przykładowy i dydaktyczny

Twierdzenie (* opcjonalne)**.** *Jeżeli funkcja f jest określona i ciągła w przedziale domkniętym $[a,b]$, to jest ona również jednostajnie ciągła w tym przedziale.*

Dowód. Dowód poprowadzimy nie wprost. Załóżmy, że dla pewnego $\varepsilon > 0$ nie istnieje takie $\delta > 0$, żeby spełniona była definicja jednostajnej ciągłości. W takim przypadku dla dowolnej liczby $\delta > 0$ istnieją w przedziale $[a,b]$ takie dwie liczby $x_0^{(1)}$ i $x^{(1)}$, że

$$|x^{(1)} - x_0^{(1)}| < \delta,\ \text{a równocześnie}\ |f\left(x^{(1)}\right) - f\left(x_0^{(1)}\right)| \geqslant \varepsilon.$$

Weźmy teraz ciąg $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ liczb dodatknich, $\delta_n \to 0$.
Jak pokazaliśmy wyżej, dla każdego δ_n znajedziemy w przedziale $[a,b]$ wartości $x_0^{(n)}$ i $x^{(n)}$ takie, że

$$|x^{(n)} - x_0^{(n)}| < \delta_n, \text{ a równocześnie } |f\left(x^{(n)}\right) - f\left(x_0^{(n)}\right)| \geqslant \varepsilon.$$

Na mocy twierdzenia 2.13 Bolzano-Weierstrassa z ciągu ograniczonego $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ można wybrać podciąg zbieżny do pewnego punktu x_0 przedziału $[a,b]$. Oznaczmy go $(x^{(n_k)})_{k\in\mathbb{N}}$. Mamy $|x^{(n_k)} - x_0^{(n_k)}| < \delta_{n_k} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} \lim\limits_{n\to\infty} \delta_n = 0$ i stąd $x^{(n_k)} - x_0^{(n_k)} \to 0$. W takim razie ciąg $x_0^{(n_k)}$ również dąży do x_0. W takim razie na mocy ciągłości funkcji w punkcie x_0 powinno być

$$f(x^{n_k}) \to f(x_0) \text{ oraz } f(x_0^{(n)}) \to f(x_0), \text{ czyli } f(x^{n_k}) - f(x_0^{(n_k)}) \to 0,$$

co przeczy temu, że dla wszystkich n $|f(x^{(n_k)}) - f(x_0^{(n_k)})| \geqslant \varepsilon$. □

Definicja 5.7. Niech (X,ρ), (Y,σ) będą przestrzeniami metrycznymi. Mówimy, że funkcja $f\colon X \to Y$ spełnia *warunek Lipschitza* ze stałą $L \geqslant 0$, gdy dla dowolnych $x_1, x_2 \in X$ zachodzi

$$\sigma(f(x_1), f(x_2)) \leqslant L \cdot \rho(x_1, x_2). \tag{12}$$

Najmniejszą liczbą L (o ile istnieje) dla której spełniona jest powyższa nierówność dla dowolnych $x_1, x_2 \in X$ nazywamy *stałą Lipschitza* funkcji f. Funkcję spełniającą warunek Lipschitza ze stałą $L < 1$ nazywamy *kontrakcją* albo *odwzorowaniem zwężającym.*

Twierdzenie 5.6. *Funkcja spełniająca warunek Lipschitza jest jednostajnie ciągła.*

Dowód. Niech (X,ρ), (Y,σ) - przestrzenie metryczne i $f\colon X \to Y$ sp. warunek Lipschitza z ustaloną stałą $L \leqslant 0$. Weźmy dowolne $\varepsilon > 0$. wówczas dla $\delta = \frac{\varepsilon}{L}$ dostajemy, że dla dowolnych $x, y \in X$ spełniających $\rho(x,y) < \delta$ zachodzi

$$\sigma(f(x), f(y)) \leqslant L\rho(x,y) < L\delta = L\frac{\varepsilon}{L} = \varepsilon.$$

czyli f jest jednostajnie ciągła na X. □

Ćwiczenie. Niech $I \subseteq \mathbb{R}$ będzie przedziałem. Udowodnić, że funkcja $f\colon I \to \mathbb{R}$ spełniająca dla pewnych $L \geqslant 0$ i $\alpha \in (0,1]$, warunek[16]

$$|f(x) - f(y)| \leqslant L|x-y|^\alpha, \ x, y \in I$$

jest jednostajnie ciągła na I.

Twierdzenie 5.7 (Heinego-Cantora). *Każda funkcja ciągła na przestrzeni zwartej jest jednostajnie ciągła.*

[16]mówimy wtedy, że funkcja f spełnia warunek Höldera ze stałą L i wykładnikiem α.

Dowód. Niech $f\colon X \to Y$ będzie funkcją ciągłą działającą z przestrzeni zwartej (X, ρ) w przestrzeń metryczną (Y, σ). Ustalmy dow. $\varepsilon > 0$. Z ciągłości f dla każdego $x \in X$ istnieje liczba $\delta_x > 0$ taka, że $\sigma(f(x), f(y)) < \frac{\varepsilon}{2}$ dla każdego $y \in K(x, \delta_x)$.
Ze zwartości X z pokrycia $\{K(x, \frac{\delta_x}{2})\colon x \in X\}$ można wybrać podpokrycie skończone $K(x_1, \frac{\delta_{x_1}}{2}), K(x_2, \frac{\delta_{x_2}}{2}), \ldots, K(x_m, \frac{\delta_{x_m}}{2})$. Niech $\delta = \frac{1}{2}\min\{\delta_{x_1}, \delta_{x_2}, \ldots, \delta_{x_m}\}$. Wówczas dla dowolnych $x, y \in X$ takich, że $\rho(x, y) < \delta$ istnieje punkt x_k taki, że $x \in K(x_k, \frac{\delta_{x_k}}{2})$. Wtedy

$$\rho(y, x_k) \leqslant \underbrace{\rho(y, x)}_{\substack{<\delta\leqslant\frac{\delta_{x_k}}{2} \\ \text{z założenia}}} + \overbrace{\rho(x, x_k)}^{<\frac{\delta_{x_k}}{2}} < \frac{\delta_{x_k}}{2} + \frac{\delta_{x_k}}{2} = \delta_{x_k},$$

zatem $x, y \in K(x_k, \delta_{x_k})$ $\Big(x$ również należy do tej kuli, ponieważ $K(x_k, \frac{\delta_{x_k}}{2}) \subseteq K(x_k, \delta_{x_k})\Big)$.
Możemy już obliczyć

$$\sigma(f(x), f(y)) \leqslant \sigma(f(x), f(x_i)) + \sigma(f(x_i), f(y)) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Stąd mamy, że $f\colon X \to Y$ jest jednostajnie ciągła, co było do okazania. □

Wniosek. Jeżeli funkcja ciągła f jest określona na przedziale domkniętym $[a, b]$, to jest w tym również jednostajnie ciągła w tym przedziale.

Definicja 5.8. Mówimy, że funkcja $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ ma *własność Darboux*, gdy dla dowolnego $y \in [f(a), f(b)]$ istnieje takie $c \in (a, b)$, że $f(c) = y$.

Lemat 5.1 (Bolzano)**.** *Niech $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$, $a < b$ będzie funkcją ciągłą oraz $f(a)\cdot f(b) < 0$. Wtedy istnieje takie $c \in (a, b)$, że $f(c) = 0$.*

Dowód. Dla ustalenia uwagi przyjmijmy, że $f(a) < 0$ a $f(b) > 0$. Podzielimy przedział $[a, b]$ na połowy punktem $c_0 = \frac{a+b}{2}$. Jeśli $f(c_0) = 0$, to $c = c_0$ i twierdzenie jest udowodnione. Jeśli $f(c_0) \neq 0$, to na końcach jednego z przedziałów $[a, c_0]$, $[c_0, b]$ funkcja przyjmuje wartości różnych znaków - na lewym końcu wartość ujemną, a na prawym dodatnią. Oznaczając ten przedział przez $[a_1, b_1]$, mamy $f(a_1) < 0$, $f(b_1) > 0$ i $[a_1, b_1] \subseteq [a, b]$. Dzielimy ten nowy przedział na połowy punktem $c_1 = \frac{a_1+b_1}{2}$. Jeśli $f(c_1) = 0$, to twierdzenie jest udowodnione. Kontynuujemy ten proces:
Jeśli dla $m \in \mathbb{N}$ mamy przedział $[a_m, b_m] \subseteq [a_{m-1}, b_{m-1}]$ taki, że $f(a_m) < 0$ i $f(b_m) > 0$, to dzielimy go punktem $c_m = \frac{a_m+b_m}{2}$. Jeśli $f(c_m) = 0$ - twierdzenie jest udowodnione. W przeciwnym wypadku, wybieramy ten z przedziałów $[a_m, c_m]$, $[c_m, b_m]$ na końcach którego funkcja f przyjmie wartości różnych znaków.
Albo po skończonej liczbie kroków trafimy w punkt, w którym f przyjmuje wartość zero, albo otrzymamy zdefiniowany indukcyjnie nieskończony ciąg $([a_n, b_n])_{n\in\mathbb{N}}$ niepustych przedziałów zstępujących a dla n-tego przedziału, jego długość wynosi $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Wtedy na mocy lematu 2.2 o przedziałach zstępujących istnieje taki punkt $c \in [a, b]$, dla którego $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = c$. Zauważmy teraz, że

$$f(a_n) < 0, \ f(b_n) > 0, \ n \in \mathbb{N}, \ \text{i stąd} \ \lim_{n\to\infty} f(a_n) \leqslant 0, \ \lim_{n\to\infty} b_n \geqslant 0.$$

Korzystając z ciągłości funkcji f: $f(c) = \lim_{n\to\infty} f(a_n)$ i $f(c) = \lim_{n\to\infty} f(b_n)$, czyli $f(c) \leqslant 0$ i zarazem $f(c) \geqslant 0$. Ostatecznie $f(c) = 0$.

□

Twierdzenie 5.8 (Darboux)**.** *Każda funkcja ciągła ma własnośc Darboux.*

Dowód. Weźmy dowolny $y \in (f(a)), f(b))$. Zdefinujmy funkcję pomocniczą $F\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ wzorem $F(x) = f(x) - y$. Funkcja ta jest oczywiście ciągła. Ponieważ $f(a) < y < f(b)$, to $F(b) = f(a) - c < 0$, zaś $F(b) = f(b) - c > 0$. Zatem na mocy lematu Bolzano, istnieje punkt $x \in [a, b]$ taki, że $F(x) = 0$, czyli $f(x) = y$. □

Uwaga (1). Twierdzenie nie zachodzi w drugą stronę. Np. funkcja $f\colon [-1, 1] \to [-1, 1]$ określona wzorem

$$f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x} & \text{dla } x \neq 0; \\ 0 & \text{dla } x = 0. \end{cases}$$

ma własność Darboux ale nie jest ciągła w punkcie $x = 0$.
Podobnie funkcja $f\colon [-1, 1] \to [0, 2]$ dana wzorem

$$f(x) = \begin{cases} -x, & x \in [-1, 0]; \\ x + 1, & x \in (0, 1]; \end{cases}$$

ma własność Darboux ale nie jest ciągła w punkcie $x = 0$ (ćwiczenie).

Uwaga (2). Twierdzenie Darboux można też sformułować inaczej a ponadto w literaturze wiąże się je z nazwiskami Bernarda Bolzana i Augustina Louisa Cauchy'ego. Oczywiste jest, że dokładnie to samo co twierdzenie 5.8 wyraża twierdzenie wypowiedziane tak:

Twierdzenie (Bolzano-Cauchy'ego)**.** *Jeżeli $f\colon D \to \mathbb{R}$ jest funkcją ciągłą, a zbiór $D \subseteq \mathbb{R}$ przedziałem, to zbiór wartości funkcji jest także przedziałem.*

Uwaga (3). Jeszcze ogólniej, na gruncie topologii twierdzenie Darboux przyjmuje postać stwierdzenia:
jeśli $f\colon X \to Y$ jest ciągłą funkcją różnowartościową między przestrzeniami metrycznymi (topologicznymi) X i Y, oraz X jest zb. spójnym, to przestrzeń Y również jest zbiorem spójnym.

Ćwiczenie. Wykazać, że każde ciągłe odzworowanie f przedziału $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ w siebie ma co najmniej jeden punkt stały, tj. punkt $x \in [a, b]$ taki, że $f(x) = x$.

Twierdzenie 5.9. *Jeśli funkcja jest ściśle monotoniczna w przedziale domkniętym i ma własność Darboux, to jest ciągła w tym przedziale.*

Uwaga. Założenie zwartości (ograniczoności i domkniętości) dziedziny funkcji w powyższym twierdzeniu nie może być pominięte. Np. funkcja $f\colon (0,1] \to \mathbb{R}$ określona wzorem

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

jest ciągła, ale nie jest ograniczona. Podobnie funkcja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dana jako $f(x) = e^x$ nie jest ograniczona, mimo że jej dziedzina - cała prosta rzeczywista - jest domknięta. Klasycznie twierdzenie dotyczy funkcji $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}, [a,b] \subseteq \mathbb{R}$.

Twierdzenie 5.10. *Funkcja $f\colon X \to Y$, gdzie X, Y są przestrzeniami metrycznymi, jest ciągła wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego zbioru otwartego $U \subseteq X$ zbiór $f^{-1}[U]$ jest otwarty.*

Dowód. Najpierw przeprowadzimy dowód w lewo: rozważmy dowolny $x \in X$. Chcemy sprawdzić, że

$$(*)\ \forall_{\varepsilon>0}\exists_{\delta>0}\forall_{x'}.\ x' \in K(x,\delta) \Rightarrow f(x') \in K(f(x),\varepsilon)$$

Ustalmy więc dowolny $\varepsilon > 0$. Zbiór $K(f(x),\varepsilon)$ jest otwarty, zatem z założenia zbiór $f^{-1}[K(f(x),\varepsilon)]$ jest również otwarty i stąd istnieje pewne otoczenie $K(x,\delta) \subseteq f^{-1}[K(f(x),\varepsilon)]$ punktu x. Ale z definicji przeciwobrazu dla każdego punktu $x' \in K(x,\delta)$ mamy $f(x') \in K(f(x),\varepsilon)$ czyli inaczej mówiąc zachodzi warunek $(*)$. W drugą stronę: ustalmy dowolny zbiór otwarty $U \subseteq X$. Rozważmy dowolny $x \in f^{-1}[U]$. Istnieje $y = f(x) \in U$ wraz z otoczeniem (otwartość U) $K(y,\varepsilon) \subseteq U$. Z ciągłości f dla otoczenia $K(f(x),\varepsilon)$ istnieje takie otoczenie $K(x,\delta)$ punktu x, że dla każdego $x' \in K(x,\delta)$ zachodzi $f(x') \in K(f(x),\varepsilon) = K(y,\varepsilon)$. Czyli $K(x,\delta) \subseteq f^{-1}[K(y,\varepsilon)] \subseteq f^{-1}[U]$. Stąd zbiór $f^{-1}[U]$ jest otwarty. □

Łatwo pokazać, że zachodzi

Twierdzenie 5.11. *Funkcja $f\colon X \to Y$ określona na przestrzeniach metrycznych $(X,\rho),(X,\sigma)$ jest ciągła wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego zbioru domkniętego $F \subseteq Y$ zbiór $f^{-1}[F]$ jest domknięty.*

Ćwiczenie. Sprawdzić, że $f^{-1}[X \setminus B] \subseteq X \setminus f^{-1}[B]$, $B \subseteq Y$ i udowodnić poprzednie twierdzenie.

Twierdzenie 5.12. *Obraz ciągły przestrzeni zwartej jest przestrzenią zwartą.*

Dowód. Niech $f\colon X \to Y$ będzie odwzorowaniem ciągłym przestrzeni zwartej X na przestrzeń Y. Rozważmy dowolne pokrycie $\mathcal{V}$ przestrzeni Y. Rodzina

$$\{f^{-1}[V]\colon V \in \mathcal{V}\}$$

jest pokryciem przestrzeni X na mocy tego, że f jest na Y oraz składa się ze zbiorów otwartych, gdyż f jest ciągłe. Ze zwartości przestrzeni X wynika, że istnieje skończenie wiele zbiorów $f^{-1}[V_1], \ldots, f^{-1}[V_n]$, gdzie $V_i \in \mathcal{V}$, które pokrywają przestrzeń X. Stąd

$$Y = f[X] = f[f^{-1}[V_1] \cup \cdots \cup f^{-1}[V_n]] = V_1 \cup \cdots \cup V_n.$$

Koniec dowodu. □

Twierdzenie 5.13 (Weierstrassa)**.** *Niech $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą. Wtedy jej obraz jest zbiorem ograniczonym, tzn. $m \leqslant f(x) \leqslant M$ dla pewnych stałych m i M. Ponadto funkcja f osiąga swoje kresy, tzn. istnieją takie $\underline{x}, \overline{x} \in X$, że*

$$f(\underline{x}) = \inf_{x \in X} f(x), \ f(\overline{x}) = \sup_{x \in X} f(x).$$

Wtedy oczywiście

$$f(\underline{x}) \leqslant f(x) \leqslant f(\overline{x}), \ \text{dla każdego } x \in [a,b].$$

Ogólniej:

Twierdzenie 5.14 (Weierstrassa)**.** *Funkcja ciągła na przestrzeni zwartej o wartościach w $\mathbb{R}$ jest ograniczona i przyjmuje swoje kresy.*

Dowód. Niech $f\colon \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą, określoną na przestrzeni zwartej X. Wówczas $f[X]$ jest zwarty jako ciągły obraz przestrzeni zwartej. Na mocy twierdzenia 3.21 $f[X]$ jest domknięty i ograniczony. Zatem f jest funkcją ograniczoną. Z definicji supremum i infimum oraz domkniętości $f[X]$ mamy, że $\inf f[X], \sup f[X] \in f[X]$. □

Twierdzenie 5.15. *Zbiór punktów nieciągłości funkcji monotonicznej określonej na przedziale otwartym jest co najwyżej przeliczalny.*

Półciągłość:

Twierdzenie 5.16. *Funkcja $f\colon X \to \mathbb{R}$, X - prz. metryczna; jest ciągła wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzą równocześnie warunki*

(1) *dla dow. $c \in \mathbb{R}$ zbiór $\{x \in X\colon f(x) > c\}$ jest zbiorem otwartym;*

(2) *dla dow. $c \in \mathbb{R}$ zbiór $\{x \in X\colon f(x) < c\}$ jest zbiorem otwartym.*

Dowód. Implikacja w prawo wynika z twierdzenia 5.10. W drugą stronę: ustalmy dow. $x_0 \in X$. Rozważmy dowolny $\varepsilon > 0$. Niech $c_1 = f(x_0) - \varepsilon$ i $c_2 = f(x_0) + \varepsilon$. Wtedy, z założenia istnieją takie $r_1, r_2 > 0$, że

$$K(x_0, r_1) \subseteq \{x \in X\colon f(x) > f(x_0) - \varepsilon\},$$

$$K(x_0, r_2) \subseteq \{x \in X\colon f(x) < f(x_0) + \varepsilon\},$$

Przyjmijmy $r = \min\{r_1, r_2\}$ i wtedy

$$K(x_0, r) \subseteq K(x_0, r_1) \cap K(x_0, r_2) = \{x \in X \colon |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon\}.$$

Pokazaliśmy zatem, że $\forall_{\varepsilon>0}\exists_{r>0}\forall_{x\in X} x \in K(x_0, r) \Rightarrow f(x) \in K(f(x_0), \varepsilon)$. f jest ciągła w punkcie x_0 a z dowolności wyboru tego punktu: jest ciągła w X. $\square$

Definicja 5.9. Ustalmy funkcję $f \colon X \to \mathbb{R}$, gdzie X - prz. metryczna. Jeżeli f spełnia warunek (1) z poprzedniego twierdzenia, to mówimy, że jest *półciągła z góry*. Jeżeli f spełnia warunek (2) to mówimy, że jest *półciągła z dołu*.

Z poprzedniego twierdzenia wynika w sposób oczywisty

Twierdzenie 5.17. *Funkcja jest ciągła wtedy i tylko wtedy, gdy jest równocześnie półciągła z dołu i z góry.*

5.1 *Twierdzenia o punkcie stałym

Twierdzenie 5.18 (Banacha o punkcie stałym)**.** *Niech (X,ρ) będzie przestrzenią metryczną zupełną a $T\colon X \to X$ odzworowaniem zwężającym. Wówczas istnieje dokładnie jeden punkt $a \in X$ taki, że $T(a) = a$. Ponadto ciąg $(T^n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ dla dowolnego $x \in X$ jest zbieżny do a oraz $\rho(T^n(x),a) \leqslant L^n \cdot \rho(x,a)$, gdzie L jest stałą, dla której T spełnia warunek Lipschitza.*

Dowód. Niech $a \in X$. Pokażemy, że ciąg $(T^n(a))_{\mathbb{N}}$ spełnia warunek Cauchy'ego. Indukcyjnie udowodnimy najpierw, że

$$\rho\left(T^{n+1}(x),T^n(x)\right) \leqslant L^n\rho(T(x),x)$$

Dla $n=0$: $\rho\left(T^1(x),T^0(x)\right) = \rho(T(x),x)$. Dla $n=1$ mamy $\rho\left(T^2(x),T^1(x)\right) = \rho(T\left(T(x)\right),T(x)) \leqslant L\rho\left(T(x),x\right)$. Załóżmy, że dla pewnego $m \in \mathbb{N}$ zachodzi:

$$\rho\left(T^{m+1}(x),T^m(x)\right) \leqslant L^m\rho(T(x),x).$$

Pokażemy, że

$$\rho\left(T^{m+2}(x),T^{m+1}(x)\right) \leqslant L^{m+1}\rho(T(x),x).$$

Mamy:

$$\rho\left(T^{m+2}(x),T^{m+1}(x)\right) = \rho\left(T(T^{m+1}(x)).T(T^m(x))\right) \leqslant L\rho\left(T^{m+1}(x),T^m(x)\right) \leqslant$$

$$\leqslant L\cdot L^m\rho(T(x),x) = L^{m+1}\rho(T(x),x).$$

Ustalmy teraz dowolne $m,n \in \mathbb{N}$, $m>n$. Wtedy

$$\rho\left(T^m(x),T^n(x)\right) \leqslant \rho\left(T^m(x,T^{m-1})(x)\right)+\rho\left(T^{m-1}(x,T^{m-2})(x)\right)+\ldots+\rho\left(T^{n+1}(x,T^n)(x)\right) \leqslant$$

$$\leqslant L^{m-1}\rho(T(x),x)+L^{m-2}\rho(T(x),x)+\ldots+L^n\rho(T(x),x) = (L^{m-1}+L^{m-2}+\ldots+L^n)\cdot\rho(T(x),x) \leqslant$$

$$\leqslant \rho(T(x),x)\cdot\sum_{k=n}^{\infty}L^k = L^n\frac{\rho(T(x),x)}{1-L} = C\cdot L^n.$$

Ustalmy $\varepsilon>0$. Wtedy istnieje $n_0 \in \mathbb{N}$ takie, że $C\cdot L^{n_0} < \varepsilon$. Biorąc dowolne $m,n \geqslant n_0$ mamy

$$\rho(T^m(x),T^n(x)) \leqslant C\cdot L^{\min(n,m)} \leqslant C\cdot L^{n_0} < \varepsilon.$$

Stąd mamy już, że ciąg $(T^n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ spełnia warunek Cauchye'go, a zatem z zupełności przestrzeni X jest zbieżny. Niech

$$a = \lim_{n\to\infty}T^n(x).$$

T jest ciągła (gdyż spełnia warunek Lipschitza), zatem

$$T(a) = T\left(\lim_{n\to\infty} T^n(x)\right) = \lim_{n\to\infty} T(T^n(x)) = \lim_{n\to\infty} T^{n+1}(x) = a.$$

Indukcyjnie możemy pokzać, że $\rho(T^n(x), a) \leqslant L^n \rho(x, a), n \in \mathbb{N}$ dla dowolnego $x \in X$. (ćwiczenie) $\square$

Twierdzenie 5.19 (Brouwera o punkcie stałym)**.** *Niech K jest n-wymiarową kulą domkniętą w przestrzeni $\mathbb{R}^n$ oraz $T\colon K \to K$ będzie odwzorowaniem ciągłym. Wówczas istnieje taki punkt $a \in K$, że $T(a) = a$.*

6 Liczba e eulera

Twierdzenie 6.1. *Ciąg $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dany wzorem $e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ ma skończoną granicę. Ponadto*

$$2 < \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3.$$

Definicja 6.1. Liczbę $e = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ nazywamy *liczbą eulera.*

Przykład. Pokażemy, że $\lim\limits_{n\to 0}(1+n)^{\frac{1}{n}} = e$. Podstawmy $t = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}$, to wtedy $n = \frac{1}{t}, n \in \mathbb{N}$ oraz gdy $n \to 0$, to $t \to \infty$ (gdyż $t = \frac{1}{n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$).

$$\lim_{n\to 0}(1+n)^{\frac{1}{n}} = \lim_{t\to\infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t = e.$$

Przykład. Zobaczymy przykład typowej klasy zadań, „na liczenie ciągów".

Obliczmy granicę $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n-3}{n+2}\right)^{2n+1}$. Mamy $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n-3}{n+2}\right)^{2n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n+2-5}{n+2}\right)^{2n+1} =$

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{-5}{n+2}\right)^{2n+1} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{n+2}{-5}}\right)^{2n+1} = \lim_{n\to\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{n+2}{-5}}\right)^{\frac{n+2}{-5}}\right]^{\frac{-5(2n+1)}{n+4}}$$

Teraz zauważmy, że część w nawiasach kwadratowych dąży do e (jest to granica podciągu ciągu wyrazów $e_n = (1 + \frac{1}{n})^n$). Zatem nasza granica jest postaci

$$e^{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}, \quad \text{gdzie } a_n = \frac{-5(2n+1)}{n+4}.$$

Łatwo obliczamy, że $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -10$ i stąd szukana granica wynosi e^{-10}.

Można spotkać sporo „granic prowadzących do liczby e”, jak w powyższym przykładzie. Bynajmniej nie jest to tylko jakiś dziwny rodzaj zadań służący męczeniu studentów, ale jak najbardziej takie granice występują w rachunkach dotyczących fizyki, ekonomii i innych zastosowań „realistycznych” i trzeba umieć sobie z nimi radzić. Warto mieć w pamięci (łatwe do samodzielnego udowodnienia) następujące

Twierdzenie 6.2.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n=\frac{1}{e}$$

Dowód. Korzystając z twierdzenia 5.2 mamy

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{-n}\right)^{-(-n)}=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{-n}\right)^{-n}\right]^{-1}=$$

$$=\left[\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{-n}\right)^{-n}\right]^{-1}=[e]^{-1}=\frac{1}{e}.$$

□

Ponadto w tym miejscu lektury, dla wprawy proponuję od razu proste

Ćwiczenie (1). Obliczyć granicę

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+7}{n-2}\right)^{4n-2}$$

Zachęcam też spróbować nieco inne rachunkowo

Ćwiczenie (2). Obliczyć granicę

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+3}{n^2+1}\right)^{2n^2+1}$$

7 Pochodna funkcji jednej zmiennej, różniczkowalność funkcji

7.1 Pochodna funkcji jednej zmiennej

Definicja 7.1 (Pochodna funkcji jednej zmiennej w punkcie)**.** Niech $f\colon(a,b)\to\mathbb{R}$ oraz $x_0\in(a,b)$. *Pochodną funkcji* f w punkcie x_0 nazywamy granicę

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \tag{13}$$

i oznaczamy ją $f'(x_0)$.

Definicja 7.2. Jeżeli funkcja $f\colon D \to \mathbb{R}$, gdzie D jest przedziałem otwartym, jest różniczkowalna w każdym punkcie swojej dziedziny, to mówimy że jest *różniczkowalna* a jej pochodną nazywamy funkcję g taką, że

$$g(x) = f'(x),\ x \in D$$

i przyjmujemy oznaczenie $g = f'$.

Pamiętajmy, że przedziałami otwartymi są między innymi zbiory $(a, +\infty)$, $(-\infty, a)$, dla dow. $a \in \mathbb{R}$ a także $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$.

Przykład. Obliczmy pochodną funkcji $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ danej wzorem $y = x,\ x \in \mathbb{R}$ (czyli identyczności na $\mathbb{R}$. Ustalmy $x_0 \in \mathbb{R}$. Wtedy

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = (x)' = \lim_{x \to x_0} \frac{x - x_0}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} 1 = 1$$

Uwaga. Pochodna z dowolnej stałej jest równa 0 (ćwiczenie).

Interpretacja geometryczna pochodnej:

Twierdzenie 7.1. *Jeżeli funkcja f jest różniczkowalna w punkcie x_0 swojej dziedziny, to prosta o równaniu*

$$y = f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$$

jest styczną do wykresu funkcji w punkcie $(x_0, f(x_0))$.

Z drugiej strony:

Twierdzenie 7.2. *Jeżeli funkcja f jest ciągła w punkcie x_0 i istnieje taka liczba $c \in \mathbb{R}$, że prosta o równaniu*

$$y = f(x_0) - c(x - x_0)$$

jest styczną do wykresu funkcji f w punkcie x_0, to funkcja f jest w tym punkcie różniczkowalna oraz $f'(x_0) = c$.

Jak później zobaczymy, pochodne są narzędziem służącym do dokładnego badania wykresu funkcji - nawet funkcji trudnej do naszkicowania patrząc na sam wzór, którym jest zadana.

7.2 Podstawowe reguły i przykłady różniczkowania:

Posługiwanie się pochodnymi i różniczkami w rachunkach, opiera się w dużej mierze na stosowaniu kilku podstawowych reguł i tożsamości oraz z wielu „standardowych” pochodnych. Dla przykładu mamy

$$\frac{\mathrm{d}(a^x)}{\mathrm{d}y} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} a^x = (a^x)' = a^x \ln a.$$

Lemat 7.1.

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

Dowód. Podstawmy $e^x - 1 = \frac{1}{t}$. Wtedy $x = \ln\left(1 + \frac{1}{t}\right)$ a ponadto przy $t \to \pm\infty$, x dąży do zera i otrzymujemy

$$\lim_{t \to \pm\infty} \frac{1 + \frac{1}{t} - 1}{\ln\left(1 + \frac{1}{t}\right)} = \lim_{t \to \pm\infty} \frac{1}{t \ln\left(1 + \frac{1}{t}\right)} = \lim_{t \to \pm\infty} \frac{1}{\ln\left(1 + \frac{1}{t}\right)^t} =$$

$$= \frac{1}{\ln\left[\lim\limits_{t \to \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t\right]} = \frac{1}{\ln e} = 1.$$

□

Mamy

$$\lim_{h \to 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = a^x \lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h}.$$

Zauważmy, że $a^h = e^{h \ln a}$. Zatem

$$\lim_{h \to 0} \frac{e^{h \ln a} - 1}{h} = \ln a \lim_{h \to 0} \frac{e^{h \ln a} - 1}{h \ln a}.$$

Podstawmy $t = h \ln a$, wtedy $t \to 0$ i z poprzedniegp lematu

$$\ln a \cdot \lim_{t \to 0} \frac{e^t - 1}{t} = \ln a \cdot 1 = \ln a.$$

Zatem

$$(a^x)' = a^x \ln a.$$

Teraz wystarczy przyjąć $a = e$ i mamy, że $(e^x)' = e^x$ - i liczba e jest jedyną taką liczbą, dla której pochodna funkcji wykładniczej jest równa wyjściowej funkcji. Można też było skorzystać ze wzoru 4.2.4.

