# Zbiór przyjaznych zadań z analizy matematycznej

Ziemowit Wójcicki

5 lipca 2020

## 1 Preliminaria

1. Rozwiązać w liczbach rzeczywistych

   $$x^5 - x^4 - x + 1 = 0$$

2. Podać dziedzinę, przeciwdziedzinę następujących funkcji oraz naszkicować ich wykresy

   $$y = \sqrt{2x^2 + 5x - 3}$$

   $$y = \sin(\arccos x)$$

3. Czy funkcja $f$ określona na zbiorze liczb rzeczywistych dana wzorem

   $$f(x) = \begin{cases} \frac{2x+1}{x-1} & \text{dla } x \neq 1, \\ 0 & \text{dla } x = 1, \end{cases}$$

   jest funkcją róznowartościową? Czy jest funkcją na $\mathbb{R}$?

4. Zbadać parzystość funkcji $\operatorname{sinc}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (tzw. funkcji Bessela), danej wzorem

   $$\operatorname{sinc}(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{dla } x \neq 0, \\ 1 & \text{dla } x = 0. \end{cases}$$

5. Zbadać parzystość funkcji

   $$f(x) = \sin x \cdot \frac{4^x + 1}{1 - 4^x}$$

6. Udowodnić, że dla dowolnej liczby naturalnej $n$ zachodzi

   $$\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{2n}{2n+1}$$

7. Udowodnić prawdziwość Tożsamości Abela

   $$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i = \sum_{i=1}^{n-1} \left( (a_i - a_{i+1}) \sum_{j=1}^{i} b_j \right) + a_n \sum_{i=1}^{n} b_i$$

8. Udowodnić, że jeżeli $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest funkcją addytywną (tzn. $f(x+y) = f(x) + f(y)$ dla dow. $x, y \in \mathbb{R}$), to

$$\forall_{n\in\mathbb{N}} \forall_{x_1,\ldots,x_n\in\mathbb{R}}.\ f\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)$$

9. Udowodnić, że

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},\ n \in \mathbb{N}$$

10. Udowodnić, że dla każdej liczby naturalnej $n$ spełniona jest nierówność $n! \geqslant 2^{n-1}$.

11. Udowodnić, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$:

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2n-1)^2 = \frac{n(4n^2-1)}{3}.$$

12. Udowodnić, że

$$\frac{1}{n}\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) < \frac{1}{n\sqrt{n}},\ n \in \mathbb{N}$$

13. Udowodnić, że dla dowolnych liczby rzeczywistych $a$ i $b$, $a \neq b$ oraz liczby naturalnej $n$ zachodzi

$$a^n + a^{n-1}b + \ldots + ab^{n-1} + b^n = \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a-b}$$

14. Udowodnić, że dla dowolnej liczby rzeczywistej $x > -1$ i dla dowolnej liczby naturalnej $n$ zachodzi następująca *nierówność Bernoulliego*

$$(1+x)^n \leqslant 1 + nx$$

15. Udowodnić, że

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}} = \sqrt{n+1} - 1$$

16. Udowodnić, że zbiór liczb naturalnych i zbiór liczb całkowitych są równoliczne.

17. Udowodnić, że zbiór $\mathbb{N}$ oraz zbiór

$$\left\{\frac{1}{2n-1} : n \in \mathbb{N}\right\}$$

są równoliczne.

18. Udowodnić, że jeżeli $A$ jest zbiorem nieskończonym oraz $S$ jest skończonym podzbiorem zbioru $A$, to zbiór dopełnienie zbioru $S$ względem zbioru $A$ jest zbiorem nieskończonym.

## 1.1 Ciągi

19. Pokazać, że następujące twierdzenia są równoważne

    **Twierdzenie.** *Każdy ograniczony z góry podzbiór zbioru liczb rzeczywistych ma kres górny.*

    **Twierdzenie.** *Każdy rosnący i ograniczony z góry ciąg liczb rzeczywistych jest zbieżny.*

20. Wyznaczyć kresy następujących zbiorów:

$$A = \left\{x \in \mathbb{R} : x^2 < 2\right\}$$

$$B = \left\{1 + \frac{(-1)^n}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$$

$$C = \left\{\frac{n+1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$$

$$D = \left\{\sqrt{2 - \frac{1}{n^3}} + \sqrt{2 + \frac{1}{n^3}} : n \in \mathbb{N}\right\}$$

21. Obliczyć następujące granice

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n^4 + 2n^2 + 4}{3n^3 + n^2 + n + 1}$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n^3 + \sqrt{2}n^2}{n^4 + 2}$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{2n^3 + 7n + 4}{\sqrt{5}n^3 + n^2 + 3}$

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{1}{3}\right)^n + 7^n + 13}$

(5) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{2^n + 4^n}{5^n + 3^n}$

(6) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{5 \cdot 2^n + 3 \cdot 7^n}$

(7) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3 \cdot 7^n + \sin n}$

(8) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n \sin n!}{n^2 + 1}$

(9) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{(2n+1)^3(3n+1)^3}{(6n^2 + 2n + 1)^4}$

(10) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{7n^2 - 4n + 3}{\sqrt{n^4 - 2n} + \sqrt[3]{n^2 + 1}}$

(11) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n}$

(12) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\sin n}{2n^2}$

(13) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\sin 7x}{x}$

(14) $\lim_{n\to\infty} (n-1)\sin\left(\frac{1}{n-1}\right)$

(15) $\lim_{n\to\infty} \frac{\sin x}{3x}$

(16) $\lim_{n\to\infty} \frac{\sin 3x}{4x}$

(17) $\lim_{n\to\infty} \frac{\tan 5x}{x}$

22. Udowodnić, że dla dowolnego ciągu $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} \leqslant \liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} \leqslant \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} \leqslant \limsup_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$$

23. Obliczyć

$$\lim_{n\to\infty} n(\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2-1})$$

24. Obliczyć

$$\lim_{n\to\infty} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{a}{n} \\ \frac{a}{n} & 1 \end{bmatrix}^n$$

gdzie $a \in \mathbb{R}$.

25. Udowodnić, że

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right) = e^a$$

26. Obliczyć

(a) $\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{4-3n^2}\right)^{9n^2+37n}$

(b) $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{4-3n^2}\right)^{7n+2}$

(c) $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2+n^2}{n^2}\right)^{n^2}$

(d) $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2}{n^2+1}\right)^{n}$

(e) $\lim_{n\to\infty} \left(n \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right)$

27. Obliczyć

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$$

28. Obliczyć

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n - \arctan n}{n + \arctan n}\right)^{\ln 2^n}$$

29. Udowodnić, że jeśli ciąg liczb dodatnich jest *podaddytywny*, tzn. taki że $a_{n+m} \leqslant a_n + a_m$ dla $n, m = 1, 2, 3, \ldots$ to ciąg $\frac{a_n}{n}$ jest zbieżny.

