Analiza Matematyczna 1

Ziemowit Wójcicki

13 stycznia 2021

Streszczenie

Wprowadzenie do analizy matematycznej, z uwzględnieniem elementów topologii przestrzeni metrycznych, rachunku różniczkowego i całkowego funkcji jednej zmiennej i podstaw analizy, różniczkowania i całkowania funkcji wektorowych. Początek pisany z myślą o kompletnym laiku lub entuzjaście nauk ścisłych, rozdziały dalsze obejmują możliwie szeroki zestaw przykładów twierdzeń i pojęć, które wydały się autorowi (w *jego* matematycznych zabawach i *subjektywnym* odczuciu) edukacyjne, przydatne i ciekawe.

Spis treści

Rozdział 1

Preliminaria

Matematyka jest najpiękniejszym i najpotężniejszym tworem ducha ludzkiego. Tylko państwa, które pielęgnują matematyką, mogą być silne i potężne.

Stefan Banach

Ten dokument zaczął swoje życie jako moje osobiste notatki elektroniczne, w oparciu o wykłady na które uczęszczałem oraz literaturę i służył głównie utrwalaniu i przypominaniu sobie szczególnie istotnych faktów z analizy. Ćwiczyłem też formułowanie i redagowanie twierdzeń i ich dowodów. W pewnym momencie język zaczął przypominać skrypt pisany do neutralnego czytelnika a nie notatki osobiste. Jest to w 100% amatorski "skrypt studencki", a ja nie jestem ani wybitnym studentem a już tym bardziej żadnym autorytetem w dziedzinie. Proszę mieć to na uwadze.
Uwagi: rozdział o ciągłości funkcji to na razie szczególny „szkicobałagan". Dowodzę twierdzeń powołując się na twierdzenia, które wprowadzam później, albo jeszcze nie wskazałem, etc. Ciągły Work-in-progress i nie mogę tego poukładać tak jak chcę.

Klasycznie - gwiazdką „*" oznaczone są paragrafy, punkty, podpunkty, przykłady, twierdzenia i zadania a nawet rozdziały, których lektura jest opcjonalna/niezalecana podczas „pierwszego czytania", gdyby patrzeć na ten dokument jak na podręcznik, czego nie zalecam studentom(, ale wierzę w istnienie entuzjastów-amatorów matematyki :)).

Krótki esej o poznawaniu matematyki i w szczególności Analizy Matematycznej. „Dawniej określano matematykę jako naukę o liczbach i utworach przestrzennych oraz wzajemnych związkach między nimi. Jest to określenie za ciasne, jakkolwiek uzasadnione historycznie; matematyka zaczęła się bowiem od badania liczb."[1]

[1] Jacek Troskolański, *Matematyka w zarysie*, Państwowe Wydawnictwa Techniczne, Warszawa 1960

Rozdział 2

Dwa słowa o logice i metodzie matematyki

„Oczywiste" jest najbardziej
niebezpiecznym słowem w
matematyce.

Eric Temple Bell

Na początku spędzimy trochę czasu przyzwyczajając się do „matematycznego żargonu", terminologii i stylu zapisywania matematycznych rozumowań. Niestety, z tego względu dla nawet **odrobinę** doświadczonego studenta (a nawet ambitnego ucznia lub (o zgrozo) matematycznego olimpijczyka który by sięgnąłby po mój tekst), rozdział ten będzie niestrawny, stąd nie jest on dobrym wprowadzeniem ani przypomnieniem teorii mnogości. Dobre przypomnienie stanowi pierwszy rozdział z *Wykładów z analizy matematycznej* profesora Ryszarda Rudnickiego. Świetną książką wprowadzającą w Teorię Mnogości jako „wstęp do matematyki" są *Wykłady ze wstępu do matematyki, wprowadzenie do teorii mnogości* (Wojciech Guzicki, Piotr Zakrzewski).

- **Twierdzenie** - ...
- **Lemat**(gr. $\lambda\nu\mu\mu\alpha$) - twierdzenie pomocnicze, wprowadzane celem uproszczenia dowodów innych twierdzeń.

Rozdział 3

Elementy Teorii mnogości i „żargon matematyczny”

> Zbiorem jest spojenie w całość
> określonych rozróżnialnych
> podmiotów naszej poglądowości
> czy myśli, które nazywamy
> elementami danego zbioru.
>
> Georg Cantor

3.1 Zbiór i należenie do zbioru.

Typowe zbiory *przeważnie* będziemy oznaczać dużymi literami alfabetu łacińskiego, np. A, B, X, Y, Z.
Zdanie

„element a należy do zbioru A”

zapisujemy symbolicznie następująco:

$$a \in A$$

Mówimy też wtedy, że a jest „elementem zbioru A”. Elementami zbiorów mogą być inne zbiory. a w powyższym przykładzie może jest jakimś zbiorem. Możemy napisać $B \in A$ i mieć na myśli „jakieś” zbiory A i B. To na razie nie jest ważne.

Zbiory skończone (o skończonej liczbie elementów) możemy opisać wypisując ich elementy, otoczone nawiasami klamrowymi $\{,\}$, np. moglibyśmy zdefiniować następujące zbiory A, B:

$$A = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$B = \{\alpha, 1, x, A\}$$

$$C = \{a, b, c, d, \ldots, x, y, z\}$$

W ostanim przypadku nie wypisaliśmy wszystkich elementów zbioru C ale zasugerowaliśmy (wielokropkiem „...”), że chodzi o wszystkie litery od a do z alfabetu. Z takim zapisem musimy być ostrożni: czy np. $ś \in C$? Czyli, czy uwzględniamy w naszym zbiorze „polskie" znaki? Stosowanie polskich znaków diaktrycznych (liter z ogonkami i kropkami) jako symbole matematyczne nie jest przyjęte, jednak realnie można mieć wątpliwości co autor (w tym wypadku ja) miał na myśli.

Przypomnijmy znane ze szkoły zbiory liczb:

- Zbiór liczb **r**zeczywisych, oznaczany $\mathbb{R}$
- Zbiór liczb **n**aturalnych, oznaczany $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$
- Zbiór liczb całkowitych, oznaczany $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ (takie jest niestety oznaczenie międzynarodowe, od niemieckiego Zahlen).

W dalszym ciągu poznamy również liczby zespolone, których zbiór oznacza się... literą $\mathbb{C}$ (możemy skojarzyć np. z ich angielską nazwą „**C**omplex numbers").

Definicja 3.1.1. Mówimy, że zbiór A **zawiera się** w zbiorze B, gdy każdy element zbioru A należy również do zbioru B, czyli gdy

$$\text{dla każdego } a \in A \text{ zachodzi } a \in B.$$

Widzimy też, że $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$. Wystarczy rozpisać: $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\} \subseteq \{0, 1, 2, \ldots\} = \mathbb{N}$
Ogólnie:

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$$

Uwaga 3.1.2. Nie należy mylić pojęć **zawierania** się zbiorów ($\subseteq$) oraz **należenia do** zbioru ($\in$). Np. w poprzednim przykładzie, określiliśmy zbiory $A = \{1, 2, 3, 4\}$ i $B = \{\alpha, 1, x, A\}$. Zbiór A **należy** do zbioru B ale **nie** *zawiera się* w tym zbiorze. Np. $2 \in A$ ale $2 \notin B$ - a według definicji, aby $A \subseteq B$ to $2 \in A$ musiałoby pociągać, że również $2 \in B$.

Symbol tego typu: $\varphi(x)$ (dowolna (tutaj - grecka) litera i zmienna (tutaj x) w nawiasie) jest oznaczeniem na pewne „zdanie logiczne" o obiekcie x. Możemy np. umówić się w ramach danego rozumowania, że $\delta(y)$ **oznacza** „y jest liczbą wymierną" (cokolwiek to znaczy). Znaczek $\equiv$ oznacza „równoważność" różnych zdań. Np. moglibyśmy zdefiniować i oznaczyć:

- $\varphi(x) \equiv$ „x jest figurą geometryczną",
- $\Psi(x) \equiv$ „x jest większe od zera"$\equiv x > 0$,
- $\psi(n) \equiv$ „n jest liczbą naturalną"$\equiv n \in \mathbb{N}$.
- $\Xi(p) \equiv$ „p jest prostą na płaszczyźnie".

W tej chwili może się to wydawać skomplikowane i być może zbędnie, ale wielokrotnie zobaczymy, że zapis symboliczny pozwala nam wyrażać i analizować ogólne struktury, podstawiając odpowiedni symbol za „nieokreślone zdanie logiczne". Na przykład, omówimy przy jego pomocy kolejną konwencję notacyjną.

Zapis $x \in X\colon \varphi(x)$ czytamy „x należące do X *takie, że* $\varphi(x)$". Przy czym, każdy element x z osobna spełnia warunek φ. Wcześniej wypisywaliśmy elementy zbiorów w nawiasach klamrowych $\{,\}$[1]. Zapis $\{x \in X\colon \varphi(x)\}$ oznacza „zbiór, którego elementami są x należące do X *takie, że* $\varphi(x)$".

[1] pieszczotliwie nazywanych też „wąsaczami".

Przykład 1. Zapis

$$A = \{n \in \mathbb{N}\colon n = 2k, \text{ dla pewnego } k \in \mathbb{N}\}$$

można wyrazić jako

- „A jest zbiorem liczb $n \in \mathbb{N}$ takich, że $n = 2k$ dla pewnego $k \in \mathbb{N}$"
- „A jest zbiorem liczb n należących do zbioru liczb naturalnych i takich, że każda (z osobna) liczba n jest równa $2k$ dla pewnego $k \in \mathbb{N}$"
- A jest zbiorem liczb naturalnych n takich, że $n = 2k$ dla pewnego $k \in \mathbb{N}$.
- A jest zbiorem liczb naturalnych podzielnych przez 2.

ale oczywiście wszystko to znaczy to samo: A jest zbiorem liczb parzystych:

$$A = \{0, 2, 4, 8, 10, 12, \ldots\}.$$

Zbiór parzystych liczb naturalnych bywa oznaczany przez $2\mathbb{N}$, tzn.:

$$2\mathbb{N} := \{n \in \mathbb{N}\colon n = 2k, \text{ dla pewnego } k \in \mathbb{N}\}.$$

Definicja 3.1.3. **Sumą** zbiorów A i B nazywamy zbiór

$$A \cup B = \{a\colon a \in B \text{ lub } a \in B\}.$$

A więc zbiór elementów a takich, że a należy do chociaż jednego ze zbiorów A, B.

Przykład 2. $A = \{1, 2, b, \alpha\}$, $B = \{1, \alpha, 3, 5\}$. Wtedy $A \cup B = \{1, 2, 3, 5, b, \alpha\}$.

Definicja 3.1.4. **Iloczynem** albo **przekrojem** zbiorów A i B nazywamy zbiór

$$A \cap B = \{a\colon a \in A \text{ i } a \in B\}.$$

A więc zbiór elementów wspólnych zbiorów A i B.

Przykład 3. $A = \{1, 2, b, \alpha\}$, $B = \{1, \alpha, 3\}$. Wtedy $A \cap B = \{1, \alpha\}$.

Definicja 3.1.5. **Różnicą** zbiorów A i B nazywamy zbiór

$$A \setminus B = \{a\colon a \in A \text{ i } a \notin B\}.$$

A więc zbiór powstający przez usunięcie ze zbioru A elementów, które należą też do zbioru B.

Przykład 4. $A = \{1, 2, b, \alpha\}$, $B = \{1, \alpha, 3\}$. Wtedy $A \setminus B = \{2, b\}$.
Ćwiczenie. $A = \{f, g, h, \delta\}$, $B = \{\delta, f, g, 1, 2, 3\}$. Wyznaczyć zbiory $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$ oraz $B \setminus A$.

Twierdzenie 3.1.6. *Zbiór $A \cap B$ jest największym (w sensie zawierania albo inaczej inkluzji, tzn. ze względu na relację porządku „$\subseteq$") zbiorem zawartym zarówno w zbiorze A jak i w zbiorze B, czyli*

- $A \cap B \subseteq A$ *i* $A \cap B \subseteq B$,
- *Jeżeli C jest takim zbiorem, że $C \subseteq A$ i $C \subseteq B$, to*[2] $C \subseteq A \cap B$.

[2]właśnie jest „mniejszy" w „sensie zawierania" od $A \cap B$.

Dowód. Ponieważ $x \in A \cap B$ pociąga, że $x \in A$, to $A \cap B \subseteq A$. Analogicznie $A \cap B \subseteq B$.

Niech teraz C będzie dowolnym zbiorem takim, że $C \subseteq A$ oraz $C \subseteq B$. Ustalmy $x \in C$. Wówczas z określenia zbioru C mamy, że $x \in A$ oraz $x \in B$. Czyli $x \in A \cap B$. Pokazaliśmy, więc że

$$x \in C \implies x \in A \cap B.$$

Pokazaliśmy w ten sposób, że $C \subseteq A \cap B$, co kończy dowód. □

Ćwiczenie. Udowodnić, że zbiór $A \cup B$ jest najmniejszym (w sensie zawierania) zbiorem zawierającym zarówno zbiór A jak i zbiór B.

Ćwiczenie. Udowodnić, że dla dowolnych zbiorów A, B i C zachodzi tożsamość

$$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \setminus C.$$

Definicja 3.1.7. Parą uporządkowaną liczb a i b nazywamy zbiór (a, b) taki, że

$$(a, b) = (x, y) \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } x = a \text{ oraz } y = b.$$

a nazywamy poprzednikiem pary (a, b) a b następnikiem tej pary.