Ćwiczenie. Udowodnić z definicji pochodnej, że $(x^n)' = nx^{n-1}$ dla dowolnej liczby naturalnej n. Wskazówka: skorzystać ze wzoru 1.21.

Twierdzenie 7.3. *Niech $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ będdzie funkcją różniczkowalną a $c \in \mathbb{R}$ dowolną stałą. Wtedy*

$$(c \cdot f)' = c \cdot f'.$$

Dowód. Oczywisty - z definicji i własności granic. □

Twierdzenie 7.4. *Niech $f, g\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ będą funkcjami różniczkowalnymi. Wtedy*

$$(f+g)' = f' + g'.$$

Dowód. Ćwiczenie. □

Z powyższych dwóch twierdzeń wynika, że operacja różniczkowania jest *liniowa*, tzn. $(a \cdot f + b \cdot g)' = a \cdot (f') + b \cdot (g')$ dla dowolnych funkcji różniczkowalnych f, g oraz $a, b \in \mathbb{R}$.

Twierdzenie 7.5. *Niech $f, g\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ będą funkcjami różniczkowalnymi oraz $g \neq 0$ $(g(x) \neq 0, x \in (a,b))$. Wtedy*

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}.$$

Dowód. Załóżmy, że funkcje f, g są różniczkowalne w punkcie $x_0 \in (a,b)$. Ponieważ

$$\frac{\frac{1}{g}(x) - \frac{1}{g}(x_0)}{x - x_0} = -\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \cdot \frac{1}{g(x)g(x_0)}.$$

to uwzględniając ciągłość funkcji g w punkcie x_0 otrzymujemy

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = -\frac{g'(x_0)}{((g(x_0))^2}.$$

Z poprzedniego twierdzenia i powyższego wzrou otrzymujemy równość z tezy. □

Twierdzenie 7.6 (o pochodnej złożenia funkcji)**.** *Niech g będzie funkcją różniczkowalną w punkcie x_0, a f funkcją różniczkowalną w punkcie $y_0 = g(x_0)$. Wówczas funcja $f \circ g$ jest różniczkowalna w x_0 oraz*

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0). \tag{14}$$

Dowód. Obliczamy

$$(f \circ g)'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(f \circ g)(x_0 + \Delta x) - f(f \circ g)(x_0)}{\Delta x}.$$

Niech $\Delta y = g(x_0 + \Delta x) - g(x_0)$. Wtedy $\Delta y \overset{\Delta x \to 0}{\longrightarrow} 0$ oraz

$$(f \circ g)'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(y_0 + \Delta y) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Jeśli dodatkowo założymy, że $\Delta y \neq 0$, to z powyższego mamy

$$(f \circ g)'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(y_0 + \Delta y) - f(y_0)}{\Delta y} \cdot \frac{g(x_0 + \Delta x) - g(x_0)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(y_0 + \Delta y) - f(y_0)}{\Delta y} \cdot g'(x_0) = f'(y_0)g'(x_0) = f'(g(x_0))g'(x_0).$$

więc funkcja $f \circ g$ jest różniczkowalna w x_0 i zachodzi wzór 14. □

Powyższe twierdzenie jest znane jako *reguła łańcuchowa.*

Ćwiczenie. Niech $f(x) = ...$

Przykład (Pochodna logarytmiczna). Pochodna funkcji złożonej $y = \ln f(x), x \in D_f$ dow. funkcji f z funkcją $x \mapsto \ln x$ wyraża się w myśl twierdzenia o poch. funkcji złożonej wzorem

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} \ln f(x) = (\ln f(x))' = \frac{f'(x)}{f(x)}. \tag{15}$$

Czasem łatwiej jest obliczyć pochodną logarytmiczną niż pochodną f'. Wówrczas obliczamy f' z wzoru 15 w postaci $f'(x) = f(x) \cdot (\ln f(x))', x \in D_f$.

Ćwiczenie. Obliczyć pochodną funkcji f danej wzorem $f(x) = x^x, x \in \mathbb{R}$.

Twierdzenie 7.7 (o pochodnej funkcji odwrotnej)**.** *Jeżeli funkcja f jest ciągła i ściśle monotoniczna w otoczeniu $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ pewnego punktu $x \in D_f$ oraz ma pochodną właściwą $f'(x_0) \neq 0$. Wtedy*

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} \tag{16}$$

gdzie $y_0 = f(x_0)$ (czyli $x_0 = f^{-1}(y_0)$).

Podstawowe pochodne:

$$(x^a)' = a \cdot x^{a-1}, a \in \mathbb{R}$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}, x \neq 0$$

$$(a^x)' = a^x \ln a, a \in \mathbb{R}$$

$$(e^x)' = e^x$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$$

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$
$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$(\operatorname{arctg})' = \frac{1}{1+x^2}$$
$$(\operatorname{arcctg})' = -\frac{1}{1+x^2}$$

Udowodnimy teraz te wzory, które nie były wcześniej uzasadnione przy okazji omawiania własności pochodnych i reguł różniczkowania. Najpierw niech $f(x) = \ln x$. Zauważmy, że traktując w tym wzorze x jako funkcję identycznościową, możemy sztucznie potraktować to wyrażenie jako złożenie funkcji identycznościowej $x \mapsto x$ z funkcją $x \mapsto \ln x$ i zastosować regułę łańcuchową. Porównaj tw. 14 i wzór 15 z przykładu do twierdzenia. Mamy zatem

$$(\ln x)' = \frac{x'}{x} = \frac{1}{x}.$$

Pamiętamy, że policzyliśmy już pochodną $(x)' = 1$.

Dalej niech $f(x) = x^a$, $a \in \mathbb{R}$. Stosując ponownie wzór 15 możemy otrzymać, że

$$(x^a)' = x^a (a \ln x)' = a x^a \frac{1}{x} = a x^{a-1}.$$

(zauważmy, że proponowaliśmy jako ćwiczenie wykazać prawdziwość powyższego wzoru, dla a naturalnych - wciąż po można się tego podjąć. Ponadto z tego wzoru wynika, że $(x)' = (x^1)' = 1 \cdot x^{1-1} = 1 \cdot x^0 = 1 \cdot 1 = 1$.)

Pochodne funkcji trygonometrycznych:

$$(\sin x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x+\Delta x) - \sin(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2}{\Delta x} \sin\left(\frac{x+\Delta x - x}{2}\right) \cos\left(\frac{x + \Delta x + x}{2}\right) =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2}{\Delta x} \sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right) \cos\left(\frac{x+\Delta x + x}{2}\right) = \lim_{\Delta x \to 0} \underbrace{\frac{\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\frac{\Delta x}{2}}}_{\downarrow \atop 1} \cos\left(\frac{2x + \Delta x}{2}\right) =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \cos(x + \underset{\overset{\downarrow}{0}}{\frac{\Delta x}{2}}) = \cos x \quad \text{(ostatnia równość z ciągłości funkcji } \cos .)$$

Analogicznie obliczamy pochodną funkcji cos (ćwiczenie). Pozostaje obliczyć tg' i ctg'.

Pochodne funkcji cyklometrycznych: Skorzystamy z twierdzenia o pochodnej funkcji odwrotnej. Funkcja $\arcsin\colon (-1,1) \to \left(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi\right)$ jest funkcją odwrotną funkcji

$$\sin\big|_{\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)}$$

czyli obcięcia funkcji $\sin\colon \mathbb{R} \to\colon (-1,1)$. Zatem niech $y = \arcsin x$ i ze wzoru 7.7:

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad (x = \sin y \text{ skoro } y = \arcsin x!)$$

przy czym $\cos y > 0$, ponieważ pamiętamy, że $y \in \left(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi\right)$ i z tego samego powodu pozwalamy sobie dla uproszczenia napisać $\sin y$ zamiast $\sin\big|_{\left(-\frac{1}{2}\pi,\frac{1}{2}\pi\right)}(y)$. Analogicznie otrzymamy pozostałe wzory. Np.

$$(\arctan x)' = \frac{1}{(\operatorname{tg} y)'} = \cos^2 x = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Ciekawe przypadki:

Przykład. Rozważmy funkcję $f\colon \mathbb{R} \to [0,+\infty)$ daną wzorem $f(x) = |x|$. Funkcja f nie jest różniczkowalna w punkcie $x = 0$:

$$f'(0+) = \lim_{x\to 0+} \frac{|x|-|0|}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{x} = 1.$$

$$f'(0-) = \lim_{x\to 0-} \frac{|x|-|0|}{x-0} = \lim_{x\to 0-} \frac{-x}{x} = -1. \text{Gdyż } x < 0 \text{ gdy } x \to 0-.$$

Zatem $f'(0+) \neq f'(0-)$ czyli pochodna funkcji f w zerze nie istnieje.

Zobaczmy, co się dzieje, gdy $x \neq 0$. Niech najpierw $x > 0$, to wtedy możemy obliczyć $(f|_{(0,+\infty)})' = (|x|)' = (x)' = 1$. Dla $x < 0$ mamy funkcję $f|_{(-\infty,0)}$ i jej pochodną: $(|x|)' = (-x)' = -1$.

W ten sposób możemy przyjąć, że $(|x|)' = \dfrac{\mathrm{d}|x|}{\mathrm{d}y} = \begin{cases} 1, & \text{dla } x > 0; \\ -1, & \text{dla } x < 0. \end{cases}$

Zauważmy jeszcze, że $\dfrac{|x|}{x} = \begin{cases} 1, & \text{dla } x > 0; \\ -1, & \text{dla } x < 0. \end{cases}$

Możemy więc przyjąć

$$\boxed{(|x|)' = \frac{|x|}{x}, \; x \neq 0}$$

7.3 Pochodna w badaniu przebiegu zmienności funkcji

Pochodne są w istocie narzędziem służącym głównie badaniu *przebiegu zmienności* funkcji, tj. jej *monotoniczności* w danych podzbiorach dziedziny.

Monotoniczność funkcji:

Definicja 7.3. Mówimy, że funkcja f przechodząc przez punkt $x_0 \in D_f$:

- *rośnie* gdy, dla wartości x dostatecznie bliskich x_0 na prawo od x_0 będzie $f(x) > f(x_0)$ a dla wartości x dostatecznie bliskich x_0 na lewo od x_0 będzie $f(x) < f(x_0)$.
- *maleje* gdy, dla wartości x dostatecznie bliskich x_0 na prawo od x_0 będzie $f(x) < f(x_0)$ a dla wartości x dostatecznie bliskich x_0 na lewo od x_0 będzie $f(x) > f(x_0)$.

Zatem funkcja maleje (w dotychczasowym rozumieniu, patrz monotoniczność funkcji 1.13) w przedziale (a, b), gdy maleje przechodząc przez każdy punkt $x_0 \in (a, b)$. Analogicznie mówimy, że funkcja *rośnie w przedziale* (a, b), gdy rośnie przechodząc przez każdy punkt $x_0 \in (a, b)$.

Twierdzenie 7.8. *Niech funkcja f ma w punkcie $x_0 \in D_f$ pochodną skończoną. Jeśli*

- $f'(x_0) > 0$,*to funkcja f przechodząc przez punkt x_0 rośnie.*
- $f'(x_0) < 0$,*to funkcja f przechodząc przez punkt x_0 maleje.*

Dowód. Rozpatrzymy przypadek, gdy $f'(x_0) > 0$.

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0, \text{ zatem można znaleźć takie otoczenie } (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

punktu x_0, w którym przy $x \neq x_0$:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0.$$

Niech najpierw $x_0 < x < x_0 + \delta$, tak że $x - x_0 > 0$. Z powyższej nierówności wynika wtedy, że $f(x) - f(x_0) > 0$, czyli $f(x) > f(x_0)$. Analogicznie, jeżeli $x_0 - \delta < x < x_0$ i $x - x_0 < 0$, to mamy, że $f(x) > f(x_0)$. Koniec dowodu. □

Definicja 7.4. Mówimy, że funkcja $f\colon I \to \mathbb{R}$ ($I \subseteq \mathbb{R}$ - przedział) ma w punkcie $x_0 \in I$:

1. *minimum lokalne*, jeżeli istnieje takie otoczenie $U_{x_0} \subseteq I$ punktu x_0, że

$$f(x) \leqslant f(x_0), x \in U_{x_0},$$

2. *maksimum lokalne*, jeżeli istnieje takie otoczenie $U_{x_0} \subseteq I$ punktu x_0, że

$$f(x) \geqslant f(x_0), x \in U_{x_0}.$$

Ponadto, jeżeli nierówności w obydwu definicjach zastąpimy nierównościami ostrymi a otoczenie U_{x_0} sąsiedztwem $U_{x_0} \setminus \{x_0\}$, to powiemy, że dane minimum/maksimum jest *właściwe*. Punkty, które są minimum albo maksimum lokalnym funkcji f nazywamy po prostu *ekstremami lokalnymi* funkcji f.

Warto jeszcze wspomnieć, że największy w zbiorze maksimów lokalnych nazywa się, całkiem logicznie, *maksimum globalnym* lub po prostu wartością największą funkcji f w danym przedziale. Analogicznie określa się minimum globalne a punkt który jest globalnym maksimum/minimum nazywa się ekstremum globalnym.

Lemat 7.2 (Fermata). *Niech $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ osiąga w pewnym $x_0 \in (a,b)$ minimum lub maksimum lokalne oraz istnieje pochodna funkcji f w tym punkcie. Wtedy $f'(x_0) = 0$.*

Dowód. Niech na przykład f osiąga w punkcie c maksimum lokalne. Załóżmy, że byłoby $f'(c) \neq 0$. Wtedy albo $f'(c) > 0$ i wtedy, jeśli $x > c$ jest dostatecznie bliskie c, to $f(x) > f(c)$, albo $f'(c) < 0$ i wtedy, jeśli $x < c$ jest dostatecznie bliskie c, to $f(x) > f(c)$. W obu wypadkach mamy sprzeczność, bo $f(c)$ nie może być wtedy największą wartością funkcji f w przedziale $[a,b]$. □

Twierdzenie 7.9 (Rolle'a). *Niech $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ będzie ciągła w przedziale domkniętym $[a,b]$ oraz różniczkowalna w przedziale (a,b). Jeżeli $f(a) = f(b)$, to istnieje taki punkt $c \in (a,b)$, że $f'(c) = 0$.*

Dowód. Z ciągłości funkcji f w przedziale $[a,b]$ na mocy twierdzenia 5.13 Weierstrassa przyjmuje ona wartości najmniejszą $f(\underline{x})$ i największą $f(\overline{x})$ w tym przedziale. Rozpatrzmy dwa przypadki:

1. $f(\underline{x}) = f(\overline{x})$. Wtedy w przedziale $[a,b]$ funkcja f zachowuje stałą wartość: $f(\underline{x}) \leqslant f(x) \leqslant f(\overline{x}), x \in [a,b]$ i $f(\underline{x}) = f(\overline{x})$. Stąd $f'(x) = 0$ w całym przedziale, a za c możemy przyjąć dowolny punkt z przedziału (a,b).

2. $f(\underline{x}) < f(\overline{x})$. Wiemy, że funkcja osiąga obydwie te wartości, ponieważ jednak $f(a) = f(b)$, to z ciągłości choćby jedna z nich jest osiągnięta w pewnym punkcie $c \in (a,b)$. W takim razie z lematu 7.2 Fermata wynika, że $f'(c) = 0$.

□

Geometrycznie powyższe twierdzenie oznacza, że jeżeli skrajne rzędne krzywej $y = f(x)$ są równe, to na krzywej znajdzie się punkt, w którym styczna jest równoległa do osi Ox.

Przykład. Pokażemy, że

Ekstrema i punkty przegięcia:

Definicja 7.5. Ustalmy $x_0 \in \mathbb{R}$. Na „prostej rzeczywistej”, tj. zbiorze $\mathbb{R}$ otoczenie $K(x_0, \varepsilon)$ punktu x_0 jest postaci $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ - przedział. *Lewostronnym sąsiedztwem* punktu $x_0 \in \mathbb{R}$ o promieniu $\varepsilon > 0$ nazwiemy przedział $(x_0 - \varepsilon, x_0)$. *Prawostronnym sąsiedztwem* punktu $x_0 \in \mathbb{R}$ o promieniu $\varepsilon > 0$ nazwiemy przedział $(x_0, x_0 + \varepsilon)$. *Sąsiedztwem* $U(x_0, \varepsilon)$ nazwiemy przedział $K(x_0, \varepsilon) \setminus \{x_0\}$. Zatem punkt należy do swojego otoczenia ale nie należy do swojego sąsiedztwa.

Definicja 7.6. Niech $f \colon D \to \mathbb{R}$ będzie funkcją, $D \subseteq \mathbb{R}$ oraz $x_0 \in D$ będzie takim punktem, że f jest określona w pewnym otoczeniu tegu punktu. Punkt x_0 nazywamy *punktem przegięcia* wykresu funkcji f, jeżeli w sąsiedztwie lewostronnym punktu x_0 funkcja f jest wypukła, a w prawostronnym sąsiedztwie p. x_0 jest odwrotnie wypukła albo na odwrót - wypukła odwrotnie w lewostronnym sąsiedztwie i wypukła w prawostronnym.

7.4 Wypukłość funkcji

Niech X będzie przestrzenią liniową (wektorową) nad ciałem liczb rzeczywistych. (do końca paragrafu)

Definicja 7.7. Zbiór $W \subseteq X$ nazywamy wypukłym, gdy

$$\forall_{x,y \in W} \forall_{\substack{\alpha,\beta \geqslant 0 \\ \alpha+\beta=1.}} \ \alpha x + \beta y \in W.$$

Oznacza to po prostu, że dla dowolnych dwóch punktów $x, y \in W$ odcinek $\overline{xy}$ zawiera się w zbiorze W.

Twierdzenie 7.10. *Przekrój dowolnej rodziny zbiorów wypukłych jest zbiorem wypukłym.*

Dowód. Niech $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{P}(X)$ będzie dowolną rodziną zbiorów wypukłych. Ustalmy $x, y \in \bigcap \mathcal{R}$. Wtedy dla każdego $R \in \mathcal{R}$ i dowolnych $\alpha, \beta \geqslant 0$ mamy $\alpha x + \beta y \in R$, gdyż R jest wypukły z założenia. Z dowolności R wnosimy, że $\alpha x + \beta y \in \bigcap \mathcal{R}$. Zatem przekrój ten jest wypukły. $\square$

Definicja 7.8. Niech $W \subseteq \mathbb{R}$ będzie zbiorem wypukłym. Funkcję $f \colon W \to \mathbb{R}$ nazywamy *wypukłą*, gdy dla dowolnych $x, y \in W$ i $\alpha, \beta \geqslant 0$ takich, że $\alpha + \beta = 1$ zachodzi nierówność

$$f(\alpha x + \beta y) \leqslant \alpha f(x) + \beta f(y).$$

Jeżeli powyższa nierówność jest ostra, to mówimy, że f jest *ściśle wypukła*.

Podstawiając $\alpha = t$, $\beta = (1-t)$, mamy że funkcja f jest wypukła, gdy dla dow. $t \in (0,1)$ zachodzi $f(tx + (1-t)y) \leqslant tf(x) + (1-t)f(y)$.

Uwaga. Jeżeli odwrócimy nierówność w powyższej definicji, to dostaniemy definicję funkcji „wklęsłej”.

7.4.1 Pochodne w badaniu wypukłości funkcji

Wprost z definicji (i interpretacji geometrycznej) wyukłości funkcji mamy:

Twierdzenie 7.11. *Jeżeli $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ jest różniczkowalna na przedziale (a,b), to f jest wypukła, gdy dla każdych $x, x_0 \in (a,b)$ zachodzi nierówność $f'(x_0)(x-x_0) \leqslant f(x) - f(x_0)$.*

Twierdzenie 7.12. *Niech $D \subseteq \mathbb{R}$. Funkcja $f\colon D \to \mathbb{R}$ jest [ściśle] wypukła wtedy i tylko wtedy, gdy jest różniczkowalna w zbiorze D i f' jest niemalejąca [rosnąca].*

Stąd wynika kilka oczywistych wniosków:

Twierdzenie 7.13. *Funkcja $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ wypukła jest ciągła w (a,b).*

Twierdzenie 7.14. *Jeżeli $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ jest dwukrotnie różniczkowalna na przedziale (a,b), to f jest wypukła, gdy dla każdego $x \in (a,b)$ zachodzi $f''(x) \geqslant 0$.*

7.5 Twierdzenia o wartości średniej

Twierdzenie 7.15 (Lagrange'a o wartości średniej)**.** *Niech $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą w przedziale domkniętym $[a,b]$, $a < b$ oraz różniczkowalną w przedziale otwartym (a,b). Wtedy istnieje taki punkt $\xi \in (a,b)$, że dla niego spełniona będzie nierówność*

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Dowód. Zdefinujmy funkcję pomocniczą $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ wzorem

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Łatwo zauważyć, że funkcja ta spełnia wszystkie założenia twierdzenia Rolle'a. Rzeczywiście jest ona ciągła w $[a,b]$, jako różnica funkcji ciągłej i funkcji liniowej. W przedziale (a,b) ma ona pochodną skończoną, równą

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Podstawiając pod x kolejno a i b sprawdzamy, że $F(a) = F(b) = 0$, czyli F przyjmuje na końcach przedziału tę samą wartość.
Z twierdzenia Rolle'a wynika więc, że istnieje taki punkt $c \in (a,b)$, że $F'(c) = 0$. Tak więc

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad \text{czyli szukane } \xi = c.$$

□

Ćwiczenie. Korzystając z twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej, udowodnić że

$$\sin(x + h) - \sin x = h \cos \xi \quad \text{dla pewnego } x < \xi < x + h.$$

Twierdzenie 7.16 (Cauchy'ego o wartości średniej)**.** *Niech $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ będą ciągłe w przedziale domkniętym $[a,b]$ oraz różniczkowalne w przedziale (a,b). Wówczas istnieje takie $\xi \in (a,b)$, że*

$$g'(\xi) \cdot (f(b) - f(a)) = f'(\xi) \cdot (g(b) - g(a)).$$

Dowód. Zdefiniujmy funkcję pomocniczą $\varphi\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ w następujący sposób:

$$\varphi(x) = (f(b) - f(a))g(x) - (g(b) - g(a))f(x), x \in [a,b].$$

φ jest różniczkowalna na (a,b) oraz $h(a) = h(b)$ i z twierdzenia Rolle'a istnieje takie $\xi \in (a,b)$, że $\varphi'(\xi) = 0$. Ale

$$0 = \varphi'(\xi) = (f(b) - f(a))g'(\xi) - (g(b) - g(a))f'(\xi)$$

co kończy dowód. □

7.6 Różniczkowalność a ciągłość funkcji

Twierdzenie 7.17. *Funkcja $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ różniczkowalna w przedziale (a,b) jest w tym przedziale ciągła.*

Dowód. Rozważmy dowolny $x_0 \in (a,b)$. Zauważmy, że $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}h = f(x_0+h) - f(x_0)$. Przechodząc do granicy mamy

$$\lim_{h\to 0}(f(x_0+h) - f(x_0)) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} h = f'(x) \cdot \lim_{h\to 0} h = 0$$

Zatem $\lim\limits_{h\to 0}(f(x_0+h) - f(x_0)) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) = \lim\limits_{h\to 0} f(x_0+h)$. Dowolny $x_1 \neq x_0$ przedstawiamy jako $x_0 + h$ i wtedy dla $h \to 0$ zachodzi $x_0 \to x_1$. Ostatecznie mamy, że $\lim\limits_{x_0\to x_1} f(x) = f(x_0)$ dla dow. x_1. □

Twierdzenie odwrotne nie jest prawdziwe.

Twierdzenie 7.18 (Darboux II)**.** *Niech $f\colon D \to \mathbb{R}$ będzie funkcją różniczkowalną w przedziale $D \subseteq \mathbb{R}$. Wówczas pochodna f' tej funkcji ma w tym przedziale własność Darboux.*

Dowód. Niech $D \subseteq \mathbb{R}$ będzie przedziałem, a $f\colon D \to \mathbb{R}$.
Ustalmy $a, b \in D$, $a < b$. Dla dalszych rozważań możemy przyjąć, że $f'(a) \neq f'(b)$. Weźmy teraz punkt y z przedziału $(f'(a), f'(b))$ i zdefiniujmy dwie funkcje $f_a, f_b\colon D \to \mathbb{R}$ następująco

$$f_a(t) = \begin{cases} f'(a), & \text{gdy } t = a, \\ \frac{f(t)-f(a)}{t-a}, & \text{gdy } t \in D \setminus \{a\}; \end{cases}$$

$$f_b(t) = \begin{cases} f'(b), & \text{gdy } t = b, \\ \frac{f(b)-f(t)}{b-t}, & \text{gdy } t \in D \setminus \{b\}; \end{cases}$$

Zauważmy, że $f_a(a) = f'(a)$, $f_a(b) = f_b(a)$, $f_b(b) = f'(b)$. Zatem element y leży pomiędzy liczbami $f_a(a)$ a $f_a(b)$ lub pomiędzy liczbami $f_b(a)$ a $f_b(b)$. Jeżeli y leży pomiędzy liczbami $f_a(a)$ oraz $f_b(b)$, to ponieważ funkcja f_a jako ciągła ma własność Darboux, więc istnieje taki element $s \in (a,b]$, że $y = f_a(s)$, tj.

$$y = \frac{f(s) - f(a)}{s - a}. \tag{17}$$

Z twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej istnieje taki punkt $\xi \in (a,s)$, że

$$\frac{f(s) - f(a)}{s - a} = f'(\xi). \tag{18}$$

Z równości 17 i 18 wynika zatem, że $y = f'(\xi)$ dla pewnej liczby $\xi \in (a,s) \subseteq (a,b)$, co kończy dowód w rozważanym przypadku.
Jeżeli y leży pomiędzy liczbami $f_b(a)$ i $f_b(b)$, to postępujemy analogicznie. □

Ćwiczenie. Udowodnić powyższe twierdzenie, korzystając z lematu 7.2 Fermata. Wskazówka: dobrać odpowiednią funkcję pomocniczą.

Twierdzenie 7.19. *Niech $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ będzie funkcją różniczkowalną. Wówczas f spełnia warunek Lipschitza ze stałą Lipschitza L wtedy i tylko wtedy, gdy jej pochodna jest ograniczona przez L.*

Dowód. Załóżmy, że f spełnia warunek Lipschitza ze stałą L. Niech $x_0 \in (a,b)$. Wówczas dla $x \in (a,b)$, $x \neq x_0$:

$$\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right| = \frac{|f(x)-f(x_0)|}{|x-x_0|} \leqslant L.$$

Stąd $|f'(x_0)| \leqslant L$. Dla dowodu w drugą stronę załóżmy, że $|f'(x)| \leqslant L$ dla wszystkich $x \in (a,b)$. Niech $x_1, x_2 \in (a,b)$. Możemy przyjąć, że $x_1 < x_2$. Z twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej wynika, że istnieje takie $\xi \in (x_1, x_2)$, że

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1).$$

Ponieważ $|f'(\xi)| \leqslant L$, to

$$|f(x_2) - f(x_1)| = |f'(\xi)||x_2 - x_1| \leqslant L|x_2 - x_1|,$$

i stąd f spełnia warunek Lipschitza ze stałą L. □

Definicja 7.9. Definiujemy C^n jako zbiór funkcji mających n-tą pochodną **ciągłą**. Gdy $f \in C^n$, to mówimy, że funkcja f *jest klasy* C^n.
Przyjmujemy też, dla dow. przedziału $D \subseteq \mathbb{R}$:

$$C^n D = \{f\colon D \to \mathbb{R}\colon f \text{ ma } n\text{-tą pochodną ciągłą w przedziale } D\}$$

Jeżeli $n = \infty$, to C^∞ jest zbiorem funkcji nieskończenie wiele razy różniczkowalnych w swojej dziedzinie, a $C^\infty D$ funkcji, których obcięcie do zbioru D jest nieskończenie wiele razy różczniczkowalne.

Przykład. $C^2(0,1)$ jest zbiorem wszystkich funkcji $f\colon (0,1) \to \mathbb{R}$ dwukrotnie różniczkowalnych w $(0,1)$ tak, że f'' jest ciągła.

Przykład. $\sin, \cos \in C^\infty$.

Przykład. Rozważmy funkcję $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ daną wzorem:

$$f(x) = \begin{cases} \delta(x) & \text{dla } x \in [0,1] \\ \sin x & \text{dla } x \in \mathbb{R} \setminus [0,1] \end{cases}$$

Wtedy $f\big|_{(-\infty,0)} \in C^\infty(-\infty,0)$ oraz $f\big|_{(1,+\infty)} \in C^\infty(1,+\infty)$ natomiast $f\big|_{[0,1]}$ nie jest różniczkowalna.

Twierdzenie 7.20. *Jeżeli funkcja f jest klasy $C^2(a,b)$, to punkt $(x_0, f(x_0))$ jest punktem przegięcia wykresu funkcji f wtedy i tylko wtedy, gdy $f''(x_0) = 0$ oraz f'' zmienia znak przy przejściu przez punkt x_0.*

7.7 Różniczka funkcji jednej zmiennej

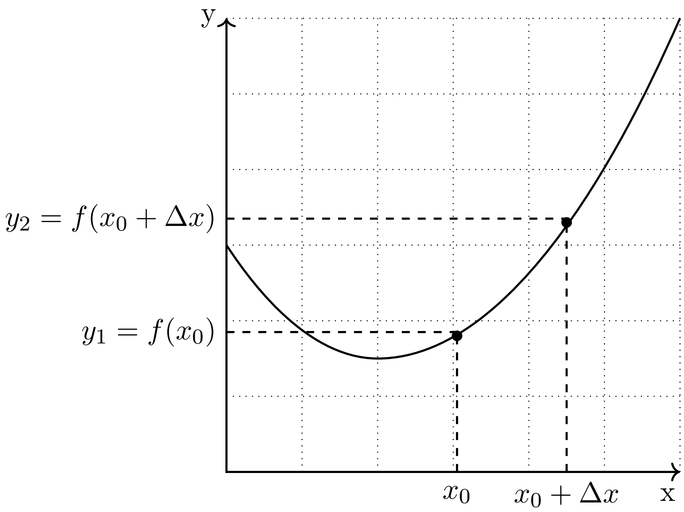
Definicja 7.10 (Różniczka funkcji rzeczywistej jednej zmiennej)**.** Różniczką w punkcie $x_0 \in (a, b)$ funkcji $f\colon (a, b) \to \mathbb{R}$ różniczkowalnej (w punkcie x_0) nazywamy wyrażenie $f'(x_0)\Delta x$ i oznaczamy $\mathrm{d}f_x(x_0, \Delta x)$. Czyli

$$\mathrm{d}f_x(x_0, \Delta x) = f'(x_0)\Delta x$$

Tradycyjnie różniczkę oznacza się jako $\mathrm{d}f$ lub $\mathrm{d}y$ i wtedy piszemy

$$\mathrm{d}f = \mathrm{d}y = f'(x_0)\Delta x$$

Rozważać będziemy dowolną funkcję różniczkowalną f. Ustalmy dowolny punkt $x_0 \in D_f$ oraz rozważmy przyrost Δx zmiennej x w okolicy x_0. Tzn. x wyraża się: $x = x_0 + \Delta x$.



Rysunek 1: Przyrost Δy zależy od przyrostu Δx.

Z powyższego wykresu widzimy, że dla ustalonego przyrostu Δx ustalonego argumentu x_0 odpowiadająca im zmiana (przyrost) argumentu y wynosi $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$:

$x_0{+}\Delta x{-}x_0 = \Delta x$ - długość przedziału $[x_0, x_0{+}\Delta x]$ w którym rozpatrujemy zachowanie funkcji f.