30. Udowodnić, że jeżeli $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest ciągiem *podmultiplikatywnym* (tzn. $\forall_{m,n\in\mathbb{N}}.\ a_{n+m} \leqslant a_n \cdot a_m$) oraz $a_n \geqslant 0, a_n \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$, to ciąg $(\sqrt[n]{a_n})_{n\in\mathbb{N}}$ jest zbieżny oraz

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \inf \{ \sqrt[n]{a_n} \colon n \in \mathbb{N} \} .$$

31. Ustalmy dowolny zbiór $A \subset \mathbb{R}$ i liczbę rzeczywistą $G$. Udowodnić, że jeżeli dla każdego $a \in A$ zachodzi $a \leqslant G$ oraz istnieje taki ciąg $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wyrazów zbioru $A$, że $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = G$, to $G = \sup A$.
Sformułować i udowodnić analogiczne twierdzenie dla kresu dolnego.

32. Wyznaczyć kresy następujących zbiorów:

$$M = \left\{ \frac{n^2 + 2n - 3}{4n^3} \colon n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$N = \left\{ \frac{7n^2 + 3n - 12}{2n^2 + 3} \colon n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$K = \left\{ \frac{1}{x} \sin x \colon x > 0 \right\}$$

$$S = \{ x \sin x \colon x \geqslant 0 \}$$

$$F = \{ \sqrt[n]{n} \colon n \in \mathbb{N} \setminus \{1\} \}$$

$$G = \left\{ \frac{m}{n} \colon m, n \in \mathbb{N} \right\}$$

33. Obliczyć granicę ciągu $\left( \frac{n^2+2}{(3n+2)^2}, \frac{1}{n} \right)_{n\in\mathbb{N}}$

34. Obliczyć granice ciągów danych następującymi równaniami rekurencyjnymi

$$(a) \ \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_1 = 1 \\ x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + x_{n-1}) \text{ dla } n > 1 \end{cases}$$

$$(b) \ \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_1 = 1 \\ x_{n+1} = \frac{2}{3}x_n + \frac{1}{3}x_{n-1} \text{ dla } n > 1 \end{cases}$$

$$(c) \ \begin{cases} x_1 = 4 \\ x_{n+1} = \frac{2}{3}x_n + 2 \text{ dla } n > 1 \end{cases}$$

35. Zbadać zbieżność ciągu zadanego równaniem rekurencyjnym

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = a_n + \frac{1}{2a_n} \quad \text{dla } n > 1 \end{cases}$$

36. Jaka jest wartość wyrażenia $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\dots}}}$ ?

37. Obliczyć następujące granice, jeśli istnieją. W przeciwnym wypadku podać granice jednostronne

$$(a)\ \lim_{x\to -2}\frac{x+2}{x^3+4x^2+4x}$$

$$(b)\ \lim_{x\to 3}\frac{x^3-3x^2+x-3}{x-3}$$

$$(c)\ \lim_{x\to 0}\frac{|x|}{x}$$

$$(d)\ \lim_{x\to -1}\frac{x^2-1}{x+1}$$

$$(e)\ \lim_{x\to -1}\frac{x^2-1}{|x+1|}$$

$$(f)\ \lim_{x\to 2}\frac{2x^2-3x-2}{x^2-x-2}$$

$$(g)\ \lim_{x\to 1}\frac{-3x^2+x+2}{1-x}$$

$$(h)\ \lim_{x\to\infty}\frac{5x^3-2x+7}{2x^3+7x^2-x+1}$$

$$(i)\ \lim_{x\to\infty}(\sqrt[3]{x^3+4x^2}-x)$$

38. Udowodnić następujące

**Twierdzenie** (Stolza)**.** *Jeżeli $x_n\to\infty$, $y_n\to\infty$ oraz istnieje $N\in\mathbb{N}$ tak, że $y_{n+1}>y_n, n>N$, to*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}},$$

*o ile granica po prawej stronie istnieje (skończona lub nie).*

39. Pokazać, że $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1^p+2^p+\ldots+n^p}{n^{p+1}}=\frac{1}{p+1},\ p\in\mathbb{N}$.

40. Udowodnić, że

$$\text{jeżeli } \lim_{n\to\infty}a_n=g \text{ to } \lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}=g.$$

41. Udowodnić, że

$$\text{jeżeli dla każdego } n\in\mathbb{N}, a_n\leqslant 0 \text{ oraz } \lim_{n\to\infty}a_n=g \text{ to } \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdot\cdots\cdot a_n}=g,$$

# 2 Funkcje jednej zmiennej i funkcje wektorowe

## 2.1 Ciągłość, ciągłość jednostajna

42. Udowodnić, że każda funkcja spełniająca warunek Lipschitza jest jednostajnie ciągła.

43. Udowodnić, że następujące funkcje są ciągłe

    $(a)\, w\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ w(x) = x^n + x^{n-1} + \cdots + x^2 + x^1 + 1$

    $(b)$ $\sin\colon \mathbb{R} \to [-1, 1]$

44. Czy funkcja Bessela z zadania 4 jest ciągła w zerze?

45. Zbadać ciągłość funkcji $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ określonej następująco

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{\sin^2 x}}{x} & \text{dla } x \neq 0; \\ 1 & \text{dla } x = 0. \end{cases}$$

46. Zbadać ciągłość funkcji danej równaniem $y = \operatorname{sgn} \sin \pi x$.

47. Zbadać, że następujące funkcje mają własnośc Darboux ale nie są ciągłe

    $(a)$ $f\colon [-1, 1] \to [1, 1]$ dana wzorem

$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & \text{dla } x \neq 0; \\ 0 & \text{dla } x = 0. \end{cases}$$

    $(b)$ $g\colon [-1, 1] \to \mathbb{R}$ dana wzorem

$$g(x) = \begin{cases} -x, & \text{dla } x \in [-1, 0], \\ x + 1 & \text{dla } x \in (0, 1]. \end{cases}$$

48. Udowodnić, że równanie $e^x - x^3 = 0$ ma co najmniej jedno rozwiązanie w przedziale $[-1, 1]$

49. Udowodnić, że równanie $e^x \sin x - 2x = 0$ ma co najmniej jedno rozwiązanie w przedziale $[\frac{\pi}{2}, \pi]$

50. Udowodnić, że funkcja dirichleta $\delta\colon \mathbb{R} \to \{1, 0\}$ dana wzorem

$$\delta(x) = \begin{cases} 1 \text{ dla } x \in \mathbb{Q}; \\ 0 \text{ dla } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

    nie jest ciągła w żadnym punkcie swojej dziedziny.

51. Udowodnić, że funkcja $D\colon \mathbb{R} \to \{1, 0\}$

$$D(x) = x\delta(x)$$

    jest ciągła w zerze i tylko w zerze.

