Zbiór przyjaznych zadań z analizy matematycznej

Ziemowit Wójcicki

18 listopada 2020

1. Rozwiązać w liczbach rzeczywistych

$$x^5 - x^4 - x + 1 = 0$$

2. Podać dziedzinę, przeciwdziedzinę następujących funkcji oraz naszkicować ich wykresy

$$y = \sqrt{2x^2 + 5x - 3}$$

$$y = \sin(\arccos x)$$

3. Czy funkcja f określona na zbiorze liczb rzeczywistych dana wzorem

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x+1}{x-1} & \text{dla } x \neq 1, \\ 0 & \text{dla } x = 1, \end{cases}$$

jest funkcją róznowartościową? Czy jest funkcją na $\mathbb{R}$?

4. Zbadać parzystość funkcji $\operatorname{sinc}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (tzw. funkcji Bessela), danej wzorem

$$\operatorname{sinc}(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{dla } x \neq 0, \\ 1 & \text{dla } x = 0. \end{cases}$$

5. Zbadać parzystość funkcji

$$f(x) = \sin x \cdot \frac{4^x + 1}{1 - 4^x}$$

6. Narysować wykres funkcji $x \mapsto |\sin x| + |\cos x|$ i zbadać, czy jest parzysta bądź nieparzysta oraz czy jest okresowa - jeśli tak to wyznaczyć jej okres bazowy.

7. Udowodnić, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzi

$$\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{2n}{2n+1}$$

8. Udowodnić prawdziwość Tożsamości Abela

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i = \sum_{i=1}^{n-1} \left((a_i - a_{i+1}) \sum_{j=1}^{i} b_j \right) + a_n \sum_{i=1}^{n} b_i$$

9. Udowodnić, że jeżeli $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest funkcją addytywną (tzn. $f(x+y) = f(x) + f(y)$ dla dow. $x, y \in \mathbb{R}$), to

$$\forall_{n\in\mathbb{N}}\forall_{x_1,\ldots,x_n\in\mathbb{R}}.\ f\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)$$

10. Udowodnić, że

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},\ n \in \mathbb{N}$$

11. Udowodnić, że dla każdej liczby naturalnej n spełniona jest nierówność $n! \geqslant 2^{n-1}$.

12. Udowodnić, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$:

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2n-1)^2 = \frac{n(4n^2-1)}{3}.$$

13. Udowodnić, że

$$\frac{1}{n}\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) < \frac{1}{n\sqrt{n}},\ n \in \mathbb{N}$$

14. Udowodnić, że dla dowolnych liczby rzeczywistych a i b, $a \neq b$ oraz liczby naturalnej n zachodzi

$$a^n + a^{n-1}b + \ldots + ab^{n-1} + b^n = \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a-b}$$

15. Udowodnić, że dla dowolnej liczby rzeczywistej $x > -1$ i dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzi następująca *nierówność Bernoulliego*

$$(1+x)^n \geqslant 1 + nx$$

16. Udowodnić, że

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}} = \sqrt{n+1} - 1$$

17. Udowodnić, że $(1 + 2 + \ldots + n)^2 = 1^3 + 2^3 + \ldots + n^3$.

18. Udowodnić, że zbiór liczb naturalnych i zbiór liczb całkowitych są równoliczne.

19. Udowodnić, że zbiór $\mathbb{N}$ oraz zbiór

$$\left\{\frac{1}{2n-1} : n \in \mathbb{N}\right\}$$

są równoliczne.

20. Udowodnić, że zbiory $\left\{\frac{1}{n+1} : n \in \mathbb{N}\right\}$ i $\left\{\frac{1}{n+2} : n \in \mathbb{N}\right\} \cup \mathbb{N}$ są równoliczne.

21. Udowodnić, że jeżeli A jest zbiorem nieskończonym oraz S jest skończonym podzbiorem zbioru A, to zbiór dopełnienie zbioru S względem zbioru A jest zbiorem nieskończonym.

0.1 Ciągi

1. Pokazać, że następujące twierdzenia są równoważne

   Twierdzenie. *Każdy ograniczony z góry podzbiór zbioru liczb rzeczywistych ma kres górny.*

   Twierdzenie. *Każdy rosnący i ograniczony z góry ciąg liczb rzeczywistych jest zbieżny.*

2. Wyznaczyć kresy następujących zbiorów:

$$A = \left\{x \in \mathbb{R} : x^2 < 2\right\}$$

$$B = \left\{1 + \frac{(-1)^n}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$$

$$C = \left\{\frac{n+1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$$

$$D = \left\{\sqrt{2 - \frac{1}{n^3}} + \sqrt{2 + \frac{1}{n^3}} : n \in \mathbb{N}\right\}$$

3. Obliczyć następujące granice

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^4 + 2n^2 + 4}{3n^3 + n^2 + n + 1}$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^3 + \sqrt{2}n^2}{n^4 + 2}$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^3 + 7n + 4}{\sqrt{5}n^3 + n^2 + 3}$

(4) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{1}{3}\right)^n + 7^n + 13}$

(5) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^n + 4^n}{5^n + 3^n}$

(6) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{5 \cdot 2^n + 3 \cdot 7^n}$

(7) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{3 \cdot 7^n + \sin n}$

(8) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n \sin n!}{n^2 + 1}$

(9) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(2n+1)^3(3n+1)^3}{(6n^2 + 2n + 1)^4}$

(10) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{7n^2 - 4n + 3}{\sqrt{n^4 - 2n} + \sqrt[3]{n^2 + 1}}$

(11) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sin n}{n}$

(12) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sin n}{2n^2}$

(13) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sin 7n}{n}$

(14) $\lim\limits_{n\to\infty} (n-1)\sin\left(\dfrac{1}{n-1}\right)$

(15) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sin n}{3n}$

(16) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sin 3n}{4n}$

(17) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\tan 5n}{n}$

4. Udowodnić, że dla dowolnego ciągu $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} \leqslant \liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} \leqslant \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} \leqslant \limsup_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$$

5. Obliczyć

$$\lim_{n\to\infty} n(\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2-1})$$

6. Obliczyć

$$\lim_{n\to\infty} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{a}{n} \\ \frac{a}{n} & 1 \end{bmatrix}^n$$

gdzie $a \in \mathbb{R}$.

7. Udowodnić, że

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right) = e^a$$

8. Obliczyć

(*a*) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 - \dfrac{1}{4-3n^2}\right)^{9n^2+37n}$

(*b*) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{4-3n^2}\right)^{7n+2}$

(*c*) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{2+n^2}{n^2}\right)^{n^2}$

(*d*) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n^2}{n^2+1}\right)^{n}$

(*e*) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(n \cdot \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)\right)$

9. Obliczyć

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$$

10. Obliczyć

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n - \arctan n}{n + \arctan n}\right)^{\ln 2^n}$$

11. Udowodnić, że jeśli ciąg liczb dodatnich jest *podaddytywny*, tzn. taki że $a_{n+m} \leqslant a_n + a_m$ dla $n, m = 1, 2, 3, \ldots$ to ciąg $\frac{a_n}{n}$ jest zbieżny.

Rozwiązanie:

Niech $s = \inf_{m\in\mathbb{N}} \dfrac{a_m}{m}$. Wykażemy, że $\lim_{m\to\infty} \dfrac{a_m}{m} = s$.

Najpierw łatwo indukcyjnie pokazujemy, że dla dowolnych $n, k \in \mathbb{N}$ jest $a_{k\cdot n} \leqslant k \cdot a_n$.

Ustalmy $\varepsilon > 0$. Oczywiście dla każdego $n \in \mathbb{N}$ mamy $\frac{a_m}{m} \geqslant s$, zatem pozostaje wykazać, że od pewnego miejsca jest $\frac{a_m}{m} \leqslant s+\varepsilon$. Weźmy więc $n \in \mathbb{N}$ spełniające nierówność $\frac{a_n}{n} \leqslant s+\varepsilon$ i niech $A = \max\{a_r : 0 \leqslant r < n\}$ (przy czym przyjmujemy, że $a_0 = 0$). Dowolne $m \in \mathbb{N}$ możemy przedstawić w postaci $m = k\cdot n+r$, gdzie $k \in \mathbb{N} i 0 \leqslant r < n$, a następnie oszacować:
$\frac{a_m}{m} = \frac{a_{k\cdot n+r}}{k\cdot n+r} \leqslant \frac{k\cdot a_n+a_r}{k\cdot n} = \frac{a_n}{n} + \frac{a_r}{k\cdot n} \leqslant s + \varepsilon + \frac{A}{k\cdot n}$.
Jeśli m jest dostatecznie duże, to składnik $\frac{A}{k\cdot n}$ staje się mniejszy od ε, a wtedy: $\frac{a_m}{m} \leqslant s+2\varepsilon$, co kończy dowód.

12. Udowodnić, że jeżeli $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest ciągiem *podmultiplikatywnym* (tzn. $\forall_{m,n\in\mathbb{N}}.\ a_{n+m} \leqslant a_n \cdot a_m$) oraz $a_n \geqslant 0, a_n \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$, to ciąg $(\sqrt[n]{a_n})_{n\in\mathbb{N}}$ jest zbieżny oraz

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \inf\{\sqrt[n]{a_n} : n \in \mathbb{N}\}.$$

13. Ustalmy dowolny zbiór $A \subset \mathbb{R}$ i liczbę rzeczywistą G. Udowodnić, że jeżeli dla każdego $a \in A$ zachodzi $a \leqslant G$ oraz istnieje taki ciąg $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wyrazów zbioru A, że $\lim_{n\to\infty} a_n = G$, to $G = \sup A$.
Sformułować i udowodnić analogiczne twierdzenie dla kresu dolnego.