$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = y_2 - y_1 = \Delta y$ - o tyle zmienia się y w przedziale $[x_0, x_0 + \Delta x]$.

Wyrażenie

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

nazywamy ilorazem różnicowym (i czasem oznaczamy też np. $\frac{\Delta f}{\Delta x}$. Zauważmy, że jeżeli oznaczamy $x = x_0 + \Delta x$ to mamy

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{x_0 + \Delta x - x_0} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Przechodząc do granicy otrzymujemy pochodną, zatem mamy inny zapis definicji 7.1:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x)}{\Delta x_0}. \tag{19}$$

Ta postać definicji bywa często wygodniejsza w rachunkach.

W starszych podręcznikach można zetknąć się z następującym zapisem różniczki.

$$\mathrm{d}y = f'(x_0)\,\mathrm{d}x.$$

Niegdyś pochodną próbowano zdefiniować przy pomocy różniczek (nie różniczkę przy pomocy pochodnej jak właśnie to czynimy) jednak rozumiejąc różniczkę w zupełnie inny sposób: jako *nieskończenie małą* zmianę (przyrost) danej zmiennej. Pochodną rozumiano jako iloraz różniczek zmiennej zależnej y i zmiennej wolnej x funkcji f.

Fizycy, inżynierowie i niektórzy matematcy wciąż stosują zapis

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Symbol $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ na oznaczenie pochodnej wprowadził Leibniz[17], rozumiejąc go jako dosłowny iloraz dwóch "różniczek" rozumianych jako właśnie "nieskończenie małe" - "infinitezymalne" przyrosty Δy, Δx. W XVII-XVIII wieku nie operowano jeszcze ścisłym pojęciem granicy!

Niestety próby ścisłego zdefiniowania różniczki prowadziły do licznych sprzeczności logicznych i zakończyły się fiaskiem.

My jednak możemy spróbować tradycyjny zapis uzasadnić następująco

$$\mathrm{d}x \stackrel{\text{def}}{=} (x)'\Delta x = 1 \cdot \Delta x = \Delta x \text{ jeśli rozumiemy } x \text{ jako funkcję identycznościową } x \mapsto x.$$

Możemy też stąd przyjąć, że pochodną daje się wyrazić jako iloraz:

$$f'(x) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}.$$

Podkreślmy jeszcze raz, że powyższa równość to co najwyżej *tożsamość* wynikająca z definicji *różniczki* a nie *definicja* pochodnej.

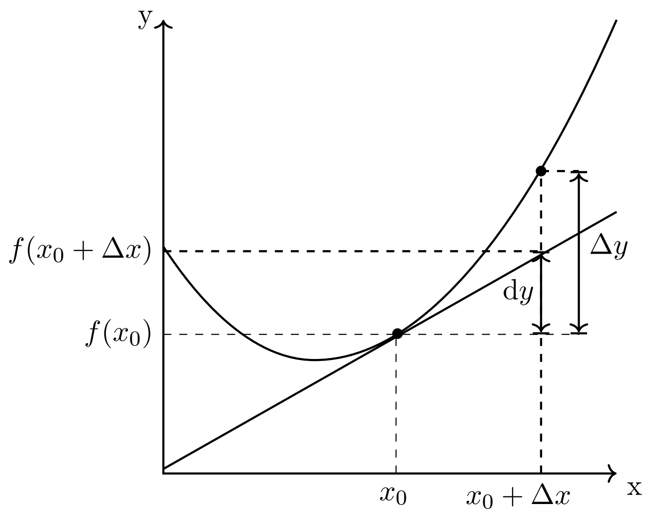
Przykład. Jeżeli mamy $y = f(x) = \sin^2(x)$, to możemy napisać

$$f'(x) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(\sin^2(x)\right) = 2\sin(x)\cos(x).$$

[17]Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) - niemiecki polihistor: matematyk i fizyk ale także filozof, inżynier, historyk, prawnik i dyplomata. Niezależnie od Isaaca Newtona wynalazca rachunku różniczkowego i całkowego. Jako osobisty asystent księcia Hanoweru - Jerzego Ludwika podróżował po całej Europie z tajnymi misjami dyplomatycznymi, które nie tylko przysparzały mu licznych przygód ale też dały okazję poznać wszystkich ważniejszych filozofów i naukowców swoich czasów. Był też twórcą jednej z pierwszych koncepcji "maszyny liczącej".

7.7.1 *Zastosowanie różniczki do rachunków przybliżonych

Różniczkę w punkcie możemy definiować jako część liniową funkcji w otoczeniu punktu x_0.



Rysunek 2: Porównanie przyrostu Δy wartości funkcji f i przyrostu dy.

Jak widzimy $\Delta y \approx \mathrm{d}y$ dla odpowiednio „małego" przyrostu y.

Twierdzenie 7.21. *Niech $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą oraz $x \in (a,b)$ - ustalone.*

$$f(x+\Delta x) \approx f'(x) \cdot \Delta x + f(x). \tag{20}$$

Dowód. Równość z tezy możemy inaczej zapisać jako $f(x+\Delta x) - f(x) = f'(x) \cdot \Delta x + o(\Delta x)$, gdzie $\frac{o(\Delta x)}{\Delta x} \xrightarrow[\Delta x \to 0]{} 0$. Przy $\Delta x \to 0$, korzystając z ciągłości funkcji uzyskujemy $f(x+\Delta x) \to f(x)$ oraz x jest ustalone, zatem $f'(x)$ jest stałą i $f'(x) \cdot \Delta x \to 0$.

$$\lim_{\Delta x \to 0} (f(x+\Delta x) - f(x)) = 0 = \lim_{\Delta x \to 0} f'(x) \cdot \Delta x.$$

□

Warto przywyknąć do powyższej tożsamości i różnych wygodnych (równoważnych) sposobów jej wyrażenia:

$$\boxed{f(x+\Delta x) \approx \mathrm{d}f + f(x)}$$

$$\boxed{\Delta f = f(x+\Delta x) - f(x) \approx f'(x)\Delta x = f'(x)\,\mathrm{d}x.}$$

Przykład. Obliczymy w przybliżeniu liczbę $\sqrt{4,3}$. Zgodnie ze wzorem 20 mamy

$$\sqrt{x+\Delta x} \approx (\sqrt{x})' \cdot \Delta x + \sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \Delta x + \sqrt{x}.$$

Podstawmy $x = 4$ i $\Delta x = 0,3$. Wtedy

$$\sqrt{x+\Delta x} = \sqrt{4+0,3} = \sqrt{4,3} \approx \frac{1}{2\sqrt{4}} \cdot 0,3 + \sqrt{4} = \frac{0,3}{4} + 2 = \frac{3}{40} + 2 = \frac{83}{40}.$$

Zatem $\sqrt{4,3} \approx \frac{83}{40}$. Porównajmy jeszcze wynik z obliczeniami kalkulatora: $\sqrt{4,3} = 2,0736\ldots$, podczas gdy $\frac{83}{40} = 2,075$.

Przykład. Pokażemy, że $\operatorname{tg} x \approx x$ dla x bliskich zeru. We wzorze

$$f(x+\Delta x) \approx f'(x)\Delta x + f(x)$$

za punkt x, w pobliżu którego szukamy przybliżenia funkcji tg przyjmujemy 0 oraz przyrost Δx oznaczać będziemy jako x (zmieniamy tylko oznaczenia, zaraz zobaczymy dlaczego). Mamy $f(0+x) \approx f'(0) \cdot x + f(0)$ czyli kładąc $f = \operatorname{tg}$ mamy $\operatorname{tg}(0+x) \approx [\operatorname{tg}(0)]'x + \operatorname{tg}(0)$. Dalej $[\operatorname{tg}(x)]' = \frac{1}{\cos^2(x)}$ oraz $\cos^2(0) = 1$ i $\operatorname{tg}(0) = 0$ zatem

$$\operatorname{tg}(x+0) = \operatorname{tg}(x) \approx \frac{1}{\cos^2(0)} \cdot x + \operatorname{tg}(0) = 1 \cdot x + 0 = x.$$

Ćwiczenie. Uzasadnić, że $\sin x \approx x$ dla x bliskich zeru.

7.8 *Uwagi o pochodnych cząstkowych i różniczce zupełnej funkcji

Definicja 7.11. *Pochodną cząstkową* funkcji $f\colon D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$ po zmiennej x_k definiujemy jako granicę (jeśli istnieje)

$$\lim_{\Delta x_k \to 0} \frac{f(x_1, x_2, \ldots, x_k + \Delta x_k, \ldots, x_n) - f(x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots, x_n)}{\Delta x_k}$$

i oznaczamy jako

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(x_1, \ldots, x_n) \;\text{ lub }\; \frac{\partial f(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_k}$$

Definicja 7.12. *Różniczką zupełną* $\mathrm{d}f(a_1, \ldots, a_n, \Delta a_1, \ldots, \Delta a_n)$ funkcji $f\colon D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$ w punkcie $(a_1, \ldots, a_n)$ nazywamy wyrażenie

$$\frac{\partial f(a_1, \ldots, a_n)}{\partial x_1}\Delta a_1 + \cdots + \frac{\partial f(a_1, \ldots, a_n)}{\partial x_n}\Delta a_n.$$

Ponownie różniczkę zupełną funkcji wielu zmiennych f będziemy często oznaczać po prostu $\mathrm{d}f$. Niech $\overrightarrow{x} = (a_1, \ldots, a_n)$. Przyrost $\overrightarrow{x}$ zapiszemy jako $\Delta\overrightarrow{x} = (\Delta a_1, \ldots, \Delta a_n)$. Wtedy stosujemy zapis $f(a_1, \ldots, a_n) = f(\overrightarrow{x})$. Odpowiadający przyrost wartości Δf funkcji f wyraża się wzorem

$$\Delta f = f(\overrightarrow{x} + \Delta\overrightarrow{x}) - f(\overrightarrow{x}) = \frac{\partial f(\overrightarrow{x})}{\partial x_1}\Delta a_1 + \cdots + \frac{\partial f(\overrightarrow{x})}{\partial x_n}\Delta a_n + o(\Delta\overrightarrow{x}),$$

gdzie $\frac{o(\Delta x)}{\Delta x} \xrightarrow{\Delta x \to 0} 0$. Zatem $f(\overrightarrow{x} + \Delta\overrightarrow{x}) \approx \mathrm{d}f(\overrightarrow{x}, \Delta\overrightarrow{x}) + f(\overrightarrow{x})$. Ponadto, jeżeli przyjmiemy

$$\mathrm{d}f(\overrightarrow{x}) = \frac{\partial f(\overrightarrow{x})}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial f(\overrightarrow{x})}{\partial x_n},$$

to $\mathrm{d}f(\overrightarrow{x}, \Delta\overrightarrow{x}) = \mathrm{d}f(\overrightarrow{x}) \circ \Delta\overrightarrow{x}$, gdzie $\circ$ oznacza zwykły iloczyn skalarny. Mamy postać różniczki zupełnej funkcji analogiczną do równości 20.

$$\boxed{f(\overrightarrow{x} + \Delta\overrightarrow{x}) \approx \mathrm{d}f(\overrightarrow{x}) \circ \Delta\overrightarrow{x} + f(\overrightarrow{x})}$$

7.9 Reguła de l'Hospitala

Reguła de l'Hospitala: jeżeli dla pewnego wyrażenia $\frac{f}{g}$ przy przejściu do granicy otrzymujemy symbol nieoznaczony $\left[\frac{0}{0}\right]$ lub $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$, to pod pewnymi warunkami możemy obliczyć pochodne f' i g' i wtedy $\lim \frac{f}{g} = \lim \frac{f'}{g'}$.

Szczegóły zawierają częściowo następujące twierdzenia:

Lemat 7.3. *Niech $f\colon (0, d) \to \mathbb{R}$ będzie ciągła, istnieje granica $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0$, oraz istnieje pochodna $f'\colon (0, d) \to \mathbb{R}$ funkcji f i jej granica $\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x)$. Wówczas*

$$\lim_{x\to 0+} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0+} f'(x).$$

Dowód.

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(\lambda x), \text{ gdzie } 0 < \lambda < 1.$$

Jeśli $x \to 0^+$, to $\lambda x \to 0^+$, a zatem

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0^+} f'(x).$$

□

Twierdzenie 7.22. *Niech $f, g\colon (a, b) \to \mathbb{R}$ są ciągłe w całej dziedzinie, oraz*

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^+} g(x) = 0.$$

Dalej, niech istnieją pochodne $f', g' \colon (a,b) \to \mathbb{R}$ odpowiednio funkcji f i g, $g' \neq 0$ oraz istnieje granica $\lim\limits_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. Wówczas

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Dowód. Zdefiniujmy $f(a) = g(a) = 0$. Oznaczmy $u = f(x)$. Wówczas mamy $x = \varphi(u)$, $f(x) = f(\varphi(x)) = F(u)$,

$$F'(u) = \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Jeżeli $x \to a^+$, to $u \to 0^+$ i na odwrót, zatem

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a^+} \frac{F(u)}{u} = \lim_{x\to a^+} F'(u) = \lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

$\square$

Twierdzenie 7.23. *Niech $f, g \colon (a, +\infty) \to \mathbb{R}$ są ciągłe dla $x > a$, oraz $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} g(x) = 0$. Niech ponadto istnieją w (a,∞) pochodne f', g' funkcji f i g oraz $g' \neq 0$. Wówczas, jeżeli istnieje*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

to

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Dowód. Niech $x = \frac{1}{u}$. Wtedy

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{u\to 0^+} \frac{f(1/u)}{g(1/u)} = \lim_{u\to 0^+} \frac{f'(1/u)(-1/u^2)}{g'(1/u)(-1/u^2)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

$\square$

Uwaga. W twierdzeniu 7.23 założenie

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} g(x) = 0$$

można zastąpić założeniem

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} g(x) = \infty.$$

Dowód pomijamy (ćwiczenie).

Przykład.

Obliczymy $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x}$. Zauważmy, że $\lim_{x\to 0}(e^x-1) = 0$ oraz $\lim_{x\to 0} x = 0$, zatem nie zastosujemy twierdzeń o arytmetyce granic, gdyż mamy do czynienia z symbolem nieoznaczonym $\left[\frac{0}{0}\right]$. Jednak stosując naszą regułę łatwo dostajemy:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{(e^x-1)'}{(x)'} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{1} = \lim_{x\to 0} e^x = 1.$$

Zdarza się, że również pochodne przy przejściu do granicy dają nam jeden z wymienionych symboli nieoznaczonych - czasem regułę daje się zastosować **kilka razy** aż pozbędziemy się symbolu nieoznaczonego.

8 Funkcje hiperboliczne

Definicja 8.1. *Sinusem hiperbolicznym* nazywamy funkcję $\sinh\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ określoną jako

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

a *cosinusem hiperbolicznym* funkcję $\cosh\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ określoną jako

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Funkcje te narodziły się w trakcie rozważań geometrycznych, zbiór $\{(\cosh(t), \sinh(t))\colon t \in \mathbb{R}$ jest wykresem (w tej postaci, tzw. parametryzacją) prawej (dodatniej) gałęzi hiperboli o równaniu $x^2 - y^2 = 1$. (o parametryzacji krzywych powiemy trochę w rozdziale o całkowaniu).

Twierdzenie 8.1. *Funkcje* sinh, cosh *spełniają nast.* tożsamości hiperboloczne

1. $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$, $x \in \mathbb{R}$;
2. $\cosh 0 = 1$ *i* $\sinh 0 = 0$;
3. $\cosh(-x) = \cosh x$ *i* $\sinh(-x) = -\sinh x$, $x \in \mathbb{R}$;
4. $(\sinh)' = \cosh$ *oraz* $(\cosh') = \sinh$.

Dowód. Proste ćwiczenie. □

Uwaga. Sinus hiperboliczny jest funkcją odwracalną. Rzeczywiście: $(\sinh x)' = \cosh x > 0$ zatem sinh jest f. ściśle monotoniczną ⇒ różnowartościową ⇒ odwracalną (uwzgl. jeszcze że $D_{\sinh} = R_{\sinh}$. Podobnie cosinus hiperboliczny jest f. odwracalną. Te funkcje odwrotne do sinusa i cosinusa hiperbolicznego nazywane są *funkcjami polowymi* lub funkcjami *area* i bywają w polskiej literaturze oznaczane odpowiednio arcsinh i arccosh, ale np. w literaturze anglojęzycznej przeważnie oznaczane są po prostu jako $\sinh^{-1}$ i $\cosh^{-1}$.

Lemat 8.1. *Funkcje odwrotne do funkcji hiperbolicznych spełniają tożsamości:*

$$\sinh^{-1}(y) = \ln\left(y + \sqrt{y^2+1}\right)$$

$$\cosh^{-1}(y) = \ln\left(y + \sqrt{y^2-1}\right)$$

Dowód. Niech $y = \sinh x, x \in \mathbb{R}$ ($x = \sinh^{-1} y$). Czyli $y = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$. Podstawmy $t = e^x$, wówczas $y = \frac{1}{2}\left(\frac{t-1}{t}\right)$ i stąd mamy równanie $t^2 - 2yt - 1 = 0$, o dwóch rozwiązaniach:

$$t = y \pm \sqrt{y^2+1}$$

Uwzględniając, że $t = e^x > 0$ możemy wziąć $t = y + \sqrt{y^2+1}$ i stąd już logarytmując równość

$$e^x = y + \sqrt{y^2+1}$$

otrzymujemy, że

$$\sinh^{-1} = x = \ln\left(y + \sqrt{y^2+1}\right).$$

Drugą tożsamość z tezy dowodzimy analogicznie (ćwiczenie). □

Twierdzenie 8.2. *Pochodne funkcji odwrotnych do funkcji hiperbolicznych mają postać:*

$$(\sinh^{-1}(y))' = \frac{1}{\sqrt{y^2+1}},$$

$$(\cosh^{-1}(y))' = \frac{1}{\sqrt{y^2-1}}.$$

Dowód. W oparciu o porzedni lemat i reguły różniczkowania - proste ćwiczenie. □

Definicja 8.2. *Tangensem hiperbolicznym* nazywamy funkcję tanh określoną wzorem

$$\tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

Cotangensem hiperbolicznym nazywamy funkcję coth określoną wzorem $\coth x = \frac{1}{\tanh x}$.

Twierdzenie 8.3. *Zachodzą tożsamości:*

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$$

$$\coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x}$$

Dowód. Łatwe ćwiczenie. □

9 Antypochodna albo inaczej całka nieoznaczona

Definicja 9.1. Niech $D \subseteq \mathbb{R}$ będzie przedziałem niezdegenerowanym i $f\colon D \to \mathbb{R}$. Mówimy, że funkcja $F\colon D \to \mathbb{R}$ jest *funkcją pierwotną* funkcji f, jeżeli funkcja F jest różniczkowalna w F oraz

$$F'(x) = f(x), x \in D.$$

Przykład. Funckja $F(x) = 2x,\ x \in \mathbb{R}$ jest funkcją pierwotną funkcji $f(x) = x^2,\ x \in \mathbb{R}$, ponieważ

$$F'(x) = \left(x^2\right)' = 2x,\ x \in \mathbb{R}$$

Przykład. Niech $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie dana wzorem $f(x) = 3x - \sin(x)$. Funkcja F dana wzorem $F(x) = x^3 + \cos(x),\ x \in \mathbb{R}$ jest funkcją pierwotną funkcji f.

Łatwo zauważyć, że każda funkcja musi mieć funkcję pierwotną.

Uwaga. Jeżeli $F_1, F_2\colon D \to \mathbb{R}$ są funkcjami pierwotnymi funkcji f, to istnieje taka stała $C \in \mathbb{R}$, że

$$F_2(x) = F_1(x) + C, x \in D.$$

Dowód. Rozważmy funkcję $\varphi\colon D \to \mathbb{R}$ określoną wzorem $\varphi(x) = F_2(x) - F_1(x), x \in D$. Wtedy funkcja φ jest różniczkowalna, oraz $\varphi'(x) = F_2'(x) - F_1'(x) = f(x) - f(x) = 0, x \in D$. Zatem funkcja φ jest stała, tzn. istnieje $C \in \mathbb{R}$, że $\varphi(x) = C$ dla każdego $x \in D$. Stąd $F_2(x) = F_1(x) + C, x \in D$. □

Definicja 9.2. Jeżeli $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ma funkcję pierwotną, to zbiór wszystkich funkcji pierwotnych funkcji f nazywamy *całką nieoznaczoną* albo *antypochodną* funkcji f i oznaczamy

$$\int f \text{ lub } \int f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Zauważmy, że wobec poprzedniej uwagi mamy

$$\int f = \{\Phi\colon \Phi\colon D \to \mathbb{R} \text{ i } \exists_{C\in\mathbb{R}}\forall_{x\in D}.\ \Phi(x) = F(x) + C\} = \{F + C\colon C \in \mathbb{R}\},$$

gdzie $F\colon D \to \mathbb{R}$ jest dowolną funkcją pierwotną funkcji f.
Będziemy często dla uproszczenia pisać:

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C,\ C \text{ - dowolna stała.}$$

lub

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + constans.$$

Szczególnie w trakcie rachunków mających wyznaczyć postać całki dla zadanej funkcji f. Przypomnijmy, że $(\ln x)' = \frac{1}{x}$. Funkcja $x \mapsto \ln x$ jest określona tylko dla $x > 0$, podczas gdy funkcja $x \mapsto \frac{1}{x}$ jest określona dla wszystkich x rzeczywistych różnych od zera. Na dla jakich x możemy obliczyć $\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$?

1.) $x > 0$, to oczywiście $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.

2.) $x < 0$, to wtedy $|x| = -x > 0$ i korzystając z reguły łańcuchowej oraz przykładu 7.2 możemy obliczyć
$$(\ln|x|))' = \frac{1}{|x|}\left(\frac{|x|}{x}\right)' = \frac{1}{|x|}\cdot\frac{|x|}{x} = \frac{1}{x}.$$
Zatem i w tym przypadku istnieje funkcja pierwotna dla funkcji $x \mapsto \frac{1}{x}$.

Do tego oczywiście $\ln|x| = \ln x$ dla $x > 0$. Zatem funkcja $F(x) = \ln|x|, x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ jest funkcją pierwotną funkcji $f(x) = \frac{1}{x}, x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ i stąd:

$$\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln|x| + C,\ x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$$

Opierając się na wzorach podstawowych pochodnych, możemy podać listę "podstawowych" całek, z których można korzystać obliczając całki bardziej złożonych funkcji:

$$\int x^a\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a+1}x^{a+1} + C,\ C \in \mathbb{R},\quad \text{dla } a \neq 1$$

$$\int x^{-1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln|x| + C,\ C \in \mathbb{R},\ \text{dla } x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$$

$$\int a^x\,\mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + C,\ C \in \mathbb{R}\ (\text{dla dow. } a \in \mathbb{R})$$

$$\int e^x\,\mathrm{d}x = e^x + C,\ C \in \mathbb{R}$$

$$\int a^x\,\mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + C,\ C \in \mathbb{R}$$

$$\int \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x + C,\ C \in \mathbb{R}$$

$$\int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x + C,\ C \in \mathbb{R}$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = -\operatorname{ctg} x + C,\ C \in \mathbb{R}$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \operatorname{tg} x + C,\ C \in \mathbb{R}$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \arctan x + C,\ C \in \mathbb{R}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \arcsin x + C,\ C \in \mathbb{R}$$

Sprawdzenie powyższych wzorów zalacam czytelnikowi.

Twierdzenie 9.1 (O całkowaniu przez podstawienie)**.** *Niech $f\colon D \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą w przedziale $D \subseteq \mathbb{R}$ oraz niech $g\colon I \to D$ będzie funkcją klasy C^1 w przdziale $I \subseteq D$. Wtedy*

$$\int (f \circ g) \cdot g' = \left(\int f\right) \circ g,$$

$$\text{gdzie } \left(\int f\right) \circ g = \left\{F \circ g\colon F \in \int f\right\}.$$

Sztuka znajdywania odpowiednich podstawień jest podstawą obliczania prostych całek ale wymaga doświadczenia a więc do nauczenia się jej potrzeba przeliczenia wielu przykładów.

Przykład (Oczywisty)*.*

Obliczymy $\int \cos(2x)\,\mathrm{d}x$. Podstawmy $t = 2x$. Wtedy $\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = (2x)' = 2$ i stąd $\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}t$.

Łatwo obliczamy całkę:

$$\int \cos(2x)\,\mathrm{d}x = \int \cos(t)\frac{1}{2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int \cos(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\sin(t) + C$$

i pamiętając, że $t = 2x$ mamy

$$\int \cos(2x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sin(2x) + C$$

Przykład (Trudny)*.*

Obliczymy $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}}\,\mathrm{d}x$. Podstawmy $t = x + \sqrt{a + x^2}$.

Wtedy

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = (x + \sqrt{a + x^2})'$$

i dalej

$$\mathrm{d}t = \left(1 + \frac{2x}{2\sqrt{a + x^2}}\right)\mathrm{d}x = \left(1 + \frac{x}{\sqrt{a + x^2}}\right)\mathrm{d}x$$

czyli

$$\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{a + x^2} + x}{\sqrt{a + x^2}}\,\mathrm{d}x.$$

Mamy

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\sqrt{a + x^2} + x}{\sqrt{a + x^2}}\left(\frac{1}{x + \sqrt{a + x^2}}\right)\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln|t| + C = \ln|x + \sqrt{a + x^2}| + C$$

Ćwiczenie. Pokazać, że

$$\int e^{ax}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}e^{ax} + C, \text{ dla } a \in \mathbb{R}.$$

Ćwiczenie. Pokazać, że jeżeli F jest funkcją pierwotną funkcji f, a $a, b \in \mathbb{R}$ ustalonymi stałymi, to

$$\int f(ax+b)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}F(ax+b) + C.$$

Twierdzenie 9.2 (O całkowaniu przez części)**.** *Niech $f, g\colon D \to \mathbb{R}$ będą funkcjami klasy C^1 w przedziale $D \subseteq \mathbb{R}$. Wtedy*

$$\int f \cdot g' = f' \cdot g - \int f' \cdot g, \textit{ gdzie}$$

$$f' \cdot g - \int f' \cdot g = \left\{ f \cdot g - \Psi\colon \Psi \in \int f' \cdot g \right\}.$$

Przykład.

$$\int 2x \ln x\,\mathrm{d}x = \int (x^2)' \ln x\,\mathrm{d}x = 2x\ln x - \int x^2 (\ln x)'\,\mathrm{d}x = 2x\ln x - \int x^2 \cdot \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x =$$
$$= 2x\ln x - \int x\,\mathrm{d}x = 2x\ln x - \frac{1}{3}x^3 + C$$

Przykład.

$$\int \ln x\,\mathrm{d}x = \int 1 \cdot \ln x\,\mathrm{d}x = \int (x)' \cdot \ln x\,\mathrm{d}x = x\ln x - \int x(\ln x)'\,\mathrm{d}x =$$
$$= x\ln x - \int x \cdot \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = x\ln x - \int \mathrm{d}x = x\ln x - x + C$$

Przykład.

Obliczymy $\int x^2 \sin x\,\mathrm{d}x$. Podstawmy $f'(x) = \sin x$, $g(x) = x^2$. Wtedy

$g'(x) = 2x$ oraz $f(x) = \int f'(x)\,\mathrm{d}x = -\cos x$ - zapominamy na chwilę o stałej.

$$\int x^2 \sin x\,\mathrm{d}x = \cos x \cdot x^2 + \int 2x\cos x\,\mathrm{d}x$$

zatem dalej po prawej stronie występuje całka - nie możemy tego uznać za końcowy wynik. Zatem całkujemy przez części po raz kolejny:

$$\int 2x\cos x\,\mathrm{d}x = 2\int x(\sin x)'\,\mathrm{d}x = 2\left(x\sin x - \int (x)'\sin x\,\mathrm{d}x\right) = 2\left(x\sin x - \int 1 \cdot \sin x\,\mathrm{d}x\right) =$$
$$= 2(x\sin x - (-\cos x)) + C = 2(x\sin x + \cos x) + C.$$

Ostatecznie:

$$\int x^2 \sin x\,\mathrm{d}x = x^2\cos x + 2(x\sin x + \cos x) + C.$$

Przykład (Całka „pętląca się").

$$\int e^x \cos x \,\mathrm{d}x = e^x \sin x - \int e^x \sin x \,\mathrm{d}x = e^x \sin x - \left(-e^x \cos x - \int -e^x \cos x \,\mathrm{d}x\right) =$$

$e^x \sin x + e^x \cos x - \displaystyle\int e^x \cos x \,\mathrm{d}x$. - Zauważmy, że oblczanie po raz kolejny całki z $e^x \cos x$ jest bezcelowe - moglibyśmy tak obliczać w nieskończoność. Możemy jednak dodać do całego róœnania obustronnie $\int e^x \cos x \,\mathrm{d}x$ i wtedy mamy, że

$$2\int e^x \cos x \,\mathrm{d}x = e^x(\sin x + \cos x) + C \Rightarrow \int e^x \cos x \,\mathrm{d}x = \frac{e^x}{2}(\sin x + \cos x) + C$$

Zauważmy, że nie podzieliliśmy C przez 2. Jest to zbyteczne z powodu dowolności stałej (dla stałej $\frac{1}{2}C$ przyjmujemy nową stałą $C := \frac{1}{2}C$ - 1/2 poprzedniej stałej).

Przykład (Całkowanie „tabelkowe”).

Obliczymy teraz $\int x^3 \sin x \,\mathrm{d}x$. Tym razem pokażemy nową sztuczkę. Utwórzmy następującą tabelkę:

Uważamy na znak $\downarrow$	Liczymy pochodne	Liczymy całki
$+$	x^3	$\sin x$
$-$	$3x^2$	$-\cos x$
$+$	$6x$	$-\sin x$
$-$	$6x$	$\cos x$
Koniec! $\rightarrow$	0	$\sin x$

Rozwiązanie jest pewną sumą 4 iloczynów wyrażeń z tabeli (gdyż piąta pochodna funkcji $x \mapsto x^3$ jest równa zero i wszystkie pozostałe iloczyny się zerują). k-ty składnik tej sumy powstaje przez pomnożenie pochodnej z pierwszej komórki k-tego wiersza z całką z drugiej komórki $(k+1)$-szego(!) wiersza:

$$\int x^3 \sin x \,\mathrm{d}x = -x^3 \cos x + 3x^2 \sin x + 6x \cos x - 6 \sin x + C.$$

Przykład (Iloczyn $e^x \cdot f(x)$).

Obliczymy $\int e^x x^2 \,\mathrm{d}x$.