52. Zbadać ciągłość funkcji danej równaniem $y = x^2 - x[x]$.

53. Czy funkcja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ określona następująco

$$f(x) = \frac{x}{1 + |x|}$$

    jest jednostajnie ciągła na $\mathbb{R}$?

## 2.2 Różniczkowanie, ciągłość i różniczkowalność

54. Obliczyć pochodne funkcji danych następującymi wyrażeniami

$(a)\ y = \ln x \cdot \tan x$

$(b)\ y = \dfrac{\sin x}{\ln x}$

$(c)\ y = \dfrac{\ln x}{\tan x}$

$(d)\ y = \ln(\tan x)$

$(e)\ y = \tan(\ln x)$

$(f)\ y = \tan(x \ln x)$

$(g)\ y = \ln(x \tan x)$

$(h)\ y = \ln(\sin^3 e^x)$

$(i)\ y = x^x$

$(j)\ y = e^x \ln x$

$(k)\ y = \sin e^x$

$(l)\ y = \arcsin(x - x^2)$

$(m)\ y = \dfrac{x}{x+3}$

$(n)\ y = \dfrac{\cos x}{\ln x}$

$(o)\ y = \sqrt[3]{\dfrac{1+x^3}{1-x^3}}$

$(p)\ y = \sin\cos x$

$(r)\ y = \dfrac{x \ln x}{\cos x}$

55. Niech $f$ będzie funkcją daną wzorem:

$$f(x) = \begin{cases} e^x, & \text{gdy } x \leqslant 0; \\ 1+x, & \text{gdy } x > 0. \end{cases}$$

Wyznaczyć dziedzinę i zbiór wartości funkcji $f$ oraz udowodnić, że jest ciągła i różniczkowalna w całej dziedzinie.

56. Obliczyć pochodne (dla argumentów, dla których istnieją) dla następujących funkcji oraz wyznaczyć ich dziedziny i narysować ich wykresy

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = |x|$$

$$g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = |\sin x|$$

57. Obliczyć pochodną funkcji $x \mapsto |\log x|$

58. Korzystając z reguły de l'Hospitala obliczyć następujące granice

$$(a)\lim_{x\to 0}\frac{x-\arctan x}{x^3}$$

$$(b)\lim_{x\to 2}\frac{3x^2-12x+12}{x-2}$$

$$(c)\lim_{x\to -1}\frac{x^4+3x^2-4}{x+1}$$

$$(d)\lim_{x\to +\infty}\frac{x^4}{e^{x^2}}$$

$$(e)\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{x}$$

$$(f)\lim_{x\to\ 0}\frac{\sin x}{x}$$

59. (a) Udowodnić, że dla dowolnych ciągów $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$:
jeśli $a_n \to 0,\ b_n \to \infty$, to

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=0$$

(b) Czy do granicy $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\ln x}$ trzeba (i można?) zastosować regułę de l'Hospitala?

60. Narysować wykresy funkcji

$$w(x)=x^3-9x^2+27x+3$$

$$f(x)=\frac{x^2+1}{(x+1)^2}$$

$$g(x)=x^3\ln(x)$$

$$h(x)=\frac{2x}{x+1}+x^2$$

61. Zbadać wszystkie asymptoty funkcji $f(x)=xe^{\frac{x}{x+1}}$

62. Naszkicować wykresy następujących funkcji

$$f(x)=\frac{x}{x^2-1}$$

$$g(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$h(x)=\frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}$$

$$t(x)=\frac{2x^2}{x-3}$$

63. Obliczyć

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sin x\cdot\ln x)$$

64. Obliczyć

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^{x^x}$$

65. Zbadać ciągłość funkcji w punkcie $x = 1$ dla funkcji zdefiniowanej w następujący sposób

$$f(x) = \begin{cases} -(x-1)^2 & \text{dla } x \in (-\infty, 1] \\ \sqrt{-x^2+6x-8} & \text{dla } x \in [2,4] \end{cases}$$

66. Wykazać, że każde ciągłe odzworowanie $f$ przedziału $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ w siebie ma co najmniej jeden punkt stały, tj. punkt $x \in [a, b]$ taki, że $f(x) = x$.

67. Udowodnić następujące

**Twierdzenie** (Rolle'a)**.** *Niech funkcja $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą w przedziale $[a, b]$, różniczkowalną w przedziale $(a, b)$. Jeżeli $f(a) = f(b)$, to istnieje taki punkt $\xi \in (a, b)$, że $f(\xi) = 0$.*

68. Zastosować twierdzenie Rolle'a do funkcji $f(x) = 2x^2 - 8x + 12$.

69. Wykazać, że równanie $x^5 + 10x + 3 = 0$ ma dokładnie jeden pierwiastek rzeczywisty.

70. Udowodnić, że jeżeli równanie

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x = 0$$

ma dodatnie rozwiązanie $x = x_0$, to równanie

$$na_0x^{n-1} + (n-1)a_1x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} = 0$$

ma również dodatnie rozwiązanie $x = x_1 < x_0$.

71. Znaleźć

$$\sup_{x\in[1,4]} \left\{x^3 - 6x^2 + 11x - 6\colon x \in \mathbb{R}\right\}$$

72. Jakiej wielkości kwadraty trzeba wyciąć z prostokątnego arkusza kartonu o wymiarach $30 \times 24$, aby pojemność otrzymanego po sklejeniu pudełka była największa?

73. Udowodnić, że

$$\frac{b-a}{b} \leqslant \ln\frac{b}{a} \leqslant \frac{b-a}{a}$$

74. Udowodnić, że

$$\frac{x}{1+x} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$$

75. Równanie $e^x = x + 1$ ma oczywiste rozwiązanie $x = 0$. Wykazać, że jest to jedyne rozwiązanie.

76. Udowodnić, że jeżeli $f, g\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ są ciągłe na przedziale $[a, b]$, różniczkowalne we wnętrzu tego przedziału oraz $f(a) = f(g)$, $f(b) = g(a)$, to istnieje taki punkt $c \in (a, b)$, że $f'(c) = -g'(c)$.

77. Sprawdzić, korzystając z twierdzenia Darboux, czy równanie $x\ln x = 2$ ma rozwiązanie.

78. Dla jakich wartości parametru $a$ funkcja $f$ dana wzorem

$$f(x) = \begin{cases} \left(\sin\frac{1}{x}\right)\cdot(\sqrt{x^2+1}-1)^a, & \text{dla } x \neq 0, \\ 0, & \text{dla } x = 0. \end{cases}$$

jest różniczkowalna? A ogólniej: klasy $C^n$?

## 2.3 Zadania różne I

79. Niech $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą, okresową i różną od stałej a $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcją ciągłą. Wykazać, że istnieje $x_0 \in \mathbb{R}$ takie, że $f(g(x_0)) = f(x_0)$.