Para uporządkowana różni się od zbioru $\{a, b\}$ np. tym, że $(a, b) \neq (b, a)$, gdy $a \neq b$, a już powinniśmy wiedzieć, że $\{a, b\} = \{b, a\}$. Ponadto, $(a, a) \neq \{a\}$ podczas, gdy $\{a, a\} = \{a\}$.

Twierdzenie 3.1.8. *Parę uporządkowaną (a, b) można zdefiniować przy pomocy zbiorów w ten sposób:*

$$(a, b) = \{\{a, b\}, \{b\}\}.$$

Tzn. zbiór zdefiniowany w powyższy sposób spełnia założenia poprzedniej definicji.

Dowód. Chcemy pokazać, że $\big\{\{a\}, \{a, b\}\big\} = \big\{\{c\}, \{c, d\}\big\}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a = c$ i $b = d$. Dowód implikacji „w lewo". Załóżmy, że $\big\{\{a\}, \{a, b\}\big\} = \big\{\{c\}, \{c, d\}\big\}$. Mamy dwa przypadki:

1. $a = b$. Wtedy
$$\big\{\{a\}, \{a, b\}\big\} = \big\{\{a\}, \{a, a\}\big\} = \big\{\{a\}, \{a\}\big\} = \big\{\{a\}\big\}.$$
Z założenia $\{c, d\} \in \{\{a\}\}$ a stąd $\{c, d\} = \{a\}$, czyli $c = a$ i $d = a$. A więc $c = d = a = b$.

2. $a \neq b$. Mamy $\{c\} \in \big\{\{a\}, \{a, b\}\big\}$. Ale $a \neq b$ czyli $\{c\} \neq \{a, b\}$. Zatem $\{c\} = \{a\}$. Mamy więc, że $a = c$. Dalej: $\{a, b\} \in \big\{\{c\}, \{c, d\}\big\}$. Ponieważ $a \neq b$, to $\{a, b\} = \{c, d\}$. Wiemy, że
$$a = c \text{ oraz } a \neq b.$$
Wniosek: $b = d$.

□

Poprzednie twierdzenie służy głównie zademonstrowaniu, że różne pojęcia matematyczne mogą być zdefiniowane przy pomocy niewielkiego zestawu prostszych pojęć pierwotnych. Nie będziemy szerzej dyskutować metodologicznych (albo filozoficznych) zalet takiego postępowania, warto jednak mieć świadomość że wiele objektów, którymi będziemy się posługiwać, na odpowiednim poziomie ma bardziej abstrakcyjne definicje. Nie omówimy np. jak w ramach teorii mnogości definiuje się wszystkie *liczby* jako pewne *zbiory*, ale tak właśnie są one określone w ramach współczesnej matematyki. Informacje na ten temat może czytelnik znaleźć w *świetnej* książce *Wykłady ze wstępu do matematyki. Wprowadzenie do teorii mnogości.* (Wojciech Guzicki, Piotr Zakrzewski.)

Definicja 3.1.9. Dla dowolnych zbiorów A, B zbiór

$$A \times B = \{(a, b) \colon a \in A \text{ oraz } b \in B\}$$

nazywamy **iloczynem kartezjańskim**(albo **produktem kartezjańskim** zbiorów A, B. Definicję możemy uogólnić indukcyjnie na dowolną skończoną ilość zbiorów: Ustalmy dow. rodzinę $\{A_n \colon n \in \mathbb{N}\}$, wtedy uogólniony iloczyn kartezjański n zbiorów określamy następująco:

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \{(a_1, \ldots, a_n) \colon a_1 \in A_1, \ldots, a_n \in A_n\}.$$

Przykład 5. Niech $a_1, a_2, \ldots, a_n$ i $b_1, b_2, \ldots, b_n$ będą takimi liczbami, że $a_i < b_i$, $i = 1, \ldots, n$. Wtedy zbiór $\mathsf{X}_{i=1}^{n}[a_i, b_i] = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \ldots \times [a_n, b_n]$ nazywamy kostką n-wymiarową.

3.2 Relacje, funkcje i zasada abstrakcji

Relacje - podstawowe intuicje Definicja relacji okazuje się śmiesznie prosta:

Definicja 3.2.1. Zbiór $R \subseteq X \times X$ nazywamy **relacją** na zbiorze X. Zatem relacja R na zbiorze X jest więc po prostu podzbiorem iloczynu kartezjańskiego zbioru X z samym sobą.

Mówimy, że relacja R jest

- **zwrotna**, gdy $\forall_{x \in X.}\ (x, x) \in R$.
- **przechodnia**, gdy $\forall_{x,y,z \in X.}$ jeśli $(x, y) \in R$ i $(y, z) \in R$, to $(x, z) \in R$.
- **symetryczna**, gdy $\forall_{x,y \in X.}$ jeśli $(x, y) \in R$, to $(y, x) \in R$.
- **antysymetryczna**, gdy $\forall_{x,y \in X.}$ jeśli $(x, y) \in R$ oraz $(y, x) \in R$, to $x = y$.
- **spójna**, gdy $\forall_{x,y \in X.}\ x = y$ lub $(x, y) \in R$ lub $(y, x) \in R$.

Zbiór X nazywa się też czasem **polem relacji** $R \subseteq X^2$. Relacja R spójna to relacja taka, że dowolne dwa elementy należące do jej pola są ze sobą w tej relacji (lub ew. są tym samym elementem.)

Przykład 6. Zbadamy własności relacji $R_m \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ zadanej następująco:

$$xRy \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } x - y \text{ dzieli } m.$$

Inaczej mówiąc, x i y są w relacji R wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje takie $k \in \mathbb{N}$, że

$$x - y = k \cdot m.$$

TO-DO

3.2.1 Teoria mocy

UWAGA, ten rozdział jest nie tylko (jeszcze) prawie pusty ale absolutnie niedopracowany.

Definicja 3.2.2. Mówimy, że zbiory A i B są równoliczne, gdy istnieje bijekcja $f \colon A \xrightarrow[1-1]{\text{na}} B$. Piszemy wtedy $A \sim B$.

Definicja 3.2.3. Mówimy, że zbiór A jest **przeliczalny**, gdy jest równoliczny ze zbiorem liczb naturalnych: $A \sim \mathbb{N}$. Mówimy, że zbiór jest **co najwyżej przeliczalny**, gdy jest przeliczalny lub skończony.

Definicja 3.2.4. Mówimy, że zbiór A jest **mocy continuum**, gdy jest równowliczny ze zbiorem liczb rzeczywistych, czyli $A \sim \mathbb{R}$.

Nieformalnie i bardzo nieściśle mówiąc, „mocą" zbioru nazywamy „liczbę" tudzież „liczność" jego elementów. Moc zbioru $\mathbb{N}$ oznacza się w teorii mnogości przez $\aleph_0$ ($\aleph$ to hebrajska litera - „alef") a moc zbioru $\mathbb{R}$ przez $\mathfrak{c}$.

W teorii mnogości definiuje się **liczby kardynalne**. $\aleph_0$ i $\mathfrak{c}$ są przykładami tzw. liczb kardynalnych. Przez $|A|$ lub $\operatorname{card} A$ oznaczamy liczbę elementów zbioru A. Ten drugi zapis wiąże się ze wspomnianymi l. kardynalnymi - tematu tego nie będziemy zgłębiać, ale ten popularny w teorii mnogości zapis pozwoli w dalszej częsci lektury nie mylić liczby elementów zbioru A z jego tzw. **miarą** - również często oznaczaną przez $|A|$. Temat stanie się jasny dopiero na zaawansowanym etapie lektury - na razie nie należy się tym przejmować. Czytelnikowi wystarczy przyjąć, że $\operatorname{card} A$ to „liczba" mówiąca „ile elementów ma zbiór A".

Zatem, gdy zbiór A jest mocy continuum, to piszemy $\operatorname{card} A = \mathfrak{c}$ a gdy jest przeliczalny, to wówczas piszemy $\operatorname{card} A = \aleph_0$. Jeżeli zbiór A jest co najwyżej przeliczalny, to możemy napisać, że $\operatorname{card} A \leqslant \aleph_0$.

Twierdzenie 3.2.5. *Niech X będzie dowolnym zbiorem. Relacja $\sim \subseteq \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X)$, czyli relacja równoliczności określona na iloczynie wszystkich podzbiorów zbioru X jest relacją równoważności.*

Podajemy kilka bez dowodu kilka ważnych twierdzeń, których sens jest intuicyjny, jednak ścisłe dowody nie są wcale oczywiste. Po odpowiedni wykład ponownie odsyłam do książek wprowadzających do teorii mnogości albo przedmiotu „wstęp do matematyki" jaki obecnie realizuje się na kierunkach matematycznych. Zainteresowani znajdą też w tej literaturze więcej nt. liczb kardynalnych.

Twierdzenie 3.2.6 (Cantora o przekątni)**.** *Dla dowolnego zbioru X, zachodzi $|\mathcal{P}(X)| \neq |X|$.*

Twierdzenie 3.2.7. *Dla dowolnego zbioru skończonego X: $|\mathcal{P}(X)| = 2^{|X|}$.*

Twierdzenie 3.2.8 (Cantora-Bernsteina)**.** *Dla dowolnych zbiorów X, Y zachodzi implikacja*

$$\textit{jeśli } |X| \leqslant |Y| \textit{ oraz } |Y| \leqslant |X| \textit{ to } |X| = |Y|.$$

3.2.2 Funkcje

Intuicje:

Ścisłe określenie pojęcia funkcji jako zbioru.

Definicja 3.2.9. Relację $f \subseteq X \times Y$ nazywamy **funkcją** albo **odwzorowaniem** między zbiorami X i Y, gdy

$$\text{Dla każdych } x \in X \text{ i } y, z \in X \text{ jeśli } (x, y) \in f \text{ oraz } (x, z) \in f \text{ to } z = y.$$

Zapis $X \to Y$ czytamy „ze zbioru X w zbiór Y". Zapis $f : X \to Y$ mówi nam, że f jest funkcją ze zbioru X w zbiór Y.

Uwaga 3.2.10. Warunek powyższy nazywa się **prawostronną jednoznacznością relacji** f. Zauważmy, że nazawa ta jest intuicyjna, oraz że warunek ten dobrze oddaje naszą intuicję, że przyporządkowanie elementowi $x \in X$ elementu ze zbioru Y jest *jednoznaczne*.

Uwaga 3.2.11 (Konwencja notacyjna 1)**.** Piszemy $\boxed{y = f(x),\ \varphi(x)}$ gdy *dla każdego* x spełniającego $\varphi(x)$ zachodzi $y = f(x)$. Najczęściej warunek φ będzie w postaci „x należy do pewnego podzbioru D_f".

Np. mówimy, że funkcja jest „nieujemna", gdy $f(x) > 0, x \in D_f$ (tzn. „$f(x) > 0$ dla *każdego* $x \in D_f$").

Przykład 7. Zdefiniujmy funkcję $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ wzorem $f(x) = (-1)^x$. Wtedy możemy napisać:

$$f(x) > 0,\ x \text{ parzyste}$$

albo

$$f(x) = 1,\ x \in \{0, 2, 4, \ldots\}.$$

Obydwa wyrażenia są poprawne i dla naszej funkcji prawdziwe.

Uwaga 3.2.12 (Konwencja notacyjna 2)**.** Gdy funkcja określona na liczbach rzeczywistych dla wszystkich argumentów przyjmuje wartości dodatnie (nieujemne), tzn. $f(x) \geqslant 0, x \in D_f$ ($f(x) > 0$), to fakt ten w tekście dla uproszczenia zapisujemy $f \geqslant 0$ ($f > 0$). Analogicznie gdy funkcja jest „ujemna" (tzn. $f(x) < 0, x \in D_f$), to piszemy $f < 0$.

Definicja 3.2.13. Niech $f\colon X \to Y$. Zbiór X nazywamy **dziedziną** funkcji a zbiór Y jego **przeciwdziedziną**. Zbiór Y w powyższym zapisie nie musi być **zbiorem wartości** funkcji f, tj. zbiorem $\{y \in Y\colon (x, y) \in f \subseteq Y\}$. Dziedzinę funkcji f oznaczamy czasami jako D_f albo $\mathrm{dom}(f)$ a przeciwdziedzinę jako R_f lub $\mathrm{range}(f)$ - od angielskiego „range", czyli „zasięg" funkcji.

Z powyższego określenia, dwie funkcje f i g są równe (piszemy wtedy $f = g$) wtedy i tylko wtedy gdy

1. $D_f = D_g$
2. $f(x) = g(x)$ dla każdego $x \in D_f (= D_g)$.

Z warunku drugiego wynika, że musi być również $R_f = R_g$. Stwierdzenie, że $f(x) = g(x)$ dla x należącego do $D_f \cup D_g$ *nie* pozwala nam uznać, że $f = g$!

Przykład 8. Niech f i g będą dane wzorami:

$$f(x) = \frac{x^2}{x} \text{ oraz } g(x) = x.$$

Czy $f = g$? Odpowiedź brzmi nie! Otóż $f(x) = \frac{x^2}{x} = x$ dla $x \neq 0$. Dla $x = 0$ funkcja f nie jest w ogóle określona, gdyż nie możemy dzielić przez 0. Dla każdego $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ mamy więc $f(x) = g(x)$, jednak $g(0) = 0$ a $f(0)$ nie istnieje i stąd $\mathbb{R} \setminus \{0\} = D_f \neq D_g = \mathbb{R}$.