Uważamy na znak $\downarrow$	Liczymy pochodne	Liczymy całki
$+$	x^2	e^x
$-$	$2x$	e^x
$+$	2	e^x
Koniec! $\rightarrow$	0	e^x

Zatem: $\int e^x x^2 \,\mathrm{d}x = x^2 e^x - 2x \cdot e^x + 2e^x + C = e^x(x^2 - 2x + 2) + C.$

Ćwiczenie. Obliczyć następujące trzy, proste całki:

$$\text{(a)} \int e^x(x^3 - 1)\,\mathrm{d}x \quad \text{(b)} \int \cos^2 x \,\mathrm{d}x \quad \text{(c)} \int \mathrm{tg}\, x \,\mathrm{d}x$$

9.1 Całki funkcji wymiernych

Rozkład na ułamki proste:

Wzór redukcyjny:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^n} = \frac{1}{(2n-2)(1+x^2)^{n-1}} - \frac{2n-3}{2n-2} \int \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^{n-1}}, \ n \geqslant 2 \ (n \in \mathbb{N}).$$

9.2 Całki wyrażeń zawierających funkcje trygonometryczne

Podstawienie uniwersalne:

Wzory redukcyjne: Podamy jeszcze kilka wzorów rekurencyjnych, na całki z potęg funkcji trygonometrycznych. Niech $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. Wtedy

$$\int \sin^n x \, \mathrm{d}x = \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} x \, \mathrm{d}x - \frac{1}{n} \sin^{n-1} x \cos x$$
$$\int \cos^n x \, \mathrm{d}x = \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x \, \mathrm{d}x - \frac{1}{n} \cos^{n-1} x \sin x$$
$$\int \mathrm{tg}^n \, x \, \mathrm{d}x = \frac{1}{n-1} \mathrm{tg}^{n-1} \, x - \int \mathrm{tg}^{n-2} \, x \, \mathrm{d}x$$

9.3 Całki funkcji niewymiernych

9.3.1 Podstawienia Eulera:

I podstawienie

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = t \pm x\sqrt{a}, \ a > 0$$

II podstawienie

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = xt \pm \sqrt{c}, \ c > 0$$

III podstawienie

$$\sqrt{a(x-x_1)(x-x_2)} = |x-x_1|t, \ \Delta > 0$$

9.3.2 Metoda współczynników nieoznaczonych:

$$\int \frac{W_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}} \mathrm{d}x = (a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0)\sqrt{ax^2+bx+c} + A \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{ax^2+bx+c}}.$$

$$\int \sqrt{ax^2+bx+c} \, \mathrm{d}x = \int \frac{ax^2+bx+c}{\sqrt{ax^2+bx+c}} \mathrm{d}x$$

9.4 Funkcje hiperboliczne

Całki funkcji hiperbolicznych

10 Całka oznaczona

10.1 Całka Darboux

Niech $f[a,b]\colon \mathbb{R}$ będzie funkcją ograniczoną $[a,b]$ oraz niech

$$m = \inf\{f(x)\colon x \in [a,b]\}$$

$$M = \sup\{f(x)\colon x \in [a,b]\}$$

Mówimy, że $\pi = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$, $n \in \mathbb{N}$ jest podziałem przedziału $[a,b]$, jeżeli $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$.
Zbiór wszystkich podziałów przedziału $[a,b]$ oznaczamy symbolem $\mathcal{P}[a,b]$. Ustalmy $\pi = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\} \in \mathcal{P}[a,b]$. Niech

$$m_k = \inf\{f(x)\colon x \in [x_{k-1}, x_k]\}$$

$$M_k = \sup\{f(x)\colon x \in [x_{k-1}, x_k]\}$$

$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1} \text{ dla } k = 1, 2, \ldots, n.$$

Określamy sumę dolną

$$\underline{S}(f,\pi) = \sum_{k=1}^{n} m_k \Delta x_k$$

oraz sumę górną

$$\overline{S}(f,\pi) = \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta x_k$$

Zauważmy, że

$$\sum_{k=1}^{n} \Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) = x_n - x_0 = b - a$$

oraz $m \leqslant M_k \leqslant M_k \leqslant M$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Zatem $m\Delta x_n \leqslant m_k \Delta x_k \leqslant M_k \Delta x_k \leqslant M\Delta x_n$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Stąd

$$\sum_{k=1}^{n} m\Delta x_k \leqslant \sum_{k=1}^{n} m_k \Delta x_k \leqslant \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta x_k \leqslant \sum_{k=1}^{n} M\Delta x_k$$

$$m(b-a) \leqslant \underline{S}(f,\pi) \leqslant \overline{S}(f,\pi) \leqslant M(b-a).$$

Uwaga. Jeżeli $\widetilde{\pi} = \{y_0, y_1, \ldots, y_m\} \in \mathcal{P}[a,b]$ jest zagęszczeniem podziału $\pi = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$, tzn.

$$\{x_0, x_1, \ldots, x_n\} \subseteq \{y_0, y_1, \ldots, y_m\},\ n, m \in \mathbb{M};\ n \leqslant m,$$

to

$$\underline{S}(f,\pi) \leqslant \underline{S}(f,\widetilde{\pi}) \leqslant \overline{S}(f,\widetilde{\pi}) \leqslant \overline{S}(f,\pi)$$

Dowód.

$$a = y_0 = x_0 \leqslant y_1 \leqslant \dots y_{j_1} = x_1 < y_{j+1} < \dots < y_{j_n} = x_2 < y_{j_{n+1}} < \dots < y_m = x_m = b.$$

$\forall_{0 \leqslant k \leqslant n} \exists_{1 \leqslant j_k \leqslant m}.\ x = y_{j_k}$

$$\forall_{1 \leqslant k \leqslant n} \forall_{j_{k+1} \leqslant j \leqslant j_k}.\ [y_{j-1}, y_j] \subseteq [x_{k-1}, x_k]$$

ponieważ

$$y_{j-1} \geqslant y_{k-1} \geqslant x_{k-1}$$

$$y_j \leqslant j_k = x_k.$$

Zatem

$$\widetilde{m}_j = \inf \{f(x) \colon x \in [y_{j-1}, y_j]\} \geqslant \inf \{f(x) \colon x \in [x_{n-1}, x_n]\},$$

$$\widetilde{M}_j = \sup \{f(x) \colon x \in [y_{j-1}, y_j]\} \leqslant \sup \{f(x) \colon x \in [x_{n-1}, x_n]\}.$$

$$\underline{S}(f, \widetilde{\pi}) \leqslant \underline{S}(f, \pi)$$

□

Całka dolna

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \sup \{\underline{S}(f, \pi) \colon \pi \in \mathcal{P}[a, b]\} = \underline{\int_a^b} f$$

Całka górna

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \inf \left\{\overline{S}(f, \pi) \colon \pi \in \mathcal{P}[a, b]\right\} = \overline{\int_a^b} f$$

Wtedy

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x$$

Definicja 10.1. Mówimy, że ograniczona funkcja $f \colon [a, b] \to \mathbb{R}$ jest całkowalna w sensie Riemanna w przedziale $[a, b]$, jeżeli

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x$$

Tę wspólną wartość oznaczamy

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

i nazywamy całką ozaczoną Riemanna (całką Darboux) dla funkcji f w przedziale $[a, b]$. Piszemy też $f \in \mathcal{R}[a, b]$.

10.2 Klasyczna całka Riemanna

Klasyczną definicję całki Riemann podał w 1854 w swojej pracy doktorskiej, a drukiem w czasopiśmie naukowym opublikowano ją w 1868 roku. Jean Darboux swoją konstrukcję całkie przedstawił w pracy z 1870, a w 1875 wykazał jej równoważność z całką Riemanna - w swojej „Rozprawie o teorii funkcji nieciągłych", w której podał też twierdzenie, które wiążemy z jego nazwiskiem.

Niech $\pi_n = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ będzie podziałem przedziału $[a, b]$. Określmy średnicę podziału $\operatorname{diam}(\pi_n)$ następująco:

$$\operatorname{diam}(\pi_n) = \max_{k\in\{1,\ldots,n\}} \Delta x_k.$$

Definicja 10.2. Ciąg podziałów $(\pi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ nazywamy *normalnym ciągiem podziałów*, jeżeli

$$\lim_{k\to\infty} \operatorname{diam}(\pi_k) = 0.$$

Definicja 10.3. Niech $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ograniczoną. Jeżeli dla dowolnego ciągu normalnego podziałów $(\pi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ przedziału $[a, b]$ oraz dowolnego ciągu punktów pośrednich $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i \in \{1, \ldots, n_k\}$ istnieje granica

$$(*) \lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{n_k} f(\xi_i)\Delta x_i$$

to funkcję f nazywamy całkowalną w sensie Riemanna a granicę $(*)$ nazywamy całką Riemanna funkcji f na przedziale $[a, b]$.

10.3 Równoważność całki Riemanna i całki Darboux

Lemat 10.1. *Sumy całkowe Riemanna zawsze leżą między odpowiadającymi im sumami górnymi i dolnymi Darboux. (Oczywiste)*

Twierdzenie 10.1. *Definicje całki Riemanna i Darboux są równoważne.*

Dowód. Niech $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ograniczoną. Załóżmy, że f jest całkowalna w sensie Darboux. Ustalmy ciąg normalny podziałów $(\pi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ przedziału $[a, b]$ i punkty pośrednie $\xi_i, i \in \{1, \ldots, n_k\}$. Mamy

$$\sum_{i=1}^{n_k} \inf\{f(x_i) \colon x \in [x_{i-1}, x_i]\}\Delta x_i =$$

$$\underline{S}(f,\pi_k) \leqslant \sum_{i=1}^{n_k} f(\xi_i)\Delta x_i \leqslant \overline{S}(f,\pi_k) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n_k} \sup\{f(x_i)\colon x\in[x_{i-1},x_i]\}\Delta x_i \to \overline{\int_a^b} f.$$

$$\left(\text{i } \sum_{i=1}^{n_k} \inf\{f(x_i)\colon x\in[x_{i-1},x_i]\}\Delta x_i \to \underline{\int_a^b} f\right)$$

Z twierdzenia o trzech ciągach mamy już, że $\displaystyle\sum_{i=1}^{n_k} f(\xi_i)\Delta x_i \to \int_a^b f$

W drugą stronę. Załóżmy, że funkcja f jest całkowalna w sensie Riemanna. Dla dowolnego podziału π

$$\sum_{i=1}^{n_k} \inf\{f(x)\colon x\in[x_{i-1},x_i]\}\Delta x_i \leqslant \sum_{i=1}^{n_k} f(\xi_i)\Delta x_i \leqslant \sum_{i=1}^{n_k} \sup\{f(x)\colon x\in[x_{i-1},x_i]\}\Delta x_i.$$

(*Można dobrać ξ_i aby odległości były dowolnie małe.*)
Jeśli weźmiemy ciąg normalny podziałów $(\pi_k)_{k\in\mathbb{N}}$, to dla każdego k wybieramy takie punkty pośrednie ξ_i, żeby spełniało nierówność

$$\overline{S}(f,\pi_k) - \sum_{i=1}^{n_k} f(\xi_i)\Delta x_i < \frac{1}{k}.$$

Jeżeli $k\to\infty$, to

$$\lim_{k\to\infty}\left(\overline{S}(f,\pi_k) - \sum_{i=1}^{n_k} f(\xi_i)\Delta x_i\right) = 0.$$

Granica $\displaystyle\lim_{k\to\infty}\sum_{i=1}^{n_k} f(\xi_i)\Delta x_i = I$ istnieje z założenia o całkowalności w sensie Riemanna.

Czyli istnieje granica $\displaystyle\lim_{k\to\infty}\overline{S}(f,\pi_k) = \overline{\int_a^b} f = I$. Analogicznie dla dowolnego k dobieramy ξ_i, żeby zachodziło

$$\sum_{i=1}^{n_k} f(\xi_i)\Delta x_i - \underline{S}(f,\pi_k) < \frac{1}{k}.$$

W ten sposób analogicznie otrzymaliśmy $\underline{\int_a^b} f = I$. Ostatecznie $\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f$. □

Uwaga (Jeszcze jedno równoważne podejście). Ustalamy ciąg normalny $(\pi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ podziałów funkcji ograniczonej $f\colon[a,b]\to\mathbb{R}$.

$$\lim_{n\to\infty}\operatorname{diam}(\pi_n) = 0.$$

Wtedy istnieją granice

$$\lim_{n\to\infty} \underline{S}(f,\pi_n),\ \lim_{n\to\infty} \overline{S}(f,\pi_n)$$

Całka dolna

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \underline{S}(f,\pi_n)$$

Całka górna

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \overline{S}(f,\pi_n)$$

Z definicji wynika nierówność $\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x$. Gdy całki górna i dolna w powyższym sensie są sobie równe, to ponownie mówimy, że f jest całkowalna w sensie Riemanna i przyjmujemy $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x$.

W ogólności *wyznaczanie* całek Riemanna z definicji jest **bardzo** trudne. Po omówieniu twierdzeń o całkowaniu podamy kilka skromnych, łatwiejszych przykładów takich rozumowań. Istnieje wiele metod rachunkowych liczenia całek z **pominięciem** definicji, w oparciu o tablice znanych całek (podobnie jak korzystamy z pewnych „standardowych" pochodnych) - zademonstrujemy jednak tylko kilka z nich. Niestety, takie metody rachunkowe stosują się tylko do pewnych klas funkcji i na dodatek - są trudniejsze od metod wyznaczania pochodnych. Podamy za to przykład funkcji niecałkowalnej w sensie Riemanna i uzasadnimy ten fakt z definicji Darboux.

Przykład. Funkcja $D\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ (przedz. $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ jest dowolny) określona wzorem

$$D(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \in \mathbb{R}; \\ 1 & \text{dla } x \in \mathbb{Q}. \end{cases}$$

(znana jako *Funkcja Dirichleta*) nie jest całkowalna w sensie Riemanna.
Rzeczywiście, łatwo zauważymy, że dla **każdego** podziału π przedziału $[a,b]$ musi być $\overline{S}(f,\pi) = 1$ i $\underline{S}(f,\pi) = 0$. Zatem

$$0 = \underline{\int_a^b} D(x)\,\mathrm{d}x \neq \overline{\int_a^b} D(x)\,\mathrm{d}x = 1.$$

Interpretacja geometryczna całki Riemanna: Jeżeli funkcja $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ jest w $[a,b]$ nieujemna, to:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \text{ jest polem figury } \{(x,y) \in \mathbb{R}\colon 0 \leqslant y \leqslant f(x), x \in [a,b]\}}$$

tj. obszaru ograniczonego osią OX, prostymi $x = a, x = b$ i wykresem (krzywą) funkcji f.

Przykład. W oparciu o to co powiedzieliśmy, możemy np. nie przeprowadzając żadnych rachunków i ścisłych rozważań teoretycznych uzasadnić, że

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}.$$

Zauważmy, że ponieważ $y^2 + x^2 = 1$ jest równaniem wyznaczającym okrąg o środku w punkcie $(0,0)$ i promieniu długości 1, to po przekształceniu tego równania do postaci: $y = \pm\sqrt{1-x^2}$, wykres funkcji $f(x) = y$ jest górną lub dolną połową okręgu (zależnie od wybranego znaku). Czyli nasza całka wyraża pole **ćwiartki** okręgu ($x \in [0,1], y \geqslant 0$, *ćwiczenie*: wykonać rysunek tej sytuacji) a więc wynosi $\frac{\pi}{4}$.

10.4 Twierdzenia o całkowaniu

10.4.1 Kryteria całkowalności

Twierdzenie 10.2 (I kryterium całkowalności w sensie Riemanna)**.** *Niech $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ograniczoną. Funkcja f jest całkowalna w sensie Riemanna wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$(*)\ \ \forall_{\varepsilon>0}\exists_{\pi\in\mathcal{P}[a,b]}.\ \overline{S}(f,\pi) - \underline{S}(f,\pi) < \varepsilon$$

Dowód. Najpierw załóżmy, że $f \in \mathcal{R}[a,b]$, czyli

$$I = \underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f$$

$$\underline{\int_a^b} f = \sup\left\{\underline{S}(f,\pi)\colon \pi \in \mathcal{P}[a,b]\right\}$$

$$\overline{\int_a^b} f = \inf\left\{\overline{S}(f,\pi)\colon \pi \in \mathcal{P}[a,b]\right\}$$

Ustalmy dowolne $\varepsilon > 0$. Istnieje $\pi_1 \in \mathcal{P}[a,b]$ takie, że

$$I - \frac{\varepsilon}{2} < \underline{S}(f,\pi_1)$$

oraz $\pi_2 \in \mathcal{P}[a,b]$, że

$$\overline{S}(f,\pi_2) < I + \frac{\varepsilon}{2}$$

Niech $\pi = \pi_1 \cup \pi_2$. Wtedy π jest zagęszczeniem podziałów π_1 oraz π_2 i mamy

$$I - \frac{\varepsilon}{2} < \underline{S}(f,\pi_1) \leqslant \underline{S}(f,\pi) \leqslant \overline{S}(f,\pi) \leqslant \overline{S}(f,\pi_2) < I + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Zatem $\overline{S}(f,\pi) - \underline{S}(f,\pi) \leqslant I + \frac{\varepsilon}{2} - \underline{S}(f,\pi)$ ale $\underline{S}(f,\pi) > I - \frac{\varepsilon}{2}$ i $I + \frac{\varepsilon}{2} \geqslant 0$ więc

$$I + \frac{\varepsilon}{2} - \underline{S}(f,\pi) < I + \frac{\varepsilon}{2} - \left(I - \frac{\varepsilon}{2}\right) = \varepsilon$$

i stąd

$$\overline{S}(f,\pi) - \underline{S}(f,\pi) < \varepsilon$$

Teraz załóżmy, że spełniony jest warunek $(*)$. Ustalmy $\varepsilon > 0$. Z $(*)$ istnieje taki podział $\pi \in \mathcal{P}[a,b]$, że

$$\overline{S}(f,\pi) - \underline{S}(f,\pi) < \varepsilon$$

Ale

$$\underline{S}(f,\pi) < \varepsilon \leqslant \underline{\int_a^b} f \leqslant \overline{\int_a^b} f \leqslant \overline{S}(f,\pi)$$

$$\overline{\int_a^b} f - \underline{\int_a^b} f < \varepsilon$$

Z dowolności wybour ε otrzymujemy, że

$$0 \leqslant \overline{\int_a^b} f - \underline{\int_a^b} f \leqslant 0 \Rightarrow \overline{\int_a^b} f = \underline{\int_a^b} f.$$

□

Twierdzenie 10.3 (II kryterium całkowalności w sensie Riemanna)**.** *Niech $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ograniczoną. Funkcja f jest całkowalna wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$(*)\ \ \forall_{\varepsilon>0}\exists_{\delta>0}\forall_{\pi\in\mathcal{P}[a,b]}.\ \operatorname{diam}(\pi) < \delta \Rightarrow \overline{S}(f,\pi) - \underline{S}(f,\pi) < \varepsilon$$

Dowód. Pracujemy nad tym... □

Twierdzenie 10.4 (III kryterium całkowalności w sensie Riemanna)**.** *Niech $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ograniczoną, a $\pi = \{\underset{\overset{\|}{a}}{x_0}, x_1, \ldots, \underset{\overset{\|}{b}}{x_n}\}$ podziałem przedziału $[a,b]$. Liczbę $\omega_i := M_i - m_i$ nazwiemy „oscylacją” funkcji f na przedziale $[x_{i-1}, x_i]$, $i \in \{1,\ldots,n\}$. Funkcja f jest całkowalna w sensie Riemanna na przedziale $[a,b]$ wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\lim_{\delta_n \to 0} \sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i = 0.$$

10.5 Własności całki Riemanna

Twierdzenie 10.5. *Jeżeli f jest funkcją całkowalną w przedziale $[a,b]$, to*

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f \leqslant M(b-a).$$

(prosty dowód, z definicji.)
Jeżeli ponadto $f \geqslant 0$ to z powyższej równości natychmiast mamy, że

$$\int_a^b f \geqslant 0.$$

Twierdzenie 10.6. *Jeżeli f, g są funkcjami całkowalnymi w przedziale $[a,b]$ oraz $f \leqslant g$, to*

$$\int_a^b f \leqslant \int_a^b g.$$

Dowód. Ustalamy π - podział przedziału $[a,b]$. Dla każdego $i \in \{1,\ldots,n\}$ oznaczamy

$$m_i(f) = \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)$$

$$M_i(g) = \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} g(x)$$

Mamy

$$\sum_{i=1}^n m_i(f)\Delta x_i \leqslant \sum_{i=1}^n M_i(g) = \underline{S}(g,\pi) \leqslant \underline{\int_a^b} g = \int_a^b g. \text{ (g jest całkowalna)}$$

Zatem:

$$\forall_{\pi\in\mathcal{P}[a,b]}.\ \underline{S}(f,\pi) \leqslant \int_a^b g.$$

$$\int_a^b f = \underline{\int_a^b} f = \sup\{\underline{S}(f,\pi)\colon \pi \in \mathcal{P}[a,b]\} \leqslant \int_a^b g.$$

□

Twierdzenie 10.7. *Jeżeli f jest funkcją całkowalną w na przedziale $[a,b]$ a λ dowolną liczbą rzeczywistą, to funkcja λf jest całkowalna na przedziale $[a,b]$ oraz*

$$\int_a^b \lambda f = \lambda \int_a^b f.$$

Dowód. Przypomnijmy, że

$$\sup \lambda A = \lambda \sup A,$$
$$\inf \lambda A = \lambda \inf A$$

dla dow. zbioru[18] $A \subseteq \mathbb{R}$ i $\lambda \geqslant 0$. Rozważymy przypadki:

1) $\lambda > 0$. Niech $\pi \in \mathcal{P}[a, b]$.

$$\overline{S}(\lambda f, \pi) - \underline{S}(\lambda f, \pi) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sup\{\lambda f(x) \colon x \in [x_{i-1}, x_i]\} - \inf\{\lambda f(x) \colon x \in [x_{i-1}, x_i]\}\right) \Delta x_i =$$
$$= \lambda \Big(\overline{S}(f, \pi) - \underline{S}(f, \pi)\Big)$$

$$\int_a^b \lambda f = \sup\{\overline{S}(\lambda f, \pi) \colon \pi \in \mathcal{P}\} = \sup\{\lambda \overline{S}(f, \pi)\} = \lambda \underline{\int_a^b} f = \lambda \int_a^b f, \text{ bo } f \text{ jest całkowalna.}$$

Analogicznie pokazujemy, że $\underline{\int_a^b} \lambda f = \lambda \underline{\int_a^b} f = \lambda \int_a^b f$. Mamy, że $\underline{\int_a^b} \lambda f = \overline{\int_a^b} \lambda f$ i ostatecznie λf jest całkowalna a ponadto z wyprowadzonych po drodze równości wynika, że

$$\int_a^b \lambda f = \lambda \int_a^b f.$$

2) $\lambda = -1$. Przypomnijmy jeszcze wzory

$$\sup -A = -\inf A$$
$$\inf -A = -\sup A$$

dla dow. $A \subseteq \mathbb{R}$(, gdzie $-A = \{-a \colon a \in A\}$).

$$\underline{S}(-f, \pi) = \sum_{i=1}^{n} \inf\{-f(x) \colon x \in [x_{i-1}, x_i]\} \Delta x_i = -\sum_{i=1}^{n} \sup\{f(x) \colon x \in [x_{i-1}, x_i]\} \Delta x_i = -\overline{S}(f, \pi).$$

Podobnie $\overline{S}(-f, \pi) = -\underline{S}(f, \pi)$.

$$\int_a^b (-f) = \sup\{\underline{S}(-f, \pi) \colon \pi \in \mathcal{P}[a, b]\} = \sup\{-\overline{S})f, \pi) \colon \pi \in \mathcal{P}[a, b]\} =$$
$$-\inf\{\overline{S}(f, \pi) \colon \pi \in \mathcal{P}[a, b]\} = -\overline{\int_a^b} f = -\int_a^b f.$$

Analogicznie

$$\overline{\int_a^b} (-f) = -\underline{\int_a^b} f = -\int_a^b f.$$

$-f$ jest całkowalna ponieważ $\overline{\int_a^b}(-f) = \underline{\int_a^b}(-f)$.

[18] $\lambda A := \{\lambda a \colon a \in A\}$

3) $\lambda < 0$. Wtedy $-\lambda > 0$.

$$\underline{\int_a^b}\lambda f = \underline{\int_a^b}(-(-\lambda)f) = -\overline{\int_a^b}((-\lambda)f) = -(-\lambda)\int_a^b f = \lambda\int_a^b f.$$

Analogicznie możemy pokazać, że również

$$\overline{\int_a^b}\lambda f = \overline{\int_a^b}(-(-\lambda)f) = \lambda\int_a^b f.$$

Ostatecznie λf jest całkowalna w przedziale $[a,b]$ i

$$\int_a^b \lambda f = \lambda\int_a^b f.$$

□

Twierdzenie 10.8 (Addytywność całki)**.** *Niech f_1, f_2 będą funkcjami całkowalnymi w przedziale $[a,b]$. Wówczas funkcja $f_1 + f_2$ jest również całkowalna w przedziale $[a,b]$ oraz*

$$\int_a^b (f_1 + f_2) = \int_a^b f_1 + \int_a^b f_2.$$

Dowód. Ćwiczenie. Całkowalność z pomocą I-szego kryterium całkowalności, równość w tezie z definicji. □

Dla swobody rachunków, z poprzednich dwóch twierdzeń należy po prostu zapamiętać, że

$$\boxed{\int_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha\int_a^b f + \beta\int_a^b g,\ \alpha,\beta\in\mathbb{R}\text{ - dowolne stałe.}}$$

Twierdzenie 10.9. *Niech $f\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ będzie funkcją ograniczoną oraz niech $c\in(a,b)$. Wówczas f jest całkowalna w przedziale $[a,b]$ wtedy i tylko wtedy, gdy $f\big|_{[a,c]}$ i $f\big|_{[c,b]}$ są całkowalne odpowiednio w przedziałach $[a,c]$ i $[c,b]$. Wtedy*

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

Uogólniając powyższe twierdzenie dostajemy

Twierdzenie 10.10. *Niech $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ograniczoną oraz P_j będą takimi przedziałami domkniętymi, że*

$$[a,b] = \bigcup_{j=1}^{m} P_j$$

oraz $\inf P_i \cap \inf P_j = \varnothing, i \neq j$. *Wówczas f jest całkowalna w przedziale $[a,b]$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $j \in \{1,\ldots,m\}$ $f\big|_{P_j}$ jest całkowalna w przedziale P_j. Ponadto*

$$\int_a^b f = \sum_{j=1}^{m} \int_{P_j} f.$$

Twierdzenie 10.11. *Jeżeli f jest całkowalna na przedziale $[a,b]$ to jest całkowalna w dowolnym przedziale $[\alpha,\beta] \subseteq [a,b]$.*

Twierdzenie 10.12. *Niech f będzie całkowalna w przedziale $[a,b]$ oraz $g\colon$ $[\inf f\,[a,b], \sup f\,[a,b]] \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą. Wówczas $g \circ f$ jest całkowalna w przedziale $[a,b]$.*

10.6 Klasy funkcji całkowalnych

Twierdzenie 10.13. *Każda funkcja ciągła $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ jest całkowalna w sensie Riemanna.*

Dowód. Funkcja $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ jest ciągła i określona na przedziale domkniętym (czyli zbiorze zwartym) a stąd jest jednostajnie ciągła na mocy twierdzenia 5.7 Heinego-Cantora. Pokażemy, że funkcja spełnia warunek $(*)$ z I-szego kryterium całkowalności (tw. 10.2). Ustalmy $\varepsilon > 0$. Z jednostajnej ciągłości istnieje $\delta > 0$ takie, że

$$\forall_{x,y\in[a,b]} \left(|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{b-a} \right).$$

Niech $\pi = \{x_0, \ldots, x_n\}$ będzie takim podziałem przedziału $[a,b]$, że $\operatorname{diam}(\pi) < \delta$. Wtedy

$$\overline{S}(f,\pi) - \underline{S}(f,\pi) = \sum_{k=1}^{n} \overset{\text{dla } x,y\in[x_{k-1},x_k]}{\left(\overset{f(x)}{\overset{\parallel}{M_k}} - \overset{f(y)}{\overset{\parallel}{m_k}} \right)} \Delta x_k < \sum_{k=1}^{n} \frac{\varepsilon}{b-a} \Delta x_k = \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{k=1}^{n} \Delta x_k = \frac{\varepsilon}{b-a}(b-a) = \varepsilon.$$

Z I-szego kryterium całkowalności wynika, że funkcja f jest całkowalna w przedziale $[a,b]$. $\square$

Przykład. Obliczymy całkę funkcji $f\colon \mathbb{R} \to [-1,1]$ określonej jako $f(x) = \sin x, x \in \mathbb{R}$.

Twierdzenie 10.14. *Każda funkcja monotoniczna $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ jest całkowalna w sensie Riemanna.*

Dowód. Jeżeli funkcja f jest funkcją stałą, to teza wynika natychmiastowo. Załóżmy, że f jest funkcją niemalejącą, różną od stałej - $f(a) \neq f(b)$.
Ustalmy $\varepsilon > 0$. Weźmy podział $\pi = \{x_0, \ldots, x_n\}$ przedziału $[a,b]$, że $\operatorname{diam}(\pi) < \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}$.
Wówczas

$$\overline{S}(f,\pi) - \underline{S}(f,\pi) = \sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k)\Delta x_k < \left(\sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k)\right) \cdot \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}.$$

Ale $M_i = f(x_i)$, $m_i = f(x_{i-1})$. Czyli

$$\overline{S}(f,\pi) - \underline{S}(f,\pi) < \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)} \cdot \underset{\sum_{k=1}^{n}(f(x_k)-f(x_{k-1}))}{\underset{\parallel}{(f(x_n) - f(x_0))}} = \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}(f(b)-f(a)) = \varepsilon.$$

□

Twierdzenie 10.15. *Każda funkcja wypukła jest całkowalna w sensie Riemanna.*

Dowód. Wynika z twierdzenia 7.13. □

Przykład. Pokażemy, że następująca funkcja $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ (f. Riemanna) jest niemalejącą, nieciągłą w całej dziedzinie funkcją całkowalną w sensie Riemanna:

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ dla } x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}; \\ \frac{1}{q} \text{ dla } x = \frac{p}{q}, p, q \in \mathbb{N}, NWD(p,q) = 1; \\ 1 \text{ dla } x = 0. \end{cases}$$

1. Z własności liczb rzeczywistych i określenia funkcji, oczywiste jest że nie jest ona monotoniczna w przedziale $[0,1]$.

2. Rozważmy dowolny $a \in [a,b] \cap \mathbb{Q}$. Każda liczba rzeczywista jest granicą pewnego ciągu liczb rzeczywistych, ale weźmy np. ciąg $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ określony wzorem $x_n = \frac{p}{q} + \frac{1}{n}$ dla pewnych $p, q \in \mathbb{Z}$. Wtedy $x_n \to \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ i $x_n \in \mathbb{Q}, n \in \mathbb{N}$ ale $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{nq} = 0 \neq f(\frac{p}{q}) = \frac{1}{q}$. Zatem f nie jest ciągła w przedziale $[0,1]$ (aczkolwiek można pokazać, że jest ciągła w punktach niewymiernych swojej dziedziny!)