80. Udowodnić, że jeżeli funkcja $f$ jest ciągła na półprostej $[a,\infty)$ i ma skończoną granicę $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ to funkcja ta jest ograniczona na $[a,\infty)$.

81. Udowodnić, że jeżeli $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ jest funkcją różniczkowalną, to $f$ spełnia warunek Lipschitza ze stałą Lipschitza $L$ wtedy i tylko wtedy, gdy jej pochodna jest ograniczona przez $L$.

82. Udowodnić, że jeżeli $f\colon [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ jest ciągła i ma skończoną granicę $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$, to jest jednostajnie ciągła.

83. Udowodnić, że jeżeli funkcja $f$ jest monotoniczna na przedziale $(a,b)$ i ma w nim własność Darboux, to jest ciągła na $(a,b)$.

84. Funkcję $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ nazywamy *wypukłą*, gdy dla dowolnych $x,y \in (a,b)$ i $\lambda \in (0,1)$ zachodzi $f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$. Uzasadnić, że każda funkcja wypukła jest ciągła.

85. Metodą kolejnych przybliżeń rozwiązać równania:

    $(a)$ $2x + \sin x = 1$,

    $(b)$ $x^3 + 5x^2 - 15x - 7 = 0$ dla $2,5 < x < 4$.

86. Niech $f(x) = \frac{\pi}{2} + x - \arctan x$, $x \in \mathbb{R}$. Pokazać, że dla dowolnych $x,y \in \mathbb{R}$ istnieje stała $\lambda < 1$, że $|f(x) - f(y)| \leqslant \lambda|x-y|$ ale odwzorowanie $f$ nie ma punktu stałego na prostej $\mathbb{R}$.

87. Pokazać, że dla dow. $m \in \mathbb{N}$ równanie

$$x^m - (1+m)(1-x) = 0$$

ma w przedziale $(0,1)$ dokładnie jedno rozwiązanie.

88. Obliczyć

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+1} + \frac{1}{n^2+2} + \cdots + \frac{1}{n^2+n}\right)$$

89. Funkcja $f$ spełnia warunek

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)+f'(x))=0.$$

Wykazać, że

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=0.$$

90. Udowodnić, że każde równanie postaci $x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0=0$, gdzie $n$ jest nieparzyste, ma przynajmniej jeden pierwiastek rzeczywisty.

91. Niech $\lambda>0$ będzie ustaloną liczbą rzeczywistą i $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest takim ciągiem liczb z przedziału $[0,1]$, że $\lim\limits_{n\to\infty}nx_n=\lambda$. Udowodnić, że wówczas $\lim\limits_{n\to\infty}\binom{n}{k}x_n^k(1-x_n)^{n-k}=e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}$.

## 2.4 Całki i ich zastosowania

92. Obliczyć następujące antypochodne/całki (dowolnym sposobem)

(1) $\int xe^x\ \mathrm{d}x$

(2) $\int x^3e^x\ \mathrm{d}x$

(3) $\int x^2\sin x\ \mathrm{d}x$

(4) $\int \sin x\cos x\ \mathrm{d}x$

(5) $\int \mathrm{tg}\, x\ \mathrm{d}x$

(6) $\int\left(e^{4x}+\sqrt{e^x}\right)\mathrm{d}x$

(7) $\int \ln x\ \mathrm{d}x$

(8) $\int \log_a x\ \mathrm{d}x,\ a\in\mathbb{R}$

(9) $\int e^{ax}\ \mathrm{d}x,\ a\in\mathbb{R}$

(10) $\int \frac{2}{x^2}\ \mathrm{d}x$

(11) $\int \frac{1+x}{x}\ \mathrm{d}x$

(12) $\int x^5e^{-x}\ \mathrm{d}x$

(13) $\int \frac{1}{x(1+\ln x)}\ \mathrm{d}x$

(14) $\int \frac{\cos x}{1+\sin x}\ \mathrm{d}x$

93. Udowodnić, że

$$\int\frac{f'(x)}{f(x)}\ \mathrm{d}x=\ln|f(x)|+C$$

94. Udowodnić, że

$$\int\frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}\ \mathrm{d}x=\sqrt{f(x)}+C$$

95. Obliczyć następujące całki funkcji wymiernych

$$(1) \int \frac{2x}{(1+x)^2}\,\mathrm{d}x$$

$$(2) \int \frac{3}{4x^2-4x+3}\,\mathrm{d}x$$

$$(3) \int \frac{2x+1}{x^2-7x+6}\,\mathrm{d}x$$

$$(4) \int \frac{16x^3+6x^2-6x+5}{4x^4+2x^3-3x^2+5x-2}\,\mathrm{d}x$$

$$(5) \int \frac{6x^2-4x+5}{x^3-2x^2+x-2}\,\mathrm{d}x$$

$$(6) \int \frac{2x^2+3}{(x+4)(x-3)}\,\mathrm{d}x$$

$$(7) \int \frac{2x^3+3x-5}{x^2+x-6}\,\mathrm{d}x$$

$$(8) \int \frac{1}{(x+2)^3(x-3)(x^2+1)}\,\mathrm{d}x$$

$$(9) \int \frac{x^2+2}{(x-1)(x+4)(x^2+3x+3)}\,\mathrm{d}x$$

96. Wykazać, że

$$(a) \quad \int \frac{\mathrm{d}x}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C, \text{ postawiając } x = a\,\mathrm{tg}\,t;$$

$$(b) \quad \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C, \text{ podstawiając } x = a\sin t;$$

$$(c) \quad \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+k}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2+k}\right| + C, \text{ podstawiając } \sqrt{x^2+k} = t-x;$$

$$(d) \quad \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C, \text{ stosując rozwinięcie}$$

$$\frac{1}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\cdot\frac{x+x+a-x}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\left(\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x+a}\right).$$

97. Obliczyć następujące całki

$$(1) \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-9}$$

$$(2) \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+49}$$

$$(3) \int \sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x$$

$$(4) \int \sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$

$$(5) \int x\sqrt{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x$$

(6) $\displaystyle\int \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{x^2+1}$

(7) $\displaystyle\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{5-x^2}}$

(8) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(1-x^2)\sqrt{1+x^2}}$

(9) $\displaystyle\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{3-x^4}}$