14. Wyznaczyć kresy następujących zbiorów:

$$M = \left\{\frac{n^2+2n-3}{4n^3} : n \in \mathbb{N}\right\}$$
$$N = \left\{\frac{7n^2+3n-12}{2n^2+3} : n \in \mathbb{N}\right\}$$
$$K = \left\{\frac{1}{x}\sin x : x > 0\right\}$$
$$S = \{x \sin x : x \geqslant 0\}$$
$$F = \{\sqrt[n]{n} : n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}\}$$
$$G = \left\{\frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N}\right\}$$

Rozwiązanie: Zbiory M i N wymagają jedynie umiejętności obliczania prostych granic oraz twierdzenia z poprzedniego zadania. Dla zbioru K podobnie: potrzebujemy dodatkowo wzorów $\lim_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$ oraz $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, liczymy granice funkcji i uogólniamy wnioski z poprzedniego zadania na funkcje (def. ciągowa Heinego granicy funkcji).
Zbiór F: $\sup\{\sqrt[n]{n} : n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}\} = \sqrt[3]{3}$, $\inf\{\sqrt[n]{n} : n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}\} = 1$.
Wyznaczymy kresy zbioru G. Najmniejszą liczbą naturalną jest 0 oraz $G \subseteq \mathbb{N}$. Zauważmy, że dla $m = 0$ i $n > 0$ mamy $0 \in G$ zatem $0 = \inf G$.
Dla dowolnych $m, n \in \mathbb{N}$ jeśli $m < n$, to $\frac{m}{n} < 1$. Jedynka jest zatem *ograniczeniem* górnym zbioru A. Ustalamy dowolne $\varepsilon > 0$ i szukamy takich $m, n \in G$, żeby było $\frac{m}{n} > 1 - \varepsilon$. Ponownie możemy wziąć dowolne $n \in \mathbb{N}$ i tak dobrać m, że $m > n \cdot (1-\varepsilon)$. Starczy przyjąć $m = \lfloor n(1-\varepsilon)\rfloor + 1$ (jest to czywiście pewna liczba naturalna, spełniająca porządane włanośći[1]).

[1] W ogólności $\lceil x\rceil - 1 < x < \lfloor x+1\rfloor$ dla $x \in \mathbb{R}$ (ćwiczenie)

15. Obliczyć granicę ciągu $\left(\frac{n^2+2}{(3n+2)^2}, \frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

16. Obliczyć granice ciągów danych następującymi równaniami rekurencyjnymi

(a) $\begin{cases} x_0 = 0 \\ x_1 = 1 \\ x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + x_{n-1}) \text{ dla } n > 1 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} x_0 = 0 \\ x_1 = 1 \\ x_{n+1} = \frac{2}{3}x_n + \frac{1}{3}x_{n-1} \text{ dla } n > 1 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x_1 = 4 \\ x_{n+1} = \frac{2}{3}x_n + 2 \text{ dla } n > 1 \end{cases}$

17. Zbadać zbieżność ciągu zadanego równaniem rekurencyjnym

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = a_n + \frac{1}{2a_n} \qquad \text{dla } n > 1 \end{cases}$$

18. Jaka jest wartość wyrażenia $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots}}}$?

19. Obliczyć następujące granice, jeśli istnieją. W przeciwnym wypadku podać granice jednostronne

(a) $\lim_{x\to -2} \frac{x+2}{x^3+4x^2+4x}$

(b) $\lim_{x\to 3} \frac{x^3-3x^2+x-3}{x-3}$

(c) $\lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x}$

(d) $\lim_{x\to -1} \frac{x^2-1}{x+1}$

(e) $\lim_{x\to -1} \frac{x^2-1}{|x+1|}$

(f) $\lim_{x\to 2} \frac{2x^2-3x-2}{x^2-x-2}$

(g) $\lim_{x\to 1} \frac{-3x^2+x+2}{1-x}$

(h) $\lim_{x\to \infty} \frac{5x^3-2x+7}{2x^3+7x^2-x+1}$

(i) $\lim_{x\to\infty} (\sqrt[3]{x^3+4x^2} - x)$

20. Udowodnić następujące

    Twierdzenie (Stolza)**.** *Jeżeli $x_n \to \infty$, $y_n \to \infty$ oraz istnieje $N \in \mathbb{N}$ tak, że $y_{n+1} > y_n, n > N$, to*

    $$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}},$$

    o ile granica po prawej stronie istnieje (skończona lub nie).

21. Pokazać, że $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1^p+2^p+\ldots+n^p}{n^{p+1}} = \frac{1}{p+1}$, $p \in \mathbb{N}$.

22. Udowodnić, że

    $$\text{jeżeli } \lim_{n\to\infty} a_n = g, \text{ to } \lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} = g.$$

23. Udowodnić, że

    $$\text{jeżeli dla każdego } n \in \mathbb{N}, a_n \geqslant 0 \text{ oraz } \lim_{n\to\infty} a_n = g, \text{ to } \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_n} = g,$$

1 Funkcje jednej zmiennej i funkcje wektorowe

1.1 Ciągłość, ciągłość jednostajna

1. Udowodnić, że każda funkcja spełniająca warunek Lipschitza jest jednostajnie ciągła.

2. Udowodnić, że następujące funkcje są ciągłe

    (a) $w\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ w(x) = x^n + x^{n-1} + \cdots + x^2 + x^1 + 1$

    (b) $\sin\colon \mathbb{R} \to [-1, 1]$

3. Czy funkcja Bessela z zadania 4 jest ciągła w zerze?

4. Zbadać ciągłość funkcji $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ określonej następująco

    $$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{\sin^2 x}}{x} & \text{dla } x \neq 0; \\ 1 & \text{dla } x = 0. \end{cases}$$

5. Zbadać ciągłość funkcji danej równaniem $y = \operatorname{sgn} \sin \pi x$.

6. Zbadać, że następujące funkcje mają własnośc Darboux ale nie są ciągłe

    (a) $f\colon [-1, 1] \to [1, 1]$ dana wzorem

    $$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & \text{dla } x \neq 0; \\ 0 & \text{dla } x = 0. \end{cases}$$

    (b) $g\colon [-1, 1] \to \mathbb{R}$ dana wzorem

    $$g(x) = \begin{cases} -x, & \text{dla } x \in [-1, 0], \\ x + 1 & \text{dla } x \in (0, 1]. \end{cases}$$

7. Udowodnić, że równanie $e^x - x^3 = 0$ ma co najmniej jedno rozwiązanie w przedziale $[-1, 1]$

8. Udowodnić, że równanie $e^x \sin x - 2x = 0$ ma co najmniej jedno rozwiązanie w przedziale $[\frac{\pi}{2}, \pi]$

9. Udowodnić, że funkcja dirichleta $\delta\colon \mathbb{R} \to \{1, 0\}$ dana wzorem

$$\delta(x) = \begin{cases} 1 \text{ dla } x \in \mathbb{Q}; \\ 0 \text{ dla } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

   nie jest ciągła w żadnym punkcie swojej dziedziny.

10. Udowodnić, że funkcja $D\colon \mathbb{R} \to \{1, 0\}$

$$D(x) = x\delta(x)$$

   jest ciągła w zerze i tylko w zerze.

11. Zbadać ciągłość funkcji danej równaniem $f(x) = x^2 - x\lfloor x \rfloor$.

12. Czy funkcja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ określona następująco

$$f(x) = \frac{x}{1 + |x|}$$

   jest jednostajnie ciągła na $\mathbb{R}$?

13. Czy istnieje funkcja $f\colon [a, b] \to \{a, b\}$ ciągła i taka, że $f(a) = a$ oraz $f(b) = b$.

1.2 Różniczkowanie, ciągłość i różniczkowalność

1. Obliczyć pochodne funkcji danych następującymi wyrażeniami

   $(a)\ y = \ln x \cdot \tan x$

   $(b)\ y = \dfrac{\sin x}{\ln x}$

   $(c)\ y = \dfrac{\ln x}{\tan x}$

   $(d)\ y = \ln(\tan x)$

   $(e)\ y = \tan(\ln x)$

   $(f)\ y = \tan(x \ln x)$

   $(g)\ y = \ln(x \tan x)$

   $(h)\ y = \ln(\sin^3 e^x)$

   $(i)\ y = x^x$

   $(j)\ y = e^x \ln x$

   $(k)\ y = \sin e^x$

   $(l)\ y = \arcsin(x - x^2)$

   $(m)\ y = \dfrac{x}{x + 3}$

   $(n)\ y = \dfrac{\cos x}{\ln x}$

$(o)\ y = \sqrt[3]{\dfrac{1+x^3}{1-x^3}}$

$(p)\ y = \sin\cos x$

$(r)\ y = \dfrac{x\ln x}{\cos x}$

2. Zbadać przebieg zmienności funkcji $x \mapsto \dfrac{x}{\ln x}$.

3. Niech f będzie funkcją daną wzorem:

$$f(x) = \begin{cases} e^x, & \text{gdy } x \leqslant 0; \\ 1+x, & \text{gdy } x > 0. \end{cases}$$

Wyznaczyć dziedzinę i zbiór wartości funkcji f oraz udowodnić, że jest ciągła i różniczkowalna w całej dziedzinie.