3. Oczywiste jest, że $\underline{S}(f,\pi) = 0$ dla dowolnego podziału π odcinka $[0,1]$. (W każdym podprzedziale $[x_{k-1}, x_k]$ prz. $[0,1]$ znajdziemy liczbę niewym. i $m_k = 0$). Zatem

$$\underline{\int_0^1} f = 0.$$

$f \geqslant 0$, $\overline{\int_0^1} f \geqslant 0$. Pokażemy, że dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje $\overline{S}(f,\pi) < \varepsilon$ i tym samym $\overline{\int_0^1} f = 0$. Ustalmy $\varepsilon > 0$. Weźmy $N \in \mathbb{N}$ takie, że $\frac{1}{N} < \frac{\varepsilon}{2}$. Rozważmy zbiór

$$A = \left\{ \frac{p}{q} \colon p \leqslant q,\ q < N, p, q \in \mathbb{N} \right\}.$$

Zbiór A jest skończony. Niech $m = |A|$. Podzielmy przedział $[0,1]$ na $n = m \cdot N$ równych części. Wybieramy punkty podziału $0 = \frac{0}{n} < \frac{1}{n} < \frac{2}{n} < \ldots < \frac{n-1}{n} < \frac{n}{n} = 1$ uzyskując podział π_k przedziału $[0,1]$. Określamy $\overline{S}(f,\pi_k)$:

$$\begin{aligned}
\overline{S}(f,\pi_k) &= \sum_{\substack{k\in\{1,\ldots,n\}\\ \left[\frac{k-1}{n},\frac{k}{n}\right]\cap A = \varnothing}} M_k \Delta x_k + \sum_{\substack{k\in\{1,\ldots,n\}\\ \left[\frac{k-1}{n},\frac{k}{n}\right]\cap A \neq \varnothing}} M_k \Delta x_k \leqslant \\
&\leqslant \sum_{\substack{k\in\{1,\ldots,n\}\\ \left[\frac{k-1}{n},\frac{k}{n}\right]\cap A = \varnothing}} 1 \cdot \frac{1}{n} + \sum_{\substack{k\in\{1,\ldots,n\}\\ \left[\frac{k-1}{n},\frac{k}{n}\right]\cap A \neq \varnothing}} \frac{1}{N} \cdot \frac{1}{n} \leqslant \\
&\leqslant \frac{m}{n} + n \cdot \frac{1}{N} \cdot \frac{1}{n} = \frac{m}{n} + \frac{1}{N} = \frac{m}{m \cdot N} + \frac{1}{N} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Z dowolności wyboru ε mamy $\inf\{\overline{S}(f,\pi) \colon \pi \text{ jest podziałem przedziału } [0,1]\} = 0$. Zatem

$$\overline{\int_0^1} f = \underline{\int_0^1} f = 0 \ \text{ i stąd } \ \int_0^1 f = 0.$$

10.7 Wzór Newtona-Leibniza

Definicja 10.4. Niech $f \colon [a,b] \to \mathbb{R}$ będzie funkcją całkowalną w sensie Riemanna oraz niech $F \colon [a,b] \to \mathbb{R}$ będzie dana wzorem

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t, x \in [a,b] \tag{21}$$

Funkcję F nazywamy *funkcją górnej granicy całkowania.*

Twierdzenie 10.16 (Zasadnicze Twierdzenie Rachunku Całkowego)**.** *Niech* $f \in \mathcal{R}[a,b]$ *oraz* $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *będzie dana wzorem 21. Wówczas*

- *F jest ciągła;*
- *jeżeli f jest ciągła w $x_0 \in [a,b]$, to F jest różniczkowalna w x_0 oraz zachodzi wzór*

$$F'(x_0) = f(x_0).$$

Dowód. Załóżmy, że f jest całowalna na przedziale $[a,b]$. Ustalmy $x, y \in [a,b]$, $x < y$. Wtedy

$$|F(y) - F(x)| = \left| \int_a^y f(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \right| =$$

$$\left| \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t + \int_x^y f(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \right| = \left| \int_x^y f(t)\,\mathrm{d}t \right| \leqslant \int_x^y |f(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \int_x^y M\,\mathrm{d}t = M(x-y).$$

Czyli $|F(y) - F(x)| \leqslant M|x-y|$; $x, y \in [a,b]$. Funkcja F spełnia warunek Lipschitza, ze stałą $M > 0$, zatem jest jednostajnie ciągła.

Załóżmy, że f jest ciągła w punkcie x_0.

Ustalmy $\varepsilon > 0$. Mamy

$$\exists_{\delta>0} \forall_{x\in[a,b]} \left(|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon \right).$$

$$\forall_{x\in(x_0-\delta, x_0+\delta)\cap[a,b]}.\ f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon.$$

Ustalmy $h \in \mathbb{R}$, $|h| < \delta$. Rozważmy przypadki:

- $h > 0$. Ze stosownych własności całki:

$$\int_{x_0}^{x_0+h} (f(x_0) - \varepsilon)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_{x_0}^{x_0+h} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_{x_0}^{x_0+h} (f(x_0) + \varepsilon)\,\mathrm{d}x$$

$$(f(x_0) - \varepsilon)h \leqslant \int_{x_0}^{x_0+h} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant (f(x_0) + \varepsilon)h$$

  Dzielimy obustronnie przez h i mamy

$$f(x_0) - \varepsilon \leqslant \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant f(x_0) + \varepsilon.$$

- $h < 0$. Mamy

$$\int_{x_0+h}^{x_0} (f(x_0) - \varepsilon)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_{x_0+h}^{x_0} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_{x_0+h}^{x_0} (f(x_0) + \varepsilon)\,\mathrm{d}x$$

$$(f(x_0) - \varepsilon)(-h) \leqslant \int_{x_0+h}^{x_0} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant (f(x_0) + \varepsilon)(-h)$$

Pamiętamy (własność), że gdy zamieniamy granice całkowania to zmieniamy znak całki. Mamy

$$f(x_0) - \varepsilon \leqslant \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant f(x_0) + \varepsilon.$$

Zatem, dla każdego $h \in (-\delta, \delta) \setminus \{0\}$, $\left|\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} f(x)\,\mathrm{d}x - f(x_0)\right| \leqslant \varepsilon$ czyli

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} f(x)\,\mathrm{d}x = f(x_0).$$

$$F(x_0+h) - F(x_0) = \int_a^{x_0+h} f(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^{x_0} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{x_0}^{x_0+h} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Jest $\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h}$ i dalej $\lim_{h\to 0} \frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} = f(x_0)$. Zatem F jest różniczkowalna w x_0 oraz $F'(x_0) = f(x_0)$. □

Zatem, jeżeli f jest ciągła w zadanym przedziale (a, b), to F jest funkcją pierwotną funkcji f w tym przedziale (funkcją pierwotną funkcji $f|_{(a,b)}$).

Twierdzenie (Wzór Newtona Leibniza)**.** *Załóżmy, że $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ jest całkowalna w sensie Riemanna oraz ma funkcję pierwotną $\Phi\colon [a,b] \to \mathbb{R}$. Wówczas*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \Phi(b) - \Phi(a). \tag{22}$$

Dowód. Ustalmy $\varepsilon > 0$. f jest całkowalna, czyli istnieje taki podział $\pi = \{x_0, \ldots, x_n\}$ przedziału $[a, b]$, że

$$\overline{S}(f,\pi) - \underline{S}(f,\pi) < \varepsilon. \tag{23}$$

Ponadto mamy

$$\underline{S}(f,\pi) \leqslant \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \overline{S}(f,\pi). \tag{24}$$

f ma funkcję pierwotną. $\Phi'(x) = f(x), x \in [a,b]$. Z twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej dla każdego $i \in \{1,\ldots,n\}$ istnieje $\xi \in (x_{i-1}, x_i)$.

$$\frac{\Phi(x_i) - \Phi(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} = \Phi'(\xi_i) = f(\xi_i). \tag{25}$$

Mamy $m_i \leqslant f(\xi_i) \leqslant M_i$,

$$\underline{S}(f,\pi) \leqslant \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \leqslant \overline{S}(f,\pi)$$

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \overset{(25)}{=} \sum_{i=1}^{n} (\Phi(x_i) - \Phi(x_{i-1})) = \Phi(x_n) - \Phi(x_0) = \Phi(b) - \Phi(a) \text{ zatem}$$

$$\underline{S}(f,\pi) \leqslant \Phi(b) - \Phi(a) \leqslant \overline{S}(f,\pi). \tag{26}$$

Z równości 23, 24, 26 mamy

$$\left| \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - (\Phi(b) - \Phi(a)) \right| < \varepsilon.$$

Z dowolności wyboru ε mamy, że

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \Phi(b) - \Phi(a).$$

□

Rozważmy jeszcze f - ciągłą i niech Φ będzie *jakąś* jej funkcją pierwatną. Wtedy również F - funkcja górnej granicy całkowania jest funkcją pierwotną funkcji f.
Istnieje takie $C \in \mathbb{R}$, że dla każdego $x \in [a,b]$ $F(x) = \Phi(x) + C$.

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \overset{\overset{0}{\shortparallel}}{\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x} = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

$$F(b) - F(a) = \Phi(b) + C - \Phi(a) - C = \Phi(b) - \Phi(a).$$

Wniosek. Niech $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą. Wówczas

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a),$$

gdzie $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ jest jakąkolwiek funkcją pierwotną funkcji f.

Uwaga. Istnieją funkcje całkowalne w sensie, które Riemanna nie mają funkcji pierwotnej i odwrotnie - istnieją funkcje mające f. pierwotne ale nie będące całkowalnymi w sensie Riemanna.

Twierdzenie 10.17 (O całkowaniu przez części)**.** *Załóżmy, że $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ są takimi funkcjami różniczkowalnymi, że f', g' są całkowalne w przedziale $[a,b]$. Wówczas*

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x = f(x)g(x)\big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Dowód. f, g jako różniczkowalne są też ciągłe a stąd całkowalne (tw. 10.13). Do tego f', g' są ciągłe z założenia i mamy, że

$$\text{ciągłe są funkcje } f'g, fg' \text{ oraz } f'g + fg'.$$

Dalej $(fg)' = f'g + fg'$, zatem fg jest funkcją pierwotną dla funkcji $f'g + fg'$. Ostatecznie

$$\int_a^b (f'g + fg') = f(x)g(x)\big|_a^b.$$

□

Twierdzenie 10.18 (O całkowaniu przez podstawienie)**.** *Załóżmy, że $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ jest funkcją ciągłą, a $\varphi\colon [\alpha,\beta] \to [a,b]$ jest taką funkcją różniczkowalną, że φ' jest całkowalna w przdziale $[a,b]$. Wówczas*

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta f(\varphi(x))\varphi'(x)\,\mathrm{d}x.$$

Dowód. f jest ciągła, więc całkowalna w przedz. $[a,b]$. φ jest różniczkowalna, stąd ciągła i również różniczkowalna w $[\alpha,\beta]$.

$$f \circ \varphi \text{ jest całkowalna w } [\alpha,\beta],$$

$$(f \circ \varphi) \circ \varphi' \text{jest całkowalna w } [\alpha,\beta].$$

F - funkcja pierwotna dla f.

$$(F \circ \varphi)'(x) = F'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) = f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x).$$

$F \circ \varphi$ jet funkcją pierwotną dla $(f \circ \varphi)\varphi'$, czyli

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = (*).$$

Jeżeli $\varphi(\alpha) < \varphi(\beta)$, to $(*) = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t)\,\mathrm{d}t$.

Dla $\varphi(\alpha) = \varphi(\beta) = 0 = (*) = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t)\,\mathrm{d}t$.

Jeśli $\varphi(\alpha) > \varphi(\beta)$, to $(*) = -\left(F(\varphi(\alpha)) - F(\varphi(\beta))\right) =$

$$= -\int_{\varphi(\beta)}^{\varphi(\alpha)} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

□

10.8 Twierdzenia o wartości średniej dla całek

Twierdzenie 10.19. *Niech $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą. Wówczas istnieje $\xi \in [a,b]$ takie, że*

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Dowód. Mamy $m \leqslant f(x) \leqslant M$, $x \in [a,b]$. Z ciągłości funkcji f:

$$m = \inf f\,[[a,b]] = \min f\,[[a,b]]$$

$$M = \sup f\,[[a,b]] = \max f\,[[a,b]]$$

oraz z własności całki

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant M(b-a)$$

$$m \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant M$$

Z własności Darboux wynika, że istnieje $\xi \in [a,b]$ spełniające tezę twierdzenia. □

Twierdzenie 10.20. *Niech $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą, a $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ funkcją całkowalną stałego znaku. Wówczas istnieje $\xi \in [a,b]$ takie, że*

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Dowód. Mamy

$$\min_{[a,b]} f = m \leqslant f(x) \leqslant M = \max_{[a,b]} f.$$

g jest stałego znaku; załóżmy, że $g(x) \geqslant 0, x \in [a, b]$.

$$mg(x) \leqslant f(x)g(x) \leqslant Mg(x).$$

Z odpowiednich właności całki

$$m \cdot \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \cdot M.$$

Z własności Darboux istnieje $\xi \in [a, b]$ takie, że

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

□

Twierdzenie 10.21. *Niech $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą, a $g\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ funkcją monotoniczną klasy C^1. Wówczas istnieje $\xi \in [a, b]$ takie, że*

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = g(a)\int_a^\xi f(x)\,\mathrm{d}x + g(b)\int_\xi^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Dowód. f jest ciągła, niech F będzie funkcją pierwotną funkcji f.

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b F'(x)g(x)\,\mathrm{d}x =$$

$$= F(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b F(x)g'(x)\,\mathrm{d}x = I$$

Z poprzedniego twierdzenia istnieje $\xi \in [a, b]$ takie, że

$$\int_a^b F(x)g'(x)\,\mathrm{d}x = F(\xi)\int_a^b g'(x)\,\mathrm{d}x = F(\xi)g(x)\Big|_a^b = F(\xi)(g(b) - g(a)).$$

Dalej

$$\begin{aligned} I = \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x &= F(b)g(b) - F(a)g(a) - F(\xi)g(b) + F(\xi)g(a) = \\ &= g(a)\,(F(\xi) - F(a)) + g(b)\,(F(b) - F(\xi)) = \\ &= g(a)\int_a^\xi f(x)\,\mathrm{d}x + g(b)\int_\xi^b f(x)\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

□

10.9 Zastosowania geometryczne całki oznaczonej

Łatwo zauważyć, że:
Pole $|D|$ obszaru D ograniczonego krzywymi ciągłymi $y = f(x)$ i $y = g(x)$, gdzie $f(x) \geqslant g(x), x \in [a, b]$ i prostymi $x = a$, $x = b$ wyraża się wzorem

$$|D| = \int_a^b (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x.$$

10.9.1 Pole i objętość bryły obrotowej

Załóżmy, że funkcja $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ ma ciągłą pochodną na przedziale $[a, b]$. Po obrocie krzywej $y = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$ dookoła osi OX otrzymujemy bryłę obrotową o objętości V i polu powierzchni P i zachodzi:

$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2\,\mathrm{d}x,$$
$$P = 2\pi \int_a^b |f(x)| \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,\mathrm{d}x.$$

10.10 *Całkowanie przybliżone

Wprost z definicji całki Riemanna widzimy, że całkę $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ z funkcji nieujemnej f możemy aproksymować biorąc podział $\{x_0, \ldots, x_n\}$ przedziału $[a, b]$ i sumując prostokąty $[x_{k-1}, x_k] \times [0, \xi_k]$, $k = 1, \ldots, n$, gdzie ξ_k są punktami pośrednimi. Dokładniejsze przybliżenie dostaniemy w oparciu o nast. metodę:

Metoda trapezów: Będziemy przybliżać całkę

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

funkcji $f \geqslant 0$, sumą pól n trapezów. Przedział całkowania $[a, b]$ dzielimy na n przedziałów częściowych, wszystkich tej samej długości $(b - a)/n$. Kolejne punkty podziału na osi OX oznaczamy

$$a = x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n = b$$

zaś odpowiadające im wartości na osi OY jako

$$y_k = f(x_k), k = 0, \ldots, n.$$

Wtedy

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{(b-a)}{2n}\left(y_0 + y_n + 2(y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1})\right),$$

a błąd Δ bezwzględny przybliżenia spełnia:

$$\Delta \leqslant \frac{(b-a)^3}{12n^2} M,$$

gdzie $M = \sup_{x\in[a,b]} |f''(x)|$.

Przykład. Dla $n = 1$ mamy

$$\int_a^b \approx \frac{(b-a)}{2}\left(f(a) + g(b)\right)$$

Ćwiczenie. Obliczyć $\int_0^1 e^{x^2}\,\mathrm{d}x$ metodą trapezów przyjmując $n = 5$. Oszacować błąd.

Metoda prostokątów: Dzielimy przedział $[a, b]$ na $2n$ (parzystą liczbę) podprzedziałów.

$$h := \frac{b-a}{2n},\ x_i := a + ih, i = 1, 2, \ldots, 2n.$$

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx$$

$$\approx \frac{h}{3}\left(f(x_0) + 4(f(x_1) + f(x_3) + \ldots + f(x_{2n-1})) + 2(f(x_2) + f(x_4) + \ldots + f(x_{2n-2})) + f(x_{2n})\right).$$

Błąd bezwzględny Δ w tym wypadku ma oszacowanie:

$$\Delta \leqslant \frac{(b-a)^3}{24n^2} M,$$

gdzie $M = \sup_{x\in[a,b]} |f''(x)|$.

Przykład. Dla $n = 1$ mamy

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx (b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

Dla $n = 3$ mamy TO-DO

10.11 *Uwagi o całkowaniu funkcji wektorowych

Ustalmy

$$f\colon [a,b]\to\mathbb{R}^n, f=(f_1,\dots,f_n)$$
$$f_i\colon [a,b]\to\mathbb{R}, f_i\text{całkowalna na } [a,b];\ i\in\{1,\dots,n\}$$

Definiujemy

$$F(x):=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t=\left(\int_a^x f_1(t_1)\,\mathrm{d}t_1,\dots,\int_a^x f_n(t_n)\,\mathrm{d}t_n\right)\text{ gdzie } t=(t_1,\dots,t_n)\in\mathbb{R}^n.$$

Twierdzenie 10.22. *F jest funkcją ciągłą. Ponadto, jeżeli $f_1,\dots,f_n$ są ciągłe w punkcie $x_0\in(a,b)$, to F jest różniczkowalna w x_0.*

Twierdzenie 10.23. *Jeżeli f ma funkcję pierwotną F, to*

$$\int_a^b f=F(b)-F(a).$$

Funkcje zespolone: $f=\Re f+i\Im f$
$f\colon [a,b]\to\mathbb{C}$ możemy wyrazić jako $f=f_1+if_2$, gdzie

$$f_1,f_2\colon [a,b]\to\mathbb{R}\text{ całkowalne na } [a,b].$$

11 Zastosowania geometryczne rachunku różniczkowego i całkowego

11.1 Krzywe w przestrzeni

Niech $\Phi\colon [a,b]\to\mathbb{R}^n$, $\Phi=(x_1,\dots,x_n)$ gdzie x_i jest funkcją ciągłą dla $i\in\{1,\dots,n\}$.

Definicja 11.1. Zbiór K wartości funkcji Φ, czyli

$$K=\{(x_1(t),\dots,x_n(t)) : t\in[a,b]\}$$

nazywamy *krzywą* o początku w punkcie $\Phi(a)$ i końcu w punkcie $\Phi(b)$.

Jeżeli w $\Phi(a)=\Phi(b)$, to krzywą będziemy nazywali krzywą *zamkniętą*.
Φ nazywamy *parametryzacją* krzywej i zwykle zakładamy, że $\Phi|_{[a,b)}$ oraz $\Phi|_{(a,b]}$ - mówimy wtedy, że krzywa jest *łukiem* (Jordana).

Przykład. Korzystając z twierdzenia pitagorasa, łatwo sprawdzić, że wszystkie punkty okręgu S o środku w punkcie $(0,0)$ i promieniu długości r otrzymamy z następujących równości:

$$\begin{cases} x = r\cos t, \\ y = r\sin t \end{cases}$$

Zatem odwzorowanie $\Psi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ dane jako $\Psi(t) = (r\cos t, r\sin t)$ jest parametryzacją S:

$$S = \{(x,y) \in \mathbb{R}\colon \Psi(t)\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}\colon x = r\cos t, y = r\sin t\}$$

Przykład. Ustalmy dwa punkty $P_1 = (x_1, y_1)$, $P_1 = (x_2, y_2)$. Łatwo możemy wskazać parametryzację prostej przechodzącej przez te dwa punkty:

$$\begin{cases} x = x_1 + (x_2 - x_1)t, \\ x = y_1 + (y_2 - y_1)t \end{cases}$$

Czyli odwzorowanie $T\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ dane jako $(x,y) = T(t) = P_1 + (P_2 - P_1)t = tP_1 + (1-t)P_2$ jest równaniem prostej przechodzącej przez punkty P_1 i P_2. Zbiór

$$K = \{(x,y) \in \mathbb{R}\colon x = tx_1 - (1-t)x_2 \text{ i } y = ty_1 - (1-t)y_2\}$$

czyli nasza „prosta” jest formalnie „krzywą”. Dla $t \in [0,1]$ równanie $(x,y) = T(t)$ daje wszystkie punkty odcinka o końcach w punktach P_1 i P_2.

Definicja 11.2. Jeżeli

$$\begin{cases} x_i \in C^1([a,b]), i \in \{1, \ldots, n\}, \\ \sum_{i=1}^n [x_i'(t)]^2 > 0 \end{cases}$$

to mówimy, że krzywa jest *gładka.*

Ćwiczenie. Czy okrąg o równaniu $x^2 + y^2 = 1$ jest krzywą gładką? (Oczywista wskazówka: rozważyć jego równanie *parametryczne*).

Ćwiczenie. Liść Kartezjusza jest krzywą o parametryzacji danej jako:

$$\begin{cases} x = \frac{6t}{1+t^3}, \\ y = \frac{6t^2}{1+t^3}. \end{cases}$$

Wyznaczyć kilka punktów tej krzywej dla ćwiczenia i spróbować narysować wykres. Czy krzywa ta jest gładka?

Definicja 11.3. Krzywą *regularną* nazywamy krzywą złożoną ze skończonej liczby krzywych (łuków) gładkich.

Definicja 11.4. Jeżeli krzywa $K \subseteq \mathbb{R}^n$ (ewentualnie, gdy pewien jej spójny podzbiór) jest zbiorem rozwiązań równania postaci

$$F(x_1, \ldots, x_n) = 0 \tag{27}$$

to równanie 27 nazywamy jej *równaniem uwikłanym* i mówimy, że jest ona (ew. pewien jej podzbiór) „dana w sposób uwikłany”.

11.2 Pochodna funkcji określonej równaniami parametrycznymi.

Krzywa na płaszczyźnie. Niech dany będzie układ $\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t); \end{cases}$ gdzie φ i ψ są ciągłe. Oczywiście jest to parametryzacja pewnej krzywej K w przestrzeni $\mathbb{R}^2$. Niech $(x_0, y_0) = (\varphi(t_0), \psi(t_0))$ dla pewnego $t_0 \in \mathbb{R}$ będzie punktem nieosobliwym krzywej K. Załóżmy, że $\varphi'(t_0) \neq 0$. Pochodna φ' zachowuje więc znak w pewnym otoczeniu punktu t_0 a funkcja φ na mocy ciągłości jest wówczas w tym otoczeniu różnowartościowa. Istnieje zatem funkcja odwrotna $\Phi := \varphi^{-1}$. Podsumujmy:

$$t = \Phi(x), \text{ dla } t \text{ w pewnym otoczeniu punktu } t_0,$$
$$\Phi \text{ jest różnowartościową funkcją klasy } C^1.$$

Podstawmy $y = \psi(t) = \psi(\Phi(x))$. Widzimy, że w otoczeniu punktu t_0, y jest dana funkcją zmiennej x. Przyjmijmy $f = \psi \circ \Phi$ i wówczas możemy (w pewnym otoczeniu t_0!) posługiwać się zależnością $y = f(x)$. Ponadto funkcja f jest również klasy C^1, gdyż f' jest ciągła, jako iloraz funkcji ciągłych, co za chwilę udowodnimy. Punkt $\varphi(t_0), \psi(t_0)$ krzywej K, w którym $\varphi'(t_0) = 0$ i równocześnie $\psi'(t_0) = 0$ może nie dać się wyrazić zależnością $y = f(x)$. Punkt taki nazywamy też *puntkem osobliwym.*

Definicja 11.5. Jeżeli krzywą $K \subseteq \mathbb{R}^2$ w otoczeniu punktu t_0 można przedstawić w postaci równania $y = f(x)$, tzn. w pewnym otoczeniu t_0 krzywa pokrywa się z wykresem funkcji f, to mówimy, że można ją przedstawić w *postaci nieuwikłanej* (w danym otoczeniu).

Twierdzenie 11.1. *Niech $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, gdzie φ i ψ są funkcjami ciągłymi. Wówczas, jeżeli $\varphi'(t_0) \neq 0$ dla pewnego t_0, to istnieje takie otoczenie U punktu t_0, że*

$$y' = f'(x) = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}, \ \textit{dla } t \in U$$

Dowód. Obliczamy pochodną funkcji f, tzn. pochodną y w otoczeniu U wzgl. zmiennej x.

$$y' = (\psi\left((\Phi(x))\right)' = \Psi'\left(\Phi(x)\right) \cdot \Phi'(x) = \psi'(t)\Phi'(x).$$

Korzystając ze wzoru 7.7 otrzymujemy, że $\Phi'(t) = \dfrac{1}{(\Phi^{-1}(t))'} = \dfrac{1}{(\phi(t))'}$ dla $t \in U$. Stąd już wystarczy podstawić

$$y' = \psi'(t)\Phi'(x) = \psi'(t)\frac{1}{\varphi'(t)} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$$

□

Oznaczając $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \psi'(t)$ oraz $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \varphi'(t)$ łatwo zapamiętać powyższy wzór:

$$\boxed{y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}} \tag{28}$$

11.2.1 Długość krzywej

Definicja 11.6. *Długością krzywej* nazywamy kres górny długości łamanych wpisanych w krzywą.

Długość krzywej K oznaczamy $L(K)$ (od ang. *lenght* - długość) albo przez $|K|$.

Uwaga. Nie każda krzywa ma długość. Przykładem jest np. tzw. *krzywa Peano*. Krzywą, która ma długość nazywamy *prostowalną*.

Twierdzenie 11.2. *Jeżeli K jest krzywą gładką o parametryzacji $\Phi\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$, $\Phi(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))$, $t \in [a,b]$, to długość $L(K)$ krzywej dana jest wzorem*

$$L(K) = \int_a^b \sqrt{[x_1'(t)]^2 + \ldots + [x_n'(t)]^2}\,\mathrm{d}t.$$

Dowód. Przeprowadzimy najpierw dowód dla $n = 2$. Ustalmy krzywą K oraz dowolną parametryzację $\Psi\colon [a,b] \to K$. Zatem możemy przyjąć $(x(t), y(t)) = \Psi(t)$.
Ustalmy $\varepsilon > 0$. Niech $\delta > 0$ będzie taką stałą, że

$$(*)\ \forall_{s,t\in[a,b]} |s - t| < \delta \Rightarrow \left|[y'(t)]^2 - [y'(s)]^2\right| < \varepsilon^2.$$

Niech $\pi \in \mathcal{P}[a,b]$ będzie takim podziałem przedziału $[a,b]$, że $\pi = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$,

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b,\ \operatorname{diam}(\pi) < \delta.$$

Obliczymy długość łamanej ℓ_π wpisanej w krzywą K.

$$\ell_\pi = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(x(t_i) - x(t_{i-1}))^2 - (y(t_i) - y(t_{i-1}))^2}.$$

Z twierdzenia Lagrange'a istnieje takie $\xi_i \in [t_{i-1}, t_i]$, że

$$x'(\xi_i) = \frac{x(t_i) - x(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}},$$

oraz takie $\zeta_i \in [t_{i-1}, t_i]$, że

$$y'(\zeta_i) = \frac{y(t_i) - y(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}}.$$

Dalej

$$\ell_\pi = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{[x'(\xi_i)^2 \Delta t_i]^2 + [y'(\zeta_i)\Delta t_i]^2} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sqrt{([x'(\xi_i)]^2 + [y'(\xi_i)]^2) + ([y'(\zeta_i)]^2 - [y'(\xi_i)]^2)}\Delta t_i \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{n} \sqrt{[x'(\xi_i)]^2 + [y'(\xi_i)]^2}\, \Delta t_i + \sum_{i=1}^{n} \sqrt{[y'(\zeta_i)]^2 - [y'(\xi_i)]^2}\, \Delta t_i \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{n} \varphi(\xi_i)\Delta t_i + \varepsilon \sum_{i=1}^{n} \Delta t_i \leqslant \overline{S}(\varphi, \pi) + \varepsilon(b-a)$$

gdzie $\varphi(t) := \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}$ i stąd $\varphi(\xi_i) \leqslant \sup \varphi([t_{i-1}, t_i])$.
Podobnie:

$$\ell_\pi \geqslant \sum_{i=1}^{n} \varphi(\xi_i)\Delta t_i - \varepsilon \sum_{i=1}^{n} \Delta t_i \geqslant \underline{S}(\varphi, \pi) - \varepsilon(b-a).$$

Mamy zatem

$$\underline{S}(\varphi, \pi) - \varepsilon(b-a) \leqslant \ell_\pi \leqslant \overline{S}(\varphi, \pi) + \varepsilon(b-a)$$

o ile $\operatorname{diam}(\pi) < \delta$.

$$\int_a^b \varphi = \sup_{\pi \in \mathcal{P}[a,b]} \underline{S}(\varphi, \pi) \leqslant \sup_{\substack{\pi \in \mathcal{P}[a,b] \\ \operatorname{diam}(\pi) < \delta}} \underline{S}(\varphi, \pi) \leqslant \sup_{\substack{\pi \in \mathcal{P}[a,b] \\ \operatorname{diam}(\pi) < \delta}} \ell_\pi + \varepsilon(b-a) = L(K) + \varepsilon(b-a).$$

$$\int_a^b \varphi \leqslant L(K) + \varepsilon(b-a).$$

Przy $\varepsilon \to 0$ dostajemy, że

$$\int_a^b \varphi \leqslant L(K).$$

Z drugiej strony - ustalmy $\gamma > 0$. Niech $\pi_0 \in \mathcal{P}[a,b]$ będzie takim przedziałem, że

$$(**) \int_a^b \varphi + \gamma > \overline{S}(\varphi, \pi_0)$$

$$L(K) = \sup_{\pi \in \mathcal{P}[a,b]} \ell_\pi = \sup_{\substack{\pi \in \mathcal{P}[a,b] \\ \operatorname{diam}(\pi) < 0}} \ell_\pi \leqslant \sup_{\substack{\pi \in \mathcal{P}[a,b] \\ \operatorname{diam}(\pi) < 0}} \Big(\overline{S}(\varphi, \pi) + \varepsilon(b-a)\Big) \leqslant$$

$$\overline{S}(\varphi, \pi) + \varepsilon(b-a) \overset{(**)}{<} \int_a^b \varphi + \gamma + \varepsilon(b-a).$$

Mamy

$$L(K) < \int_a^b \varphi + \gamma + \varepsilon(b-a)$$

i przy $\varepsilon \to 0$, $\gamma \to 0$ otrzymujemy, że

$$\int_a^b \varphi \leqslant L(K) \leqslant \int_a^b \varphi \text{ i ostatecznie } L(K) = \int_a^b \varphi.$$

□

Dla krzywej K o parametryzacji Φ jak poprzednio; dla każdego podziału $\pi = \{t_0, \ldots, t_m\}$ odcinka $[a, b]$ określmy

$$L(K, \pi) := \sum_{i=1}^{m} ||\Phi(t_i) - \Phi(t_{i-1})||$$

($||\cdot||$ oznacza normę) Widzimy, że jest to długość łamanej o wierzchołkach $\Phi(t_1), \ldots, \Phi(t_n)$ wpisanej w krzywą. Zatem długość $L(K)$ możemy wyrazić następująco:

$$L(K) = \sup_{P \in \mathcal{P}[a,b]} L(K, \pi),$$

a gdy $L(K) < \infty$, to krzywa K jest prostowalna. Teraz przeprowadzimy pełny

Dowód twierdzenia 11.2. Jeżeli $a \leqslant t_{i-1} < t_i \leqslant b$, to

$$||\Phi(t_i) - \Phi(t_{i-1})|| = \left|\left|\int_{t_{i-1}}^{t_i} \Phi'(t)\,\mathrm{d}t\right|\right| \leqslant \int_{t_{i-1}}^{t_i} ||\Phi'(t)||\,\mathrm{d}t.$$

Stąd dla dowolnego podziału $\pi \in \mathcal{P}[a, b]$ mamy

$$L(K, \pi) \leqslant \int_a^b ||\Phi'(t)||\,\mathrm{d}t$$

i stąd

$$L(K) \leqslant \int_a^b ||\Phi'(t)||\,\mathrm{d}t.$$

Pokażemy, że nierówność w drugą stronę też zachodzi. Ustalmy dowolne $\varepsilon > 0$. Φ jest klasy C^1, zatem Φ' jest ciągła jednostajnie (tw. Heinego-Cantora) i stąd istnieje $\delta > 0$ taka, że

$$|x - y| < \delta \Rightarrow ||\Phi'(x) - \Phi'(y)|| < \varepsilon.$$

Niech $\pi = \{t_0, \ldots, t_m\} \in \mathcal{P}[a, b]$ tak, że $\Delta t_i < \delta,\ 1 \leqslant i \leqslant m$. Wówczas

$$||\Phi'(x)|| \leqslant ||\Phi'(t_i)|| + \varepsilon,\ \text{dla } x \in [t_{i-1}, t_i].$$

Mamy

$$\int_{t_{i-1}}^{t_i} ||\Phi'(x)||\,\mathrm{d}t \leqslant ||\Phi'(t_i)||\Delta t_i + \varepsilon\cdot\Delta t_i = \left|\left|\int_{t_{i-1}}^{t_i} (\Phi'(x)+\Phi'(t_i)-\Phi'(x))\,\mathrm{d}t\right|\right| + \varepsilon\Delta t_i \leqslant$$

$$\leqslant \left|\left|\int_{t_{i-1}}^{t_i} (\Phi'(x)\right|\right| + ||\Phi'(t_i)-\Phi'(x))\,\mathrm{d}t|| + \varepsilon\Delta t_i \leqslant ||\Phi(t_i)-\Phi(t_{i-1})|| + 2\varepsilon\Delta t_i.$$

Sumując nierówności po wszystkich $i = 1,\dots,n$ otrzymujemy, że

$$\int_a^b ||\Phi'(t)||\,\mathrm{d}t \leqslant L(K,\pi) + 2\varepsilon(b-a) \leqslant L(K) + 2\varepsilon(b-a).$$

Przy $\varepsilon \to 0$ dostajemy, że $\int_a^b ||\Phi'(t)||\,\mathrm{d}t \leqslant L(K)$, czyli ostatecznie $L(K) = \int_a^b ||\Phi'(t)||\,\mathrm{d}t$.