Definicja 3.2.14. Mówimy, że funkcja $f\colon X \to Y$ jest *monotoniczna*, gdy spełnia jeden z poniższych (wzajemnie się wykluczających) warunków:

- Dla każdych $x_1, x_2 \in X$, jeśli $x_1 < x_2$, to $f(x_1) \leqslant f(x_2)$ i wtedy mówimy, że funkcja f jest **nierosnąca** albo **słabo malejąca**;

- Dla każdych $x_1, x_2 \in X$, jeśli $x_1 > x_2$, to $f(x_1) \geqslant f(x_2)$ i wtedy mówimy, że funkcja f jest **niemalejąca** albo **słabo rosnąca**.

Gdy nierówność w $\leqslant$ pierwszym punkcie zamienimy na nierówność ostrą: $<$, to oczywiście mówimy, że funkcja f jest **malejąca** a gdy nierówność $\geqslant$ w drugim punkcie na $>$, to mówimy, że funkcja f jest **rosnąca**. W obu przypadkach powiemy, że funkcja f jest ***ściśle*** **monotoniczna**.

Uwaga 3.2.15. Niektórzy autorzy przyjmują inne definicje:

- Funkcję (przy naszej definicji) **monotoniczną** określają jako **słabo monotoniczną**,
- a funkcję (w naszym rozumieniu) **ściśle monotoniczną** określają jako **monotoniczną**.

Można by więc też przyjąć, że funkcja monotoniczna to: albo „ściśle monotoniczna" albo „słabo monotoniczna" i operować wszystkimi trzema pojęciami w sposób jednoznaczny...

Przykład 9. Niech $A = \{x \in \mathbb{R} \colon \sqrt{x} \leqslant 4\}$. Jak uprościś zapis zbioru A? Po pierwsze $x \geqslant 0$. Chciałoby się nierówność $\sqrt{x} \leqslant 4$ obustronnie podnieść do kwadratu. Wówczas po lewej stronie nierówności mamy x a po drugiej 16. Ale czy kierunek nierówności został zachowany? Otóż tak; **ponieważ** funkcja $x \mapsto x^2$ jest rosnąca dla $x \geqslant 0$. Zatem $x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2)$. Czyli

$$0 \leqslant \sqrt{x} \leqslant 4 \implies 0^2 \leqslant (\sqrt{x})^2 \leqslant 4^2 \implies 0 \leqslant x \leqslant 16.$$

Czyli $A = [0, 16]$.

Ogólnie: możemy zadziałać na obydwie strony dowolnej nierówności (między liczbami rzeczywistymi) funkcją i

- jeżeli funkcja jest rosnąca, to zbiór rozwiązań nierówności nie zmieni się;
- jeżeli funkcja jest malejąca, to aby zbiór rozwiązań nierówności nie zmienił się, musimy zmienić kierunek nierówności.

Definicja 3.2.16. Funkcję $f \colon X \to Y$ nazywamy **różnowartościową** i zapisujemy też jako $f \colon X \overset{1-1}{\to} Y$, gdy dla każdych $x_1, x_2 \in X$ takich, że $x_1 \neq x_2$, zachodzi $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Uwaga 3.2.17. Poprzez *kontrapozycję* równoważnie powyższej definicji funkcja $f \colon X \to Y$ jest różnowartościowa, gdy gdy

dla każdych $x_1, x_2 \in X$ takich, że $f(x_1) = f(x_2)$, zachodzi $x_1 = x_2$.

Uwaga 3.2.18. Łatwo zapamiętać, że funkcja różnowartościowa, to taka, która

różnym argumentom przyporządkowuje *różne wartości*.

Definicja 3.2.19. Funkcję $f \colon X \to Y$ nazywamy funkcją **„na"** (zbiorze Y) i zapisujemy też jako $f \colon X \overset{\text{na}}{\to} Y$, gdy *dla każdego* $y \in Y$ istnieje $x \in X$ takie, że $y = f(x)$.

Inaczej mówiąc: gdy $f \colon X \to Y$ jest funkcją „na" zbiór Y, to znaczy, że $R_f = Y$. Surjekcja jest to zatem funkcja która „pokrywa" całą przeciwdziedzinę albo taką, że jej *przeciwdziedzina* i *zbiór wartości* są tym samym zbiorem.

Przykładami surjekcji jest funkcja identycznościowa

Definicja 3.2.20. Funkcję $f\colon X \to Y$, która jest zarówno funkcją „na” jak i funkcją różnowartościową nazywamy **wzajemnie jednoznaczną** i zapisujemy też jako $f\colon X \underset{\text{na}}{\overset{1-1}{\to}} Y$ (lub $f\colon X \underset{1-1}{\overset{\text{na}}{\to}} Y$).

Uwaga 3.2.21. Funkcja wzajemnie jednoznaczna jest inaczej nazywana *bijekcją*. Bijekcje mają szczególne znaczenie w matematyce i w niektórych dziedzinach matematyki, bijekcje między szczególnymi zbiorami mają swoje własne nazwy i określenia. Np. jako „izomorfizmy” w topologii i algebrze.

Historycznie młodsze są określenia: **surjekcja** na funkcję „na” oraz *injekcja* na funkcję różnowartościową. Trzeba je niestety znać ze względu na ich obecność matematyce (tym samym w literaturze matematycznej), natomiast autor skryptu postara się ich unikać, więc czytelnik na początku nie musi się nimi przejmować i ograniczyć do (chyba) intuicyjnych określeń podanych w definicjach.

Ćwiczenie. Zauważmy, że definicję 3.2.16 mogliśmy zapisać za pomocą kwantyfikatorów:

$$\text{funkcja } f \text{ jest róznowartościowa, gdy } \forall_{x_1,x_2\in X}.\ x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2).$$

Zapisać kolejno definicje funkcji różnowartościowej i funkcji wzajemnie jednoznacznej przy pomocy kwantyfikatorów.

Definicja 3.2.22. Niech $f\colon X \underset{\text{na}}{\overset{1-1}{\to}} Y$ będzie dowolną bijekcją. Funkcję $g\colon Y \to X$ taką, że

$$\text{jeśli } (x,y) \in f, \text{ to } (y,x) \in g$$

nazywamy **funkcją odwrotną do funkcji** f i przyjmujemy oznaczenie $g = f^{-1}$.

Zatem dla bijekcji $f\colon X \to Y$ jej funkcja odwrotna f^{-1} to funkcja taka, że dla każdego $y \in Y$ zachodzi: $f^{-1}(y) = x$ dla pewnego $x \in X$ spełniającego: $y = f(x)$.

Zauważmy, że funkcja f^{-1} odwrotna do $f\colon X \to Y$ jest również bijekcją: $f^{-1}\colon Y \underset{\text{na}}{\overset{1-1}{\to}} X$.

Przykład 10. Niech $X \neq \varnothing$. Funkcję $f\colon X \to X$ daną wzorem $f(x) = x$ nazywamy **identycznością** na zbiorze X. Łatwo zauważyć, że tak zdefiniowana f jest różnowartościowa i określona *na* zbiorze X. Zatem jest to bijekcja i ma funkcję odwrotną: $f^{-1}\colon X \to X$. W tym wypadku oczywiście $f^{-1} = f$, gdyż $f^{-1}(x) = x = f(x)$ dla dowolnego $x \in X$. Zwykle identyczność na zbiorze X oznaczamy Id_X. Możemy zatem napisać:

$$\mathrm{Id}_X\colon X \to X,$$
$$\mathrm{Id}_X(x) = x,\ x \in X.$$

Znanymi ze szkoły funkcjami ze zbioru $\mathbb{R}$ *na* zbiór $\mathbb{R}$ są funkcje sin i cos natomiast funkcje tan i cot są tylko funkcjami *w* zbiór $\mathbb{R}$. Za to tan i cot są różnowartościowe, w przeciwieństwie do funkcji sin i cos. Wszystkie te własności widać na wykresach tych funkcji. Jeszcze jednym prostym przykładem bijekcji będzie dowolna funkcja liniowa, tj. funkcja f dana zależnością $f(x) = ax + b$ dla pewnych ustalonych $a, b \in \mathbb{R}$. Przyjmując $b = 0$ i $a = 1$ widzimy, że oczywiście identyczność na $\mathbb{R}$ jest funkcją liniową.

Przykład 11 (homografia). Funkcją homograficzną nazywamy funkcję $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadaną wzorem

$$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}.$$

gdzie $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ spełniają warunek $ad - bc \neq 0$. Funkcja homograficzna jest funkcją różnowartościową.

3.2.3 Złożenie funkcji

Definicja 3.2.23. Niech $f\colon P \to Y$ i $g\colon X \to P$ będą dowlnymi funkcjami na dow. zbiorach X, Y, P. **Złożeniem funkcji** g **z funkcją** f nazywamy zbiór (relację na zbiorze $X \times Y$)

$$f \circ g = \{(x, y)\colon \text{istnieje } p \in P \text{ takie, że } (x, p) \in g \text{ oraz } (p, y) \in f\}\,.$$

Jeżeli $(x, y) \in f \circ g$, to zapis zgodnie z dotychczasową konwencją wygląda tak: $y = f \circ g(x)$ ale bardziej elegancko przyjęło się pisać w ten sposób: $y = (f \circ g)(x)$.

Zauważmy, że dla $x \in X$ oraz $y \in Y$ takich, że $(x, y) \in f \circ g$ „poprawnym" jest wyrażenie $y = f(g(x))$, z którego możemy „obliczać y-ka w zależności od x-a". Możemy więc pisać, że

$$f \circ g = \{(x, y)\colon \exists_{p \in P.}\ g(x) = p \text{ oraz } f(p) = y\}\,.$$

Fakt, że f jest funkcją odwzorowującą zbiór X w zbiór Y możemy też zilustrować w formie diagramu:

$$X \xrightarrow{f} Y$$

Relacje[3] między funkcjami f, g i $f \circ g$ ilustruje poniższy diagram:

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dr, "f"] & \\ X \arrow[ur, "g"] \arrow[rr, "f \circ g"] & & Y \end{tikzcd}$$

Albo taki:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend right, "f \circ g"'] & P \arrow[r, "f"] & Y \end{tikzcd}$$

Teraz zapowiedziane

Twierdzenie 3.2.24. *Niech $g\colon X \to P$ i $f\colon P \to Y$. Złożenie $f \circ g$ funkcji g z funkcją f jest funkcją $X \to Y$:*

$$f \circ g\colon X \to Y.$$

Dowód. Z definicji mamy, że $f \circ g \subseteq X \times Y$. Pokażemy, że relacja $f \circ g$ jest prawostronnie jednoznaczna. [TO-DO] $\square$

Twierdzenie 3.2.25. *Składanie funkcji jest łączne, tj. dla odwzorowań $h\colon X \to U$, $g\colon U \to V$, $f\colon V \to Y$ zachodzi tożsamość*

$$f \circ (g \circ g) = (f \circ g) \circ h.$$

Tożsamość tę można obrazowo zilustrować kolejnym diagramem:

---
[3] Nieformalnie mowiąc!

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "h"] & Y \\ U \arrow[r, "g"] & V \arrow[u, "f"'] \end{tikzcd}$$

Dowód. Ustalmy funkcje pomocnicze: niech $G = g \circ h$ oraz $F = f \circ g$. G i F są poprawnie zdefiniowanymi funkcjami na mocy twierdzenia 3.2.24. Uzupełnijmy nasz diagram:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "h"] \arrow[dr, dashed, "G"] & Y \\ U \arrow[r, "g"] \arrow[ur, dashed, "F"'] & V \arrow[u, "f"'] \end{tikzcd}$$

Widzimy, że $G\colon X \to V$ oraz $F\colon U \to Y$. Wtedy $G \circ f\colon X \to Y$ oraz $h \circ F\colon X \to Y$. Z definicji złożenia

$$f \circ$$

[TO-DO] □

Składanie odwzorowań $X \to X$ na ogół nie jest przemienne, czyli zdarzyć się może, że $f \circ g \neq g \circ f$ dla pewnych funkcji $f, g\colon X \to Y$.

Przykład 12. Niech $X = \{a, b\}$, gdzie $a \neq b$ oraz $f(a) = b$, $f(b) = a$, $g(a) = a$, $g(b) = a$.

Twierdzenie 3.2.26. *Dla dowolnej funkcji $f\colon X \to Y$ zachodzą tożsamości:*

$$f^{-1} \circ f = Id_X$$

$$f \circ f^{-1} = Id_Y$$

Dowód. Można by powiedzieć, że teza jest prawie oczywista. Spójrzmy jednak na diagram:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[loop left, "\mathrm{Id}_X"] \arrow[r, bend right, "f"'] & Y \arrow[l, bend right, "f^{-1}"'] \arrow[loop right, "\mathrm{Id}_Y"] \end{tikzcd}$$

Mamy:

$$f^{-1} \circ f = \{(x, y) \in X \times X : \exists_{z \in X} (x, z) \in f, (z, y) \in f^{-1}\} \subseteq X \times X$$

Niech $(x, y) \in X \times X$, to z definicji $(x, y) \in f$ oraz $(y, x) \in f^{-1}$, czyli $(x, x) \in f^{-1} \circ f$ i z prawostronnej jednoznaczności relacji $f^{-1} \circ f$ dla każdego $z \in X$, jeśli $(x, z) \in f^{-1} \circ f$, to $z = x$. Zatem $f^{-1} \circ f = X \times X = \mathrm{Id}_X$. Analogicznie można rozumowanie przeprowadzić dla złożenia $f \circ f^{-1}$. □

Twierdzenie 3.2.27. *Dla dowolnych funkcji f, g zachodzi $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.*

Zwróćmy uwagę na zmianę porządku funkcji f i g w powyższym twierdzeniu!