98. Obliczyć całki

(1) $\displaystyle\int \frac{\ln^2 x + 3\ln x}{4x}\ \mathrm{d}x$

(2) $\displaystyle\int e^x \sin x\ \mathrm{d}x$

(3) $\displaystyle\int e^x \sin e^x\, \mathrm{d}x$

(4) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x\ln x}$

(5) $\displaystyle\int \frac{\sin\ln x}{x}\ \mathrm{d}x$

(6) $\displaystyle\int (x^2+3x^5)\sin x\ \mathrm{d}x$

(7) $\displaystyle\int \sin^3\varphi\ \mathrm{d}\varphi$

(8) $\displaystyle\int x^4 \ln x\ \mathrm{d}x$

(9) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x}$

(10) $\displaystyle\int \frac{x^2+2}{(x-1)^2(x+2)(x^2+x+2)}\ \mathrm{d}x$

(11) $\displaystyle\int \frac{2x+3}{x^3+2x^2+2x-5}\ \mathrm{d}x$

(12) $\displaystyle\int \frac{y^2-3}{y^3+3y^2-4}\ \mathrm{d}y$

(13) $\displaystyle\int \frac{5x^3+2}{x^3-5x^2+4x}\ \mathrm{d}x$

(14) $\displaystyle\int \frac{x^3-2x+10}{(x-2)^2(2+4)(x^2+x+2)}\ \mathrm{d}x$

(15) $\displaystyle\int \frac{x^2+4-x}{x^4-3x^3+2x^2-4x+8}\ \mathrm{d}x$

(16) $\displaystyle\int \left(3\sin^2 x + 2^{\sin x}\right)\cos x\ \mathrm{d}x$

(17) $\displaystyle\int x\sqrt{1+x^2}\ \mathrm{d}x$

(18) $\displaystyle\int \sin^3 x \cos^4 x \ \mathrm{d}x$

(19) $\displaystyle\int \sin(3x)\cos(5x) \ \mathrm{d}x$

(20) $\displaystyle\int \frac{2\sin x}{\sqrt{4-\cos^2 x}} \ \mathrm{d}x$

(21) $\displaystyle\int \frac{2e^x \ \mathrm{d}x}{3e^x+1}$

(22) $\displaystyle\int \frac{x^4+1}{x^3-x^2+x-1} \ \mathrm{d}x$

(23) $\displaystyle\int \frac{x^2-1}{x^3+x^2+2x+2} \ \mathrm{d}x$

(24) $\displaystyle\int xe^{-x^2} \ \mathrm{d}x$

(25) $\displaystyle\int 2^y \sin y \ \mathrm{d}y$

(26) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{\arcsin x} \ \mathrm{d}x$

(27) $\displaystyle\int \frac{3x^2+x}{2x^3+x^2+2} \ \mathrm{d}x$

(28) $\displaystyle\int \frac{\cos x \ \mathrm{d}x}{1+\sin^2 x}$

(29) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\operatorname{tg} x \cos^2 x}$

(30) $\displaystyle\int \frac{\sin(2x)}{1-\sin^2 x} \ \mathrm{d}x$

(31) $\displaystyle\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{1+x^4}$

(32) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}\arcsin x}$

(33) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{-x^2+2x+3}}$

(34) $\displaystyle\int \frac{2\ln(x)\sin(\ln^2 x)}{x\cos(\ln^2 x)}\,\mathrm{d}x$

(35) $\displaystyle\int \operatorname{ctg} x \cdot \ln(\sin x)\,\mathrm{d}x$

(36) $\displaystyle\int \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x+3}}\,\mathrm{d}x$

(37) $\displaystyle\int \frac{2x}{1+x^2} \ \mathrm{d}x$

(38) $\displaystyle\int \sqrt{3x+1} \ \mathrm{d}x$

(39) $\displaystyle\int \frac{6x^2-2x\,\mathrm{d}x}{2\sqrt{x^3-x^2+3}}$

(40) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x}{2+x^2}$

(41) $\displaystyle\int \frac{\ln(\arctan x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$

(42) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}\,\mathrm{d}x$

(43) $\displaystyle\int \arcsin x\,\mathrm{d}x$

(44) $\displaystyle\int \frac{x^2+2x+1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$

(45) $\displaystyle\int \frac{3x+3}{\sqrt{3x^2+6x+1}}\,\mathrm{d}x$

(46) $\displaystyle\int \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}$

(47) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{e^x}}$

(48) $\displaystyle\int \frac{dx}{(\arcsin^2 x+1)\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$

(49) $\displaystyle\int e^x a^{e^x}\,\mathrm{d}x,\ a\in\mathbb{R}$

99. Obliczyć całki

(a) $\displaystyle\int_0^3 [x]\,\mathrm{d}x$

(b) $\displaystyle\int_0^2 \max\{x,1\}\,\mathrm{d}x$

(c) $\displaystyle\int_0^2 |x-1|\,\mathrm{d}x$

100. Udowodnić, że jeżeli funkcja $f\colon [-a,a]\to\mathbb{R}$ jest funkcją nieparzystą, to

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

101. Udowodnić, że jeżeli funkcja $f\colon [-a,a]\to\mathbb{R}$ jest funkcją parzystą, to

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x.$$

102. Obliczyć pole powierzchni ograniczonej osią $Ox$ i krzywą $y=x^3-12x^2+44x-48$.

103. Obliczyć pole powierzchni ograniczonej krzywą $y=2x^2-16x+30$ oraz prostą $y=x-4$.

104. Oblicz pole powierzchni ograniczonej krzywymi $y=\ln x$ oraz $y=\ln^2 x$.

105. Obliczyć pole obszaru ograniczonego krzywymi:

$$(x-1)^2+y^2=1$$
$$x^2+(y-1)^2=1$$

106. Obliczyć długość krzywej $x^2+y^2=a^2$.

107. Obliczyć długość krzywej $y=\sqrt{x}$, $0\leqslant x\leqslant 1$.

108. Obliczyć długość łuku $y^2=x^3$ odciętego linią $x=\frac{2}{3}$.

109. Obliczyć pole ograniczone krzywą $r=2\sin(\varphi)$ dla $\varphi\in[0,\frac{\pi}{2}]$.

110. Obliczyć długość krzywej $y=1-\ln\cos x$, $0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{4}$.

111. Obliczyć długość krzywej $K$ zadanej parametrycznie $x=a\cos^3 t, y=a\sin^3 t$, $t\in[0,\frac{\pi}{2}]$.

112. Obliczyć pole powierzchni ograniczonej krzywymi: $y=x^2-x-6$ i $y=-x^2+5x+14$.

113. Obliczyć pole i objętość bryły obrotowej powstałej przez obrót krzywej funkcji $y=-x^2+2x$, gdzie $x\in[1,4]$ dookoła osi $Ox$.