□

Inne przypadki obliczania długości krzywej Jeżeli funkcja $f\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ ma ciągłą pochodną na przedziale $[a,b]$, to długość $L(K)$ łuku krzywej

$$K : y = f(x),\;\; x\in[a,b]$$

jest równa

$$L(K) = \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,\mathrm{d}x$$

Jeżeli krzywa K zadana jest parametrycznie:

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t); \end{cases} \quad t\in[a,b]$$

gdzie x, y są funkcjami różniczkowalnymi w przedz. $[a,b]$, to

$$L(K) = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\,\mathrm{d}t$$

11.3 Inne geometryczne zastosowania całki.

Jeżeli krzywa K zadana jest parametrycznie:

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t); \end{cases} \quad t\in[a,b]$$

gdzie funkcje φ, ψ są ciągłe w przedziale $[a, b]$ oraz ψ ma ciągłą pochodną w tym przedziale, to wzór na pole $|D|$ obszaru D ogracznionego łukiem krzywej K, osią OX oraz prostymi $x = \varphi(a)$, $y = \psi(b)$ ma postać:

$$|D| = \int_a^b |\varphi(t)| \cdot |\psi'(t)| \, \mathrm{d}t.$$

Pole bszaru płaskiego D ograniczonego łukiem AB o równaniu biegunowym $r = f(\varphi) \geqslant 0$ dla $a \leqslant \varphi \leqslant b$ oraz $b - a \leqslant 2\pi$ i promieniu wodzącym OA i OB o długościach odpowiednio $f(a)$, $f(b)$, to o ile f jest funkcją ciągłą na przedziale $[a, b]$ wyraża się wzorem:

$$|D| = \frac{1}{2} \int_a^b (f(\varphi))^2 \, \mathrm{d}\varphi$$

12 Całka niewłaściwa

Dotychczasowe określenie całki Riemanna umożliwia całkowanie jedynia po zbiorach podzbiorach zwartych przestrzeni $\mathbb{R}$ (domkniętych i ograniczonych).

Definicja 12.1. Załóżmy, że funkcja $f\colon [a, b) \to \mathbb{R}$ $[f\colon (a, b] \to \mathbb{R}]$ jest całkowalna w sensie Riemanna na każdym przedziale $[a, c]$ $[[c, b]]$ dla $c \in (a, b)$. Jeżeli $b = +\infty$ $[a = +\infty]$ lub $\lim_{c \to b^-} f(x) = \pm\infty$ $[\lim_{c \to a^+} f(x) = \pm\infty]$, to całkę

$$\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x := \lim_{c \to b^-} \int_a^c f(x) \, \mathrm{d}x \quad \left[\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x := \lim_{c \to a^+} \int_a^c f(x) \, \mathrm{d}x\right]$$

nazywamy całką niewłaściwą z funkcji f na przedziale $[a, b)$ $[(a, b]]$ a punkt b [punkt a] nazywamy *punktem osobliwym.*

Jeżeli granica w powyższej definicji istnieje i jest skończona, to o całce niewłaściwej mówimy, że jest *zbieżna.* W przeciwnym wypadku - *rozbieżna.* Jeżeli $f\colon (a, b) \to \mathbb{R}$ oraz f jest całkowalna na każdym przedziale $[\alpha, \beta] \subseteq (a, b)$ oraz a, b są punktami osobliwymi, to

$$\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x = \int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x + \int_c^b f(x) \, \mathrm{d}x,$$

gdzie c jest dowolnym punktem przedziału (a, b).

Definicja 12.2 (Zbieżność bezwzględna całki niewłaściwej)**.** Jeżeli dla całki niewłaściwej $\int_a^b f$ mamy, że całka $\int_a^b |f|$ jest zbieżna to $\int_a^b f$ nazywamy *bezwzględnie zbieżną.* W **przeciwnym wypadku**, jeżeli $\int_a^b f$ **jest** zbieżna, to nazywamy ją zbieżną *względnie* lub *warunkowo.*

12.1 Kryteria zbieżności całek niewłaściwych

Twierdzenie 12.1. *Załóżmy, że funkcja $f\colon [a,b) \to \mathbb{R}$ jest całkowalna w sensie Riemanna na każdym przedziale $[a,c]$ dla $c \in (a,b)$ oraz b jest punktem osobliwym. Wówczas dla dowolnego ciągu $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ spełniającego warunek*

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n < \ldots < b,$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = b,$$

całka $\int_a^b f$ jest zbieżna wtedy i tylko wtedy, gdy zbieżny jest szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, gdzie

$$a_n = \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Dowód.

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^{x_n} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

□

Twierdzenie 12.2. *Niech $f, g\colon [a,b) \to \mathbb{R}$ będą funkcjami całkowalnymi na każdym przedziale $[a,c)$ dla każdego $c \in (a,b)$, b-punktem osobliwym oraz*

$$|f(x)| \leqslant g(x),\ x \in [a,b).$$

*Wówczas jeżeli $\int_a^b g$ jest zbieżna, to $\int_a^b f$ jest **bezwzględnie** zbieżna.*

Dowód. Ustalmy ciąg $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rosnący taki, że $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$. Oznaczmy:

$$a_n := \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)\,\mathrm{d}x,\ b_n := \int_{x_{n-1}}^{x_n} |f(x)|\,\mathrm{d}x,$$

$$c_n := \int_{x_{n-1}}^{x_n} g(x)\,\mathrm{d}x,\ n \in \mathbb{N}.$$

Mamy $|a_n| \leqslant b_n \leqslant c_n$, $n \in \mathbb{N}$.

$$\int_a^b g \text{ - zbieżna} \overset{tw.12.1}{\Longrightarrow} \sum_{n=1}^{\infty} c_n \text{ - zbieżny} \overset{\substack{\text{Kryterium}\\ \text{porównawcze}}}{\Longrightarrow} \underset{\displaystyle \sum_{n=1}^{\infty} b_n}{\overset{\substack{\int_a^b |f| \text{ - zbieżna}\\ \Uparrow}}{}} \text{ - zbieżny i}$$

$$\begin{array}{c} \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \\ \Downarrow \\ \int_a^b f \text{ - zbieżna} \end{array} a_n \Leftarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ - bezwzgl. zbieżny} \Leftarrow \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \text{ - zbieżny.}$$

$$\text{Czyli } \int_a^b f \text{ jest bezwzględnie zbieżna.}$$

□

W powyższym twierdzeniu oczywiście wystarczy aby funkcje f i g były ciągłe.

Twierdzenie 12.3. *Niech $f\colon [a,+\infty) \to [0,+\infty)$ będzie funkcją całkowalną na każdym przedziale $[a,c)$, $c \in (a,b)$. Wówczas $\int_a^\infty f$ jest zbieżna wtedy i tylko wtedy, gdy funkcja*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \textit{ jest ograniczona.}$$

Dowód. Najpierw implikacja "w lewo".

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t,\ x \in [a,+\infty) \text{ jest rosnąca.}$$

Niech $x < y$. $F(y) - F(x) = \displaystyle\int_a^y f(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int_x^y f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0$ (gdyż $f \geqslant 0$). Jeżeli F jest ograniczona i monotoniczna (rosnąca), to istnieje granica $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$ i jest ona skończona. Mamy $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$, czyli $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ jest skończona. W drugą stronę: jeżeli F jest nieograniczona (i rosnąca), to $\lim\limits_{x\to+\infty} \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = +\infty$. Stąd $\displaystyle\int_a^\infty f$ jest rozbieżna. □

Twierdzenie 12.4 (Kryterium porównawcze dla całek niewłaściwych)**.** *Niech $f, g\colon [a,+\infty) \to [0,\infty)$ będą funkcjami całkowalnymi na każdym przedziale $[a,c)$, $c \in (a,b)$ oraz istnieje takie $A \geqslant a$, że dla każdego $x \in [A,\infty)$ zachodzi $f(x) \leqslant g(x)$. Wówczas*

1. *jeżeli $\int_a^\infty g$ jest zbieżna, to zbieżna jest $\int_a^\infty f$,*
2. *jeżeli $\int_a^\infty f$ jest rozbieżna, to rozbieżna jest $\int_a^\infty g$.*

Dowód.

$$\int_a^A f,\ \int_a^A g \text{ - skończone, jako całkie Riemanna.}$$

1. Zdefiniujmy $G(x) := \int_A^x g(t)\,\mathrm{d}t, x \geqslant A$.

$$\text{Jeśli } \int_a^{+\infty} g \text{ jest zbieżna, to f. } G \text{ jest ograniczona.}$$

$$\text{Ale } 0 \leqslant F(x) = \int_A^x f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant G(x), x \geqslant A.$$

$$F \text{ jest ograniczona na } [A. + \infty).$$

$$\int_A^{+\infty} f \text{ jest zbieżna, stąd } \int_a^{+\infty} f \text{ jest zbieżna.}$$

2. Załóżmy, że $\int\limits_a^{+\infty} f$ jest rozbieżna. Wtedy

$$\int_A^{+\infty} f \text{ jest rozbieżna i stąd } F \text{ jest nieograniczona na } [A, +\infty) \Rightarrow$$

$$G \text{ jest nieogranczona na } [A, +\infty) \Rightarrow \int_A^{+\infty} g \text{ jest rozbieżna} \Rightarrow \int_a^{+\infty} g \text{ jest rozbieżna.}$$

□

13 Szeregi liczbowe

Definicja 13.1 (Szereg)**.** Niech $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będzie dowolnym ciągiem. Wyrażenie

$$S_n = a_0 + a_1 + \ldots + a_{n-1} + a_n$$

nazywamy n-tą *sumą częściową szeregu*. Szeregiem nazywamy ciąg $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$, a sumą szeregu (jeśli istnieje) granicę

$$\lim_{n\to\infty} S_n.$$

Jeśli powyższa granica nie istnieje, to mówimy, że dany szereg jest *rozbieżny*, w przeciwnym wypadku nazywamy *zbieżnym*. Sumę szeregu będziemy na ogół oznaczać

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k = \lim_{n\to\infty} S_n.$$

Zwyczajowo tym samym symbolem co sumę: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, oznacza się też sam **szereg** $(\sum_{k=0}^{n} a_k)_{n\in\mathbb{N}}$. W rachunkach towarzyszących zastosowaniom zazwyczaj nie prowadzi to do nieporozumień. Zauważmy, że sumowanie możemy rozpoczynać od dowolnego indeksu, niekoniecznie $k = 0$ albo 1 oraz, że pominięcie skończonej liczby początkowych wyrazów szeregu (czyli wyrazów w każdej sumie częściowej!) nie wpływa na to jaką szereg ma granicę.

Przykłady szeregów rozbieżnych.

1. Szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 1$ jest oczywiście rozbieżny do nieskończoności, jak podpowiada nam zdrowy rozsądek. Zauważmy też, że formalnie $S_n = \underbrace{1+1+1+\ldots+1}_{n\text{-razy}} = n$. A więc $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} n = +\infty$ - zgodnie z intuicją.

2. Podobnie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n = +\infty$. Mamy:
$$S_n = 1+2+3+\ldots+(n-1)+n = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2+n}{2} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Przykład. Obliczymy sumę szeregu $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$. Zauważmy, że wyrażenie $\frac{1}{n(n+1)}$ ma łatwy rozkład na ułamki proste: $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ (ćwiczenie). Zatem obliczmy:
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1.$$
Mamy więc pierwszy przykład szeregu, który ma skończoną wartość.

Przykład (Szereg geometryczny)*.* Szereg
$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n,\ x\in\mathbb{R}$$
jest zbieżny gdy $0 \leqslant x < 1$ oraz rozbieżny dla $x \geqslant 1$.

Dowód. Przypomnijmy, że
$$\sum_{k=1}^{n} x^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} x^k = \frac{1-x^n}{1-x}.$$
Dla $0 \leqslant x < 1$ przy $n \to \infty$ mamy $x^n \to 0$ i
$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} x^k = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \in \mathbb{R}.$$

$\square$

Przykład. Pokażemy ponownie (patrz, przykład 1.4.2), że liczba $8,(3)$ jest wymierna. Niech $x = 8,(3)$. Mamy

$$x = 8,3333\ldots = 8 + 3\cdot\frac{1}{10^1} + 3\cdot\frac{1}{10^2} + 3\cdot\frac{1}{10^3} + 3\cdot\frac{1}{10^4} + \ldots =$$
$$= 8 + 3\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{10}\right)^n$$

Obliczmy sumę szeregu:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{10}\right)^n = \frac{1}{10}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1} = \frac{1}{1-\frac{1}{10}} = \frac{10}{9}$$ skorzystaliśmy z wzoru na sumę szeregu

gemoetrycznego - patrz wyżej (podstaw $x = \frac{1}{10}$. Uwaga: sumowanie rozpoczyna się od $n = 1$ - wyciągnij $1/10$ przed nawias aby otrzymać właściwy wykładnik). Zatem

$$3\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{10}\right)^n = \frac{3}{10}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1} = \frac{3}{10}\cdot\frac{10}{9} = \frac{1}{3}$$

Ostatecznie $x = 8 + \frac{1}{3} = \frac{25}{3}$ - jest to oczywiście liczba wymierna.

Twierdzenie 13.1 (Warunek konieczny zbieżności szeregu)**.** *Jeżeli szereg* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ *jest zbieżny, to*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Dowód. Niech S_n będzie n-tą sumą częściową szeregu i S będzie sumą szeregu:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = S$$

$$\text{Wtedy } \lim_{n\to\infty} S_n = S \text{ ale również } \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S.$$

$$\text{Zauważmy, że } S_n - S_{n-1} = a_n. \text{ Stąd}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (S_n - S_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0.$$

□

Uwaga. Twierdzenie nie zachodzi w drugą stronę. Np. $\frac{1}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$ ale szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ jest rozbieżny.

Twierdzenie 13.2 (Warunek Cauchy'ego dla szeregów)**.**

Szereg $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ *jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego* $\varepsilon > 0$ *istnieje* $N \in \mathbb{Z}$ *takie, że*

$$\left|\sum_{k=n}^{m} a_k\right| < \varepsilon, \text{ dla } m \geqslant n \geqslant N.$$

Dowód. Zauważmy, że dla $m = n$ dostajemy warunek konieczny zbieżności szeregów (poprzednie twierdzenie). Warunek Cauchy'ego zbieżności ciągów zastosowany do sum częściowych szeregu ma postać:

$$\forall_{\varepsilon>0} \exists_{N\in\mathbb{N}} \forall_{m,n\in\mathbb{N}, m\geqslant n\geqslant N.} |S_m - S_n| < \varepsilon.$$

Wystarczy zauważyć, że

$$\sum_{k=n}^{m} a_k = S_m - S_n.$$

□

Twierdzenie 13.3. *Szereg o wyrazach nieujemnych jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy ciąg jego sum częściowych jest ograniczony.*

Definicja 13.2 (Zbieżność bezwzględna)**.**

Mówimy, że szereg $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ jest *bezwzględnie zbieżny*, gdy zbieżny jest szereg $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n|$.

Twierdzenie 13.4. *Każdy szereg bezwzględnie zbieżny, jest zbieżny.*

Mówimy też, że szereg **zbieżny**, który **nie** jest zbieżny **bezwzględnie** jest zbieżny *warunkowo.*

Twierdzenie 13.5 (Riemanna)**.** *Mając dany szereg zbieżny* ***warunkowo****, można przez zamianę porządku jego składników uzyskać szereg rozbioeżny lub zbieżny do* ***z góry zadanej*** *granicy (skończonej lub nieskończonej).*

W szeregu bezwzględnie zbieżnym (w szczególności: szeregu zbieżnym o wyrazach nieujemnych) możemy dowolnie zamieniać kolejność wyrazów nie wypływając na jego granicę (sumę).

13.1 Kryteria zbieżności szeregów

Omówimy teraz szereg przydatnych twierdzeń, w większości określanych jako "kryteria zbieżności szeregów". Dzięki nim będziemy w stanie rozstrzygnąć, czy dany szereg ma skończoną sumę czy też jest rozbieżny. Szczególnie liczne są metody dotyczące szeregów o wyrazach dodatnich lub przynajmniej nieujemnych, a podstawą jest tu porównywanie badanego szeregu z innymi szeregami, o których zbieżności/rozbieżności już wiemy. Jedną ze skuteczniejszych metoda badania szeregów nieujemnych podamy na końcu i będzie ona oparta na porównywaniu szeregu z całką niewłaściwą.

Twierdzenie 13.6 (Kryterium Leibniza)**.** *Jeżeli ciąg liczbowy* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *spełnia nast. warunki:*

1. $a_n \geqslant 0,\ n \in \mathbb{N}$,
2. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$,
3. *ciąg* a_n *jest nierosnący;*

to szereg

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$$

jest zbieżny.

Dowód. Zauważmy, że $S_{2^{n+1}} = S_{2^n} + (a_{2^{n+1}} - a_{2^{n+2}})$ oraz $a_{2^{n+}} - a_{2^{n+2}} \geqslant 0$ z założenia, że ciąg jest malejący. Krótko mówiąc: podciąg $(S_{2^n})_{n\in\mathbb{N}}$ jest rosnący. Zauważmy, że jest też ograniczony:

$$S_{2^n} = a_0 - a_1 + a_2 - \ldots + a_{2^n} = a_0 - (\underbrace{(a_1 - a_2)}_{\geqslant 0} + \underbrace{(a_3 - a_4)}_{\geqslant 0} + \ldots + \underbrace{(a_{2^n-1} - a_{2^n})}_{\geqslant 0}) \leqslant a_0.$$

Ciąg $(S_{2^n})_{n\in\mathbb{N}}$ jest zbieżny. Musimy teraz pokazać, że $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2^{n+1}} = \lim\limits_{n\to\infty} S_{2^n}$. Wystarczy zauważyć, że $S_{2^{n+1}} = S_{2^n} + a_{2^{n+1}}$ a $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2^{n+1}} = 0$ z założenia a więc

$$\lim_{n\to\infty} S_{2^{n+1}} = \lim_{n\to\infty}(S_{2^n} + a_{2^{n+1}}) = \lim_{n\to\infty} S_{2^n}.$$

□

Twierdzenie 13.7 (Kryterium Abela)**.** *Niech $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będą ciągami liczb rzeczywistych. Jeżeli szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny a ciąg $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monotoniczny i ograniczony, to szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ jest zbieżny.*

Twierdzenie 13.8 (Kryterium Dirichleta)**.** *Jeżeli ciąg sum częściowych szeregu $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ jest ograniczony, a $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest ciągiem liczb rzeczywistych, który jest monotoniczny i zbieżny do zera, to szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ jest zbieżny.*

Szeregi o wyrazach nieujemnych:

Twierdzenie 13.9 (Kryterium porównawcze)**.** *Niech $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będą pewnymi ciągami o wyrazach nieujemnych. Załóżmy, że dla pewnego $n_0 \in \mathbb{N}$ zachodzi $a_n \leqslant b_n, n \geqslant n_0$. Wówczas*

- *jeżeli szereg $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jest zbieżny, to zbieżny jest szereg $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$,*

- *jeżeli szereg $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny, to rozbieżny jest szereg $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.*

Dowód. Załóżmy, że szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ jest zbieżny i $a_n \leqslant b_n,\ n \geqslant n_0$ dla pewnego $n_0 \in \mathbb{N}$. Istnieje $n_1 \in \mathbb{N}$ takie, iż $B_m - B_n < \varepsilon$ dla $m \geqslant n \geqslant n_1$. Niech $N = \max\{n_0, n_1\}$. Wówczas

$$A_m - A_n \leqslant B_m - B_n < \varepsilon \text{ dla } m \geqslant n \geqslant N.$$

Szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny na mocy twierdzenia 13.2. W drugą stronę: jeżeli $0 \leqslant a_n \leqslant b_n$, $n \geqslant n_0$ i szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny, to $\lim\limits_{n\to\infty} a_n > 0$ i stąd również $\lim\limits_{n\to\infty} b_n > 0$ zatem szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ nie może być zbieżny. □

Przytoczymy jeszcze poprzednie twierdzenie w innej wersji:

Twierdzenie 13.10 (Kryterium graniczne)**.** *Niech $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będą pewnymi ciągami tak, że $a_n \geqslant 0$ oraz $b_n > 0$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Jeżeli istnieje granica $G = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$, to:*

- *gdy $G < \infty$, to*

$$\textit{zbieżność szeregu } \sum_{n=1}^{\infty} b_n \textit{ pociąga zbieżność szerergu } \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

- *gdy $G > 0$, to*

$$\textit{rozbieżność szeregu } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \textit{ pociąga rozbieżność szerergu } \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

Warto z powyższego twierdzenia wyciągnąć i zapamiętać przynajmniej następującą regułę: gdy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} \in (0, \infty),$$

to obydwa szeregi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ są albo równocześnie rozbieżne, albo równocześnie zbieżne. Następne kryterium jest bardzo wygodne ze względu na swoją prostotę, ale często pomijane w standardowym kursie analizy ze względu na ograniczone zastosowania.

Twierdzenie 13.11 (Kryterium kondensascyjne Cauchy'ego)**.** *Załóżmy, że $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest nierosnący, $a_n \geqslant 0$. Wówczas*

$$\textit{szereg } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \textit{ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy zbieżny jest szereg } \sum_{n=0} 2^n a_{2^n}$$

Przykład.

$$\text{Szereg } \sum_{n=0} \frac{1}{n^p} \text{ jest zbieżny, jeżeli } p > 1 \text{ i rozbieżny, jeżeli } p \leqslant 1.$$

Dowód. Jeśli $p \leqslant 0$, to szereg oczywiście jest rozbieżny, bo nie jest spełniony warunek konieczny 13.1 zbieżności szeregu. Dla $p > 0$ zastosujmy kryterim kondensacyjne 13.11. Przejdźmy do szeregu

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n \frac{1}{2^{np}} = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{(1-p)n}.$$

Teraz: $2^{1-p} < 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy $1 - p < 0$ i wystarczy przyjąć $q = 2^{1-p}$ aby uzyskać zbieżny szereg geometryczny. □

Twierdzenie 13.12 (Kryterum Cauchy'ego)**.** *Niech* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *będzie ciągiem nieujemnym.*

- *Jeżeli* $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$*, to szereg* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *jest zbieżny.*

- *Jeżeli* $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1$*, to szereg* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *jest rozbieżny.*

Dowód. Niech $D = \limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$ i rozpatrzymy przypadki.

1. Niech najpierw $D < 1$. Weźmy $\alpha \in \mathbb{R}$ tak, że $D < \alpha < 1$. Istnieje (lemat 3.3) $N \in \mathbb{N}$ takie, że $\sqrt[n]{a_n} < \alpha$, $n \geqslant N$. Szereg $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \alpha^n$ jest zbieżny, gdyż $\alpha \in [0,1)$ i zbieżność szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ wynika z kryterium porównawczego.

2. $D > 1$. Weźmy ciąg $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ l. naturalnych tak, że $\lim_{k\to\infty} \sqrt[n_k]{a_{n_k}} = D$. A więc $a_{n_k} > 1$ dla nieskończenie wielu $k \in \mathbb{N}$. Czyli $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \geqslant 1$ i nie może być spełniony warunek konieczny (13.1) zbieżności szeregu.

□

Uwaga (1)*.* Jeżeli $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$ to kryterium **nie** rozstrzyga zbieżności szeregu!

Uwaga (2)*.* Oczywiście, jeżeli ciąg $(\sqrt[n]{a_n})_{n\in\mathbb{N}}$ jest zbieżny, to $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$ i możemy po prostu obliczać granicę.

Twierdzenie 13.13 (Kryterium d'Alemberta)**.** *Załóżmy, że* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *jest ciągiem nieujemnym.*

Jeżeli istnieje granica $D = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$*, to wtedy:*

- *gdy* $D < 1$, *to szereg* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *jest zbieżny,*

- *gdy* $D > 1$, *to szereg* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *jest rozbieżny.*

Dowód. Załóżmy najpierw, że $D < 1$. Weźmy dow. liczbę rzeczywistą $\alpha \in (D, 1)$ Istnieje $N \in \mathbb{N}$ takie, że $\frac{a_{n+1}}{a_n} < \alpha$ dla $n \geqslant N$. Czyli

$$a_n < a_{n-1}\alpha,\ a_{n+1} < a_n\alpha, \ldots \text{ dla } n \geqslant N.$$

Możliwe do otrzymania nierówności możemy mnożyć stronami przez α ($> 0!$)

$$a_{n+1}\alpha < a_n\alpha^2 < a_{n-1}\alpha^3.$$

$$a_{N+2}\alpha < a_{N+1}\alpha^2 < a_N\alpha^3.$$

$$\vdots$$

$$a_n < a_{n-1}\alpha < a_{n-2}\alpha^2 < \ldots < a_{N-2}\alpha^{n-N+2} < a_{N-1}\alpha^{n-N+1} < a_N\alpha^{n-N},\ n > N.$$

Uzyskaliśmy oszacowanie $a_n < a_N\alpha^{n-N}$, $n > N$ a ponieważ $\alpha \in [0, 1)$, to szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \underbrace{\left(a_N\alpha^{-N}\right)}_{\text{constans}}\alpha^n$ jest zbieżny (szereg geometryczny) i zbieżność szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ wynika z kryterium porównawczego.

Teraz załóżmy, że $D > 1$. Jeżeli $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, to ciąg $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest od pewnego miejsca niemalejący a ponadto jego wyrazy są nieujemne, zatem warunek 13.1 konieczny zbieżności szeregu nie może być spełniony. □

Uwaga. Jeżeli w powyższym twierdzeniu $D = 1$, to kryterium **nie** rozstrzyga zbieżności szeregu.

Uwaga (1). Jeżeli

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$$

to podobnie jak poprzednio kryterium **nie** rozstrzyga zbieżności szeregu.

Uwaga (2). Oczywiście, jeżeli ciąg $(\sqrt[n]{a_n})_{n\in\mathbb{N}}$ jest zbieżny, to

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}.$$

Uwaga (2). Kryterium d'Alemberta jest na ogół łatwiejsze w zastosowaniu niż Kryterium Cauchy'ego, ponieważ łatwiej jest obliczyć ułamki niż pierwiastki n-tego stopnia. Jednak Kryterium Cauchy'ego jest "silniejsze" w tym sensie, że w wielu przypadkach kryterium d'Alemberta nie daje żadnego rozstrzygnięcia podczas gdy kryterium Cauchy'ego wskazuje na zbieżność. Z drugiej strony, gdy kryterium Cauchy'ego nie daje rozstrzygnięcia, to również kryterium d'Alemberta nie daje rozstrzygnięcia zbieżności szeregu. Wynika to z następującego oszacowania:

Twierdzenie 13.14. *Dla dowolnego ciągu liczb dodatnich $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zachodzi*

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} \leqslant \liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} \leqslant \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} \leqslant \limsup_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} \tag{29}$$

Dowód. Środkowa nierówność jest powtórzeniem twierdzenia 2.15. Udowodnimy prawą nierówność. Niech $g := \limsup\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$. Jeżeli $g = +\infty$, to nierówność oczywiście zachodzi. Niech więc $g \in \mathbb{R}$. Weźmy dowolne $\alpha > g$. Istnieje (lemat 3.3) $N \in \mathbb{N}$ takie, że $\dfrac{x_{n+1}}{x_n} \leqslant \alpha$, $n \geqslant N$. Inaczej mówiąc $x_{N+k+1} \leqslant x_{N+k}\alpha$ dla $k \in \mathbb{N}$. Możemy napisać, że dla każdego $p > 0$ i dla kolejnych $k = 0, 1, 2, \ldots, p-1$ mamy:

$$\begin{gathered} x_{N+1} \leqslant x_N\alpha \\ x_{N+2} \leqslant x_{N+1}\alpha \\ x_{N+3} \leqslant x_{N+2}\alpha \\ \vdots \end{gathered}$$

Mnożąc kolejne nierówności stronami otrzymujemy:

$$\begin{gathered} x_{N+1} \leqslant x_N\alpha \\ x_{N+2} \leqslant x_{N+1}\alpha \leqslant x_N\alpha^2 \\ x_{N+3} \leqslant x_{N+2}\alpha \leqslant x_{N+1}\alpha^2 \leqslant x_N\alpha^3 \\ \vdots \\ x_{N+p} \leqslant x_{N+p-1}\alpha \leqslant \ldots \leqslant x_{N+1}\alpha^{p-1} \leqslant x_N\alpha^p. \end{gathered}$$

Mamy zatem $\boxed{x_{N+p} \leqslant x_N\alpha^p}$. Możemy wyrazić dowolne $n \geqslant N$ jako $n = N + p$ dla odpowiedniego $p > 0$ i wtedy $p = n - N$. Nasze oszacowanie ma zatem postać

$$x_n \leqslant x_N\alpha^{n-N},\ n \geqslant N.$$

Dalej $\sqrt[n]{x_n} \leqslant \sqrt[n]{x_N\alpha^{-N}}\alpha$. Przechodząc do granicy[19] otrzymujemy, że

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} \leqslant \alpha$$

[19] $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} \leqslant \limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_N\alpha^{-N}}\alpha \leqslant \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_N\alpha^{-N}}\alpha = \alpha$

Z dowolności α i $g < \alpha$ możemy przyjąć $\alpha \to g$ i wtedy mamy, że

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} \leqslant g.$$

Lewą nierówność można udowodnić analogicznie. $\square$

Ćwiczenie. Niech $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będzie ciągiem takim, że $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = q \in \mathbb{R},\ q = \text{const.}$ Pokazać, że jeżeli $q < 1$, to $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Sugestia: najpierw zająć się przypadkiem $a_n \geqslant 0, n \in \mathbb{N}$ a potem uzupełnić dowód do a_n dowolnego.