4. Obliczyć pochodne (dla argumentów, dla których istnieją) dla następujących funkcji oraz wyznaczyć ich dziedziny i narysować ich wykresy

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = |x|$$

$$g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = |\sin x|$$

5. Obliczyć pochodną funkcji $x \mapsto |\log x|$

6. Korzystając z reguły de l'Hospitala obliczyć następujące granice

$(a)\ \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - \arctan x}{x^3}$

$(b)\ \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{3x^2 - 12x + 12}{x-2}$

$(c)\ \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^4 + 3x^2 - 4}{x+1}$

$(d)\ \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^4}{e^{x^2}}$

$(e)\ \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - e^{-x}}{x}$

$(f)\ \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x}$

7. (a) Udowodnić, że dla dowolnych ciągów $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$:
jeśli $a_n \to 0,\ b_n \to \infty$, to

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$$

(b) Czy do granicy $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{\ln x}$ trzeba (i można?) zastosować regułę de l'Hospitala?

8. Narysować wykresy funkcji

$$
\begin{aligned}
w(x) &= x^3 - 9x^2 + 27x + 3 \\
f(x) &= \frac{x^2+1}{(x+1)^2} \\
g(x) &= x^3 \ln(x) \\
h(x) &= \frac{2x}{x+1} + x^2
\end{aligned}
$$

9. Zbadać wszystkie asymptoty funkcji $f(x) = xe^{\frac{x}{x+1}}$

10. Zbadać przebieg zmienności i naszkicować wykresy następujących funkcji

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{x}{x^2-1} \\
g(x) &= \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} \\
h(x) &= \frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}} \\
k(x) &= \frac{2x^2}{x-3} \\
p(x) &= x\sqrt{4x-x^2} \\
s(x) &= \sin^2 x \\
t(x) &= \frac{x^4}{2-x^3}
\end{aligned}
$$

11. Obliczyć

$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sin x \cdot \ln x)$$

12. Obliczyć

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} x^{x^x}$$

13. Zbadać ciągłość funkcji w punkcie $x = 1$ dla funkcji zdefiniowanej w następujący sposób

$$f(x) = \begin{cases} -(x-1)^2 & \text{dla } x \in (-\infty, 1] \\ \sqrt{-x^2+6x-8} & \text{dla } x \in [2, 4] \end{cases}$$

14. Wykazać, że każde ciągłe odzworowanie f przedziału $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ w siebie ma co najmniej jeden punkt stały, tj. punkt $x \in [a, b]$ taki, że $f(x) = x$.

15. Udowodnić następujące

Twierdzenie (Rolle'a)**.** *Niech funkcja $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą w przedziale $[a, b]$, różniczkowalną w przedziale (a, b). Jeżeli $f(a) = f(b)$, to istnieje taki punkt $\xi \in (a, b)$, że $f(\xi) = 0$.*

16. Zastosować twierdzenie Rolle'a do funkcji $f(x) = 2x^2 - 8x + 12$.

17. Wykazać, że równanie $x^5 + 10x + 3 = 0$ ma dokładnie jeden pierwiastek rzeczywisty.

18. Znaleźć

$$\sup_{x\in[1,4]} \left\{x^3 - 6x^2 + 11x - 6 \colon x \in \mathbb{R}\right\}$$

19. Jakiej wielkości kwadraty trzeba wyciąć z prostokątnego arkusza kartonu o wymiarach 30×24, aby pojemność otrzymanego po sklejeniu pudełka była największa?

20. Udowodnić, że

$$\frac{b-a}{b} \leqslant \ln\frac{b}{a} \leqslant \frac{b-a}{a}$$

21. Udowodnić, że

$$\frac{x}{1+x} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$$

22. Równanie $e^x = x + 1$ ma oczywiste rozwiązanie $x = 0$. Wykazać, że jest to jedyne rozwiązanie.

23. Udowodnić, że jeżeli $f, g \colon [a, b] \to \mathbb{R}$ są ciągłe na przedziale $[a, b]$, różniczkowalne we wnętrzu tego przedziału oraz $f(a) = f(g)$, $f(b) = g(a)$, to istnieje taki punkt $c \in (a, b)$, że $f'(c) = -g'(c)$.

24. Sprawdzić, korzystając z twierdzenia Darboux, czy równanie $x \ln x = 2$ ma rozwiązanie.

25. Dla jakich wartości parametru a funkcja f dana wzorem

$$f(x) = \begin{cases} \left(\sin\frac{1}{x}\right) \cdot (\sqrt{x^2+1} - 1)^a, & \text{dla } x \neq 0, \\ 0, & \text{dla } x = 0. \end{cases}$$

jest różniczkowalna? A ogólniej: klasy C^n?

1.3 Zadania różne I

1. Niech $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą, okresową i różną od stałej a $g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcją ciągłą. Wykazać, że istnieje $x_0 \in \mathbb{R}$ takie, że $f(g(x_0)) = f(x_0)$.

2. Udowodnić, że jeżeli funkcja f jest ciągła na półprostej $[a, \infty)$ i ma skończoną granicę $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ to funkcja ta jest ograniczona na $[a, \infty)$.

3. Udowodnić, że jeżeli $f \colon (a, b) \to \mathbb{R}$ jest funkcją różniczkowalną, to f spełnia warunek Lipschitza ze stałą Lipschitza L wtedy i tylko wtedy, gdy jej pochodna jest ograniczona przez L.

4. Udowodnić, że jeżeli $f \colon [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ jest ciągła i ma skończoną granicę $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$, to jest jednostajnie ciągła.

Rozwiązanie: Przyjmijmy, że $\lim_{x\to\infty} f(x) = g \in \mathbb{R}$. Ustalmy dowolny $\varepsilon > 0$. Istnieje $A > 0$ takie, że

$$x \geqslant A \Rightarrow |f(x) - g| < \frac{\varepsilon}{2},\ x \in [0, +\infty).$$

Funkcja f jest ciągła w $[0, +\infty)$. więc istnieje $\lambda_1 > 0$ takie, że

$$\forall_{x\in[0,+\infty)}.\ |x - A| < \lambda_1 \Rightarrow |f(x) - f(A)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Dla $x, y \in [0, A]$ funkcja $f_{[0,A]}$ jest jednostajnie ciągła, jako f. ciągła określona na zbiorze zwartym. Zatem istnieje takie $\lambda_2 > 0$, że

$$\forall_{0\leqslant x,y\leqslant A}.\ |x - y| < \lambda_2 \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Przyjmijmy $\delta = \min\{\lambda_1, \lambda_2\}$. Wtedy jeżeli $|x - y| < \delta$, to:

i) dla $x, y \leqslant A$: $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$ (gdyż $|x - y| < \delta \leqslant \lambda_2$).

ii) dla $x, y \geqslant A$: $|f(x) - f(y)| \leqslant |f(x) - g| + |g - f(y)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

iii) dla $x < A$ i $y \geqslant A$: mamy następujące oszacowania: $|x - A| < |x - y|$ oraz $|y - A| < |x-y|$ stąd $|x-A| < \delta \leqslant \lambda_1$ i podobnie $|y-A| < \lambda_1$. Z określenia λ_1 oraz z nierówności trójkąta szacujemy: $|f(x) - f(y)| \leqslant |f(x) - f(A)| + |f(A) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

Pokazaliśmy, że $\forall_{\varepsilon>0}\exists_{\delta>0}\forall_{x,y\in[0,+\infty)}.|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$, czyli f jest jednostajnie ciągła.

5. Udowodnić, że jeżeli funkcja f jest monotoniczna na przedziale (a, b) i ma w nim własność Darboux, to jest ciągła na (a, b).

6. Funkcję $f\colon (a, b) \to \mathbb{R}$ nazywamy *wypukłą*, gdy dla dowolnych $x, y \in (a, b)$ i $\lambda \in (0, 1)$ zachodzi $f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leqslant \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$. Uzasadnić, że każda funkcja wypukła jest ciągła.

7. Metodą kolejnych przybliżeń rozwiązać równania:

   (a) $2x + \sin x = 1$,

   (b) $x^3 + 5x^2 - 15x - 7 = 0$ dla $2,5 < x < 4$.

8. Niech $f(x) = \frac{\pi}{2} + x - \arctan x,\ x \in \mathbb{R}$. Pokazać, że dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}$ istnieje stała $\lambda < 1$, że $|f(x) - f(y)| \leqslant \lambda|x - y|$ ale odwzorowanie f nie ma punktu stałego na prostej $\mathbb{R}$.

9. Pokazać, że dla dow. $m \in \mathbb{N}$ równanie

   $$x^m - (1 + m)(1 - x) = 0$$

   ma w przedziale $(0, 1)$ dokładnie jedno rozwiązanie.

10. Obliczyć

    $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+1} + \frac{1}{n^2+2} + \cdots + \frac{1}{n^2+n}\right)$$

11. Funkcja f spełnia warunek

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)+f'(x))=0.$$

Wykazać, że

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=0.$$

12. Niech $\lambda>0$ będzie ustaloną liczbą rzeczywistą i $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest takim ciągiem liczb, że $\lim\limits_{n\to\infty}nx_n=\lambda$. Udowodnić, że wówczas $\lim\limits_{n\to\infty}\binom{n}{k}x_n^k(1-x_n)^{n-k}=e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}$.