3.2.4 Obraz i przeciwobraz zbioru przez funkcję

Niech w całym tym paragrafie $f\colon X \to Y$ oraz $B \subseteq X$, $C \subseteq Y$.

Definicja 3.2.28. **Obrazem** zbioru B przez funkcję f nazywamy zbiór $f[B]$ zdefiniowany następująco:

$$f[B] = \{y \in Y\colon y = f(x) \text{ dla pewnego } x \in X\} = \{f(x) \in Y\colon x \in B\}.$$

Przeciwobrazem zbioru C przez funkcję f nazywamy zbiór $f[B]$ zdefiniowany następująco:

$$f^{-1}[C] = \{x \in X\colon f(x) \in C\}.$$

Przykład 13. Niech $A = (-1, 2]$ i $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dane będzie wzorem:

1. $f(x) = x$; wówczas: $f[A] = (-1, 2]$,
2. $f(x) = 2x + 1$; wówczas: $f[A] = (-1, 5]$,
3. $f(x) = x^2$; wówczas: $f[A] = [0, 4]$.

(W tych prostych przypadkach łatwo odczytać z wykresu.)

Ćwiczenie. Napisz, jakim zbiorem jest obraz $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}[[0, 1)]$.

Przykład 14. $\sin\left[(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]\right] = (-1, 1]$.

Twierdzenie 3.2.29. *Dla dowolnych zbiorów A, B i dla dowolnej indeksowanej rodziny zbiorów $\{A_i\colon i \in I\}$:*

1. $f\left[\bigcup_{i\in I} A_i\right] = \bigcup_{i\in I} f[A_i]$
2. *jeżeli $I \neq \varnothing$, to* $f\left[\bigcap_{i\in I} A_i\right] \subseteq \bigcap_{i\in I} f[A_i]$,
3. $f[A] \setminus f[B] \subseteq f[A \setminus B]$.

Twierdzenie 3.2.30. *Jeżeli f jest funkcją różnowartościową, to dla dowolnych zbiorów A, B i dla dowolnej indeksowanej rodziny zbiorów $\{A_i\colon i \in I\}$:*

1. *Jeżeli $I \neq \varnothing$, to* $f\left[\bigcap_{i\in I} A_i\right] = \bigcap_{i\in I} f[A_i]$,
2. $f[A] \setminus f[B] = f[A \setminus B]$.

3.2.5 Wielomiany

Wielomiany[4] bada dziedzina znana jako algebra, ale są bardzo ważne w wielu gałęziach matematyki. My wielomiany będziemy rozumieć jako pewne szczególne funkcje.

[4]Znane też jako *sumy algebraiczne*

Definicja 3.2.31. Niech $a_0, a_1, \ldots, a_n$ będą ustalonymi liczbami, $a_n \neq 0$. **Wielomianem** stopnia n nazywamy funkcję[5] W postaci

$$W(x) = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + \ldots + a_n \cdot x^n = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k.$$

Stopień wielomianu oznaczamy następująco[6]: $\deg W = n$. Każdą liczbę $a \in X$ taką, że $W(a) = 0$ nazywamy *pierwiastkiem* wielomianu W.

Jeśli wielomiany W i Q mają te same współczynniki przy odpowiadających potęgach parametru, to oczywiście $W(x) = Q(x)$ dla każd. x. W drugą stronę: zachodzi następujące

Twierdzenie 3.2.32. *Niech dane będą wielomiany W i Q:*

$$W(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + a_n x^n,$$

$$Q(x) = b_0 + b_1 x + \ldots + b_{n-1}x^{n-1} + b_n x^n.$$

Jeżeli dla każdego $x \in \mathbb{R}$ wielomiany $W(x)$ i $Q(x)$ przyjmują te same wartości to $a_i = b_i$ dla każdego $i = 0, 1, \ldots, n$.

Dowód. Indukcja względem stopni wielomianu. □

Twierdzenie 3.2.33 (Bezouta)**.** *Dla każdego W liczba $a \in \mathbb{R}$ jest pierwiastkiem wielomianu W wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taki wielomian P, że dla każdego $x \in \mathbb{R}$ prawdziwa jest równość*

$$W(x) = (x - a)P(x).$$

Ponadto stopień wielomianu P jest niższy niż wielomianu W.

Dowód. Musimy skorzystać z twierdzenia 3.3.8, które udowodnimy na stronie 25 omawiając zasadę indukcji matematycznej. We wzorze (3.7) przyjmujemy inne oznaczenia: $a = x$, $b = a$ i przemnażamy ją obustronnie przez $(x - a)$. W ten sposób mamy, że

$$x^n - a^n = (x - a)(x^{n-1} + x^{n-2}a + \ldots + xa^{n-2} + a^{n-1}).$$

Gdy $W(a) = 0$, to

$$W(x) = W(x) - W(a) = (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n) - (a_0 + a_1 a + a_2 a^2 + \ldots + a_n a^n) =$$

$$= a_1(x - a) + a_2(x^2 - a^2) + a_3(x^3 - a^3) + \ldots + a_{n-1}(x^{n-1} - a^{n-1}) + a_n(x^n - a^n) =$$

$$= (x - a)[a_1 + a_2(x + a) + \ldots + a_{n-1}(x^{n-2} + x^{n-3}a + \ldots + xa^{n-3} + a^{n-2}) +$$

$$+ a_n(x^{n-1} + x^{n-2}a + x^{n-3}a^2 + \ldots + x^2 a^{n-3} + xa^{n-2} + a^{n-1})]$$

Stąd $W(x) = (x - a)P(x)$, gdzie P jest wielomianem i $\deg P < n$. □

[5] $W\colon \mathbb{K}_1 \to \mathbb{K}_2$, gdzie $\mathbb{K}_1$, $\mathbb{K}_1$ mogą być dowolnymi ciałami (patrz dodatek) - na razie czytelnik może przyjąć, że $\mathbb{K}_1, \mathbb{K}_1$ są po prostu pewnymi zbiorami. W naszym przypadku: zazwyczaj liczb rzeczywistych (ogólniej: zespolonych).

[6] Od ang. „degree” - stopień.

Twierdzenie 3.2.34 (Viete'a). *Niech $x_1, x_2, \ldots, x_n$ będą pierwiastkami wielomianu $W(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, $a_n \neq 0$. Wówczas:*

$$\sum_{k=1}^{n} x_k = x_1 + x_2 + \ldots x_{n-1} + x_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$$

$$\sum_{j=1}^{n-1} \sum_{k=j+1}^{n} x_j x_k = x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_1x_n + x_2x_3 + x_2x_4 + \ldots + x_2x_n + \ldots + x_{n-1}x_n = \frac{a_{n-2}}{a_n}$$

$$\sum_{i=1}^{n-2} \sum_{j=i+1}^{n-1} \sum_{k=j+2}^{n} x_i x_j x_k = -\frac{a_{n-3}}{a_n}$$

$$\vdots$$

$$\prod_{k=1}^{n} x_k = x_1 x_2 \cdots x_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}$$

Albo inaczej:

$$\sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqslant n}^{n} x_{i_1} x_{i_2} x_{i_3} \cdots x_{i_k} = (-1)^k a_{n-k}, \quad \text{dla każdego } k \in \mathbb{N}, 1 \leqslant k \leqslant n.$$

(Bez dowodu)

Twierdzenie 3.2.35. *Jeżeli ułamek nieskracalny $\frac{p}{q}$ jest pierwiastkiem wielomianu W danego:*

$$W(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + a_n x^n,$$

przy czym $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$, to:

- a_n jest podzielne przez q,

- a_0 jest podzielne przez p.

Dowód.

$$\text{Jeśli } W\left(\frac{p}{q}\right) = 0, \quad \text{to: } a_0 + a_1\frac{p}{q} + \ldots + a_{n-1}\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + a_n\left(\frac{p}{q}\right)^n = 0.$$

Mnożąc obydwie strony przez q^n otrzymujemy, że

$$a_0 q^n + a_1 q^{n-1} p + \ldots + a_{n-1} q p^{n-1} + a_n p^n = 0.$$

a więc $a_n p^n = q(aq^{n-1} + \ldots + a_{n-1}p^{n-1})$, czyli $a_n p^n$ jest podzielne przez q. Podobnie $a_0 q^n$ jest podzielne przez p. W teorii liczb dowodzi się, że:

jeżeli liczby całkowite a, b nie mają wspólnego dzielnika innego niż 1 oraz a dzieli bc (c - całkowite), to a dzieli c.

Ułamek $\frac{p}{q}$ z założenia jest nieskracalny, czyli p i q nie mają wspólnego dzielnika innego niż 1 i:

$$q \text{ nie dzieli } p \text{ a więc również nie dzieli } p^n$$

więc q musi dzielić a_n. Podobnie wywnioskujemy, że p dzieli a_0. □

3.2.6 Funkcje cyklometryczne, uzupełnienia z trygonometrii

Funkcje cyklometryczne. Reszta paragrafu będzie stanowiła przykład do definicji 3.2.22.

Definicja 3.2.36. Funkcje

$$\begin{aligned}
&\arcsin\colon [-1,1] \longrightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\
&\arccos\colon [-1,1] \longrightarrow [0,\pi], \\
&\arctan\colon \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R} \\
&\operatorname{arc\,ctg}\colon (0,\pi) \longrightarrow \mathbb{R}
\end{aligned}$$

są funkcjami odwrotnymi odpowiednich funkcji trygonometrycznych, obciętych do przedziałów w którym sa one funkcjami wzajemnie jednoznacznymi. Tak więc

$$\arcsin := \left(\sin\big|_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}\right)^{-1}, \tag{3.1}$$

$$\arccos := \left(\cos\big|_{[0,\pi]}\right)^{-1}, \tag{3.2}$$

$$\arctan := \left(\tan\big|_{(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})}\right)^{-1}, \tag{3.3}$$

$$\operatorname{arc\,ctg} := \left(\operatorname{ctg}\big|_{(0,\pi)}\right)^{-1} \tag{3.4}$$

3.2.7 Zasada Abstrakcji

Definicja 3.2.37. Mówimy, że relacja $R \subseteq X \times X$ (na ustalonym zbiorze X) jest **relacją równoważności**, gdy jest zwrotna, symetryczna i przechodnia.

Definicja 3.2.38. Zbiór $\Pi = \{P_t \colon t \in T\}$ nazywamy **rozbiciem** albo **podziałem** (a czasem jeszcze **partycją**) zbioru $X \neq \varnothing$, gdy

1. $X = \bigcup \Pi = \bigcup\limits_{t\in T} P_t$,
2. $P_k \cap P_l = \varnothing$ dla każdych $k, l \in T$ takich, że $k \neq l$.

Zbiory $P_t, t \in T$ nazywamy klasami podziału Π.

Definicja 3.2.39. Załóżmy, że R jest relacją równoważności w zbiorze $X \neq \varnothing$. Dla każdego $x \in X$ zbiór

$$[x]_R := \{y \in X \colon (y,x) \in R\}$$

nazywamy **klasą abstrakcji wyznaczoną przez element** x. Rodzinę wszystkich klas abstrakcji relacji równoważności R w zbiorze X oznaczamy symbolem X/R i nazywamy ją *przestrzenią ilorazową* zbioru X względem relacji R. Zatem

$$X/R = \{[x]_R \colon x \in X\}.$$

Przykład 15. Jeżeli X jest zbiorem wszystkich prostych na płaszczyźnie, a R relacją równoległości, to klasami abstrakcji względem tej relacji są kierunki.

Przykład 16. Jeżeli X jest zbiorem wszystkich trójkątów, jakie można narysować na płaszczyźnie, a R relacją przystawania trójkątów, to każda klasa tej abstrakcji jest zbiorem wszystkich trójkątów przystających. Np. jeżeli ΔABC jest pewnym trójkątem o kątach o miarach kolejno $90°$, $60°$, $30°$, to $[\Delta ABC]_R$ jest zbiorem wszystkich trójkątów prostokątnych takich, że jeden z pozostałych kątów ma miarę $30°$ a drugi $60°$.

Twierdzenie. *Niech X będzie dowolnym zbiorem niepustym a $R \subseteq X^2$ relacją równoważności w tym zbiorze. Wówczas*

1. $X = \bigcup\{[x]_R \colon x \in X\}$,
2. *dla dowolnych $x, y \in X$, jeżeli $[x]_R \cap [y]_R \neq \varnothing$, to $[x]_R = [y]_R$.*

Czyli X/R jest rozbiciem zbioru X.

Dowód. Ustalmy dowolne $z \in [x]_R \cap [y]_R$. Jeżelu $t \in [x]_R$, to tRx. Wówczas tRy z przechodniości relacji, bo xRz i zRy. Zatem $t \in [y]_R$, a więc $[x]_R \subseteq [y]_R$. Analogcznie dowodzimy, że $[y]_R \subseteq [x]_R$. Pokazaliśmy zatem prawdziwość warunku 1. Warunek 2. jest oczywisty, gdyż z definicji $x \in [x]_R$ dla każdego $x \in X$ oraz $[x]_R \subseteq X$. □

Zachodzi twierdzenie odwrotne:

Twierdzenie. *Jeżeli Π jest rozbiciem zbioru $X \neq \varnothing$, to istnieje taka relacja równoważności R w zbiorze X, że zbiór klas abstrakcji relacji R jest równy rodzinie Π.*

Dwa powyższe twierdzenia możemy zapisać razem:

Twierdzenie 3.2.40 (Zasada Abstrakcji)**.** *Niech X będzie dowolnym zbiorem. Jeżeli R jest relacją równoważności w zbiorze $X \neq \varnothing$, to X/R jest rozbiciem zbioru X. W drugą stronę: jeżeli Π jest rozbiciem zbioru X, to istnieje taka relacja równoważności $R \subseteq X^2$ w zbiorze X, że $X/R = \Pi$.*

Definicja 3.2.41. Relacja równoważności R na zbiorze X wyznacza jednoznacznie odwzorowanie $\kappa \colon X \xrightarrow{\text{na}} X/R$ dane wzorem $\kappa(x) = [x]_R$. Nazywamy je **odwzorowaniem kanonicznym**.