Ćwiczenie. Wykazać, że $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a^n}{n!} = 0, a \in \mathbb{R},\ a = \text{const.}$

Przykład. Zbadamy zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$$

Mamy

$$\frac{n+1}{2^{n+1}} \frac{2^n}{n} = \frac{1}{2}\left(\frac{n+1}{n}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{n+1}{n}\right) = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{n}}{1} = \frac{1}{2} < 1$$

Zatem na mocy kryterium d'Alemberta szereg ten jest zbieżny. Akurat też sumę szeregu jesteśmy w tanie obliczyć. Rozpiszmy $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \frac{4}{16} + \ldots = S$. Przyjrzyjmy się sumom częściowym S_3 i S_4.

$$S_3 = \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8}$$

$$S_4 = \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \frac{4}{16} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{4} + \frac{2}{8} + \frac{3}{16}$$

Stąd można zauważyć, że $S_4 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{2}S_3$.
Ogólnie:

$$S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2}S_{n-1}.$$

Zauważmy, że

$$2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^n}\right) = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2^{k+1}} = \sum_{k=1}^{n} 2^{n+1} = \sum_{k=0}^{n-1} 2^k.$$

Zatem

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} 2^k - \frac{1}{3}S_{n-1}\right) = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} 2^n - \frac{1}{2}S$$

$$\frac{3}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}2^n=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{2}}\right)=1.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}=\frac{2}{3}.$$

Ćwiczenie. Zbadać zbieżność szeregu $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\cdot n!}{n^n}$.

Twierdzenie 13.15 (Kryterium całkowe zbieżności szeregów). *Załóżmy, że* $f\colon [N,+\infty) \to [0,+\infty)$ *jest funkcją całkowalną na każdym przedziale* $[N,M]$, $M \in (N,+\infty)$ *i nierosnącą. Wówczas*

$$\text{szereg } \sum_{n=1}^{\infty} f(n) \text{ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy całka } \int_N^{+\infty} f \text{ jest zbieżna.}$$

Ponadto

$$\int_N^n f(x)\,\mathrm{d}x + f(n) \leqslant \sum_{k=N}^{n} f(k) \leqslant \int_N^n f(x)\,\mathrm{d}x + f(N),\ n > N.$$

Dowód. Z twierdzenia 10.5 mamy oszacowanie:

$$f(k) \leqslant \int_{k-1}^{k} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant f(k-1),\ k > N.$$

Sumujemy stronami nierówności dla wszystkich $k > N$:

$$\sum_{k=N+1}^{n} f(k) \leqslant \sum_{k=N+1}^{n} \int_{k-1}^{k} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \underbrace{\sum_{k=N+1}^{n} f(k-1)}_{\overset{\|}{\sum_{k=N}^{n-1} f(k)}},\ n > N.$$

$$\sum_{k=N}^{n} f(k) - f(N) \leqslant \int_N^n f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=N}^{n} f(k) - f(n)$$

Zauważmy, że stąd już widać, iż:

$$\sum_{k=N}^{\infty} f(k) \text{ jest zbieżny} \Leftrightarrow \int_N^n f(x)\,\mathrm{d}x \text{ jest zbieżna}$$

Ponadto z poprzedniego oszacowania można przejść do:

$$\int_N^n f(x)\,\mathrm{d}x + f(n) \leqslant \sum_{k=N}^{n} f(k) \leqslant \int_N^n f(x)\,\mathrm{d}x + f(N)$$

□

Wniosek. Ponownie, niech $f\colon [N,+\infty) \to [0,+\infty)$ jest funkcją całkowalną na każdym przedziale $[N,M)$, $M \in (N,+\infty)$ i (słabo) malejącą. Wówczas ciąg

$$\left(\sum_{k=N}^{n} f(k) - \int_N^n f(x)\,\mathrm{d}x\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

jest zbieżny do liczby z przedziału $[0, f(N)]$.

Dowód. Przyjmijmy $y_n = \sum\limits_{k=N}^{n} f(k) - \int\limits_{N}^{n} f(x)\,\mathrm{d}x,\ n \in \mathbb{N}$.

$$y_n \geqslant 0 \ \ (y_n \geqslant f(n) \geqslant 0)$$

$$y_{n+1}-y_n = \sum_{k=N}^{n+1} f(k)-\int_N^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x-\sum_{k=N}^{n} f(k)+\int_N^{n} f(x)\,\mathrm{d}x = f(n+1)-\int_n^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 0.$$

Ciąg $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest malejący i ograniczony z dołu, stąd zbieżny. Z drugiej strony

$$y_n \leqslant f(N).$$

□

Przykład. Ciąg $\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ jest zbieżny do liczby z przedziału $[0,1]$. Wystarczy przyjąć $x_n = \left(\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \int\limits_{1}^{n} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x\right)$ i z naszego *wniosku* mamy $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \gamma \in [0,1]$. Liczba γ nazywana jest stałą Eulera (nie mylić z *liczbą* e Eulera) albo stałą Mascheroniego (albo stałą Eulera-Mascheroniego) i wynosi około $0,5772156649$. Liczba ta ma wiele zastosowań w różnych gałęziach matematyki, np. teorii równań różniczkowych. Nie wiadomo, czy liczba ta jest wymierna, czy też niewymierną.

Twierdzenie 13.16 (Kryterium zagęszczające Schlömilcha)**.** *Ustalmy szereg liczbowy* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *o wyrazach nieujemnych taki, że ciąg jego wyrazów jest nierosnący. Niech dana będzie funkcja* $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *o tej własności, że*

$$\frac{f(n+1)-f(n)}{f(n)-f(n-1)} = \frac{\Delta f(n)}{\Delta f(n-1)} < N,\ n \in \mathbb{N}$$

dla pewnego $N > 0$. *Wówczas szereg* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy zbieżny jest szereg*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Delta f(n) a_{f(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(f(n+1)-f(n)\right) a_{f(n)}.$$

Zauważmy, że przyjmując $f(n) = 2^n$ w powyższym twierdzeniu, otrzymamy kryterium zagęszczające Cauchy'ego.

Ćwiczenie. Korzystając z kryterium Schlömilcha udowodnić, że szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{\sqrt{n}}}$ jest zbieżny. Wskazówka: przyjąć $f(n) = n^2$.

14 Aproksymacja funkcji (n+1)-krotnie różniczkowalnych

Przypomnijmy, że n-tą pochodną funkcji oznaczamy jako $f^{(n)}$.

Twierdzenie 14.1 (Taylora)**.** *Niech $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ będzie funkcją klasy C^n w przedziale (a,b) i istnieje $f^{(n+1)}$ we wszystkich punktach przedziału (a,b) oraz niech $x_0 \in (a,b)$. Wtedy dla każdego $x \in (a,b)$ zachodzi następujący wzór Taylora*

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{(x-x_0)^k}{k!} f^{(k)}(x_0) \right) + R_n(x,x_0), \tag{30}$$

gdzie funkcja $R_n(x,x_0)$ nazywana resztą we wzorze Taylora spełnia warunek

$$\lim_{x\to x_0} \frac{R_{n,x_0}(x)}{(x-x_0)^n}.$$

Ważnym przypadkiem szczególnym powyższego twierdzenia dla $x_0 = 0$ jest *wzór Maclaurina.*

Uwaga. Twierdzenie Taylora można też udowodnić dla $f\colon [a,b] \to Y$, gdzie Y jest dowolną przestrzenią unormowaną.

Twierdzenie 14.2 (Reszta w postaci Lagrange'a)**.** *Istnieje takie $\xi \in [\min\{x,x_0\}, \max\{x,x_0\}]$, że*

$$R_{n,x_0}(x) = \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi).$$

Inaczej: istnieje takie $\theta \in [0,1]$, że

$$R_{n,x_0}(x) = \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x-x_0)).$$

Twierdzenie 14.3 (Reszta w postaci całkowej)**.**

$$R_{n,x_0}(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t.$$

Jeżeli funkcja $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ jest klasy C^∞ (na (a,b)), to możemy rozważać następujący *szereg Taylora*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) \tag{31}$$

Z twierdzenia 14.1 wnioskujemy, że $f(x) \approx \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0)$. Zachodzi następujące

Twierdzenie 14.4. *Niech $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ będzie funkcją klasy C^∞ w przedziale (a,b).*

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0)$$

wedy i tylko wtedy, gdy ciąg reszt $\left(R_{n,x_0}(x)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ we wzorze 30 jest zbieżny do zera:

$$\lim_{n\to\infty} R_{n,x_0}(x) = 0.$$

Mówimy wtedy, że funkcja f jest analityczna.

Twierdzenie 14.5. *Dla dowolnej liczby $x \in \mathbb{R}$*

$$e^x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n!}.$$

Dowód. Łatwe ćwiczenie. □

Bywa, że liczbę e **definiuje** się jako sumę szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$. Korzystając z powyższego twierdzenia możemy udowodnić ważne

Twierdzenie 14.6. *Liczba e jest liczbą niewymierną.*

Dowód. Załóżmy nie wprost, że $e = \frac{p}{q}$ przy czym $p, q \in \mathbb{Z}$. Wiemy też, że $2 < \frac{p}{q} < 3$ oraz, że $\frac{p}{q} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$. Pomnóżmy tę równość obustronnie przez $q!$. Mamy

$$p(q-1)! = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q!}{n!} = \sum_{n=0}^{q} \frac{q!}{n!} + \sum_{n=q+1}^{\infty} \frac{q!}{n!}$$

$$= q! + \frac{q!}{1!} + \frac{q!}{2!} + \frac{q!}{3!} + \ldots + \frac{q!}{q!} + \left(\frac{1}{(q+1)} + \frac{1}{(q+1)(q+2)} + \frac{1}{(q+1)(q+2)(q+3)} + \ldots \right).$$

Zatem pierwsza część sumy ($\sum_{n=0}^{q} \frac{q!}{n!}$) jest oczywiście liczbą naturalną. Oszacujmy z góry drugą część sumy ($\sum_{n=q+1}^{\infty} \frac{q!}{n!}$):

$$\sum_{n=q+1}^{\infty} \frac{q!}{n!} = \frac{1}{(q+1)} + \frac{1}{(q+1)(q+2)} + \frac{1}{(q+1)(q+2)(q+3)} + \ldots = \sum_{n=q+1}^{\infty} \frac{1}{(q+1)^n} = \frac{1}{q} \leqslant 1.$$

Ale $p(q-1)!$ jest liczbą naturalną a z powyższego wynika, że liczba po prawej stronie równania nie może być naturalna. □

Ćwiczenie. Sprawdzić wzory

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \ x \in \mathbb{R}$$
$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}, \ x \in \mathbb{R}$$
$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n, \ -1 < x \leqslant 1$$

15 Ciągi funkcyjne

Definicja 15.1. Niech X będzie dowolnym zbiorem, (Y, σ) przestrzenią metryczną oraz $f_n \colon X \to Y, n \in \mathbb{N}$, $f \colon X \to Y$ dowolnymi funkcjami.
Mówimy, że ciąg $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jest *zbieżny punktowo* do f, jeżeli dla każdego $x \in X$

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x).$$

Piszemy wtedy

$$\lim_{n \to \infty} f_n = f, \ \ f_n \xrightarrow{n \to \infty} f \text{ lub } f_n \to f.$$

Definicja 15.2. Niech X będzie dowolnym zbiorem, (Y, σ) przestrzenią metrycznyną oraz $f_n \colon X \to Y, n \in \mathbb{N}$, $f \colon X \to Y$ dowolnymi funkcjami.
Mówimy, że ciąg $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jest *zbieżny jednostajnie* do f, jeżeli

$$\forall_{\varepsilon > 0} \exists_{N \in \mathbb{N}} \forall_{n \geqslant N} \forall_{x \in X.} \ \sigma(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$$

Piszemy wtedy $f_n \overset{X}{\rightrightarrows} f$.

Definicja 15.3. Niech (X, ρ) (Y, σ) będą przestrzeniami metrycznynymi oraz $f_n \colon X \to Y, n \in \mathbb{N}$, $f \colon X \to Y$ dowolnymi funkcjami.
Mówimy, że ciąg $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jest *prawie (lub niemal) zbieżny jednostajnie* do f, jeżeli dla dowolnego zbioru otwartego $U \subseteq A$:

$$f_n\big|_U \overset{U}{\rightrightarrows} f\big|_U$$

Zauważmy, że jeżeli zapiszemy definicję zbieżności punktowej zachodzącej na całym zbiorze X symbolicznie, za pomocą kwantyfikatorów:

$$\forall_{x \in X} \forall_{\varepsilon > 0} \exists_{N \in \mathbb{N}} \forall_{n \geqslant N} \ \sigma(f_n(x), f(x)) < \varepsilon,$$

to wystarczy przestawić pierwszy kwantyfikator w odpowiednie miejsce by uzyskać definicję zbieżności jednostajnej.

Twierdzenie 15.1. *Niech X będzie pewnym zbiorem niepustym, (Y, σ) przestrzenią metryczną, $f_n, f\colon X \to Y, n \in \mathbb{N}$.*
Ciąg $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest zbieżny jednostajnie do f wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in X} \sigma\left(f_n(x), f(x)\right) = 0. \tag{32}$$

Przykład. Niech $D \subseteq \mathbb{R}$ i $f_n\colon D \to \mathbb{R}$ będą dane wzorem

$$f_n(x) = \frac{x}{n},\ x \in D, n \in \mathbb{N}.$$

Oczywiście dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$ zachodzi $\frac{x}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$ zatem $f_n \to 0$, gdzie 0 rozumiemy jako **funkcję** stałą $x \mapsto 0$.
Jeżeli zatem $f_n \overset{D}{\rightrightarrows} f$ dla pewnej funkcji f, to musi być $f = 0$.

Rozważmy $D = \mathbb{R}$:

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n - 0| = \sup_{x\in\mathbb{R}} \left|\frac{x}{n}\right| = \infty$$

zatem nie może zachodzić równość

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n - 0| = 0.$$

Czyli $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nie jest zbieżny jednostajnie do 0 na całym zb. $\mathbb{R}$.

Twierdzenie 15.2. *Ciąg $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $f_n\colon X \to Y$ zbieżny jednostajnie spełnia następujący warunek Cauchy'ego:*

$$\forall_{\varepsilon>0}\exists_{N\in\mathbb{N}}\forall_{x\in X.}\ \sigma(f_n(x), f(x)) < \varepsilon.$$

Dowód. Oznaczmy przez f granicę ciągu $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Ustalmy $\varepsilon > 0$. Istnieje $n_0 \in \mathbb{N}$ takie, że dla $n \geqslant N$ mamy $\sigma\left(f_n(x), f(x)\right) < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Dla dowolnych $n, m \geqslant N$ mamy następujące oszacowanie:

$$\sigma(f_n(x), f_m(x)) \leqslant \sigma(f_n(x), f(x)) + \sigma(f(x), f_m(x)) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

□

Twierdzenie 15.3. *Niech (Y, σ) będzie przestrzenią metryczną zupełną. Wówczas $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $f_n\colon X \to Y$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia warunek Cauchy'ego.*

Dowód. Załóżmy, że $\forall_{\varepsilon>0}\exists_{N\in\mathbb{N}}\forall_{x\in X.}\ \sigma(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$. Wówczas $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x), x \in X$. Pokażemy, że zbieżność jest jednostajna. Weźmy dowolne $\varepsilon > 0$. Wówczas istnieje $N \in \mathbb{N}$ tak, że

$$\forall_{n,m\geqslant N}\sigma(f_n(x), f_m(x)) < \varepsilon, x \in X.$$

Ustalmy $n \in \mathbb{N}$. Mamy $\lim_{m\to\infty} \sigma(f_n(x), f_m(x)) = \sigma(f_n(x), f(x)) \leqslant \varepsilon, x \in X$. Czyli ciąg $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest zbieżny jednostajnie z dowolności wyboru ε i n. Z poprzedniego twierdzenia dowód wynika w drugą stronę. □

Twierdzenie 15.4. *Niech (X,ρ), (Y,σ) będą przestrzeniami metrycznymi, $\varnothing \neq A \subseteq X$, $f_n, f\colon A \to Y, n \in \mathbb{N}$.*
Jeżeli $f_n \overset{A}{\rightrightarrows} f$ oraz f_n, $n \in \mathbb{N}$ są funkcjami ciągłymi, to f jest funkcją ciągłą.

Dowód. Niech $x_0 \in A$. Ustalmy $\varepsilon > 0$. Istnieje $n_0 \in \mathbb{N}$ takie, że dla każdego $n \geqslant n_0$

$$\sigma(f_n(x), f(x)) < \frac{\varepsilon}{3}, x \in X.$$

W szczególności

$$(*)\ \sigma(f_{n_0}(x), f(x)) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Funkcja f_{n_0} jest ciągła zatem istnieje $\delta > 0$ taka, że

$$(**)\ \forall_{x\in A}\rho(x,x_0) < \delta \Rightarrow \sigma(f_{n_0}(x), f_{n_0}(x_0)) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Ustalmy $x \in A$ i załóżmy, że $\rho(x, x_0) < \delta$. Obliczamy:

$$\sigma(f(x), f(x_0)) \leqslant \sigma(f(x), f_{n_0}(x)) + \sigma(f_{n_0}(x), f_{n_0}(x_0)) + \sigma(f_{n_0}(x_0), f(x_0)) <$$
$$< \frac{\varepsilon}{3} + \underset{\text{(z (*))}}{\frac{\varepsilon}{3}} + \underset{\text{(z (**))}}{\frac{\varepsilon}{3}} = \varepsilon.$$

□

Twierdzenie 15.5. *Niech (X,ρ), (Y,σ) będą przestrzeniami metrycznymi, $\varnothing \neq A \subseteq X$, $f_n, f\colon A \to Y, n \in \mathbb{N}$.*
Jeżeli $f_n, n \in \mathbb{N}$ są ciągłe oraz ciąg $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest prawie jednostajnie zbieżny do f, to f jest ciągła.

Zatem, jeżeli znajdziemy granicę punktową ciągu funkcji ciągłych, nim podejmiemy się sprawdzania jego zbieżności jednostajnej, warto zwrócić uwagę, czy sama granica jest funkcją ciągłą. Jeśli nie, to ciąg nie jest zbieżny jednostajnie i sprawa jest rozstrzygnięta. Jednakże uwaga: twierdznie **nie** zachodzi w drugą stronę.

Przykład. TODO

Poniższy Lemat Diniego może być w oczywisty sposób użyteczny, do określania zbieżności jednostajnej niektórych ciągów funkcyjncyh, ale jest też wykorzystywany dla przeniesienia niektórych twierdzeń dotyczących całkowania ciągów funkcyjnych (do których zaraz przejdziemy) na całki niewłaściwe.

Twierdzenie 15.6 (Lemat Diniego). *Jeśli ciąg $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ funkcji $f_n\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ ciągłych na przedziale $[a,b]$ jest niemalejący albo nierosnący i zbieżny punktowo do funkcji ciągłej $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, to jest on zbieżny jednostajnie do funkcji f.*

Dowód. Weźmy ciąg $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niemalejący.
Ustalmy dowolny $\varepsilon > 0$ i rozważmy rodzinę zbiorów $A_n\colon n \in \mathbb{N}$

$$A_n = \{x \in [a,b]\colon f(x) - f_n(x) < \varepsilon\}.$$

Ponieważ $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ dla każdego $x \in [a,b]$, to

$$[a,b] = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Pokażemy, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ istnieje taki zbiór otwarty $U_n \subseteq \mathbb{R}$, że $U_n \cap [a,b] = A_n$. Wprowadźmy funkcję pomocniczą $g(x)\colon = f(x) - f_n(x)$. Funkcja g jest oczywiście ciągła. Dla $x \in A_n$ mamy więc $\varepsilon - g(x) > 0$. Z definicji Cauchy'ego ciągłości funkcji wynika, że istnieje taka liczba $\delta_x > 0$, że dla każdego $y \in (x - \delta_x, x + \delta_x) \cap [a,b]$ mamy

$$|g(y) - g(x)| < \varepsilon - g(x).$$

W szczególności $g(y) - g(x) < \varepsilon - g(x)$, zatem $g(y) < \varepsilon$. Przyjmijmy

$$U_n = \bigcup \{(x - \delta_x,\ x + \delta_x)\colon x \in A_n\}$$

Zbiory U_n są oczywiście otwarte, jako sumy zbiorów otwartych, a z definicji funkcji g dostajemy, że $f(y) - f_n(y) < \varepsilon$ dla każdego $y \in U_n \cap [a,b]$. Stąd $U_n \cap [a,b] \subseteq A_n$. Inkluzja przeciwna jest oczywista.

$$[a,b] = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} (U_n \cap [a,b]) \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n.$$

Przedział $[a,b]$ jest zwarty, więc istnieje takie $n_0 \in \mathbb{N}$, że $[a,b] \subseteq U_1 \cup U_2 \cup \ldots \cup U_{n_0}$. Dalej, $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_{n_0} = [a,b] \cap (U_1 \cup U_2 \cup \ldots \cup U_{n_0}) = [a,b]$. Zauważmy, że $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_{n_0} = A_{n_0}$. Wynika to stąd, że $A_n \subseteq A_{n_0}$ dla $n \leqslant n_0$. Rzeczywiście - zauważmy, że skoro dla każdego $x \in [a,b]$ zachodzi $f_{n+1}(x) \geqslant f_n(x)$, to z własności granic otrzymujemy, że $f(x) \geqslant f_n(x)$. Zatem dla każdego $x \in A$

$$0 \leqslant f(x) - f_{n+1}(x) \leqslant f(x) - f_n(x) < \varepsilon.$$

Stąd $A_n \subseteq A_{n+1}$. Tak więc $[a,b] = A_n, n \geqslant n_0$. Z definicji zbiorów A_n mamy, że jeśli $n \geqslant n_0$, to $|f(y) - f_n(y)| = f(y) - f_n(y) < \varepsilon$ dla każdego $y \in [a,b]$, a więc ciąg $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest jednostajnie zbieżny do funkcji f, co kończy dowód. Rozważając ciąg $(-f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dostaniemy dowód, że twierdzenie zachodzi dla ciągu nierosnącego. $\square$

Przestrzeń funkcji ciągłych: Niech (X,d) będzie przestrzenią metryczną. Oznaczamy przez $\mathcal{C}(X)$ zbiór wszystkich funkcji ciągłych określonych na przestrzeni X o wartościach rzeczywistych:

$$\mathcal{C}(X) = \{f : \ f\colon X \to \mathbb{R} \text{ jest funkcją ciągłą.}\}.$$

Definicja 15.4. Niech $f \in \mathcal{C}(X)$. *Supremum normą* nazywamy wartość

$$||f||_\infty := \sup_{x\in X} |f(x)|.$$

Wówczas funkcja $\rho\colon \mathcal{C}(X) \times \mathcal{C}(X) \to \mathbb{R}$ dana wzorem $\rho(f,g) := ||f-g||_\infty,\ f,g \in \mathcal{C}(X)$ jest metryką:

Twierdzenie 15.7. *Przestrzeń $(\mathcal{C}(X),\rho)$ jest przestrzenią metryczną **zupełną**.*

Możemy teraz sformułować twierdzenie 15.1 w alternatywny sposób:

Twierdzenie 15.8. *Ciąg $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $(f_n\colon X \to \mathbb{R})$ jest zbieżny do $f\colon X \to \mathbb{R}$ w sensie metryki $d\colon X^2 \to \mathbb{R}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $f_n \overset{X}{\rightrightarrows} f$.*

15.1 Całkowanie i różniczkowanie ciągów funkcyjnych

Twierdzenie 15.9. *Niech $f_n\colon [a,b] \to \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$. Załóżmy, że*

- *f_n są różniczkowalne dla $n \in \mathbb{N}$,*
- *istnieje takie $\bar{x}$, że ciąg $(f_n(\bar{x}))_{n\in\mathbb{N}}$ jest zbieżny do pewnej funkcji $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$,*
- *ciąg $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ pochodnych jest jednostajnie zbieżny do pewnej funkcji $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$.*

Wówczas

(i) Ciąg $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest jednostajnie zbieżny do $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$,

(ii) funkcja f jest różniczkowalna,

(iii) $f' = g$.

Dowód. Ustalmy $\varepsilon > 0$. Istnieje takie $N \in \mathbb{N}$, że

$$|f_m(\bar{x}) - f_n(\bar{x})| < \frac{\varepsilon}{2},\ m, n \geqslant N$$

i równocześnie

$$\forall_{\substack{n,m \in \mathbb{N} \\ m,n \geqslant N}} |f'_m(x) - f'_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)},\ x \in (a, b).$$

Funkcja $f_n - f_m$ spełnia założenia twierdzenia Lagrange'a i stąd istnieje $\xi \in (\bar{x}, x)$ ($\bar{x}, x \in (a, b)$) takie, że

$$\frac{(f_n(x) - f_m(x)) - (f_n(\bar{x}) - f_m(\bar{x}))}{x - \bar{x}} = f'_n(\xi) - f'_m(\xi).$$

Ustalmy $n, m \geqslant n_0$, $x \in (a, b)$.

$$f_n(x) - f_m(x) = \left(f'_n(\xi) - f'_m(\xi)\right)(x - \bar{x}) + f_n(\bar{x}) - f_m(\bar{x}).$$

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f_m(x)| &\leqslant |f_n(\bar{x}) - f_m(\bar{x})| + \underbrace{|x - \bar{x}|}_{<(b-a)} |f'_n(\xi) - f'_m(\xi)| \leqslant \\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{2} + (b-a)\frac{\varepsilon}{2(b-a)} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Mamy, że ciąg $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jest jednostajnie zbieżny.

Ustalmy $x_0 \in (a, b)$. Zdefinujmy funkcję $\varphi_n \colon (a, b) \to \mathbb{R}$ następująco:

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} \frac{f_n(x) - f_n(x_0)}{x - x_0}, & x \neq x_0 \\ f'(x_0), & x = x_0. \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}, x \in (a, b).$$

Oraz funkcję $\varphi \colon (a, b) \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$, $\varphi(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

$$\varphi_n \text{ - ciągłe, } n \in \mathbb{N}.$$

Sprawdzimy, że $\varphi_n \rightrightarrows \varphi$. Ustalmy $\varepsilon > 0$. Wówczas, korzystając ponownie z tw. Lagrange'a, dla pewnego ξ mamy

$$|\varphi_n(x) - \varphi_m(x)| = \left| \frac{f_n(x) - f_n(x_0) - f_m(x) + f_m(x_0)}{x - x_0} \right| = |f'_n(\xi) - f'_m(\xi)|.$$

$(f'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jest jednostajnie zbieżny. Istnieje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, że

$$\forall_{\substack{n,m \in \mathbb{N} \\ n,m \geqslant n_0}} |f'_n(x) - f'_n(x)| < \varepsilon,\ x \in (a, b).$$

Ustalmy $n, m \geqslant n_0,\ x \in (a, b)$. Mamy

$$|\varphi_n(x) - \varphi_m(x)| = |f'_n(\xi) - f'_m(\xi)| < \varepsilon.$$

Zatem ciąg $(\varphi)_{n\in\mathbb{N}}$ jest jednostajnie zbieżny.

Pokażemy, że f jest różniczkowalna w x_0.

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \varphi(x) = \lim_{x\to x_0} \Big(\lim_{n\to\infty} \varphi_n(x)\Big) =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \Big(\lim_{x\to x_0} \varphi_n(x)\Big) = \lim_{n\to\infty} f'_n(x_0) = \varphi(x_0) = g.$$

Czyli $\Big(\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)\Big)' = (f(x))' = g(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f'_n(x) = f(x)$. □

Twierdzenie 15.10. *Załóżmy, że $f_n \colon [a, b] \to \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}$ są funkcjami całkowalnymi w sensie Riemanna. Jeżeli $f_n \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} f,\ f \colon [a, b] \to \mathbb{R}$, to*

(i) f jest całkowalna w sensie Riemanna,

(ii) zachodzi wzór

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

Dowód. Przyjmijmy $\varepsilon_n := \sup\limits_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)|$. Wówczas

$$f_n(x) - \varepsilon_n \leqslant f(x) \leqslant f_n(x) + \varepsilon_n,\ n \in \mathbb{N}.$$

Z definicji całki górnej i dolnej:

$$\underline{\int_a^b} (f_n(x) - \varepsilon_n)\,\mathrm{d}x \leqslant \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \overline{\int_a^b} (f_n(x) + \varepsilon_n)\,\mathrm{d}x. \tag{33}$$

Stąd otrzymamy, że

$$0 \leqslant \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x - \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 2\varepsilon_n(b - a).$$

Ponieważ $f_n \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} f$, to na mocy twierdzenia 15.1 $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$ a więc z twierdzenia o trzech ciągach całka górna i dolna funkcji są sobie równe. Korzystając z tej wiedzy, tym razem z równania 33 dostaniemy, że

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \varepsilon_n(b - a).$$

Stąd już przy $n \to \infty$ dostajemy, że $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim\limits_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x$. □

16 Szeregi funkcyjne

W tej części będziemy zakładać, że $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

Definicja 16.1. Niech $X \neq \varnothing$ będzie dowolnym zbiorem, $f_n\colon X \to \mathbb{K}$, $n \in \mathbb{N}$. *Ciąg sum częściowych* (S_n) zdefiniujemy jako

$$S_n(x) := f_0(x) + f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_{n-1}(x) + f_n(x).$$

Ciąg $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nazywamy *szeregiem funkcyjnym* i oznaczamy

$$\left(\sum_{k=0}^{n} f_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

zaś sumę $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ tego szeregu:

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n$$

przy czym podobnie jak w przypadku szeregów najczęściej utożsamiamy symbol sumy szeregu z oznaczeniem samego szeregu.

Mówimy, że szereg funkcyjny jest

- zbieżny punktowo, gdy odpowiedni ciąg $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest zbieżny punktowo;
- zbieżny jednostajnie, gdy ciąg $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest jednostajnie zbieżny;
- prawie (niemal) jednostajnie zbieżny, gdy ciąg $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest niemal jednostajnie zbieżny;

i nazywamy odpowiednio *szeregiem zbieżnym punktowo*, *szeregiem zbieżnym jednostajnie*, *szeregiem prawie (niemal) jednostajnie zbieżnym*.

Twierdzenie 16.1. *Jeżeli szereg funkcyjny jest jednostajnie zbieżny, to jest zbieżny punktowo. Jeżeli (X, ρ) jest przestrzenią metryczną to każdy szereg jednostajnie zbieżny jest prawie jednostajnie zbieżny a każdy szereg prawie jednostajnie zbieżny jest zbieżny punktowo.*

Twierdzenie 16.2. *Jeżeli (X, ρ) jest przestrzenią metryczną, $f_n\colon X \to \mathbb{K}, n \in \mathbb{N}$ są funkcjami ciągłymi a szereg $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ jest (prawie) jednostajnie zbieżny, to jego suma jest funkcją ciągłą.*

Dowód. (ćwiczenie) □

Z twierdzenia o całkowaniu ciągów funkcyjnych, wynika że jeżeli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ jest zbieżny jednostajnie do funkcji $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ na odp. przedziale, to

$$\int_a^b f = \int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n.$$

16.1 Kryteria zbieżności szeregów funkcyjnych

Twierdzenie 16.3 (Kryterium jednostajne Cauchy'ego dla szeregów funkcyjnych)**.** *Niech $X \neq \varnothing$, $f_n\colon X \to Y$, $n \in \mathbb{N}$.*
Wówczas szereg $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ jest zbieżny jednostajnie wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall_{\varepsilon>0}\exists_{N\in\mathbb{N}}\forall_{n,m\geqslant N}\forall_{x\in X}\left|\sum_{k=n+1}^{m} f_k(x)\right| < \varepsilon.$$

Dowód.