1.4 Całki i ich zastosowania

1. Obliczyć następujące antypochodne/całki (dowolnym sposobem)

(1) $\int xe^x\ \mathrm{d}x$

(2) $\int x^3e^x\ \mathrm{d}x$

(3) $\int x^2\sin x\ \mathrm{d}x$

(4) $\int \sin x\cos x\ \mathrm{d}x$

(5) $\int \operatorname{tg} x\ \mathrm{d}x$

(6) $\int \left(e^{4x}+\sqrt{e^x}\right)\ \mathrm{d}x$

(7) $\int \ln x\ \mathrm{d}x$

(8) $\int \log_a x\ \mathrm{d}x,\ a\in\mathbb{R}$

(9) $\int e^{ax}\ \mathrm{d}x,\ a\in\mathbb{R}$

(10) $\int \frac{2}{x^2}\ \mathrm{d}x$

(11) $\int \frac{1+x}{x}\ \mathrm{d}x$

(12) $\int x^5e^{-x}\ \mathrm{d}x$

(13) $\int \frac{1}{x(1+\ln x)}\ \mathrm{d}x$

(14) $\int \frac{\cos x}{1+\sin x}\ \mathrm{d}x$

2. Udowodnić, że

$$\int\frac{f'(x)}{f(x)}\ \mathrm{d}x=\ln|f(x)|+C$$

3. Udowodnić, że

$$\int\frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}\ \mathrm{d}x=\sqrt{f(x)}+C$$

4. Udowodnić, że

$$\int f'(x)f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}f^2(x)+C$$

5. Niech $g=f^{-1}$. Udowodnić, że

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x=xf(x)-F(f(x))+C_1,\ \text{gdzie}$$

$$F(x)=\int g(x)\,\mathrm{d}x+C_2.$$

6. Obliczyć następujące całki funkcji wymiernych

$$(1)\int \frac{2x}{(1+x)^2}\,\mathrm{d}x$$

$$(2)\int \frac{3}{4x^2-4x+3}\,\mathrm{d}x$$

$$(3)\int \frac{2x+1}{x^2-7x+6}\,\mathrm{d}x$$

$$(4)\int \frac{16x^3+6x^2-6x+5}{4x^4+2x^3-3x^2+5x-2}\,\mathrm{d}x$$

$$(5)\int \frac{6x^2-4x+5}{x^3-2x^2+x-2}\,\mathrm{d}x$$

$$(6)\int \frac{2x^2+3}{(x+4)(x-3)}\,\mathrm{d}x$$

$$(7)\int \frac{2x^3+3x-5}{x^2+x-6}\,\mathrm{d}x$$

$$(8)\int \frac{1}{(x+2)^3(x-3)(x^2+1)}\,\mathrm{d}x$$

$$(9)\int \frac{x^2+2}{(x-1)(x+4)(x^2+3x+3)}\,\mathrm{d}x$$

7. Wykazać, że

$$(a)\quad \int \frac{\mathrm{d}x}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C,\ \text{postawiając } x = a\,\mathrm{tg}\,t;$$

$$(b)\quad \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C,\ \text{podstawiając } x = a\sin t;$$

$$(c)\quad \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+k}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2+k}\right| + C,\ \text{podstawiając } \sqrt{x^2+k} = t-x;$$

$$(d)\quad \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C,\ \text{stosując rozwinięcie}$$

$$\frac{1}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\cdot\frac{x+x+a-x}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\left(\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x+a}\right).$$

8. Obliczyć następujące całki

$$(1)\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-9}$$

$$(2)\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+49}$$

$$(3)\int \sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x$$

$$(4)\int \sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$

$$(5)\int x\sqrt{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x$$

(6) $\displaystyle\int \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{x^2+1}$

(7) $\displaystyle\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{5-x^2}}$

(8) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(1-x^2)\sqrt{1+x^2}}$

(9) $\displaystyle\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{3-x^4}}$

9. Obliczyć całki

(1) $\displaystyle\int \frac{\ln^2 x + 3\ln x}{4x}\ \mathrm{d}x$

(2) $\displaystyle\int e^x \sin x\ \mathrm{d}x$

(3) $\displaystyle\int e^x \sin e^x\,\mathrm{d}x$

(4) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x\ln x}$

(5) $\displaystyle\int \frac{\sin\ln x}{x}\ \mathrm{d}x$

(6) $\displaystyle\int (x^2+3x^5)\sin x\ \mathrm{d}x$

(7) $\displaystyle\int \sin^3\varphi\ \mathrm{d}\varphi$

(8) $\displaystyle\int x^4\ln x\ \mathrm{d}x$

(9) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x}$

(10) $\displaystyle\int \frac{x^2+2}{(x-1)^2(x+2)(x^2+x+2)}\ \mathrm{d}x$

(11) $\displaystyle\int \frac{2x+3}{x^3+2x^2+2x-5}\ \mathrm{d}x$

(12) $\displaystyle\int \frac{y^2-3}{y^3+3y^2-4}\ \mathrm{d}y$

(13) $\displaystyle\int \frac{5x^3+2}{x^3-5x^2+4x}\ \mathrm{d}x$

(14) $\displaystyle\int \frac{x^3-2x+10}{(x-2)^2(2+4)(x^2+x+2)}\ \mathrm{d}x$

(15) $\displaystyle\int \frac{x^2+4-x}{x^4-3x^3+2x^2-4x+8}\ \mathrm{d}x$

(16) $\displaystyle\int \left(3\sin^2 x + 2^{\sin x}\right)\cos x\ \mathrm{d}x$

(17) $\displaystyle\int x\sqrt{1+x^2}\ \mathrm{d}x$

(18) $\int \sin^3 x \cos^4 x \ \mathrm{d}x$

(19) $\int \sin(3x)\cos(5x) \ \mathrm{d}x$

(20) $\int \frac{2\sin x}{\sqrt{4-\cos^2 x}} \ \mathrm{d}x$

(21) $\int \frac{2e^x \ \mathrm{d}x}{3e^x+1}$

(22) $\int \frac{x^4+1}{x^3-x^2+x-1} \ \mathrm{d}x$

(23) $\int \frac{x^2-1}{x^3+x^2+2x+2} \ \mathrm{d}x$

(24) $\int xe^{-x^2} \ \mathrm{d}x$

(25) $\int 2^y \sin y \ \mathrm{d}y$

(26) $\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{\arcsin x} \ \mathrm{d}x$

(27) $\int \frac{3x^2+x}{2x^3+x^2+2} \ \mathrm{d}x$

(28) $\int \frac{\cos x \ \mathrm{d}x}{1+\sin^2 x}$

(29) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\operatorname{tg} x \cos^2 x}$

(30) $\int \frac{\sin(2x)}{1-\sin^2 x} \ \mathrm{d}x$

(31) $\int \frac{x \, \mathrm{d}x}{1+x^4}$

(32) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}\arcsin x}$

(33) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{-x^2+2x+3}}$

(34) $\int \frac{2\ln(x)\sin(\ln^2 x)}{x\cos(\ln^2 x)} \mathrm{d}x$

(35) $\int \operatorname{ctg} x \cdot \ln(\sin x) \, \mathrm{d}x$

(36) $\int \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x + 3}} \mathrm{d}x$

(37) $\int \frac{2x}{1+x^2} \ \mathrm{d}x$

(38) $\int \sqrt{3x+1} \ \mathrm{d}x$

(39) $\int \frac{6x^2-2x \, \mathrm{d}x}{2\sqrt{x^3-x^2+3}}$

(40) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x}{2+x^2}$

(41) $\displaystyle\int \frac{\ln(\arctan x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$

(42) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}\,\mathrm{d}x$

(43) $\displaystyle\int \arcsin x\,\mathrm{d}x$

(44) $\displaystyle\int \frac{x^2+2x+1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$

(45) $\displaystyle\int \frac{3x+3}{\sqrt{3x^2+6x+1}}\,\mathrm{d}x$

(46) $\displaystyle\int \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}$

(47) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{e^x}}$

(48) $\displaystyle\int \frac{dx}{(\arcsin^2 x+1)\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$

(49) $\displaystyle\int e^x a^{e^x}\,\mathrm{d}x,\ a\in\mathbb{R}$

10. Obliczyć całki

(a) $\displaystyle\int_0^3 [x]\,\mathrm{d}x$

(b) $\displaystyle\int_0^2 \max\{x,1\}\,\mathrm{d}x$

(c) $\displaystyle\int_0^2 |x-1|\,\mathrm{d}x$

11. Udowodnić, że jeżeli funkcja $f\colon[-a,a]\to\mathbb{R}$ jest funkcją nieparzystą, to

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

12. Udowodnić, że jeżeli funkcja $f\colon[-a,a]\to\mathbb{R}$ jest funkcją parzystą, to

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x.$$

13. Obliczyć pole powierzchni ograniczonej osią Ox i krzywą $y = x^3 - 12x^2 + 44x - 48$.

14. Obliczyć pole powierzchni ograniczonej krzywą $y = 2x^2 - 16x + 30$ oraz prostą $y = x - 4$.

15. Obliczyć całkę

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\,\mathrm{d}t$$

funkcji $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$ gdzie $f(t) = (2t^2, \sin t, t)$