Przykład 17. Niech $X = \mathcal{P}(\{1, 2, \ldots, n\})$. Definiujemy rodzinę zbiorów:

$$P_k = \{A \in X \colon \operatorname{card} A = k\}, k = 0, 1, \ldots, n.$$

Wówczas $\Pi = \{P_k \colon k \in \{0, \ldots, n\}\}$ jest podziałem zbioru X. Z drugiej strony, niech $R \subseteq X \times X$ będzie relacją taką, że

$$A\,R\,B \iff A \sim B, \quad \text{dla dowolnych } A, B \subseteq \{1, \ldots, n\}.$$

Wówczas widzimy, że $\Pi = A/R$.

3.3 Liczby

3.3.1 Liczby naturalne. Zasada Indukcji Matematycznej

Dobry Bóg stworzył liczby naturalne, reszta jest dziełem człowieka.

Leopold Kronecker

Zasada Indukcji Matematycznej

Twierdzenie 3.3.1 (Zasada Minimum)**.** *Jeżeli $A \subseteq \mathbb{N}$ jest zbiorem niepustym, to istnieje w nim liczba najmniejsza* $\min A$ *czyli taka, że dla każdego $a \in A$ zachodzi $a \geqslant \min A$.*

Definicja 3.3.2. Mówimy, że zbiór A jest ograniczony z góry w zbiorze B, gdy istnieje $b \in B$ takie, że dla każdego $a \in A$ mamy $a \leqslant b$. Analogicznie określamy ograniczenie z dołu.

Twierdzenie 3.3.3 (Zasada Maksimum)**.** *Jeżeli $A \subseteq \mathbb{N}$ jest zbiorem niepustym i ograniczonym z góry w zb. $\mathbb{N}$, to istnieje w nim liczba największa* $\max A$ *czyli taka, że dla każdego $a \in A$ zachodzi $a \leqslant \max A$.*

Twierdzenie 3.3.4 (Zasada Indukcji Matematycznej)**.** *Niech $S \subseteq \mathbb{N}$ będzie zbiorem o następujących własnościach:*

1. $1 \in S$,
2. $n \in S$ *pociąga, że* $n + 1 \in S$ *dla każdego* $n \in \mathbb{N}$;

Wtedy $\mathbb{N} \subseteq S$. (Czyli $S = \mathbb{N}$)

Możemy zamiast 1 przyjąć w powyższym twierdzeniu dowolne $n_0 \in \mathbb{N}$ i wtedy otrzymamy, że $S = \{n_0, n_0 + 1, n_0 + 2, \ldots\}$.
Prostą konsekwencją (właściwie przeformułowaniem powyższego twierdzenia) jest następujące

Stwierdzenie. Niech φ będzie dowolnym zdaniem logicznym o liczbach naturalnych. Jeżeli

1. $\varphi(n_0)$ dla pewnego $n_0 \in \mathbb{N}$ (tzn. zdanie φ jest prawdziwe dla n_0),
2. $\varphi(n)$ pociąga, że $\varphi(n + 1)$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$;

to $\varphi(n), n \in \mathbb{N}$ (tzn. zdanie φ jest prawdziwe dla dowolnej liczby naturalnej).

Powyższa procedura stanowi jedną z metod dowodzenia twierdzeń dotyczących liczb naturalnych.
Przykład 18. Udowodnić, że liczba $n^3 + 5n$ jest podzielna przez 3 dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$.

Dwa przydatne twierdzenia. Przećwiczymy dowodzenie tożsamości na dwóch użytecznych twierdzeniach.

Twierdzenie 3.3.5. $2^{n-1} < n!$ *dla dowolnej liczby naturalnej* $n > 4$.

Dowód. Dla $n = 5$ nierówność przyjmuje postać $2^4 = 2^3 \cdot 2 < 5! = 2^3 \cdot 15$ - oczywiście prawda. Załóżmy, że $2^{k-1} < k!$ dla pewnego $k \in \mathbb{N}$. Wówczas:

$$2^{k-1} < k! \ / \cdot 2$$

$$2^k < 2k!$$

$$2^k < 2 \cdot k! = k! + k! < k! + k \cdot k! = (1 + k)k! = (k + 1)!$$

Zatem z założenia indukcyjnego wynikło iż $2^k < (k + 1)!$. Na mocy twierdzenia 3.3.4 teza jest prawdziwa dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$. □

Twierdzenie 3.3.6. *Dla dowolnej liczby naturalnej $n \in \mathbb{N}$:*

$$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}. \tag{3.5}$$

Dowód. Dla $n = 0$ mamy $0 = \frac{0 \cdot (0+1)}{2}$. Załóżmy, że teza jest prawdziwa dla pewnego $m \in \mathbb{N}$. Chcemy udowodnić, że równość (3.5) zachodzi dla $m + 1$. Nasze założenia ma postać:

$$\sum_{k=0}^{m} k = \frac{m(m+1)}{2}. \tag{3.6}$$

Mamy

$$\sum_{k=0}^{m+1} k = \sum_{k=0}^{m} k + (m + 1) = \frac{m(m+1)}{2} + m + 1.$$

Druga równość wynika właśnie z założenia (3.6). Trzeba sprawdzić, że

$$\frac{m(m+1)}{2} + m + 1 = \frac{(m+1)\left((m+1)+1\right)}{2}.$$

Liczymy:

$$\frac{m(m+1)}{2} + m + 1 = \frac{m^2 + m + 2m + 2}{2} = \frac{m(m+1) + 2(m+1)}{2} =$$
$$= \frac{(m+1)(m+2)}{2} = \frac{(m+1)\left((m+1)+1\right)}{2}.$$

A więc pokazaliśmy, że

$$\sum_{k=0}^{m} k = \frac{m(m+1)}{2} \implies \sum_{k=0}^{m+1} k = \frac{(m+1)\big((m+1)+1\big)}{2}.$$

Na mocy Zasady Indukcji Matematycznej twierdzenie jest prawdziwe dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$. □

Przykład 19. Udowodnić, że $(1 + 2 + \ldots + n)^2 = 1^3 + 2^3 + \ldots + n^3$.

Dowód poniższego twierdzenia można w pierwszym czytaniu pominąć.

Twierdzenie 3.3.7. *Zasada Indukcji Matematycznej, Zasada Minimum i Zasada Maksimum są równoważne.*

Dowód. Załóżmy prawdziwość Zasady Minimum. Wykażemy, że stąd wynika Zasada Indukcji Matematycznej. Niech φ będzie pewnym zdaniem dotyczącym liczb naturalnych i niech $\varphi(m) \Rightarrow \varphi(m+1), m \in \mathbb{N}$ oraz $\varphi(1)$. Zdefinujmy: $S = \{n \in \mathbb{N}\colon \varphi(n)\}$. Oczywiście $S \subseteq \mathbb{N}$. Sprawdzimy, że $\mathbb{N} \subseteq S$. Niech

$$\overline{S} = \{n \in \mathbb{N}\colon \neg\varphi(n)\} = \{n \in \mathbb{N}\colon \text{Nieprawda, że } \varphi(n)\ \}.$$

Wtedy $\overline{S} = \mathbb{N} \setminus S \subseteq \mathbb{N}$. Jeżeli $\overline{S}$ jest niepusty, to istnieje liczba $n_0 = \min \overline{S}$, $n_0 \neq 1 \notin \overline{S}$. Wtedy oczywiście $n_0 - 1 \notin \overline{S}$, czyli $\varphi(n_0 - 1)$ a więc $n_0 - 1 \in S$. Ale wtedy, z założenia zachodzi również $\varphi(n_0)$, czyli $n_0 \in S$ - sprzeczność, bo $S \cap \overline{S} = \varnothing$ z definicji. Zatem $\mathbb{N} \setminus S = \varnothing$ i $S \subseteq \mathbb{N}$ a stąd już $S = \mathbb{N}$.

Teraz załóżmy prawdziwość Zasady Indukcji Matematycznej. Niech $\varphi(m)$ oznacza, że „każdy zbiór niepusty, zawierający liczby niewiększe niż m ma element największy”. $\varphi(1)$ - oczywiste. Załóżmy, że $\varphi(n)$ dla pewnego $n \in \mathbb{N}$. Pokażemy, że stąd wynika iż $\varphi(n+1)$. Niech A będzie zbiorem takim, że

1. $A \neq \varnothing$
2. $A \subseteq \mathbb{N}$
3. $a \in A \Rightarrow a \leqslant n + 1$

Jeżeli $n + 1 \in A$, to $n + 1 = \max A$ z definicji. Załóżmy, że $n + 1 \notin A$. Wtedy A zawiera liczby niewiększe niż $n < n+1 \notin A$ i na mocy założenia indukcyjnego ma element największy. Zatem $\varphi(1)$ oraz $\varphi(n) \Rightarrow \varphi(n + 1), n \in \mathbb{N}$ i stąd na mocy Zasady Indukcji Matematycznej $\varphi(n)$ dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$, co oznacza, że Zasada Maksimum jest prawdziwa.

Na koniec załóżmy, że Zasada Maksimum jest prawdziwa i pokażemy, że wynika stąd Zasada Minimum. Ustalmy dowolny zbiór $A \subseteq \mathbb{N}$ i niech $S = \{n \in \mathbb{N}\colon \forall_{a \in A.}\, n \leqslant a\}$. Jeżeli $1 \in A$, to po prostu $S = \varnothing$ i $1 = \min A$, gdyż $A \subseteq \mathbb{N}$. Zbiór S jest więc ograniczony z góry, przez każdy element zbioru A. Z Zasady Maksimum istnieje liczba $s_0 = \max S$. Załóżmy, że byłoby $s_0 \notin A$. Wtedy $s_0 + 1$ jest liczbą naturalną taką, że $s_0 < s_0 + 1 \leqslant a, a \in A$, czyli $s_0 + 1 \in S$ i $s_0 + 1 > \max S$ - sprzeczność. Zatem musi być $s_0 \in A$ i każda liczba $a \in A$ jest większa lub równa od s_0. Na mocy definicji $s_0 = \min A$. Z dowolności zbioru A wynika prawdziwość Zasady Minimum.

Ostatecznie mamy, że Zasada Minimum pociąga Zasadę Indukcji Matematycznej, z Zasady Indukcji wynika Zasada Maksimum a z niej Zasada Minimum. Czyli twierdzenia te są równoważne. □

Ćwiczenie (Nierówność Weierstrassa). Udowodnić, że dla dowolnych $x_k \geqslant -1, x_k \neq 0, x_k$ zachodzi nierówność

$$(1 + x_1)(1 + x_2) \cdots (1 + x_n) \geqslant 1 + x_1 + x_2 + ... + x_n.$$

3.3.2 Przydatne twierdzenia i tożsamości arytmetyczne

Poznamy kilka bardzo przydatnych tożsamości arytmetycznych, nierówności i elementarnych twierdzeń. Z niektórych będziemy korzystać w dowodach i rozumowaniach w dalszej części wykładu, wszystkie natomiast są przydatne, gdy mierzymy się z zadaniami z analizy matematycznej. Tutaj również będziemy często korzystać z indukcji.

Twierdzenie 3.3.8. *Jeżeli a, b są dowolnymi liczbami rzeczywistymi i $a \neq b$, to dla dowolnej liczby naturalnej n prawdziwa jest równość:*

$$a^n + a^{n-1}b + a^{n-2}b^2 + \ldots + ab^{n-1} + b^n = \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a - b}. \tag{3.7}$$

Dowód. Dla $n = 1$ wzór (3.7) przyjmuje postać

$$a + b = \frac{a^2 - b^2}{a - b},$$

i po przekształceniu przyjmuje postać znanego wzoru na różnicę kwadratów dwóch liczb[7] $a^2 - b^2 = (a+b)(b-a)$. Łatwo go sprawdzić wymnażając nawiasy. Załóżmy, że wzór (3.7) jest prawdziwy dla pewnego $m \in \mathbb{N}$, tzn. zachodzi: $a^m + a^{m-1}b + a^{m-2}b^2 + \ldots + ab^{m-1} + b^m = \frac{a^{m+1} - b^{m+1}}{a-b}$. Pomnóżmy tę nierówność obustronnie przez b, a następnie dodajmy do obydwu stron a^{m+1}. Mamy wtedy

$$a^{m+1} + a^m b + a^{m-1}b^2 + \ldots + a^2 b^{m-1} + ab^m + a^{m+1} = a^{m+1} + b \cdot \left(\frac{a^{m+1} - b^{m+1}}{b - a} \right) =$$

$$= \frac{a^{m+1}(a - b) + b(^{m+1} - b^{m+1})}{a - b} = \frac{a^{m+1} + b^{m+1}}{a - b}.$$

Zatem nasz wzór jest prawdziwy również dla $m+1$. Na mocy Zasady Indukcji Matematycznej wzór (3.7) zachodzi dla *dowolnej* liczby naturalnej n. $\square$

Wzór (3.7) nazywamy po prostu wzorem na różnicę n-tych potęg.

Twierdzenie 3.3.9. *Dla dowolnych $a, b \in \mathbb{R}$ i $n \in \mathbb{N}$ zachodzi tożsamość*

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k. \tag{3.8}$$

Równanie (3.8) nazywamy **wzorem dwumiennym newtona**.