114. Obliczyć pole obszaru ograniczonego krzywą $K$ określoną parametrycznie:

$$\begin{cases} x=3t^2, \\ y=3t-t^3, \quad t\in\mathbb{R} \end{cases}$$

115. Obliczyć pole obszaru ograniczonego *Lemniskatą Gerona*, wyrażoną jako wykres równania $x^4-x^2+y^2=0$.

116. Obliczyć pole obszaru ograniczonego lemniskatą o równaniu $r^2=a^2\cos 2\varphi$.

117. Obliczyć pole obszaru ograniczonego prostą $x=0$ i łukiem cykloidy o równaniu:

$$\begin{cases} x=a(t-\sin t), \\ y=a(t-\cos t), \quad t\in[0,2\pi] \end{cases}$$

118. Obliczyć całkę

$$\int_{-3}^{3} x^2\sin x\cos x\,\mathrm{d}x$$

119. Zbadać całkowalność funkcji Dirichleta

120. Udowodnić, że następująca funkcja $f\colon[0,1]\to\mathbb{R}$ jest niemalejącą, nieciągłą w całej dziedzinie funkcją całkowalną w sensie Riemanna

$$f(x)=\begin{cases} 0 \text{ dla } x\in[0,1]\setminus\mathbb{Q}; \\ \frac{1}{q} \text{ dla } x=\frac{p}{q}, p,q\in\mathbb{N}, NWD(p,q)=1; \\ 1 \text{ dla } x=0. \end{cases}$$

121. Udowodnić, że

$$\int_{1}^{3}\frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x\leqslant\frac{2}{e}$$

122. Wykazać, że dla pewnego $y \in (0, \frac{\pi}{2})$ zachodzi

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x \,\mathrm{d}x = e^y$$

123. Znaleźć wszystkie funkcje $f$ ciągłe i różniczkowalne takie, że

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = (b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right) \quad \text{dla } a, b \in \mathbb{R}.$$

124. Niech $a > 0$ i $f\colon [0, a] \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą i ściśle rosnącą oraz $f(0) = 0$. Wykazać, że

$$\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^{f(a)} f^{-1}(y)\,\mathrm{d}y = af(a)$$

125. Obliczyć granicę

$$\lim_{x\to+\infty} \int_0^x \frac{f(t)}{x}\,\mathrm{d}t$$

wiedząc, że całka $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ jest zbieżna.

126. Niech $f$ będzie funkcją ciągłą na przedziale $[1, \infty)$ oraz $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 2$. Wyznaczyć granicę

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} \int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

127. Obliczyć

$$\int_1^n x^m \ln x \,\mathrm{d}x, \quad m, n \in \mathbb{N}.$$

128. Pokazać, że dla $n$ i $m$ całkowitych zachodzi

$$\int_0^{2\pi} e^{inx} e^{-imx}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} 0 & \text{jeżeli } m \neq n, \\ 2\pi & \text{jeżeli } m = n. \end{cases}$$

Wskazówka: skorzystać z tożsamości $e^{ix} = \cos x + i \sin x$.

129. Niech $f$ będzie ciągłą funkcją rzeczywistą, określoną na przedziale $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$, taką że

$$\int_a^b f(x) x^n \,\mathrm{d}x = 0 \text{ dla } n \in \{0, 1, \ldots\}.$$

Pokazać, że $f(x) = 0$, $x \in [a, b]$.

130. Obliczyć całkę

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\,\mathrm{d}t$$

funkcji $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ gdzie $f(t) = (2t^2, \sin t, t)$

131. Obliczyć całkę

$$\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x$$

gdzie $f\colon [1, +\infty) \to \mathbb{C}$, $f(x) = 2x^2 - i\frac{1}{x}$

132. Obliczyć całkę

$$\int_{-1}^0 (x+1) e^{-x}\,\mathrm{d}x$$

### 2.5 Szeregi i całki niewłaściwe

133. Wyznaczyć sumę szeregu

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

$$(b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{2(\sqrt{n}+\frac{1}{2})(\sqrt{n+1}+\frac{1}{2})}$$

$$(c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(n+1)(n+2)}(n+1+\sqrt{n(n+2)})}$$

$$(d) \sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$$

$$(e) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$$

$$(f) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a}{(2n+3)(2n+5)} \text{ gdzie } a \in \mathbb{R}.$$

134. Zbadać zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\binom{n}{2}} \left(\frac{n^{100}}{2^n}\right)$$

135. Zbadać zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^3}$$

136. Zbadać zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} (x_n y_n)^{-2}$$

wiedząc, że $y_n, x_n \geqslant 0$, $x_{n+1} \leqslant x_n, n \in \mathbb{N}$ oraz $\lim_{n\to\infty} y_n = 0$.

137. Wykazać, że jeżeli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ jest zbieżny, to zbieżny bezwzględnie jest szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$$

138. Uzasadnić, że jeżeli $f\colon [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ jest ciągła i istnieje $M \in \mathbb{N}$ takie, że $|f(x)| \leqslant M$ dla każdego $x \geqslant 1$, to ze zbieżności szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ wynika zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot f(n).$$

139. Zbadać zbieżność szeregów

$(a)$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^n + 3^n}{6^n}$

$(b)$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n+1)}{n}$

$(c)$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$

$(d)$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$

$(e)$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin\frac{1}{n}$

$(f)$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n}$

$(g)$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$

$(h)$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (1 - \frac{1}{n})^n$

$(i)$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[\pi]{n^3}}$

$(j)$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[e]{n^3}}$

$(k)$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$

$(l)$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 + e^n}$

$(m)$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6^n + 3^n}{9^n}$

$(n)$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin n|}{n\sqrt{n}}$

$(o)$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan n}{n^2 + 1}$

$(p)$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{1}{n} \operatorname{tg}\frac{1}{\sqrt{n}}$

140. Zbadać zbieżność szeregu

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+e^{-n}}$$

141. Zbadać zbieżnośc całek niewłaściwych, w miarę możliwości - obliczyć

(a) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x}$

(b) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}$

(c) $\displaystyle\int_{-2}^{1} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$

(d) $\displaystyle\int_0^{2} \sqrt{x-x^2}\,\mathrm{d}x$

(e) $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x,\ \text{gdzie } a>0$

(f) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$

(g) $\displaystyle\int_0^{1} \ln x\,\mathrm{d}x$

(h) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^3}\,\mathrm{d}x$

(i) $\displaystyle\int_0^{2} \frac{1}{\ln(x+1)}\,\mathrm{d}x$

(j) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^x}{(1+e^x)^2}\,\mathrm{d}x$

(k) $\displaystyle\int_{-\infty}^{1} e^x\,\mathrm{d}x$

(l) $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} xe^x\,\mathrm{d}x$

(m) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{e^x+x}\,\mathrm{d}x$

142. Obliczyć całkę

$$\int_1^{+\infty} \frac{x-1}{(1+x^2)(x+x^2)}\,\mathrm{d}x$$

143. Zbadać zbieżnośc w zależności od $p$ całki

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x.$$

144. Pokazać, że

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^n}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2(n-1)} x\,\mathrm{d}x$$

145. Uzasadnić, że jeżeli całka niewłaściwa

$$\int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$$

jest zbieżna oraz funkcja $g\colon [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ jest ciągła i ograniczona, to całka niewłaściwa

$$\int_1^{+\infty} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$$

również jest zbieżna.