16. Obliczyć całkę

$$\int_1^2 f(x)\ \mathrm{d}x$$

gdzie $f\colon [1,+\infty) \to \mathbb{C}$, $f(x) = 2x^2 - i\frac{1}{x}$

17. Oblicz pole powierzchni ograniczonej krzywymi $y = \ln x$ oraz $y = \ln^2 x$.

18. Obliczyć pole obszaru ograniczonego krzywymi:

$$(x-1)^2 + y^2 = 1$$

$$x^2 + (y-1)^2 = 1$$

19. Obliczyć długość krzywej $x^2 + y^2 = a^2$.

20. Obliczyć długość krzywej $y = \sqrt{x}$, $0 \leqslant x \leqslant 1$.

21. Obliczyć długość łuku $y^2 = x^3$ odciętego linią $x = \frac{2}{3}$.

22. Obliczyć pole ograniczone krzywą $r = 2\sin(\varphi)$ dla $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

23. Obliczyć długość krzywej $y = 1 - \ln\cos x$, $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{4}$.

24. Obliczyć długość krzywej K zadanej parametrycznie $x = a\cos^3 t, y = a\sin^3 t$, $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

25. Obliczyć pole powierzchni ograniczonej krzywymi: $y = x^2 - x - 6$ i $y = -x^2 + 5x + 14$.

26. Obliczyć pole i objętość bryły obrotowej powstałej przez obrót krzywej funkcji $y = -x^2 + 2x$, gdzie $x \in [1, 4]$ dookoła osi Ox.

27. Obliczyć pole obszaru ograniczonego krzywą K określoną parametrycznie:

$$\begin{cases} x = 3t^2, \\ y = 3t - t^3, \quad t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

28. Obliczyć pole obszaru ograniczonego *Lemniskatą Gerona*, wyrażoną jako wykres równania $x^4 - x^2 + y^2 = 0$.

29. Obliczyć pole obszaru ograniczonego lemniskatą o równaniu $r^2 = a^2\cos 2\varphi$.

30. Obliczyć pole obszaru ograniczonego prostą $x = 0$ i łukiem cykloidy o równaniu:

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(t - \cos t), \quad t \in [0, 2\pi] \end{cases}$$

31. Obliczyć całkę

$$\int_{-3}^{3} x^2 \sin x \cos x\, \mathrm{d}x$$

32. Zbadać całkowalność funkcji Dirichleta

33. Udowodnić, że następująca funkcja $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ jest niemalejącą, nieciągłą w całej dziedzinie funkcją całkowalną w sensie Riemanna

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ dla } x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}; \\ \frac{1}{q} \text{ dla } x = \frac{p}{q}, p, q \in \mathbb{N}, NWD(p,q) = 1; \\ 1 \text{ dla } x = 0. \end{cases}$$

34. Udowodnić, że

$$\int_1^3 \frac{\ln x}{x}\, \mathrm{d}x \leqslant \frac{2}{e}$$

Rozwiązanie: Przyjmujemy $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ i korzystając z pochodnej f' sprawdzamy, że f osiąga maximum w punkcie $x = e \in [1,3]$.

$$\int_1^3 \frac{\ln x}{x}\, \mathrm{d}x \leqslant (3-1) \cdot \sup_{x \in [1,3]} \frac{\ln x}{x} = 2 \cdot \frac{\ln e}{e} = \frac{2}{e}.$$

35. Wykazać, że dla pewnego $y \in (0, \frac{\pi}{2})$ zachodzi

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x\, \mathrm{d}x = e^y$$

36. Znaleźć wszystkie funkcje f ciągłe i różniczkowalne takie, że

$$\int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x = (b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right) \quad \text{dla } a, b \in \mathbb{R}.$$

37. Niech $a > 0$ i $f\colon [0,a] \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą i ściśle rosnącą oraz $f(0) = 0$. Wykazać, że

$$\int_0^a f(x)\, \mathrm{d}x + \int_0^{f(a)} f^{-1}(y)\, \mathrm{d}y = a f(a)$$

Rozwiązanie: Korzystając z twierdzenia o całkowaniu przez części otrzymujemy

$$\int_0^a f(x)\, \mathrm{d}x = x f(x)\Big|_0^a - \int_0^a x f'(x)\, \mathrm{d}x = a f(a) - \int_0^a f^{-1}(f(x)) f'(x)\, \mathrm{d}x.$$

Podstawmy $y = f(x)$. Wtedy $\mathrm{d}y = f'(x)\, \mathrm{d}x$. Ponadto, gdy $x = 0$, to $y = f(0) = 0$ a gdy $x = a$, to $y = f(a)$. Stąd

$$\int_0^a f^{-1}(f(x)) f'(x)\, \mathrm{d}x = \int_0^{f(a)} f^{-1}(y)\, \mathrm{d}y$$

i twierdzenie jest udowodnione.

38. Obliczyć granicę

$$\lim_{x \to +\infty} \int_0^x \frac{f(t)}{x}\, \mathrm{d}t$$

wiedząc, że całka $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\, \mathrm{d}x$ jest zbieżna.

39. Niech f będzie funkcją ciągłą na przedziale $[1,\infty)$ oraz $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 2$. Wyznaczyć granicę

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}\int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

40. Udowodnić, że jeżeli $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ jest ciągłą funkcją taką, że dla każdego $x\in\mathbb{R}$

$$\int_0^1 f(xt)\,\mathrm{d}t = 0,$$

to $f = 0$, tzn. $f(x) = x$ dla każdego $x\in\mathbb{R}$.

Rozwiązanie: Podstawmy $u = xt$, to wówczas $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = x$, czyli mamy

$$\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}u}{x}.$$

Ponadto $t = 0$, to $u = 0$ a gdy $t = 1$, to $u = x$. Zatem

$$\int_0^1 f(xt)\,\mathrm{d}t = \int_0^x f(u)\frac{\mathrm{d}u}{x} = \frac{1}{x}\int_0^x f(u)\,\mathrm{d}u = 0,\ x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}.$$

$$F(x) := \int_0^x f(u)\,\mathrm{d}u = 0\cdot x = 0,\ \text{dla } x\neq 0.$$

Z ciągłości funkcji f i twierdzenia Newtona-Leibniza: $F'(x) = f(x), x\in(0,1]$. Mamy więc, że $f(x) = F'(x) = 0, x\in(0,1]$. Zatem $f(x) = 0$ dla $x\in[0,1]$, czyli $f = 0$.

41. Niech f będzie ciągłą funkcją rzeczywistą, określoną na przedziale $[a,b]\subseteq\mathbb{R}$, taką że

$$\int_a^b f(x)x^n\,\mathrm{d}x = 0 \text{ dla } n\in\{0,1,\dots\}.$$

Pokazać, że $f(x) = 0$, $x\in[a,b]$.

42. Obliczyć

$$\int_1^n x^m \ln x\,\mathrm{d}x,\ \ m,n\in\mathbb{N}.$$

43. Niech $f\colon[0,1]\to[0,\infty)$ jest ciągłą funkcją taką, że

$$f^2(x)\leqslant 1 + 2\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t,\ x\in[0,1].$$

Udowodnić, że $f(x)\leqslant 1+x$ dla każdego $x\in[0,1]$.

Rozwiązanie: Zdefiniujmy funkcję pomocniczą wzorem $g(x) = 1 + 2\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t, x\in[0,1]$. Z ciągłości funkcji i Zasadniczego Twierdzenia Rachunku Całkowego mamy, że $g'(x) = \left(+2\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}\right)' = 2f(x)$. Mamy

$$g'(x) = 2f(x)\leqslant 2\sqrt{1+2\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t} = 2\sqrt{g(x)}.$$

44. Obliczyć całkę

$$\int_{-1}^{0}(x+1)e^{-x}\,\mathrm{d}x$$

45. Niech $f\colon [1,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(1)=1$ oraz

$$f'(x) = \frac{1}{x^2+f^2(x)}.$$

Udowodnić, że $\lim_{x\to\infty} f(x)$ istnieje oraz $\lim_{x\to\infty} f(x) < 1+\frac{\pi}{4}$.

46. Wykazać, że równanie funkcyjne $2f(t)-2=\int_0^1 \exp{(t-s)}\,f(s)\,\mathrm{d}x, t\in[0,1]$ ma dokładnie jedno rozwiązanie w przedziale $[0,1]$.

47. Niech $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ będzie ciągła i okresowa o okresie $T>0$. Udowodnić, że:

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(nx)\,\mathrm{d}x = \frac{b-a}{T}\int_0^T f(x)\,\mathrm{d}x,\ \text{dla dowolnych } a<b.$$

48. Udowodnić, że dla dowolnego $n\in\mathbb{N}$ zachodzi równość

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{2}{\pi}}(2\sin x)^{2n}\,\mathrm{d}x = \binom{2n}{n}.$$

49. Ustalmy $a>0$ i niech $f\colon [0,a]\to\mathbb{R}$ będzie funkcją klasy C^1. Udowodnić, że

$$\int_0^a \lfloor t\rfloor\,\mathrm{d}t = \lfloor a\rfloor f(a) - \sum_{k=1}^{\lfloor a\rfloor} f(k).$$

50. Obliczyć całkę

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{\ln x}{x-1}\,\mathrm{d}x$$

51. Obliczyć całkę

$$\int \frac{\ln(x+1)}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$$

1.5 Szeregi i całki niewłaściwe

1. Wyznaczyć sumę szeregu

$$(a)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$$

$$(b)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{2(\sqrt{n}+\frac{1}{2})(\sqrt{n+1}+\frac{1}{2})}$$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(n+1)(n+2)}(n+1+\sqrt{n(n+2)})}$

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$

(f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a}{(2n+3)(2n+5)}$ gdzie $a \in \mathbb{R}$.