Nierówności. Poprzez proste rachunki, łatwo sprawdzić, że

$$\sqrt{ab} \leqslant \frac{a + b}{2} \leqslant \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$$

dla każdych dodatnich liczb rzeczywistych a i b. Wykażemy ogólniejszą zależność.

Niech $a_1, \ldots, a_n$ będą liczbami rzeczywistymi. Przyjmiemy oznaczenia:

$$A_n = \frac{\sum_{k=1}^{n} a_k}{n} = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}, \tag{3.9}$$

$$G_n = \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} a_k} = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdots a_n}, \tag{3.10}$$

$$H_n = \frac{n}{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}} = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}}. \tag{3.11}$$

Wartość A_n nazywamy **średnią arytmetyczną**, G_n **średnią geometryczną** a H_n średnią harmoniczną liczb $a_1, \ldots, a_n$.

[7] to jeden ze szkolnych wzorów skróconego mnożenia

Twierdzenie 3.3.10 (Klasyczne nierówności między średnimi)**.** *Niech* $a_1, \dots, a_n$ *będą liczbami rzeczywistymi dodatnimi i* A_n*,* G_n*,* H_n *będą określone jak wyżej. Wówczas*

$$H_n \leqslant G_n \leqslant A_n. \tag{3.12}$$

Dowód. **TO-DO** □

Powyższe nierówności bywają czasem nazywane nierównościami Cauchy'ego albo „nierównością AGH".

Indukcyjnie możemy udowodnić (ćwiczenie dla czytelnika), że dla dowolnego $x \geqslant -1$ oraz $n \in \mathbb{N}$:

$$1 + nx \leqslant (1 + x)^n.$$

Jest to szczególny przypadek nierówności Bernoullegio:

Twierdzenie 3.3.11 (Nierówność Bernoulliego)**.** *Niech* $x \geqslant -1$*. Wówczas*

$$1 + ax \ \leqslant \ (1 + x)^a, \quad dla \ \ x \geqslant 1, \tag{3.13}$$

oraz

$$(1 + x)^a \leqslant 1 + ax, \ \ dla \ 0 < x \leqslant 1. \tag{3.14}$$

Dla $a = 1$ *obie strony nierówności są oczywiście równe, natomiast dla* $a \neq 1$ *równości zachodzą wtedy i tylko wtedy, gdy* $x = 0$*.*

Dowód. **TO-DO** □

Twierdzenie 3.3.12. *Jeżeli* $a_1, a_2, \dots, a_n$ *są liczbami rzeczywistymi, takimi że*

$$a_1 > 0, a_2 > 0, \dots, a_n > 0,$$

oraz zachodzi równość

$$a_1 \cdot a_2 \cdots a_{n-1} a_n = 1,$$

to wówczas

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n \geqslant n.$$

Ćwiczenie. Udowodnić, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $a, b > 0$ zachodzi nierówność

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geqslant 2.$$

Ćwiczenie. Udowodnić, że dla dowolnych dodatnich liczb rzeczywistych a, b i c zachodzi nierówność

$$\frac{ab}{a+b} + \frac{bc}{b+c} + \frac{ca}{a+c} \leqslant \frac{a+b+c}{2}.$$

Ćwiczenie. Udowodnić, że dla dowolnej liczby $x \geqslant 0$ zachodzi nierówność

$$\sqrt{x+1} + \sqrt{x+3} \leqslant 2\sqrt{x+2}.$$

Ćwiczenie. Niech $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ będzie ciągiem arytmetycznym o wyrazach dodatnich. Wykazać, że wówczas zachodzi nierówność:

$$\sqrt{a_1 a_n} \leqslant \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \leqslant \frac{a_1 + a_2}{2}.$$

Ćwiczenie. Udowodnić, że dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi nierówność

$$\sqrt{n} \leqslant \sqrt[n]{n!} \leqslant \frac{n+1}{2}, n \in \mathbb{N}.$$

3.3.3 Krótko o liczbach rzeczywistych.

Definicja 3.3.13. Liczbę nazywamy wymierną, jeśli jest (czyli, gdy *daje się przedstawić w postaci*) ułamka dwóch liczb całkowitych.

Np. liczba $0,5 = \frac{1}{2}$ - jest liczbą wymierną. Podobnie $5 = \frac{5}{1}$ i ogólnie: każda liczba całkowita $c \in \mathbb{Z}$, gdyż można ją przedstawić jako $\frac{c}{1}$. Zbiór liczb wymiernych oznaczamy jako $\mathbb{Q}$. Zauważmy, że z powyższych obserwacji wynika iż $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$. Ciekawszy będzie następny

Przykład 20. Liczba $8,3333\ldots = 8,(3)$ *jest* liczbą wymierną. Daje się on sprowadzić do postaci ułamka liczb całkowitych:

$$\text{Niech } x = 8,(3). \text{ Wtedy } 10x = 83,(3).$$

$$9x = 10x - x = 83,(3) - 8,(3) = 72$$

Czyli $x = \frac{75}{9} = \frac{25}{3}$ - ułamek liczb całkowitych, a więc liczba wymierna. Inne uzasadnienie zobaczymy w rozdziale poświęconym szeregom liczbowym.

Szybko odkryjemy, że w zastosowaniach, niezależnie czy w czystej matematyce czy np. fizyce, pojawiają się liczby, które nie są liczbami wymiernymi.

Przykład 21. Rozważmy trójkąt prostokątny o przyprostokątnych długości 1 i przez p oznaczmy długość przeciwprostokątnej. Wtedy z twierdzenia Pitagorasa $p^2 = 1^2 + 1^2 = 2$. Czyli $p = \sqrt{2}$.

Przykład 22. Rozważmy wielomian (funkcję) wyrażoną równaniem $f(x) = x^2 - 2$. Funkcja ta przyjmuje wartość ujemną dla $x = 1$ oraz dodatnią dla $x = 2$ oraz wartość równą zero dla $x = \sqrt{2}$. Gdybyśmy jednak przyjęli, że $D_f = \mathbb{Q}$, to równanie $f(x) = 0$ nie ma rozwiązania.

Liczba $\sqrt{2}$ *nie* jest jest jednak liczbą wymierną. Dla dowodu, załóżmy nie wprost, że byłoby $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ - wtedy $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ dla pewnych $p, q \in \mathbb{Z}$ oraz ułamek $\frac{p}{q}$ jest nieskracalny. Dalej, przekształcamy równoważnie:

$$2 = \frac{p^2}{q^2}$$

$$p^2 = 2 \cdot q^2$$

$$p = \left(2 \cdot \frac{q}{p}\right) \cdot q \in \mathbb{Z}$$

Sprzeczność z założeniem - $\left(2 \cdot \frac{q}{p}\right) \cdot q$ nie jest liczbą niepodzielną przez q. Zatem nie może być $\sqrt{2} = r/s$ dla r, s całkowiych, co było do udowodnienia.

Podamy jeszcze jedno twierdzenie, dające mnogość przykładów liczb niewymiernych. Przy pierwszej lekturze dowód można pominąć[8]. Najpierw jednak przyda nam się

Lemat 3.3.14 (Zasada dodawania proporcji stronami)**.** *Niech $n \in \mathbb{N}$. Jeżeli liczby rzeczywiste $a_1, \ldots, a_n$ i $b_1, \ldots, b_n$ spełniają równości $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \ldots = \frac{a_n}{b_n}$ oraz $b_1 + b_2 + \ldots + b_n \neq 0$, to wówczas*

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{b_1 + b_2 + \ldots + b_n} = \frac{a_1}{b_1}.$$

[8] a na pewno nie należy się przejmować, jeśli w tej chwili prześledzenie rozumowania okaże się trudne.

Dowód. Niech najpierw $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}$. Wówczas przemnażając obustronnie $\frac{a_1 + a_2}{b_1 + b_2} = \frac{a_1}{b_1}$ przez $b_1(b_1 + b_2)$ dostajemy równoważną postać tej równości: $a_1b_1 + a_2b_1 = a_1b_1 + a_1b_2$. Wyraz a_1b_1 występujący po obu stronach skróci się i zostaje $a_2b_1 = a_1b_2$ co jest równoważne założeniu. Ogólnie: zauważmy, że z założenia istnieje po prostu liczba rzeczywista:

$$s = \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \ldots = \frac{a_n}{b_n}.$$

Mamy więc $a_1 = sb_1, a_2 = sb_2, \ldots, a_n = sb_n$. Dodajemy równania stronami i mamy, że

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n = sb_1 + sb_2 + \ldots + sb_n = s(b_1 + b_2 + \ldots + b_n).$$

Stąd już $s = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{b_1 + b_2 + \ldots + b_n}$ a porównując tę równość z definicją liczby s otrzymujemy tezę twierdzenia. $\square$

Oczywiście poprzedni lemat mówi nam, że proporcje możemy też *odejmować* stronami.

Twierdzenie 3.3.15. *Jeżeli liczba $n \in \mathbb{N}$ nie jest kwadratem żadnej liczby całkowitej, to nie jest też kwadratem żadnej liczby wymiernej.*

Dowód. Załóżmy, nie wprost, że teza nie jest prawdziwa. Oznacza to, że zbiór M zdefiniowany następująco:

$$M = \left\{ q \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \colon \sqrt{n} = \frac{p}{q} \text{ dla pewnego } p \in \mathbb{N} \right\}$$

jest niepusty. Zauważmy też, że jest ograniczony z dołu. Istnieje więc $q = \min M$ i wtedy $\sqrt{n} = \frac{p}{q}$ dla pewnego $p \in \mathbb{N}$. Przedstawmy n na dwa sposoby:

$$n = \frac{n \cdot pq}{pq} \quad \text{oraz} \quad n = \frac{k \cdot p^2}{k \cdot q^2}.$$

(k może być na razie dobrane dowolnie.) Na mocy poprzedniego lematu możemy odjąć proporcje stronami; mamy wówczas

$$n = \frac{npq - kp^2}{pq - kq^2} = \frac{p}{q} \left(\frac{nq - kp}{p - kq} \right) = \sqrt{n} \frac{nq - kp}{p - kq}.$$

Podnosząc obustronnie do kwadratu i dzieląc przez n powyższą równość otrzymujemy, że

$$n = \left(\frac{nq - kp}{p - kq} \right)^2.$$

Weźmy k takie, że $k^2 < n < (k+1)^2$. Taka liczba jest wyznaczona jednoznacznie. Wtedy widzimy, że

$$kq < p < k(q+1) = kq + q \implies 0 < p - kq < q.$$

Ale q jest najmniejszą liczbą, która może być mianownikiem takiego ułamka - sprzeczność. $\square$

Łatwo pokazać, że suma, różnica a także iloczyn i iloraz dwóch liczb wymiernych jest również liczbą wymierną (dobre ćwiczenie).

Stwierdzenie. Między dowolnymi liczbami wymiernymi istnieje trzecia l. wymierna. Jeżeli np. $r, s \in \mathbb{Q}$, to $r < \frac{r+s}{2} < s$ oraz zgodnie z tym co powiedzieliśmy $\frac{r+s}{2} \in \mathbb{Q}$.

Wobec tego, mówimy że liczby wymierne są **gęste**. Własność tę mają również liczby rzeczywiste:

Stwierdzenie. Między dowolnymi liczbami rzeczywistymi istnieje trzecia l. rzeczywista. Jeżeli np. $r, s \in \mathbb{R}$, to $r < \frac{r+s}{2} < s$ oraz niewątpliwie $\frac{r+s}{2} \in \mathbb{R}$.

Definicja 3.3.16. Mówimy, że zbiór $A \subseteq \mathbb{R}$ jest **ograniczony z góry** [**z dołu**], gdy istnieje taka liczba $M > 0$, że

$$a \in A \Rightarrow a \leqslant M \, [a \in A \Rightarrow a \geqslant M]$$

Liczbę M nazywamy **ograniczeniem górnym [dolnym]** zbioru A. Gdy zbiór A jest ograniczony równocześnie z góry i z dołu, to mówimy po prostu, że jest **ograniczony**.

Definicja 3.3.17. Ustalmy zbiór $A \subseteq \mathbb{R}$.

Kresem górnym nazywamy *najmniejsze* z ograniczeń górnych zbioru A. Czyli M jest kresem górnym zbioru $A \subseteq \mathbb{R}$, gdy

$$\forall_{M' \in \mathbb{R}.} \text{ Jeżeli } M' \text{ jest ograniczeniem górnym zb. } A, \text{ to } M \leqslant M'.$$

Kresem dolnym nazywamy *największe* z ograniczeń dolnych zbioru A. Czyli M jest kresem dolnym zbioru $A \subseteq \mathbb{R}$, gdy

$$\forall_{M' \in \mathbb{R}.} \text{ Jeżeli } M' \text{ jest ograniczeniem dolnym zb. } A, \text{ to } M' \leqslant M.$$

Uwaga 3.3.18. M jest kresem górnym zbioru $A \subseteq \mathbb{R}$, gdy

$$M \text{ jest ograniczeniem górnym zbioru } A \text{ oraz } \forall_{\varepsilon >} \exists_{a \in A.} \; a > M - \varepsilon.$$

Podobnie M jest kresem dolnym zbioru $A \subseteq \mathbb{R}$, gdy

$$M \text{ jest ograniczeniem dolnym zbioru } A \text{ oraz } \forall_{\varepsilon >} \exists_{a \in A.} \; a < M + \varepsilon.$$

Kres górny zbioru A oznaczamy przez $\sup A$ - od łac. supremum - i tak też czasem będziemy kres górny nazywać. Kres dolny zbioru A oznaczamy $\inf A$ od łac. infimum.