## 2.6 Ciągi i szeregi funkcyjne

146. Zbadać zbieżność ciągów funkcyjnych $f_n\colon X \to \mathbb{R}$, gdzie

$(a)$ $f_n(x) = \dfrac{1}{n+x}$

$(b)$ $f_n(x) = \dfrac{n}{n+x}$

$(c)$ $f_n(x) = \dfrac{nx}{n+x}$

147. Zbadać zbieżność ciągów funkcyjnych $f_n, g_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}$

$$f_n(x) = x^n - x^{n+1}$$

$$g_n(x) = x^n(1-x)^n$$

148. Zbadać dziedzinę i zbieżność w swojej dziedzinie ciągu funkcyjnego $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, gdzie $f_n$ dane jest wzorem:

$(a)$ $f_n(x) = \dfrac{1}{nx}$

$(b)$ $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+n^2x}$

$(c)$ $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+n^2x^2}$

$(d)$ $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+nx^2}$

$(e)$ $f_n(x) = x\sin\left(\dfrac{x}{n}\right)$

$(f)$ $f_n(x) = \dfrac{\sin x}{x}$

$(g)$ $f_n(x) = \cos\left(\dfrac{x}{n}\right)$

$(h)$ $f_n(x) = \dfrac{nx}{n^2+x^2}$

$(i)$ $f_n(x) = nxe^{-nx}$

$(j)$ $f_n(x) = \dfrac{\ln(2^n+x^n)}{n}$

$(k)$ $f_n(x) = \sqrt{1+x^n}$

$(l)$ $f_n(x) = \sqrt[n]{x}$

$(m)$ $f_n(x) = \dfrac{nx^2}{nx+1}$

$(n)$ $f_n(x) = \dfrac{2nx}{1+n^2x^2}$

149. Zbadać zbieżność ciągu funkcyjnego $f_n\colon [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ danego wzorem:

$$f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n}$$

150. Zbadać zbieżność szeregu funkcyjnego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3}} \exp\left(\lambda \sin\left(\sqrt[3]{\frac{x^2-1}{x}}\right)\right), \ \lambda \in (0,1)$$

151. Zbadać zbieżność następujących szeregów funkcyjnych

$(a)$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x^n(1-x), \ x \in [0,1]$

$(b)$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}, \ x \in [-1,1]$

$(c)$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{1+nx^2}$

$(d)$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1+n^2x^2}$

$(e)$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1+n^4x^2}$

$(f)$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{1+n^5x^2}$

$(g)$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$

$(h)$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{\cos x!}{n^3}}$

$(i)$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{\sqrt{n^4+x^2}}$

$(j)$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos\frac{2n\pi}{3}}{\sqrt{n^2+x^2}}$

$(k)$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x^{2n}+1}$

(l) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x+2^n}$ dla $x \in (-2, +\infty)$

(m) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$

(n) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n!x)}{n^3}$

(o) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2 x^n}{(2n)!}$

(p) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{e^{nx}}$, dla $x \in [0, +\infty)$

(r) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n! x^n}$

152. Wyznaczyć promień zbieżności następujących szeregów potęgowych i zbadać zbieżność na krańcach ich przedziałów zbieżności

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2n}$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n x^n$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^n}$

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n}$

(f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{3^n \cdot n^3}$

(h) $\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^n$

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n$

(j) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n} (x+1)^n$

(k) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$

153. Wyznaczyć sumy następujących szeregów

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n7^n}$$

$$(b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$$

$$(c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{5^n}$$

$$(d) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{3^n}$$

$$(e) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{4^n}$$

$$(f) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$$

$$(g) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n3^n}$$

$$(h) \sum_{n=1}^{\infty} \sin^n x$$

$$(i) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$$

$$(j) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n}{4^n}$$

154. Rozwinać w szereg Taylora wokół punktu $x_0 = 0$ funkcję $f$ daną wzorem $f(x) = xe^x$ dwoma sposobami:

- wyznaczając wzór na $n$-tą pochodną i podstawiając do wzoru,
- korzystając z rozwinięcie w szereg potęgowy funkcji $x \mapsto e^x$.

155. Rozwinąć w szereg Taylora wokół $x_0 = 0$ funkcję daną wzorem

$$f(x) = \int \frac{\sin x}{x} \, \mathrm{d}x.$$

156. Udowodnić, że dla każdego $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$:

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} k \binom{n}{k} = 0.$$

## 2.7 Zadania różne II

157. Obliczyć

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n + n^2 + n^3 + \cdots + n^n}{1^n + 2^n + 3^n + \cdots + n^n}$$

158. Funkcja $f$ spełnia warunek $|f(x) - f(y)| \leqslant |x - y|^3$ dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}$. Uzasadnić, że jest stała na $\mathbb{R}$.

159. Udowodnić, że

$$(1) \lim_{n\to\infty} \frac{1^4 + 2^4 + \ldots + n^4}{n^5} = \frac{1}{5}$$

$$(2) \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{1} + \sqrt{2} + \ldots + \sqrt{n}}{n\sqrt{n}} = \frac{2}{3}$$

$$(3) \lim_{n\to\infty} \frac{1^p + 2^p + \ldots + n^p}{n^{p+1}} = \frac{1}{p+1},\ p > 0$$

$$(4) \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{e^1} + \sqrt[n]{e^2} + \ldots + \sqrt[n]{e^n}}{n} = e - 1$$

$$(5) \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{1}{1^2 + n^2} + \frac{1}{2^2 + n^2} + \ldots + \frac{1}{n^2 + n^2}\right) = \frac{\pi}{4}$$

$$(6) \lim_{n\to\infty} \frac{a}{n}\left(\sin\frac{a}{n} + \sin\frac{2a}{n} + \ldots + \sin\frac{na}{n}\right) = \cos a - 1$$

160. Dla liczby $n \in \mathbb{N}$ niech $x_n$ oznacza pierwiastek równania $e^{-x} = nx$. Obliczyć granicę

$$\lim_{n\to\infty} (n(nx_n - 1)).$$

161. Funkcja $f$ jest ciągła i ma okres $T = 1$. Pokazać, że istnieje liczba $x_0$, dla której zachodzi równośc $f(x_0 + \pi) = f(x_0)$.

162. Zbadać, czy istnieją funkcje wypukłe $f$ i $g$ takie, że $f(x) - g(x) = \sin x$, $x \in \mathbb{R}$.

# 3 Funkcje wielu zmiennych, funkcje skalarne

163. Naszkicować dziedzinę funkcji $f(x, y) = \arcsin(x^2 + y^2 - 2) + \sqrt{x - y}$

164. Obliczyć następującą granicę f. dwóch zmiennych:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}$$

165. Udowodnić, że

$$-\frac{1}{2} \leqslant \frac{xy}{x^2 + y^2} \leqslant \frac{1}{2}$$

166. Zbadać ciągłość funkcji $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ takiej, że

$$f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2},\ \text{dla } (x, y) \neq (0, 0)$$

oraz $f(0, 0) = 0$.