2. Zbadać zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\binom{n}{2}} \left(\frac{n^{100}}{2^n}\right)$$

3. Zbadać zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^3}$$

4. Zbadać zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} (x_n y_n)^{-2}$$

wiedząc, że $y_n, x_n \geqslant 0$, $x_{n+1} \leqslant x_n, n \in \mathbb{N}$ oraz $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$.

5. Wykazać, że jeżeli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ jest zbieżny, to zbieżny bezwzględnie jest szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$$

6. Uzasadnić, że jeżeli $f\colon [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ jest ciągła i istnieje $M \in \mathbb{N}$ takie, że $|f(x)| \leqslant M$ dla każdego $x \geqslant 1$, to ze zbieżności szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ wynika zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot f(n).$$

7. Zbadać zbieżność szeregów

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^n + 3^n}{6^n}$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n+1)}{n}$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin\frac{1}{n}$

(f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n}$

(g) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$

(h) $\sum_{n=1}^{\infty} (1-\frac{1}{n})^n$

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[\pi]{n^3}}$

(j) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[e]{n^3}}$

(k) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$

(l) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+e^n}$

(m) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6^n+3^n}{9^n}$

(n) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin n|}{n\sqrt{n}}$

(o) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan n}{n^2+1}$

(p) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{1}{n} \operatorname{tg}\frac{1}{\sqrt{n}}$

8. Zbadać zbieżność szeregu

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+e^{-n}}$$

9. Zbadać zbieżnośc całek niewłaściwych, w miarę możliwości - obliczyć

   (a) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x}$

   (b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}$

   (c) $\displaystyle\int_{-2}^1 \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$

   (d) $\displaystyle\int_0^2 \sqrt{x-x^2}\,\mathrm{d}x$

   (e) $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x,$ gdzie $a > 0$

   (f) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$

   (g) $\displaystyle\int_0^1 \ln x\,\mathrm{d}x$

   (h) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^3}\,\mathrm{d}x$

   (i) $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{\ln(x+1)}\,\mathrm{d}x$

   (j) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^x}{(1+e^x)^2}\,\mathrm{d}x$

   (k) $\displaystyle\int_{-\infty}^1 e^x\,\mathrm{d}x$

   (l) $\displaystyle\int_{-\infty}^0 xe^x\,\mathrm{d}x$

   (m) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{e^x+x}\,\mathrm{d}x$

10. Obliczyć całkę

$$\int_1^{+\infty} \frac{x-1}{(1+x^2)(x+x^2)}\,\mathrm{d}x$$

11. Zbadać zbieżnośc w zależności od p całki

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x.$$

12. Pokazać, że

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^n}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2(n-1)} x\,\mathrm{d}x$$

13. Uzasadnić, że jeżeli całka niewłaściwa

$$\int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$$

jest zbieżna oraz funkcja $g\colon [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ jest ciągła i ograniczona, to całka niewłaściwa

$$\int_1^{+\infty} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$$

również jest zbieżna.

1.6 Ciągi i szeregi funkcyjne

1. Zbadać zbieżność ciągów funkcyjnych $f_n\colon X \to \mathbb{R}$, gdzie

   (a) $f_n(x) = \dfrac{1}{n+x}$

   (b) $f_n(x) = \dfrac{n}{n+x}$

   (c) $f_n(x) = \dfrac{nx}{n+x}$

2. Zbadać zbieżność ciągów funkcyjnych $f_n, g_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}$

   $f_n(x) = x^n - x^{n+1}$

   $g_n(x) = x^n(1-x)^n$

3. Zbadać dziedzinę i zbieżność w swojej dziedzinie ciągu funkcyjnego $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, gdzie f_n dane jest wzorem:

   (a) $f_n(x) = \dfrac{1}{nx}$

   (b) $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+n^2x}$

   (c) $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+n^2x^2}$

   (d) $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+nx^2}$

   (e) $f_n(x) = x\sin\left(\dfrac{x}{n}\right)$

   (f) $f_n(x) = \dfrac{\sin x}{x}$

   (g) $f_n(x) = \cos\left(\dfrac{x}{n}\right)$

   (h) $f_n(x) = \dfrac{nx}{n^2+x^2}$

   (i) $f_n(x) = nxe^{-nx}$

   (j) $f_n(x) = \dfrac{\ln(2^n+x^n)}{n}$

   (k) $f_n(x) = \sqrt{1+x^n}$

   (l) $f_n(x) = \sqrt[n]{x}$

   (m) $f_n(x) = \dfrac{nx^2}{nx+1}$

   (n) $f_n(x) = \dfrac{2nx}{1+n^2x^2}$

4. Zbadać zbieżność ciągu funkcyjnego $f_n\colon [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ danego wzorem:

   $$f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n}$$

5. Zbadać zbieżność szeregu funkcyjnego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3}} \exp\left(\lambda \sin\left(\sqrt[3]{\frac{x^2-1}{x}}\right)\right), \ \lambda \in (0,1)$$

6. Zbadać zbieżność następujących szeregów funkcyjnych

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} x^n(1-x), \ x \in [0,1]$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}, \ x \in [-1,1]$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{1+nx^2}$

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1+n^2x^2}$

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1+n^4x^2}$

(f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{1+n^5x^2}$

(g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$

(h) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{\cos x!}{n^3}}$

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{\sqrt{n^4+x^2}}$

(j) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{2n\pi}{3}}{\sqrt{n^2+x^2}}$

(k) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x^{2n}+1}$

(l) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x+2^n}$ dla $x \in (-2,+\infty)$

(m) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$

(n) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n!x)}{n^3}$

(o) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2x^n}{(2n)!}$

(p) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{e^{nx}}$, dla $x \in [0,+\infty)$

(r) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!x^n}$

7. Wyznaczyć promień zbieżności następujących szeregów potęgowych i zbadać zbieżność na krańcach ich przedziałów zbieżności

   (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2n}$

   (b) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n x^n$

   (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^n}$

   (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

   (e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n}$

   (f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{3^n \cdot n^3}$

   (h) $\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^n$

   (i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n$

   (j) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n} (x+1)^n$

   (k) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$

8. Wyznaczyć sumy następujących szeregów

   (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n7^n}$

   (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$

   (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{5^n}$

   (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{3^n}$

   (e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{4^n}$

   (f) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$

(g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n3^n}$

(h) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin^n x$

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$

(j) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n}{4^n}$

9. Rozwinać w szereg Taylora wokół punktu $x_0 = 0$ funkcję f daną wzorem $f(x) = xe^x$ dwoma sposobami:

   - wyznaczając wzór na n-tą pochodną i podstawiając do wzoru,
   - korzystając z rozwinięcie w szereg potęgowy funkcji $x \mapsto e^x$.

10. Rozwinąć w szereg Taylora wokół $x_0 = 0$ funkcję daną wzorem

$$f(x) = \int \frac{\sin x}{x} \, \mathrm{d}x.$$

11. Udowodnić, że dla każdego $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$:

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} k \binom{n}{k} = 0.$$

1.7 Zadania różne II

1. Obliczyć

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n + n^2 + n^3 + \cdots + n^n}{1^n + 2^n + 3^n + \cdots + n^n}$$

2. Udowodnić, że jeżeli równanie

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x = 0$$

ma dodatnie rozwiązanie $x = x_0$, to równanie

$$n a_0 x^{n-1} + (n-1) a_1 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} = 0$$

ma również dodatnie rozwiązanie $x = x_1 < x_0$.

3. Udowodnić, że każde równanie postaci $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$, gdzie n jest nieparzyste, ma przynajmniej jeden pierwiastek rzeczywisty.

4. Udowodnić, że jeżeli $C_0 + \frac{C_1}{2} + \frac{C_2}{3} + \ldots + \frac{C_{n-1}}{n} + \frac{C_n}{n+1} = 0$, gdzie $C_0, \ldots, C_n$ są stałymi, to równanie $C_0 + C_1 x + \ldots + C_{n-1} x^{n-1} + C_n x^n = 0$ ma co najmniej jeden pierwiastek rzeczywisty zawarty między 0 a 1.

5. Udowodnić, że

$$(1)\ \lim_{n\to\infty} \frac{1^4+2^4+\ldots+n^4}{n^5} = \frac{1}{5}$$

$$(2)\ \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\ldots+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}} = \frac{2}{3}$$

$$(3)\ \lim_{n\to\infty} \frac{1^p+2^p+\ldots+n^p}{n^{p+1}} = \frac{1}{p+1},\ p>0$$

$$(4)\ \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{e^1}+\sqrt[n]{e^2}+\ldots+\sqrt[n]{e^n}}{n} = e-1$$

$$(5)\ \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{1}{1^2+n^2}+\frac{1}{2^2+n^2}+\ldots+\frac{1}{n^2+n^2}\right) = \frac{\pi}{4}$$

$$(6)\ \lim_{n\to\infty} \frac{a}{n}\left(\sin\frac{a}{n}+\sin\frac{2a}{n}+\ldots+\sin\frac{na}{n}\right) = \cos a - 1$$

6. Dla liczby $n \in \mathbb{N}$ niech x_n oznacza pierwiastek równania $e^{-x} = nx$. Obliczyć granicę

$$\lim_{n\to\infty} \left(n(nx_n - 1)\right).$$

7. Funkcja f jest ciągła i ma okres $T = 1$. Pokazać, że istnieje liczba x_0, dla której zachodzi równośc $f(x_0 + \pi) = f(x_0)$.