Twierdzenie 3.3.19. *Dla dowolnych zbiorów $A, B \subseteq \mathbb{R}$:*

$$\inf(A + B) = \sup A + \sup B,$$

$$\sup(A + B) = \inf A + \inf B,$$

gdzie $A + B = \{a + b \in \mathbb{R} \colon a \in A, b \in B\}$.

Twierdzenie 3.3.20. *Dla dowolnego zbioru $A \subseteq \mathbb{R}$:*

$$\inf(-A) = -\sup A,$$

$$\sup(-A) = -\inf A,$$

gdzie $-A := \{-a \in \mathbb{R} \colon a \in A\}$.

Omówimy teraz bardzo ważną własność liczb rzeczywistych.

Aksjomat (Aksjomat ciągłości). *Jeśli zbiór $A \subseteq \mathbb{R}$ jest niepusty i ograniczony z góry, to ma kres górny.*

Łatwo pokazać, że powyższe jest równoważne następującemu twierdzeniu

Twierdzenie 3.3.21. *Jeśli zbiór $A \subseteq \mathbb{R}$ jest niepusty i ograniczony z dołu, to ma kres dolny.*

Aksjomat ciągłości liczb rzeczywistych ma intuicyjny równoważnik:

Twierdzenie 3.3.22. *Jeżeli A i B są niepustymi podzbiorami $\mathbb{R}$ takimi, że*

- $\mathbb{R} = A \cup B$, $A \cap B = \varnothing$;
- *Jeżeli $x \in A$ oraz $y \in B$, to $x < y$;*

to albo zbiór A ma element największy, albo zbiór B ma element najmniejszy.

Dowód. Zbiór B jest ograniczony z dołu, więc ma kres dolny. Niech $b = \inf B$. Ponieważ dowolny element $a \in A$ ogranicza zbiór B z dołu, to $a \leqslant b$.
Jeżeli $b \in A$, to z ostatniej nierówności wynika, że b jest elementem największym zbioru A. Jeżeli $b \in B$, to z definicji kresu dolnego b jest elementem najmniejszym zbioru B. □

W ten sposób widzimy, że aksjomat ciągłości w istocie wyraża fakt, że zbiór liczb rzeczywistych w pewnym sensie „nie ma dziur". Ciągłość to własność mocniejsza od gęstości. Liczby rzeczywiste tak jak liczby wymiere, są gęste, czyli dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}$ istnieje $r \in (a, b) \subseteq \mathbb{R}$. Jednak zbiór $\mathbb{Q}$ nie ma własności zbioru $\mathbb{R}$ określonych w twierdzeniu 3.3.22:

Przykład 23. Niech $A = \{x \in \mathbb{Q} \colon x^2 < 2\}$ a $B = \{x \in \mathbb{Q} \colon 2 < x^2\}$. Wówczas

- $\mathbb{Q} = A \cup B$, $A \cap B = \varnothing$,
- jeżeli $x \in A$, $y \in B$, to $x < y$.

Ale ani w zbiorze A nie istnieje element największy ani w zbiorze B nie istnieje element najmniejszy.

Widząc nierówność $x^2 < 2$ może nas kusić, by napisać, że $x < \sqrt{2}$, jednak pokazaliśmy już wcześniej, że $\sqrt{2}$ nie jest liczbą wymierną, więc $\sqrt{2} \notin A$ oraz $\sqrt{2} \notin B$, gdyż $A, B \subseteq \mathbb{Q}$. Widzimy, że kiedy obszar naszych rozważań jest zawężony do liczb wymiernych, to właściwie nie możemy wykonać takiego porównania. Sugeruje nam to, po raz kolejny, że zbiór $\mathbb{Q}$ jest w pewien sposób dla nas niewystarczający. Jednak liczby wymierne cechuje prostota konstrukcji - gdy tylko mamy określone liczby całkowite, to łatwo przy ich pomocy konstruujemy liczby wymierne. Mając nawet nasze (być może na razie intuicyjne i naiwne) pojęcie „dzielenia" liczb całkowitych, powiedzieliśmy sobie, że

$$\mathbb{Q} := \left\{ \frac{p}{q} \colon \ p, q \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Ścisłą definicję zbioru $\mathbb{Q}$ można, na gruncie teorii mnogości, zbudować w oparciu o relacje (porównaj definicja 3.2.1). Wprowadzamy relację $Q \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ na zbiorze $\mathbb{Z}$ tak, aby pary liczb (p, q) odpowiadały wszystkim liczbom $\frac{a}{b}$, które poprzez „skracanie" licznika i mianownika, lub mnożenie równocześnie licznika i mianownika przez tę samą liczbę, będą się dały do siebie sprowadzić. Czytelnik, który przestudiował poprzednie rozdziały może się już domyślać, że w takim razie liczby wymierne w takim ujęciu będą klasami abstrakcji relacji Q. Moglibyśmy napisać, że

$$\mathbb{Q} := (\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})\,/Q.$$

Liczby wymierne są więc przykładem zastosowania pojęcia relacji oraz Zasady Abstrakcji (tj. twierdzenia 3.2.40). W poświęconych teorii mnogości książkach, czytelnik znajdzie szczegółowe omówienie tej konstrukcji, a także konstrukcji ciała $\mathbb{Z}$ przy pomocy ciała $\mathbb{N}$ a nawet samego ciała $\mathbb{N}$ na bazie samych aksjomatów teorii zbiorów. Można też tu polecić np. „Wstęp do matematyki współczesnej" Heleny Rasiowej, czy „Wykłady ze Wstępu do Matematyki" Wojciecha Guzickiego i Piotra Zakrzewskiego. W dodatku B, poświęconym strukturom algebraicznym można znaleźć aksomatyczne podejście do liczb naturalnych i całkowitych.

Przyjmijmy, że mamy zdefiniowany zbiór $\mathbb{Z}$ z odpowiednio określonymi działaniami mnożenia i dodawania. Czytelnik po lekturze wspomnianego dodatku będzie wiedział, że to oznacza, że zdefiniowaliśmy *ciało* $\mathbb{Z}$.

Niech relacja $Q \subseteq \mathbb{Z}\times\big(\mathbb{Z}\setminus\{0\}\big)$ będzie dana zależnością

$$\Big((k,l),(s,t)\Big)\in Q \iff k\cdot t = l\cdot s.$$

W zapisie relacyjnym:

$$(k,l)Q(s,t) \iff k\cdot t = l\cdot s.$$

Na przykład $(1,2)Q(2,4)$ ponieważ $1\cdot 4 = 2\cdot 2$. Ale zobaczmy, że w naszym rozumieniu arytmetyki, zachodzi równoważność

$$1\cdot 4 = 2\cdot 2 \iff \frac{1}{2}=\frac{2}{4}.$$

Dokładnie tego oczekujemy po liczbach wymiernych: $\frac{1}{2}=\frac{2}{4}$. Pary $(1,2)$ i $(2,4)$ należą do tej samej klasy abstrakcji:

$$(2,4) = [(1,2)]_Q$$

Możemy przyjąć oznaczenie $\frac{1}{2} = [(1,2)]_Q$ - ta klasa abstrakcji jest liczbą wymierną $\frac{1}{2}$. Czytelnik zechce poeksperymentować, podstawiając z literki k,l,s,t różne liczby, aż sens tej definicji stanie się jasny.

Liczby niewymierne jako całość trudniej uchwycić. Znamy pewne przykłady liczb niewymiernych, np. $\sqrt{2}$ albo liczba π (patrz, dodatek). Potrafimy stwierdzić, że pewne liczby są niewymierne, np. pierwiastek kwadratowy z dowolnej liczby pierwszej, liczby spełniające tezę twierdzenia 3.3.15, itd. Jednak stąd jeszcze nie widać, jak sformułować definicję, albo inaczej mówiąc: podać konstrukcję liczb rzeczywistych, która np. wyczerpywałaby wszystkie „dziury" w zbiorze $\mathbb{Q}$ i „uzupełniała" go do zbioru $\mathbb{R}$. Znane są co najmniej trzy *równoważne* sposoby *zdefiniowania* liczb rzeczywistych przy pomoc. Jeden sposób - przy pomocy ciągów Cauchy'ego poznamy ogólnikowo w trakcie dalszej lektury. Drugi - przy pomocy tzw. przekrojów Dedekinda opiszemy w dodatku B - jest on blisko związany z problemem, jaki ujawnia nam przykład 23. Tutaj podamy jedynie kilka faktów związanych z liczbami wymiernymi i niewymiernymi, których czytelnik musi być świadomy.

Lemat 3.3.23. *Jeżeli* $\frac{m}{n}$ *oraz* $\frac{r}{s}$ *są liczbami wymiernymi oraz* $\frac{r}{s}\neq 0$*, to* $\frac{m}{n}+\left(\frac{r}{s}\right)\sqrt{2}$ *jest liczbą niewymierną.*

Dowód. Załóżmy, że $\frac{m}{n}+\left(\frac{r}{s}\right)\sqrt{2}$ jest liczbą wymierną. Czyli jest równa $\frac{p}{q}$ dla pewnych liczb $p,q\in\mathbb{Z}$. Ale wtedy $\sqrt{2}=\dfrac{s(pn-mq)}{qnr}$ a stąd $\sqrt{2}$ jest liczbą wymierną - sprzeczność. $\square$

Twierdzenie 3.3.24. *Między dowolnymi dwiema różnymi liczbami wymiernymi istnieje liczba niewymierna.*

Dowód. Ustalmy liczby wymierne $\frac{m}{n}$ oraz $\frac{r}{s}$ tak, że $\frac{m}{n} < \frac{r}{s}$. Wtedy

$$\frac{m}{n} < \frac{m}{n} + \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{r}{s} - \frac{m}{n}\right) < \frac{r}{s}. \text{ (Ponieważ } \frac{\sqrt{2}}{2} < 1 \text{).}$$

Na mocy poprzedniego lematu - liczba pomiędzy nierównościami jest niewymierna. □

Twierdzenie 3.3.25. *Pomiędzy dowolnymi dwiema różnymi liczbami niewymiernymi istnieje liczba wymierna.*

Dowód. Ustalmy liczby niewymierne a i b takie, że $a < b$. Rozważmy ich rozwinięcia dziesiętne i niech n-te miejsce dziesiętne będzie pierwszym, w którym a i b się różnią. Wtedy

$$a = a_0, a_1 a_2 \dots a_{n-1} a_n \dots,$$

$$b = a_0, a_1 a_2 \dots a_{n-1} b_n \dots,$$

gdzie $a_n \neq b_n$. Niech $x = a_0, a_1 \dots a_{n-1} b_n$. Wtedy x jest liczbą wymierną oraz oczywiste jest, że $a < x \leqslant b$. Jednak b jest liczbą niewymierną, zatem musi być $x \neq b$ i stąd mamy, że $a < x < b$. □

Twierdzenie 3.3.26. *Między dowolnymi dwiema liczbami rzeczywistymi istnieje liczba wymierna.*

Dowód. Ustalmy dowolne $x, y \in \mathbb{R}$, $a < b$. Mamy $b - a > 0$. Istnieje $n \in \mathbb{N}$ takie, że

$$n(b - a) > 1$$

Możemy na tym etapie przyjąć, że to oczywiste, ale oczekujący pełnej ścisłości czytelnik może spojrzeć na Aksjomat Archimedesa B.2.3 w dodatku B na stronie 219.

Podobnie istnieje $m_1 \in \mathbb{N}$ takie, że

$$m_1 > na,$$

i $m_2 \in \mathbb{N}$ takie, że

$$m_2 > -na.$$

Powyższa nierówność jest równoważna nierówności $-m_2 < na$.