167. Obliczyć

$$(a)\ \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$$

$$(b)\ \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\sin(x^3+y^3)}{x+y}$$

168. Niech $F(x,y) = (x\cdot y)\sin(\frac{x}{y})$. Obliczyć $\frac{\partial F}{\partial x}$ oraz $\frac{\partial F}{\partial y}$.

169. Niech $F(x,y) = (x\cdot y)^{x+\ln y}$. Obliczyć $\frac{\partial F}{\partial x}$ oraz $\frac{\partial F}{\partial y}$.

170. Wyrazić w jawnej postaci funkcje określone w sposób uwikłany za pomocą równania

$$(x^3-1)y + e^x y^2 + \cos x - 1 = 0$$

171. Wyznacz ekstrema lokalne funkcji zmiennej $x$ uwikłanej, zadanej równaniem:

$(a)$ $x^2 - 4x + y^2 = 5$

$(b)$ $x^2 = xy - 1$

$(c)$ $x^3 + y^3 = 3xy$

$(d)$ $x^{2y} + y^2 = 1$

172. Czy do krzywej o równaniu $x^4 - x^2 + y^2 = 0$ (*Lemniskaty Gerona*) stosuje się twierdzenie o funkcji uwikłanej. W jakich punktach?

173. Czy do krzywej o równaniu $x2^y + y^2 = 1$ stosuje się twierdzenie o funkcji uwikłanej? W jakich punktach?

174. Wyznaczyć $x$, dla którego równanie $y - \ln(x+y) = 0$ określa $y$ jako funkcję zmiennej $x$. Obliczyć $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$

175. Niech

$$F(x,y) = x^3y^2 - y\ln x - 2e^{2x-2} + y.$$

Wykazać, że istnieją funkcje rzeczywiste $g, h$ klasy $C^1$ określone w pewnym otoczeniu $U$ punktu $x = 1$ takie, że $F(x, g(x)) = 0 = f(x, h(x))$ oraz $g(x) < h(x)$ dla $x \in U$. Znaleźć $g(1)$, $h(1)$, $g'(1)$,$h'(1)$.

176. Unormować wektor $\overrightarrow{u}$ i obliczyć w jego kierunku pochodną kierunkową w punkcie $a$, dla

$(a)$ $f(x,y) = e^y x^{x+y},\ \overrightarrow{u} = [-1,3], a = (1,1)$

$(b)$ $f(x,y) = x^2 + xy - y^2,\ \overrightarrow{u} = [4,3], a = (1,-1)$

$(c)$ $f(x,y,z) = \sqrt[3]{x+y+z},\ \overrightarrow{u} = [-1,3,2], a = (1,2,1)$

177. Zbadać ciągłość funkcji

178. Sprawdzić z definicji, czy funkcja dana wzorem $f(x,y) = 5 - (x^6 + y^4)$ ma w punkcie $(x_0, y_0) = (0,0)$ ekstremum lokalne.

179. Obliczyć i zinterpretować geometrycznie całkę

$$\iint_{[-1,1]\times[0,2]} (5-\sqrt{|xy|})\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

180. Obliczyć

$$\iint_D \max\{x,y\}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

gdzie $D=[0,1]\times[1,2]$.

181. Obliczyć całkę podwójną

$$\iint_D \frac{x}{y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

gdzie obszar $D$ jest obszarem ograniczonym parabolami $y=x^2$, $x=y^2$, $y>0$.

182. Obliczyć

$$\iint_D (x+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

gdzie $D$ jest obszarem ograniczonym prostymi o równaniach $x=0$, $y=0$ i $x+y=3$.

183. Obliczyć

$$\iint_D 2x^2y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

gdzie $D$ jest obszarem ograniczonym osiami współrzędny i krzywą o równaniu $\sqrt{y}+\sqrt{x}=1$.

184. Obliczyć całkę podwójną

$$\iint_D \frac{x^2}{y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

gdzie obszar $D$ jest ograniczony prostymi $x=4$, $y=x$ i hiperbolą $y=\frac{1}{x}$.

185. Obliczyć

$$\int_D xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

gdzie $D$ jest obszarem ograniczonym krzywymi o równaniach $xy=1$ oraz $|x-y|=1$.

186. Obliczyć

$$\int_0^1\int_0^1 e^{\max\{x,y\}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

187. Wyprowadzić wzór na objętość kuli w przestrzeni $\mathbb{R}^3$ o promieniu równym $R$.

## 4 Analiza w przestrzeniach metrycznych. Przestrzenie Unormowane. Przestrzenie Banacha.

188. Sprawdzić, że dowolny zbiór $X$ z metryką dyskretną $d$ jest przestrzenią metryczną zupełną.

189. W przestrzeni $C([a,b])$ funkcji ciągłych postaci $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, metryka dana jest wzorem

$$\rho(f,g) = \max_{a \leqslant x \leqslant b} |f(x) - g(x)|.$$

Sprawdzić, że $(C([a,b]), \rho)$ jest przestrzenią metryczną zupełną.

190. Załóżmy, że $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest ciągiem zbiorów otwartych oraz $[a,b] \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$. Udowodnić, że istnieje liczba $k \in \mathbb{N}$ taka, że $[a,b] \subseteq U_1, U_2, \ldots, U_k$.

## 5 Zadania różne III

191. Niech $f$ będzie jednostajnie ciągła na odcinku $(a,b)$. Uzasadnić, że funkcję $f$ można przedłużyć jednoznacznie do funkcji ciągłej (jednostajnie) na odcinku domkniętym $[a,b]$, tzn. istnieje ciągła funkcja $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ taka, że $f(x) = g(x)$ dla $x \in (a,b)$.

192. Pokazać, że odwzorowanie $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dane wzorem $f(x,y) = (\frac{1}{2}(1+y), \frac{1}{3}(3-x))$ jest kontrakcją przy metryce euklidesowej.

193. Pokazać, że $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dane wzorem

$$f(x,y) = (1 - \frac{1}{3}x, 1 + \frac{1}{3}y, 2 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}y)$$

jest kontrakcją.

194. Pokazać, że odwozorwanie $g\colon [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ dane wzorem

$$g(x) = \frac{1}{x+1}$$

nie jest kontrakcją mimo, że $d(g(x), g(y)) \leqslant d(x,y)$, $x, y \leqslant 0$, $x \neq y$.

195. Korzystając z Zasady Banacha pokazać, że układ równań

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}\sin x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{3} \\ y = \frac{1}{3}\cos y + \frac{1}{3}x \end{cases}$$

ma dokładnie jedno rozwiązanie.

196. Metodą kolejnych przybliżeń rozwiązać zagadnienie Cauchy'ego

$$\begin{cases} y'(x) = y(x), x > 0, \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

197. Funkcja $f$ spełnia warunek $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 2$ oraz jest ciągła na przedziale $[1,\infty)$. Wyznaczyć granicę

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} \int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$