8. Zbadać, czy istnieją funkcje wypukłe f i g takie, że $f(x) - g(x) = \sin x$, $x \in \mathbb{R}$.

9. Funkcja f spełnia warunek $|f(x) - f(y)| \leqslant |x-y|^3$ dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}$. Uzasadnić, że jest stała na $\mathbb{R}$.

10. (a) Udowodnić, że $\mathrm{tg}^2\,\frac{\alpha}{2} + \mathrm{tg}^2\,\frac{\beta}{2} + \mathrm{tg}^2\,\frac{\gamma}{2} \geqslant 1$, jeżeli α, β, γ są kątami pewnego trójkąta. Dla jakiego trójkąta zachodzi równość?

    (b) Udowodnić, że $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma \geqslant \frac{3}{4}$, jeżeli α, β, γ są kątami pewnego trójkąta. Dla jakiego trójkąta zachodzi równość?

2 Funkcje wielu zmiennych, funkcje skalarne

1. Unormować wektor $\overrightarrow{u}$ i obliczyć w jego kierunku pochodną kierunkową w punkcie a, dla

(a) $f(x,y) = e^y x^{x+y}$, $\overrightarrow{u} = [-1,3], a = (1,1)$

(b) $f(x,y) = x^2 + xy - y^2$, $\overrightarrow{u} = [4,3], a = (1,-1)$

(c) $f(x,y,z) = \sqrt[3]{x+y+z}$, $\overrightarrow{u} = [-1,3,2], a = (1,2,1)$

2. Naszkicować dziedzinę funkcji $f(x,y) = \arcsin(x^2+y^2-2) + \sqrt{x-y}$

3. Obliczyć następującą granicę f. dwóch zmiennych: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\cos(xy)}{x}$

4. Udowodnić, że

$$-\frac{1}{2} \leqslant \frac{xy}{x^2+y^2} \leqslant \frac{1}{2}$$

5. Zbadać istnienie granic:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{xy}{x^2+y^2}, \quad \text{oraz} \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2+y^2}{x^2+y^2}$$

6. Zbadać ciągłość funkcji $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ takiej, że

$$f(x,y) = \frac{x^2y}{x^2+y^2}, \text{ dla } (x,y) \neq (0,0) \text{ oraz } f(0,0) = 0.$$

7. Obliczyć

   (a) $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$

   (b) $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\sin(x^3+y^3)}{x+y}$

8. Niech $F(x,y) = (x\cdot y)\sin(\frac{x}{y})$. Obliczyć $\frac{\partial F}{\partial x}$ oraz $\frac{\partial F}{\partial y}$.

9. Niech $F(x,y) = (x\cdot y)^{x+\ln y}$. Obliczyć $\frac{\partial F}{\partial x}$ oraz $\frac{\partial F}{\partial y}$.

10. Wyznaczyć macierz różniczki odwzorowania odwrotnego do $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ danego równaniem $\varphi(x,y) = (2xy, x^2-y)$.

11. Znaleźć ekstrema lokalne funkcji $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ danej równaniem $f(x,y) = x^2 - xy + y^2$.

12. Zbadać istnienie ekstremów i kresów funkcji $f\colon E \to \mathbb{R}$, gdzie

    (a) $f(x_1,\ldots,x_n) = x_1x_2\cdots x_{n-1}x_n$,

    $$E = \{(x_1,\ldots,x_n)\colon x_1+x_2+\ldots+x_{n-1}+x_n \leqslant 1,\ x_1,\ldots,x_n \geqslant 0\}$$

    (b) $f(x_1,\ldots,x_n) = x_1+x_2+\ldots+x_{n-1}+x_n$,

    $$E = \{(x_1,\ldots,x_n)\colon x_1x_2x_3\cdots x_{n-1}x_n \geqslant 1,\ x_1,\ldots,x_n > 0\}$$

    (c) $f(x_1,x_2,x_3,x_4) = x_1x_2x_3x_4$,

    $$E = \{(x_1,x_2,x_3,x_4)\colon ,x_1+x_2+x_3+x_4 = c,\ x_1,x_2,x_3,x_4 \geqslant 0\},$$

    gdzie $c > 0$ jest dane.
    Wskazówka: w (c) zastosować metodę mnożników Lagrange'a.

13. Wyrazić w jawnej postaci funkcje określone w sposób uwikłany za pomocą równania

    $$(x^3-1)y + e^xy^2 + \cos x - 1 = 0$$

14. Wyznacz ekstrema lokalne funkcji zmiennej x uwikłanej, zadanej równaniem:

    (a) $x^2 - 4x + y^2 = 5$

    (b) $x^2 = xy - 1$

    (c) $x^3 + y^3 = 3xy$

    (d) $x^{2y} + y^2 = 1$

15. Czy do krzywej o równaniu $x^4 - x^2 + y^2 = 0$ (*Lemniskaty Gerona*) stosuje się twierdzenie o funkcji uwikłanej. W jakich punktach?

16. Czy do krzywej o równaniu $x2^y + y^2 = 1$ stosuje się twierdzenie o funkcji uwikłanej? W jakich punktach?

17. Wyznaczyć x, dla którego równanie $y - \ln(x + y) = 0$ określa y jako funkcję zmiennej x. Obliczyć $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$

18. Niech

$$F(x, y) = x^3y^2 - y \ln x - 2e^{2x-2} + y.$$

Wykazać, że istnieją funkcje rzeczywiste g, h klasy C^1 określone w pewnym otoczeniu U punktu $x = 1$ takie, że $F(x, g(x)) = 0 = f(x, h(x))$ oraz $g(x) < h(x)$ dla $x \in U$. Znaleźć $g(1)$, $h(1)$, $g'(1)$,$h'(1)$.

19. Sprawdzić z definicji, czy funkcja dana wzorem $f(x, y) = 5 - (x^6 + y^4)$ ma w punkcie $(x_0, y_0) = (0, 0)$ ekstremum lokalne.

20. Obliczyć i zinterpretować geometrycznie całkę

$$\iint\limits_{[-1,1]\times[0,2]} (5 - \sqrt{|xy|})\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

21. Obliczyć

$$\iint\limits_D \max\{x, y\}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

gdzie $D = [0, 1] \times [1, 2]$.

22. Obliczyć całkę podwójną

$$\iint\limits_D \frac{x}{y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

gdzie obszar D jest obszarem ograniczonym parabolami $y = x^2$, $x = y^2$, $y > 0$.

23. Obliczyć

$$\iint\limits_D (x + y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

gdzie D jest obszarem ograniczonym prostymi o równaniach $x = 0$, $y = 0$ i $x + y = 3$.

24. Obliczyć

$$\iint\limits_D 2x^2y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

gdzie D jest obszarem ograniczonym osiami współrzędny i krzywą o równaniu $\sqrt{y} + \sqrt{x} = 1$.

25. Obliczyć całkę podwójną

$$\iint\limits_D \frac{x^2}{y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

gdzie obszar D jest ograniczony prostymi $x = 4$, $y = x$ i hiperbolą $y = \frac{1}{x}$.

26. Obliczyć

$$\iint\limits_D xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

gdzie D jest obszarem ograniczonym krzywymi o równaniach $xy = 1$ oraz $|x - y| = 1$.

27. Obliczyć

$$\int_0^1 \int_0^1 e^{\max\{x,y\}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

28. Obliczyć

$$\iint\limits_A \frac{x}{1 + x^2 + y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

gdzie $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon \}$.

29. Obliczyć

$$\iint\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{1 + x^2 + y^2 + x^2y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

30. Wyprowadzić wzór na objętość kuli w przestrzeni $\mathbb{R}^3$ o promieniu równym R.

3 Analiza w przestrzeniach metrycznych. Przestrzenie Unormowane. Przestrzenie Banacha.

1. Sprawdzić, że dowolny zbiór X z metryką dyskretną d jest przestrzenią metryczną zupełną.

2. Sprawdzić, czy funkcja $\rho\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dana wzorem $\rho(x, y) = \frac{|x-y|}{\sqrt{1+x^2}\sqrt{2+y^2}}$ jest metryką na $\mathbb{R}$.

3. Udowodnić, że jeżeli $\rho\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ jest metryką na $\mathbb{R}$, to funkcja $x \mapsto \frac{\rho(x,y)}{1+\rho(x,y)}$ również jest metryką na $\mathbb{R}$.

4. W przestrzeni $\mathbb{R}^2$ wyznaczyć średnicę zbioru $[0, 1] \times [0, 1]$, kolejno w metryce euklidesowej, maksimum i taksówkowej.

5. Wyznaczyć punkty domknięcia i punkty skupienia zbioru

$$A = \left\{n + \frac{1}{k} \colon n, k \in \mathbb{N}\right\}$$

w przestrzeni metrycznej $\mathbb{N}$.