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n \text{ jednostajnie zbieżny.} \Leftrightarrow (S_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ jedn. zbieżny.} \Leftrightarrow$$
$$\forall_{\varepsilon>0}\exists_{N\in\mathbb{N}}\forall_{n,m\geqslant N}\forall_{x\in X} |S_m(x) - S_n(x)| < \varepsilon \Leftrightarrow$$
$$\forall_{\varepsilon>0}\exists_{N\in\mathbb{N}}\forall_{n,m\geqslant N}\forall_{x\in X}\left|\sum_{k=n+1}^{m} f_k(x)\right| < \varepsilon$$

□

Twierdzenie 16.4 (Kryterium Weierstrassa)**.** *Niech $X \neq \varnothing$, $f_n\colon X \to \mathbb{K}$, $n \in \mathbb{N}$. Jeżeli istnieje taki ciąg liczbowy $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ o wartościach dodatnich, że*

$$\forall_{x\in X}\forall_{n\in\mathbb{N}}|f_n(x)| \leqslant a_n;$$

oraz $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, to szereg funkcyjny $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ jest jednostajnie zbieżny.

Dowód.

Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, zatem dla ustalonego $\varepsilon > 0$ istnieje taki n_0, że dla każdych

$n, m \geqslant n_0$ oraz $m > n$ zachodzi

$$\sum_{k=n+1}^{m} a_n < \varepsilon.$$

Wykorzystamy kryterium jednostajne Cauchy'ego. Ustalmy $n, m \geqslant n_0$, $m > n$ oraz $x \in X$. Mamy

$$\left|\sum_{k=n+1}^{m} f_k(x)\right| \leqslant \sum_{k=n+1}^{m} |f_k(x)| \leqslant \sum_{k=n+1}^{m} a_n < \varepsilon.$$

□

Twierdzenie odwrotne nie jest prawdziwe.

Twierdzenie 16.5 (Kryterium Abela)**.** *Niech $X \neq \varnothing$, $A \subseteq X$ oraz $f_n \colon X \to Y, n \in \mathbb{N}$, $g_n \colon X \to Y, n \in \mathbb{N}$. Jeżeli szereg*

$$\sum_{n=1}^{\infty} g_n$$

jest zbieżny jednostajnie na zbiorze A, dla każdego $x \in A$ ciąg $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ jest monotoniczny oraz istnieje taka liczba M, że dla prawie wszystkich n zachodzi

$$\forall_{x\in A}\, |f_n(x)| \leqslant M,$$

to szereg funkcyjny

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n \cdot g_n$$

jest zbieżny na zbiorze A.

Zastosowanie szeregów funkcyjnych - przykład:

Twierdzenie 16.6. *Istnieje funkcja $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ciągła na $\mathbb{R}$ ale nie różniczkowalna w żadnym punkcie.*

Dowód. Zdefiniujmy funkcję $g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ następująco:

$$g(x) = \begin{cases} |x|, & x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \\ g(x+1), & \text{w pozost. przypadkach.} \end{cases}$$

Definiujemy ciąg $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$g_1(x) \colon = \frac{g(2x)}{2}, x \in \mathbb{R},$$

Wówczas: $|g_n(x)| \leqslant \frac{1}{2^n}, x \in \mathbb{R}$. Każda funkcja g_n jest ciągłą i okresowa - o okresie $\dfrac{1}{2^n}$. Zdeiniujmy funkcję f w następujący sposób:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g(2^n x)}{2^n}, x \in \mathbb{R}.$$

Z twierdzenia16.4 szereg $\sum\limits_{n=0}^{\infty} g_n$ jest jednostajnie zbieżny, gdyż zbieżny jest szereg $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{2^{n-1}}$. Z twierdzenie 16.2 funkcja f jest ciągła. Teraz chcemy uzasadnić, że funkcja f nie może być różniczkowalna w żadnym punkcie prz. $\mathbb{R}$. Weźmy dowolne $x \in \mathbb{R}$. Wówczas istnieje ciąg $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $\lim\limits_{n\to\infty} h_n = 0$, że

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{f(x+h_n) - f(x)}{h_n} \right| = +\infty,$$

czyli funkcja f nie jest różniczkowalna w x. $\square$

16.2 Własności szeregów funkcyjnych

16.3 Szeregi potęgowe

Definicja 16.2. Niech $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będzie ciągiem liczb zespolonych. Szereg funkcyjny

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

nazywamy szeregiem potęgowym o środku w punkcie x_0.

Najczęściej rozważamy szereg o środku w zerze - $x_0 = 0$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$.

Dla uproszczenia wykładu w dalszej części przyjmujemy, że $0^0 = 1$.

Definicja 16.3. Wartość

$$R = \sup \left\{ x \geqslant 0\colon \text{ szereg } \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|(x - x_0)^n \text{ jest zbieżny.} \right\}$$

nazywamy *promieniem zbieżności* szeregu potęgowego $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

Zatem jeśli R jest promieniem zbieżności szeregu potęgowego $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, to szereg ten jest zbieżny dla $|x| < R$, a dla $|x| > R$ jest rozbieżny. Np. dla szeregu geometrycznego $\sum\limits_{n=0}^{\infty} nx^n$ mamy oczywiście $R = 1$ i zwróćmy uwagę, że dla $x = 1$ albo $x = -1$ szereg geometryczny jest rozbieżny. Zbieżność w krańcach przedziału zbieżności, tj. zbieżność dla punktów $x = R$, $x = -R$ musimy sprawdzać oddzielnie (podstawić R, $-R$ pod x i zbadać uzyskany szereg).

Twierdzenie 16.7. *Jeżeli szereg* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ *jest zbieżny w pewnym punkcie* $x_0 \neq x_1 \in \mathbb{C}$*, to jest zbieżny prawie jednostajnie i bezwzględnie w kole*

$$K(x_0, |x_0 - x_1|) = \{x \in \mathbb{C} \colon |x - x_0| < |x_0 - x_1|\} .$$

Jeżeli szereg ten jest rozbieżny w pewnym punkcie x_2*, to jest on rozbieżny w zbiore* $\mathbb{C} \setminus \overline{K}(x_0, |x - x_0|)$.

Pokażemy, że jeżeli szereg $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ jest zbieżny w pewnym punkcie $x_0 \neq x_1 \in \mathbb{C}$, to jest zbieżny jednostajnie i bezwzględnie w kole $K(0, x_1) = \{x \in \mathbb{C} \colon |x| < x_1\}$. Z warunku koniecznego zbieżności szeregu wynika, że $a_n x^n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Ciąg ten jest zatem ograniczony, np. przez $M > 0$. Niech $x \in K(0, x_1)$, to

$$|a_n x^n| < |a_n| x_1^n = |a_n x^n| \cdot \frac{x_1^n}{|x|^n} \leqslant M \left(\frac{x_1}{|x|}\right)^n .$$

Przyjmując $q := x_1/|x|$ otrzymujemy szereg $\sum\limits_{n=0}^{\infty} Mq^n$ geometryczny, zbieżny, którego wyraz ogólny ograniczającza szereg $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ i na mocy kryterium Weierstrassa zbieżności szeregów funkcyjnych, szereg ten również jest zbieżny.

Twierdzenie 16.8 (Cauchy'ego-Hadamarda)**.** *Niech* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *będzie ciągiem liczb zespolonych oraz niech*

$$\lambda = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Wówczas promień zbieżności szeregu $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ *wynosi:*

- 0*, jeżeli* $\lambda = +\infty$*,*
- $+\infty$*, jeżeli* $\lambda = 0$*,*
- $\frac{1}{\lambda}$*, jeżeli* $\lambda \in (0, \infty)$*.*

Dowód. Zastosujemy kryterium Cauchy'ego zbieżności szeregów. Zgodnie z oznaczeniami w tezie twierdzenia

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n(x-x_0)^n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|(x-x_0)^n| \cdot |a_n|} = |x-x_0| \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = |x-x_0|\lambda.$$

Rozważmy trzy przypadki

1. $\lambda = 0$.
   W tym wypadku szereg jest zbieżny, dla każdego $x \in \mathbb{R}$. Rzeczywiście, dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$ mamy wówczas

   $$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n(x-x_0)^n|} = |x-x_0|\lambda = 0 < 1.$$

   Na mocy kryterium Cauchy'ego szereg $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ jest *bezwzględnie* rozbieżny.

2. $\lambda = +\infty$.
   W tym wypadku oczywiście szereg jest zbieżny tylko dla $x = x_0$. Jeśli $x \neq x_0$, to

   $$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n(x-x_0)^n|} = |x-x_0|\lambda = \infty.$$

   Na mocy kryterium Cauchy'ego szereg $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ jest rozbieżny.

3. $\lambda \in (0, +\infty)$.
   Mamy wówczas

   $$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n(x-x_0)^n|} = |x-x_0|\lambda < \infty.$$

   Na mocy kryterium Cauchy'ego wnioskujemy, że

   - szereg $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ jest *bezwzględnie* zbieżny, jeżeli $|x-x_0|\lambda < 1$, czyli kiedy

   $$|x-x_0| < \frac{1}{\lambda}$$

   - szereg $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ jest rozbieżny, jeżeli $|x-x_0|\lambda > 1$, czyli kiedy

   $$|x-x_0| > \frac{1}{\lambda}$$

   Czyli mamy, że szereg jest zbieżny, dla $x \in \left(x_0 - \frac{1}{\lambda}, x_0 + \frac{1}{\lambda}\right)$, natomiast **nie** wiemy jak szereg zachowuje się w krańcach przedziału (punktach $x = x_0 - \frac{1}{\lambda}$ i $x = x_0 + \frac{1}{\lambda}$)

$\square$

Uwaga. Oczywiście, możemy w powyższym twierdzeniu stosować również granicę $\lambda = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$. Patrz - wzór 29.

Przykład. Rozważmy szereg $\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} = 1 + x^2 + x^4 + \ldots$. Możemy określić ciąg $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ następująco:

$$a_n = \begin{cases} 1, & \text{gdy } n \text{ jest parzyste;} \\ 0, & \text{gdy } n \text{ jest nieparzyste.} \end{cases}$$

Wtedy

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Dalej, badamy podciągi ciągu $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[2k]{|a_{2k}|} = 1,$$

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[2k-1]{|a_{2k-1}|} = 0.$$

Zatem $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$, więc szereg jest zbieżny dla $|x| < 1$. $R = 1$. Można też było oczywiście zauważyć, że nasz szereg jest szeregiem geometrycznym o ilorazie równym x^2.

Twierdzenie 16.9. *Jeśli $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ jest szeregiem potęgowym o dodatnim promieniu zbieżności, to funkcja*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

jest ciągła w przedziale $(-R, R)$.

Różniczkowanie i całkowanie szeregów potęgowych:

Twierdzenie 16.10. *Niech $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będzie ciągiem rzeczywistym, oraz niech szereg*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, x \in \mathbb{R}$$

ma dodatni promień zbieżności R. Wówczas szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n$$

ma również promień zbieżności R, funkcja $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^{n-1}, x\in(-R,R)$ *jest różniczkowalna oraz*

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}.$$

Dowód. $\limsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|na_n|}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}\limsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\limsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=R$ - pr. zb. szeregu $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Z twierdzenia o różniczkowaniu ciągów funkcyjnych

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ jest prawie jednostajnie zbieżny.

(2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ jest zbieżny przynajmniej w jednym punkcie.

Z (1) i (2) f jest różniczkowalna i $\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)'=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(a_n x^n)'$. □

Szereg Taylora a szereg potęgowy

Niech $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, oraz $f(0)=a_0$. Zbadajmy kolejne pochodne funkcji f:

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}, f'(0)=a_1,$$

$$f''(x)=\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}, f''(0)=2a_2,$$

$$f'''(x)=\sum_{n=3}^{\infty} n(n-1)(n-2) a_n x^{n-3}, f'''(0)=6a_3$$

$$f^{(k)}(x)=\sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1) a_n x^{n-k}, f^{(k)}(0)=k!a_k$$

Zauważmy, że $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$. Ponadto widzimy, że f jest klasy C^{∞}. I oczywiście można uogólnić i pokazać, że również:

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.}$$

Widzimy, że powyższe wyrażenie, to znany nam szereg Taylora.

Twierdzenie 16.11 (O całkowaniu funkcji analitycznej)**.** *Funkcje analityczne posiadają funkcje pierwotne wewnątrz swojego obszaru zbieżności. W szczególności dla funkcji f:*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

funkcja

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$$

ma ten sam promień zbieżności co f.

Przykład. Ponownie obliczymy sumę szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$. Tym razem rozważając szereg potęgowy $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$.

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, \ |x| < 1$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = \left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2}, \ |x| < 1$$

$$\text{Zatem} \quad \sum_{n=1}^{\infty} n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} n x^n = \frac{x}{(1-x)^2}, \ \text{dla } |x| < 1$$

Podstawmy $x = \dfrac{1}{2}$. $|x| < 1$ i wtedy z powyższej równości mamy

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{1}{2}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} = \frac{\frac{1}{2}}{(1-\frac{1}{2})^2} = 2.$$

Przykład. Znajdziemy rozwinięcie funkcji $f(x) = \ln(1+x)$ w szereg potęgowy. Zauważmy, że $\ln(1+x) = \int \frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x$ (całka elementarna). Korzystając z wzoru na sumę szeregu geometrycznego obliczamy

$$\ln(1+x) = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t} = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1-(-t)} = \int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} (-t)^{n-1}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x (-1)^{n-1} t^{n-1}\,\mathrm{d}t =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} \quad \text{i jak widzimy, jest to szereg potęgowy.}$$

Przykład. Podobnie jak powyżej, korzystając z sumy $\sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$, $|x| < 1$ otrzymać możemy też, że:

$$\ln\frac{1}{1-x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}, \quad \text{dla } |x| < 1.$$

Przykład. Sumując dwa poprzednie wzory dostajemy, że

$$\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}, \quad \text{dla } |x| < 1.$$

Twierdzenie 16.12 (Abela)**.** *Załóżmy, że $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest ciągiem rzeczywistym. Jeżeli szereg potęgowy $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $x \in \mathbb{R}$ o dodatnim promieniu zbieżności R jest zbieżny w jednym z końców przedziału zbieżności, to suma szeregu jest w tym punkcie ciągła.*

Dowód. Pokażemy, że funkcja f jest ciągła w R, czyli $\lim\limits_{R-} f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n R^n$. Mamy przypadki

1. $R = 1$: Ustalmy $\varepsilon > 0$. Chcemy pokazać, że istnieje $\delta > 0$ takie iż

   $$f(x) - \sum_{n=0}^{\infty} a_n| < \varepsilon, \quad \text{dla } x > 1 - \delta.$$

   Obliczamy

   $$\sum_{k=0}^{n} a_k x^k = \sum_{k=0}^{n}(S_k - S_{k-1})x^k = \sum_{k=0}^{n} S_k x^k - \sum_{k=0}^{n} S_{k-1}x^k =$$
   $$= \sum_{k=0}^{n-1} S_k x^k - S_n x^n - \sum_{k=0}^{n-1} S_k x^{k+1} = \sum_{k=0}^{n-1} S_k(x^k - x^{k+1}) + S_n x^n =$$
   $$= (1-x)\sum_{k=0}^{n-1} S_k x^x + S_n x^n.$$

   Przy $n \to \infty$ dla $|x| < 1$ mamy $S_n x^n \to 0$ a stąd $x^n \to 0$, bo $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest ciągiem niemalejącym, ograniczonym. Mamy

   $$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = (1-x)\sum_{n=0}^{\infty} S_n x^n.$$

   $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$ czyli istnieje $n_0 \in \mathbb{N}$ takie, że

   $$(*)\ |S_n - S| < \frac{\varepsilon}{2},\ n \geqslant n_0 \tag{34}$$

Przeprowadzamy obliczenia dla $x \in [0,1)$:

$$|f(x) - S| = |\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - S| \overset{(?)}{=} \left|(1-x)\sum_{n=0}^{\infty} S_n x^n - (1-x)\sum_{n=0}^{\infty} S x^n\right| \leqslant (1-x)\sum_{n=0}^{\infty} |S_n - S| x^n =$$

$$= (1-x)\sum_{n=0}^{n_0-1} |S_n - S| x^n + \underbrace{(1-x)\sum_{n=n_0}^{\infty} \overbrace{|S_n - S|}^{<\frac{\varepsilon}{2} \text{ z } (*)} x^n}_{\leqslant (1-x)\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1} < \underbrace{(1-x)\sum_{n=0}^{n_0-1} |S_n - S| x^n}_{\substack{\text{Funkcja ograniczona} \\ \text{na } [0,1]}} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Zatem istnieje takie $\delta > 0$, że dla dowolnego x, jeżeli $1 - x < \delta$, to

$$(1-x)\sum_{n=0}^{n_0-1} |S_n - S| x^n < \frac{\varepsilon}{2}.$$

2. $R \neq 1$: Rozważmy funkcję $g\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ daną wzorem $g(t) = f(Rt), t \in [0,1]$.

$$g(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n t^n.$$

Oznaczmy $\lambda_f = \limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ i $\lambda_g = \limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n R^n|}$. Wówczas

$$\lambda_g = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n R^n|} = R \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = R \cdot \lambda_f = 1.$$

Promieniem zbieżności szeregu $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n R^n t^n$ jest 1 oraz g jest ciągła w 1. Ale $f(x) = g\left(\dfrac{x}{R}\right)$, $x \in (-R, R]$, czyli f jest ciągła w R.

$\square$

A Ciało liczb rzeczywistych

A.1 Konstrukcja Dedekinda

A.2 Konstrukcja poprzez ciągi Cauchy'ego

B Ciało liczb zespolonych

Twierdzenie (Zasadnicze twierdzenie algebry)**.** *Każdy wielomian zespolony stopnia $n > 0$ ma dokładnie n pierwiastków zespolonych $z_1, z_2, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$ a co za tym idzie daje się przedstawić w postaci $a(z - z_1) \cdot \cdots \cdot (z - z_n)$ dla pewn. $a \in \mathbb{C}$.*

C Elementy topologii

D Wprowadzenie do równań różniczkowych zwyczajnych

Definicja D.1. *Równaniem różniczkowym zwyczajnym rzędu n* nazywamy równanie postaci

$$F(t, y(t), y'(t), y''(t), \ldots, y^{(n)}(t)) = 0, \tag{35}$$

gdzie $F \colon D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^{n+2}$, dla pewnego $n \in \mathbb{N}$.

O równaniu 35 mówimy, że jest w postaci uwikłanej. Gdy równanie różniczkowe jest postaci

$$y^{(n)}(t) = f\left(t, y(t), y'(t), \ldots, y^{(n-1)}(t)\right),$$

to mówimy, że jest w *postaci normalnej.*

Definicja D.2. Funkcję y nazywamy *rozwiązaniem* w przedziale $I \subseteq \mathbb{R}$ równania różniczkowego 35, gdy

- y jest n-krotnie różniczkowalna;
- $(t, y(t), y'(t), y''(t), \ldots, y^{(n)}(t)) \in D$ dla każdego $t \in I$;
- $F(t, y(t), y'(t), y''(t), \ldots, y^{(n)}(t)) = 0$ dla każdego $t \in I$.

Definicja D.3. Rodzinę funkcji $y(t, C_1, C_2, \ldots, C_n)$, gdzie $(C_1, C_2, \ldots, C_n) \in \mathbb{R}^n$ (tj. funkcji zależących od n parametrów) nazywamy *rozwiązaniem ogólnym* albo *całką ogólną*, gdy dla każdego doboru parametrów funkcja $y(t, C_1, \ldots, C_n)$ jest rozwiązaniem równiania 35.

Uwaga (Interpretacja geometryczna). Niech $f\colon D \to \mathbb{R}$, , $D \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ oraz niech dane jest równanie różniczkowe postaci

$$y'(x) = f(x, y(x)).$$

Z każdym punktem $(x, y(x)) \in D$ możemy powiązać trójkę $(x, y(x), a)$, gdzie $a = f(x, y(x))$ określa tangens nachylenia (współczynnik kierunkowy) prostej przechodzącej przez punkt $(x, y(x))$ do osi OX. Każdą taką prostą nazywamy *kierunkiem* równania w punkcie $(x, y(x))$. *Polem kierunków* równania 35 nazywamy zbiór wszystkich kierunków równania dla $(x, y(x)) \in D$.

Jeśli y jest rozwiązaniem w I, to zbiór $\{(x, y(x), y'(x))\colon x \in I\}$ zawiera się w zbiorze $\{(x, y(x), a)\colon a = f(x, y(x)), (x, y(x)) \in D\}$

Definicja D.4. *Zagadnieniem Cauchy'ego* albo *zagadnieniem początkowym* nazywamy

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

dla pewn. y_0.

Lemat D.1 (Gronwalla)**.** *Niech* $u, g\colon [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ *będą funkcjami ciągłymi, spełniającymi nierówność*

$$u(t) \leqslant \delta + \int_a^t g(s)u(s)\,\mathrm{d}s, t \in [a,+\infty),$$

gdzie δ *jest nieujemną stałą. Wtedy*

$$u(t) \leqslant \delta \exp\left(\int_a^t g(s)\,\mathrm{d}s\right), t \in [a,+\infty).$$

Twierdzenie D.1 (Picarda-Lindelöfa)**.** *Rozważmy zagadnienie początkowe*

$$(*) \begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), \\ y(t_0) = s_0 \end{cases}$$

gdzie $t_0, y_0 \in \mathbb{R}$, $f\colon D \to \mathbb{R}, D \subseteq \mathbb{R}^2$, $(t_0, s_0) \in \mathbb{R}^2$.
Niech $\mathbf{P} = [t_0 - b, t_0 + b] \times [y_0 - b, y_0 + b]$, $a, b \in (0,+\infty)$. *Załóżmy, że* $f|_{\mathbf{P}}$ *jest ciągła oraz spełnia warunek Lipschitza ze stałą* L *względem drugiej zmiennej.*
Oznaczmy $M = \max\{|f(t,s)|\colon (t,s) \in \mathbf{P}\}$. *Niech*

$$0 < \delta < \min\left\{a, \frac{b}{M}, \frac{1}{L}\right\},$$

przy czym jeśli $M = 0$, *to przyjmujemy, że* $\frac{b}{M} = \infty$.
Wówczas istnieje dokładnie jedna funkcja $y\colon [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \to \mathbb{R}$, *będąca rozwiązaniem zagadnienia początkowego* $(*)$.

Twierdzenie D.2 (Peana)**.** *Niech* $f\colon [a,b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. *Jeżeli istnieje kula* $K(y_0, x_0) \subseteq \mathbb{R}$ *taka, że* $f|_{[a,b]\times K(y_0,x_0)}$ *jest ciągła, to istnieje* $\delta > 0$, *że zagadnienie Cauchy'ego*

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

ma przynajmniej jedno rozwiązanie w przedziale $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

Twierdzenie D.3 (Peana)**.** *Jeżeli funkcje* $x, y\colon [0,T] \to \mathbb{R}$ *są różniczkowalne i spełniają dla* $0 \leqslant t \leqslant T$ *warunki:*

$$x'(t) = f(t, x(t)),$$
$$y'(t) < f(t, y(t)),$$
$$y(0) \leqslant x(0),$$

to $y(t) \leqslant x(t)$ *dla* $0 \leqslant t \leqslant T$.

D.1 Najprostsze typy równań

Równania o zmiennych rozdzielonych:

Równania różniczkowe jednorodne:

D.2 Równania liniowe wyższych rzędów

D.2.1 Równania liniowe jednorodne

D.2.2 Równania liniowe niejednorodne

D.3 Równanie różniczkowe Bernoulliego

D.4 Równanie różniczkowe Clairauta

D.5 Układy równań liniowych

Przykład.

$$\begin{cases} x'(t) = -x(t) \\ y'(t) = x(t) + y(t) \end{cases}$$

Przykład. Rozwiązać układ równań:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 3x + 1, \; \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = x + y$$

Metoda d'Alemberta:

D.5.1 Metoda Eulera rozwiązywania jednorodnych układów równań różniczkowych

E Całka Riemanna-Stieltjesa

Definicja E.1. Niech $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ bedzie funkcją ograniczoną a $\mu\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ funkcją niemalejącą. Jeżeli dla dowolnego ciagu normalnego $(\pi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ przedziału $[a,b]$ oraz dowolnego ciągu punktów pośrednich $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i \in \{1,\ldots,n_k\}$ istnieje granica

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{n_k} f(\xi_i)\Delta\mu_i, \text{ gdzie } \Delta\mu_i := \mu(x_i) - \mu(x_{i-1}),$$

to granicę tę oznaczamy

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\mu(x)$$

i nazywamy całką ozaczoną Riemanna-Stieltjesa dla funkcji f w przedziale $[a,b]$.
Całka bywa też oznaczana

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}\mu \text{ lub } \int_a^b f(x)\mu(\mathrm{d}x)$$

przy czym drugiego oznaczenia autor nie stosuje. Będziemy też pisać, że funkcja f jest „całkowalna w sensie R-S” względem funkcji μ.

Całka Riemanna-Stieltjesa ma bardzo silny związek z całkowaniem całki Riemmana przez podstawienie.

Twierdzenie E.1. *Niech $\mu\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ będzie niemalejąca i różniczkowalna w $[a,b$ oraz $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ograniczoną. f jest całkowalna w sensie Riemanna-Stieltjesa na $[a,b]$ względem μ wtedy i tylko wtedy, gdy funkcja $f\mu'$ jest całkowalna w sensie **Riemanna** na przedziale $[a,b]$. Wtedy*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\mu(x) = \int_a^b f(x)\mu'(x)\,\mathrm{d}x.$$

Dowód. Wystarczy spojrzeć na postać sum całkowych i zastosować twierdzenie Lagrange'a o wartości średniej do funkcji μ'. □

Ciekawą postać przyjmie uogólnienie twierdzenia o zamianie zmiennych:

Twierdzenie E.2 (Zamiana zmiennych w całce Riemanna-Stieltjesa)**.** *Niech* $\varphi\colon [A,B] \overset{na}{\to} [a,b]$ *będzie funkcją rosnącą,* $\mu\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ *funkcją niemalejącą i* $f\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ *całkowalną w sensie R-S wzgl. funkcji* μ *na przedziale* $[a,b]$*. Określimy funkcje* $g,\nu\colon [A,B]\to\mathbb{R}$ *wzorami*

$$\nu(y) = \mu\left(\varphi(y)\right),\ g(y) = f\left(\varphi(y)\right).$$

Wówczas g *jest całokwalna w sensie R-S względem funkcji* ν *i*

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}\mu = \int_A^B g\,\mathrm{d}\nu$$

Czyli

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\mu(x) = \int\limits_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} g(t)\,\mathrm{d}\nu(t).$$

Całka Riemanna-Stieltjesa spełnia analogiczne do całki Riemanna własności:

Twierdzenie E.3. *Jeżeli* f,g *są funkcjami całkowalnymi w przedziale* $[a,b]$ *względem f.* μ *oraz* $f\leqslant g$*, to*

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}\mu \leqslant \int_a^b g\,\mathrm{d}\mu.$$

Twierdzenie E.4. *Jeżeli* f,g *są funkcjami całkowalnymi w przedziale* $[a,b]$ *względem f.* μ *a* $u,v\in\mathbb{R}$ *dowolnymi stałymi, to*

$$\int_a^b (u\cdot f + v\cdot g)(x)\,\mathrm{d}\mu(x) = u\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\mu(x) + v\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}\mu(x).$$

Twierdzenie E.5. *Jeżeli* $f\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ *jest funkcją całkowalną na* $[a,b]$ *w sensie Riemanna-Stieltjesa względem funkcji niemalejącej* $\mu\colon [a,b]\to\mathbb{R}$*, to*

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\mu(x)\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}\mu(x)$$

Twierdzenie E.6. *Jeżeli* $f\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ *jest funkcją całkowalną na* $[a,b]$ *w sensie Riemanna-Stieltjesa względem funkcji niemalejącej* $\mu\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ *oraz* $|f(x)|\leqslant M, x\in[a,b]$*, to*

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\mu(x)\right| \leqslant M\left(\mu(b)-\mu(a)\right)$$

Dowód. Będzie w przyszłości... □

Możemy łatwo określić dwie szerokie klasy funkcji całkowalnych w sensie R-S.

Twierdzenie E.7. *Jeżeli $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ jest funkcją monotoniczną a $\mu\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ funkcją niemalejącą i ciągłą, to f jest całkowalna w sensie Riemanna-Stieltjesa względem funkcji μ.*

Twierdzenie E.8. *Jeżeli $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ jest funkcją ciągłą na $[a,b]$ to jest całkowalna w sensie Riemanna-Stieltjesa względem dowolnej funkcji niemalejącej $\mu\colon [a,b] \to \mathbb{R}$.*

Definicja E.2 (Wahanie funkcji)**.** *Wahaniem funkcji $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$* na przedziale $[a,b]$ nazywamy wielkość

$$V_a^b(f) := \sup_{P \in \mathcal{P}[a,b]} \sum_{k=0}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)|.$$

Lemat E.1. *Każda funkcja o wahaniu skończonym daje się przedstawić w postaci różnicy dwóch funkcji niemalejących.*

Twierdzenie E.9. *Każda funkcja o wahaniu skończonym ma przeliczalnie wiele punktóœ nieciągłości.*

Twierdzenie E.10. *Dla dow. funkcji $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$:*

$$V_a^b(f) = \int_a^b \mathrm{d}f(x).$$

F Iloczyny nieskończone

Twierdzenie F.1. *Jeżeli iloczyn nieskończony $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, to $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$.*

Twierdzenie F.2. *Jeżeli $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest ciągiem liczb rzeczywistych z przedziału $(0,1)$, to następujące warunki są równoważne:*

1. *szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny,*
2. *iloczyn $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n)$ jest zbieżny,*
3. *iloczyn $\prod_{n=1}^{\infty} (1 - a_n)$ jest zbieżny.*

Literatura

[1] Walter Rudin, *Podstawy analizy matematycznej.*

[2] Witold Kołodziej, *Analiza matematyczna.*

[3] Kazimierz Kuratowski, *Rachunek różniczkowy i całkowy.*

[4] Marek Kordos, *Wykłady z historii matematyki.*

[5] Ryszard Rudnicki, *Wykłady z analizy matematycznej.*

[6] G.M. Fichtenholz, *Rachunek rózniczkowy i całkowy Tom 1.*

[7] G.M. Fichtenholz, *Rachunek rózniczkowy i całkowy Tom 2.*

[8] Krzysztof Maurin, *Analiza Część 1 Elementy.*

[9] Aleksander Błaszczyk, Sławomir Turek, *Teoria Mnogości.*

[10] Andrzej Białynicki-Birula, *Algebra.*

[11] I.N. Bronsztejn, H. Muhlig, G. Musiol, K.A. Siemiendiajew, *Nowoczesne kompendium matematyki.*

[12] L. Olsen, *A new proof of Darboux's theorem*, Amer. Math. Monthly 111 (2004).

[13] J. A. Oguntuase, *On an inequality of Gronwall*, J. Inequal. Pure and App. Math. 2 (2001).

[14] Bernard R. Gelbaum, John M. H. Olmsted, *Counterexamples in Analysis.*