6. W przestrzeni $\mathbb{R}$ wyznaczyć pochodną zbioru

$$A = \left\{ (-1)^n m + \frac{1}{n} : m, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

7. W przestrzeni $\mathbb{R}$ wyznaczyć A^d oraz brzeg zbioru A, gdzie

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} \colon \sin \frac{1}{x} = 0 \right\}.$$

8. W przestrzeni $C([a, b])$ funkcji ciągłych postaci $f \colon [a, b] \to \mathbb{R}$, metryka dana jest wzorem

$$\rho(f, g) = \max_{a \leqslant x \leqslant b} |f(x) - g(x)|.$$

Sprawdzić, że $(C([a, b]), \rho)$ jest przestrzenią metryczną zupełną.

9. Załóżmy, że $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jest ciągiem zbiorów otwartych oraz $[a, b] \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$. Udowodnić, że że $[a, b]$ zawiera się w skończonej ilości zbiorów U_n.

10. Niech f będzie ciągłą funkcją rzeczywistą określoną na przestrzeni metrycznej X. Niech $Z(f)$ będzie zbiorem tych wszystkich $p \in X$, dla których $f(p) = 0$. Pokazać, że zbiór $Z(f)$ jest domknięty.

Rozwiązanie: Przyjmijmy $\bar{Z}(f) = X \setminus Z(f) = \{x \in X \colon f(x) \neq 0\}$. Wykażemy, że $\bar{Z}(f)$ jest zb. otwartym. Niech $x \in \bar{Z}(f)$. Szukamy otoczenia $V_x \subseteq \bar{Z}(f)$ otwartego punktu x. Ustalmy $\varepsilon > 0$. Istnieje $\delta > 0$ takie, iż $y \in K(x, \delta) \Rightarrow f(y) \in K(f(x)\varepsilon)$. Jeżeli $0 \neq K(f(x), \varepsilon)$, to przyjmujemy $V_x = K(x, \delta > 0)$. Załóżmy, że $0 \in K(f(x), \varepsilon)$. Niech $d = \inf\{\rho(x, y) \colon f(y) = 0\}$. d istnieje i $d \geqslant 0$ z własności zbioru liczb rzeczywistych, bo $\{\rho(x, y) \colon f(y) = 0\} \subseteq [0, +\infty)$. Zauważmy, że $d > 0$. Gdyby bowiem było $d = 0$, to $\rho(x, x) = 0 \geqslant d$ a to pociąga, że $f(x) = 0$ wbrew założeniu, że $x \in \bar{Z}(f)$. Zatem $V_x = K(x, \frac{d}{2}), d > 0$ jest szukanym otoczeniem. Zbiór $\bar{Z}(f)$ jest otwarty a zatem $Z(f)$ jest domknięty.

11. Udowodnić, że funkcja f określonej na prz. X jest ciągła wtedy i tylko wtedy, gdy *wykres* $\{(x, f(x)) : x \in X\}$ tej funkcji jest zbiorem zwartym.

12. Pokazać, że ciągłe i otwarte odwzorowanie $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest monotoniczne.

Przestrzeń funkcji ciągłych między przestrzeniami unormowanymi. Niech X, Y będą przestrzeniami unormowanymi. Gdy nie prowadzi to do nieporozumień oznaczamy normy obydwu przestrzeni poprzez $\|\cdot\|$, np. $y \in Y$ ma normę $\|y\|$. W innym wypadku przez $\|\cdot\|_X$ oznaczamy normę przestrzeni X i analogicznie przez $\|\cdot\|_Y$ normę przestrzeni Y. Przez $\mathcal{L}(X, Y)$ oznaczamy rodzinę wszystkich funkcji ciągłych z przestrzeni X w przestrzeń Y.

13. Niech $\|f\| := \sup\{\|f(x)\|_Y \colon \|x\|_X \leqslant 1.\}$, $f \in \mathcal{L}(X, Y)$. Udowodnić, że przestrzeń $(\mathcal{L}(X, Y), \|\cdot\|)$ z tak określoną normą jest przestrzenią Banacha.

14. Udowodnić, że $\|f\| := \inf\{M > 0 \colon \|f(x)\|_Y \leqslant M\|x\|_X.\}$, $f \in \mathcal{L}(X, Y)$.

Całka oznaczona z funkcji ciągłej określonej na przedziale rzeczywistym w przestrzeń Banacha. Niech $f\colon D \to Y$, gdzie Y jest przestrzenią Banacha (z normą oznaczaną przez $\|\cdot\|$) a $D \subseteq \mathbb{R}$ przedziałem. Możemy łatwo rozszerzyć pojęcia analityczne funkcji $D \to \mathbb{R}$ na funkcje $D \to Y$:

- Mówimy, że funkcja f ma granicę $y \in Y$ w punkcie $x_0 \in \operatorname{int} X$ w, gdy

$$\forall_{\varepsilon>0}\exists_{\delta>0}\forall_{x\in X}.\ 0 < |x - x_0| < \delta \implies \|f(x) - y\| < \varepsilon.$$

- Funkcja f jest różniczkowalna w punkcie $x_0 \in D$, gdy
  - pewne otoczenie punktu x_0 w D jest przedziałem niezdegenerowanym (tzn. nie jest punktem);
  - istnieje pochodna funkcji f w punkcie czyli granica oznaczana przez $f'(x_0)$ i zdefiniowana następująco:

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

- Jeżeli $a, b \in D$, bo *całkę oznaczoną z funkcji f w granicach od a do b* możemy zdefiniować jako element $\displaystyle\int_a^b f$ przestrzeni Y zadany równością

$$\int_a^b f = F(b) - F(a),$$

  gdzie F jest dowolną funkcją pierwotną funkcji f.
  Całkę taką oczywiście również możemy oznaczać klasycznie - $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

15. Sformułować definicję ciągłości funkcji $f\colon D \to Y$, gdzie Y i D są dane tak jak poprzednio.

16. Niech $f\colon D \to Y$, $g\colon D \to (0, +\infty)$ - funkcje ciągłe, Y - prz. Banacha, $D \subseteq \mathbb{R}$ - przedział. Udowodnić, że jeżeli $\|f\| \leqslant g,\ a, b \in D$, to

$$\left\|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right\| \leqslant \left|\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x\right|.$$

Wywnioskować stąd, że dla funkcji ciągłej f (założenia jak poprzednio) zachodzi

$$\left\|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right\| \leqslant \left|\int_a^b \|f(x)\|\,\mathrm{d}x\right|.$$

17. Udowodnić, że jeżeli $f\colon D \to Y$ jest funkcją ciągła (D - przedział rzeczyw., Y - prz. Banacha), a $M \geqslant 0$ liczbą taką, że $\|f\| \leqslant M$, to dla dowolnych $a, b \in D$

$$\left\|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right\| \leqslant M|b - a|.$$

18. Niech $X = C[a, b]$, tzn. X jest przestrzenią liniową wszystkich funkcji ciągłych $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$. Udowodnić, że funkcja

$$f \mapsto \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x,$$

jest normą przestrzeni X oraz, że przestrzeń X z tak określoną normą jest przestrzenią Banacha.

4 Zadania różne III

1. Niech f będzie jednostajnie ciągła na odcinku (a, b). Uzasadnić, że funkcję f można przedłużyć jednoznacznie do funkcji ciągłej (jednostajnie) na odcinku domkniętym $[a, b]$, tzn. istnieje ciągła funkcja $g\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ taka, że $f(x) = g(x)$ dla $x \in (a, b)$.

2. Pokazać, że odwzorowanie $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dane wzorem $f(x, y) = (\frac{1}{2}(1 + y), \frac{1}{3}(3 - x))$ jest kontrakcją przy metryce euklidesowej.

3. Pokazać, że $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dane wzorem

$$f(x, y) = \left(1 - \frac{1}{3}x, 1 + \frac{1}{3}y, 2 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}y\right)$$

jest kontrakcją.

4. Pokazać, że odwozorwanie $g\colon [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ dane wzorem

$$g(x) = \frac{1}{x + 1}$$

nie jest kontrakcją mimo, że $d(g(x), g(y)) \leqslant d(x, y)$, $x, y \leqslant 0$, $x \neq y$.

5. Korzystając z Zasady Banacha pokazać, że układ równań

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}\sin x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{3} \\ y = \frac{1}{3}\cos y + \frac{1}{3}x \end{cases}$$

ma dokładnie jedno rozwiązanie.

6. Metodą kolejnych przybliżeń rozwiązać zagadnienie Cauchy'ego

$$\begin{cases} y'(x) = y(x), x > 0, \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

7. Funkcja f spełnia warunek $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$ oraz jest ciągła na przedziale $[1, \infty)$. Wyznaczyć granicę

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} \int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

8. Wykazać, że równanie funkcyjne

$$\frac{1}{2}f(t) - \frac{1}{2}t^3 = \int_0^1 t^2 s^2 f(s)\,\mathrm{d}s$$

ma rozwiązanie w przedziale $[0, 1]$. Wyznaczyć to rozwiązanie z dokładnością do $\frac{8}{9}$.

9. Pokazać, że dla n i m całkowitych zachodzi

$$\int_0^{2\pi} e^{inx} e^{-imx}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} 0 & \text{jeżeli } m \neq n, \\ 2\pi & \text{jeżeli } m = n. \end{cases}$$

Wskazówka: skorzystać z tożsamości $e^{ix} = \cos x + i \sin x$.