Mamy więc, że

$$-m_2 < na < m_1.$$

Zatem istnieje taka liczba całkowita m, że

$$m - 1 \leqslant na < m.$$

Dalej

$$nx < m \leqslant na + 1$$

$$nb - na > 1$$

Stąd

$$a < \frac{m}{n} < b.$$

□

Ogólnie: czytelnik musi wiedzieć, że między dowolnymi liczbami rzeczywistymi znajduje się liczba wymierna oraz liczba niewymierna. Należy również wiedzieć, że

- suma jak i różnica liczby wymiernej i liczby niewymiernej jest liczbą niewymierną.
- iloczyn liczby wymiernej (różnej od zera) i niewymiernej jest liczbą niewymierną.
- suma, różnica jak i iloczyn (a tym samym iloraz) dwóch liczb niewymiernych *nie* musi być liczbą niewymierną!

$$\text{Np. } \underbrace{(1+\sqrt{2})}_{\substack{\text{liczba}\\ \text{niewymierna}}} - \sqrt{2} = 1 \in \mathbb{Q}.$$

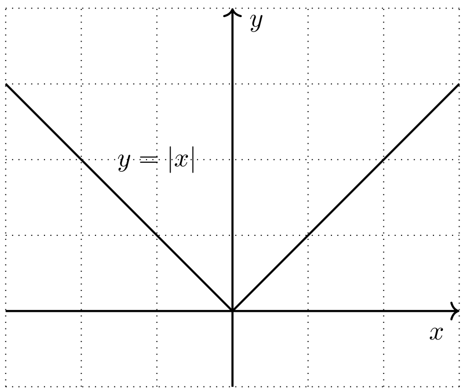
$$\text{Podobnie mamy } (1-\sqrt{2}) + \sqrt{2} = 1.$$

$$\text{Iloczyn/iloraz: } \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1 \text{ i } \sqrt{2}\cdot\sqrt{2} = 2.$$

Definicja 3.3.27. Modułem albo **wartością bezwzględną** liczby $x \in \mathbb{R}$ nazywamy liczbę $|x|$ daną w następujący sposób:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{dla } x \geqslant 0, \\ -x & \text{dla } x < 0. \end{cases}$$

Możemy rozważyć funkcję $x \mapsto |x|$. Jej wykres wygląda następująco:



Twierdzenie 3.3.28. *Dla dowolnych liczb rzeczywisych $x, y, z \in \mathbb{R}$:*

$$|x| \geqslant 0 \tag{3.15}$$

$$|x| \leqslant a \textit{ wtedy i tylko wtedy, gdy } -a \leqslant x \leqslant a \tag{3.16}$$

$$|x+y| \leqslant |x| + |y| \tag{3.17}$$

$$(3.18) \qquad ||x| - |y|| \leqslant |x - y|$$

$$(3.19) \qquad |xy| = |x| \cdot |y|$$

Dowód. Własności (3.15), (3.16) oraz (3.19) wynikają wprost z definicji. Dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}$ mamy

$$-|x| \leqslant x \leqslant |x| \text{ oraz } -|y| \leqslant y \leqslant |y|.$$

Dodając te nierówności stronami, otrzymujemy że

$$-(|x| + |y|) \leqslant x + y \leqslant |x| + |y|$$

i na mocy wzoru (3.16) mamy $|x+y| \leqslant |x|+|y|$. Teraz korzystając z tej własności, możemy napisać, że

$$|x| = |(x - y) + y| \leqslant |x - y| + |y|.$$

Stąd $|x| - |y| \leqslant |x - y|$. Analogicznie możemy pokazać, że

$$|y - x| = -|x - y| \leqslant |x| - |y|$$

czyli razem:

$$-|x - y| \leqslant |x| - |y| \leqslant |x - y|$$

i ponownie z własności (3.16) otrzymujemy, że $||x| - |y|| \leqslant |x - y|$. □

Zauważmy, że $|x|$ mówi nam, jakiej długości jest odcinek o końcach 0 i x położonym na prostej $\mathbb{R}$. Moduł pozwala nam określać odległość między punktami na osi liczbowej. Otóż:

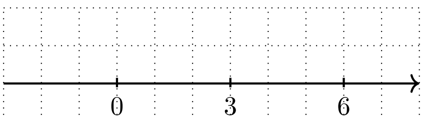
$$\boxed{|x - a| = b \text{ oznacza, że odległość liczby } x \text{ od } a \text{ na osi } \mathbb{R} \text{ jest równa } b.}$$

Ćwiczenie. Niech $f(x) = |x - 3|, x \in \mathbb{R}$. Wyznaczyć $f^{-1}[\{7, 3\}]$.

Rozwiązanie. Tak naprawdę, gdy „rozkodujemy” treść tego zadania, to okazuje się, że mamy po prostu rozwiązać równania $7 = f(x)$ i $3 = f(x)$.

- $|x - 3| = 7$. Rozważmy dwa przypadki:
  1. $x \geqslant 3$. Wówczas $x - 3 \geqslant 0$ i stąd: $|x - 3| = x - 3 = 7$ a więc $x = 10$.
  2. $x < 3$. Wówczas $x - 3 < 0$ i ponownie z definicji 3.3.27:
  $$|x - 3| = -(x - 3) = -x + 3 = 10$$
  a więc $x = -4$.

  Mamy więc, że $x \in \{-4, 10\}$. Można też napisać, że $f^{-1}[\{7\}]$.
- $|x - 3| = 3$. Moglibyśmy dokonać rachunków jak powyżej. Możemy też skorzystać z **interpretacji geometrycznej** modułu. Można narysować oś, zaznaczyć punkt 3 i przesunąć się o 3 na podziałce „w lewo od liczby 3” - wpadniemy na liczbę 0 i „w prawo od liczby 3” - do liczby 6.



  Czyli $x \in \{0, 6\}$. Moglibyśmy też napisać, że $f^{-1}[\{3\}] = \{0, 6\}$.

Podsumowując, odpowiedź: $x \in \{-4, 10, 0, 6\}$.
Możemy też powtórzyć sobie własności przeciwobrazów:

$$f^{-1}[\{7,3\}] = f^{-1}\Big[\{7\} \cup \{3\}\Big] = f^{-1}[\{7\}] \cup f^{-1}[\{3\}] = \{-4, 10\} \cup \{0, 6\} = \{-4, 10, 0, 6\}.$$

□

Ćwiczenie. Wyznaczyć wszystkie $x \in \mathbb{R}$, dla których spełniona jest nierówność

$$\left| \frac{1-x}{2x+1} \right| < 3.$$

Wskazówka: pozbyć się modułu w oparciu o własność (3.16).

Ćwiczenie. Zbadać własności relacj $R \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ zadanej następująco:

$$\text{Dla dowolnych } x, y \in \mathbb{Z}\colon xRy \iff |x| + |y| = 3.$$

Definicja 3.3.29. Funkcje $\min\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ i $\max\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dane są w następujący sposób:

$$\min(x, y) = \begin{cases} y, & \text{dla } x \geqslant y; \\ x, & \text{dla } y > x. \end{cases}$$

$$\max(x, y) = \begin{cases} x, & \text{dla } x \geqslant y; \\ y, & \text{dla } y > x. \end{cases}$$

Ćwiczenie. Sprawdzić, że $|x| = \max(-x, x) = -\min(-x, x)$.

Ćwiczenie. Udowodnić, że

$$\min(x, y) = \frac{x + y - |x - y|}{2},$$
$$\max(x, y) = \frac{x + y + |x - y|}{2}.$$

Ćwiczenie. Udowodnić, że

$$\max(x, y) = x + y - \min(x, y),$$
$$\min(x, y) = x + y - \max(x, y).$$

Definicja 3.3.30. Definujemy funkcję $\operatorname{sgn}\colon \mathbb{R} \to \{-1, 0, 1\}$ (signum - znak liczby x) wzorem:

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1 & \text{dla } x < 0, \\ 0 & \text{dla } x = 0, \\ 1 & \text{dla } x > 0. \end{cases}$$

Ćwiczenie. Niech $|x| > |y|$. Udowodnić, że wtedy $\operatorname{sgn}(x - y) = \operatorname{sgn} x$.

Definicja 3.3.31. Dla funkcji $f\colon A \to \mathbb{R}$ oznaczamy:

$$\sup_{x \in A} f(x) := \sup\{f(x)\colon x \in A\},$$

$$\inf_{x \in A} f(x) := \inf\{f(x)\colon x \in A\}.$$

Ćwiczenie. Udowodnić, że jeżeli $f, g\colon A \to \mathbb{R}$ są funkcjami ograniczonymi z góry, to

$$\sup_{x\in A} f(x) + \sup_{x\in A} g(x) \leqslant \sup_{x\in A} \left(f(x) + g(x)\right).$$

Twierdzenie 3.3.32. *Niech $f, g\colon A \to \mathbb{R}$ będą funkcjami ograniczonymi z góry. Wówczas*

$$|\sup_{x\in A} f(x) - \sup_{x\in A} g(x)| \leqslant \sup_{x\in A} |f(x) - g(x)|.$$

Dowód. Zauważmy, że $f(x) = (f(x) - g(x)) + g(x) \leqslant |f(x) - g(x)| + g(x)$. Wówczas

$$\begin{aligned}\sup_{x\in A} f(x) = \sup_{x\in A} ((f(x) - g(x)) + g(x)) &\leqslant \sup_{x\in A} (|f(x) - g(x)| + g(x)) \leqslant \\ &\leqslant \sup_{x\in A} |f(x) - g(x)| + \sup_{x\in A} g(x)\end{aligned}$$

a stąd $\sup_{x\in A} f(x) - \sup_{x\in A} g(x) \leqslant \sup_{x\in A} |f(x) - g(x)|$. Podobnie $g(x) = (g(x) - f(x)) + f(x) \leqslant |g(x) - f(x)| + f(x)$ i stąd otrzymamy

$$\sup_{x\in A} g(x) \leqslant \sup_{x\in A} |g(x) - f(x)| + \sup_{x\in A} f(x) = \sup_{x\in A} |f(x) - g(x)| + \sup_{x\in A} f(x),$$

i stąd $-\sup_{x\in A} |f(x) - g(x)| \leqslant \sup_{x\in A} f(x) - \sup_{x\in A} g(x)$, czyli . Łącząc obydwie uzyskane nierónośći otrzymujemy tezę twierdzenia. $\square$

Rozdział 4

Granica ciągu liczbowego

> Jeżeli idziesz między dwoma
> policjantami zmierzającymi do
> pewnego komisariatu, to
> zmierzasz na ten sam komisariat.
>
> Twierdzenie o trzech ciągach

4.1 Ciągi

Rozważmy dowolny zbiór elementów. Np. zbiór $\{1, 2, 4\}$ albo zbiór $\{a, b, c, \ldots, x, y, z\}$. Ustawmy np. wyrazy pierwszego zbioru następująco:

$$1, 2, 1, 2, 1, 4, 1, 2, 1, 2, 1, 4, \ldots$$

Albo tak:

$$1, 2, 4, 1, 2, 4, 1, 2, 4, \ldots$$

Obydwa te "ciągi" składają się z elementów takiego samego zbioru, ale są to różne "byty", gdyż określiliśmy pewną kolejność występowania elementów. Podobnie ciąg wyrazów drugiego z naszych zbiorów: $a, b, c, d, x, y, z, a, b, c, d, \ldots$ jest innym ciągiem niż ciąg $x, z, x, y, b, a, c, x, z, x, y, b, a, c, \ldots$; chociaż mają ten sam zbiór „wyrazów".

Przykład 24. Rozważmy ciąg $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5} \ldots$. Domyślamy się, jaka jest *reguła*, według której określa się następny wyraz ciągu. Mianowicie: n-ty wyraz ciągu ma postać $\frac{1}{n}$. I tak np. dla $n = 1$ mamy

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{1} = 1.$$

a dla $n = 2$:

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{2}.$$

Kiedy rozważamy różne ciągi, często chcemy nadać im nazwy albo symboliczne oznaczenia podobnie jak funkcjom. Rozważamy np. ciąg elementów $a_1, a_2, a_3, \ldots$. W powyższym przykładzie $a_n = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$.

Przykład 25. Zdefiniujmy taki ciąg $b_1, b_2, b_3 \ldots$, że $b_n = 2n$, $n \in \mathbb{N}$. Pierwsze wyraz tego ciągu są następujące:

$$2, 4, 6, 8, 10, 12, \ldots$$

W ciągach zatem, w przeciwieństwie do zbiorów, ważna jest **kolejność** elementów. Żeby zdefiniować ciąg przy pomocy już znanych pojęć matematycznych, możemy przyjąć $f \colon \mathbb{N} \to Y$ tak, że $a_n = f(n)$. Ciąg jest zatem funkcją określoną na zbiorze liczb naturalnych. Lepiej, niech oznacznie dla wyrazu ciągu i dla funkcji będzie tożsame:

Definicja 4.1.1. Ciągiem nazywamy funkcję $a \colon \mathbb{N} \to Y$ i przyjmujemy oznaczenie: $a(n) = a_n$. Ciąg jest tożsamy z nieskończoną krotką $(a_1, a_2, \ldots)$. Sam ciąg oznaczamy symbolicznie jako $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

W tym rozdziale rozważamy ciągi "liczbowe" i mamy na myśli liczby rzeczywiste, zatem $Y = \mathbb{R}$. Przypomnimy dwa istotne rodzaje ciągów liczbowych, znane już ze szkoły.

Definicja 4.1.2. Ciąg $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ liczb rzeczywistych nazywamy **ciągiem arytemtycznym**, gdy istnieje taka liczba rzeczywista r, że dla każdego n spełniony jest warunek

$$a_{n+1} - a_n = r.$$

Liczbę r nazywamy **różnicą** ciągu arytmetycznego $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Czytelnik łatwo zauważy, że ciąg arytmetyczne jest rosnący, gdy $r > 0$, natomiast malejący, gdy $r < 0$.

Stwierdzenie. Jeżeli $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest ciągiem arytmetycznym, o reszcie $r \in \mathbb{R}$, to

$$a_n = a_1 + (n-1)r \tag{4.1}$$

Dowód. Przez indukcję (ćwiczenie). □

Stwierdzenie. Każdy wyraz ciągu arytmetycznego, za wyjątkiem pierwszego, jest średnią arytmetyczną wyrazu poprzedniego i następnego.

Dowód. Istotnie, niech $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będzie ciągiem arytmetycznym o różnicy r. Mamy

$$a_{n-1} = a_1 + (n-2)r \text{ oraz } a_{n+1} = a_1 + nr,$$

zatem

$$\frac{1}{2}(a_{n-1} + a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(2a_1 + (2n-2)r\right) = a_1 + (n-1)r = a_n.$$

□

Stwierdzenie. Suma n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego, którą oznaczamy przez S_n, jest dana następującym wzorem

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n \tag{4.2}$$

Dowód. Dowód poprowadzimy przez indukcję. Dla $n = 2$ wzór jest prawdziwy, ponieważ

$$S_2 = a_1 + a_2 = \frac{a_1 + a_2}{2} \cdot 2.$$

Załóżmy, że wzór 4.2 jest prawdziwy dla pewnej liczby $k \in \mathbb{N}$. Rozważmy sumę S_{k+1}:

$$\begin{aligned} S_{k+1} = S_k + a_{k+1} &= \frac{a_1 + a_k}{2} \cdot k + a_{k+1} = \\ &= \frac{\big(a_1 + a_1 + (k-1)r\big)k + 2 * a)1 + kr)}{2} = \\ &= \frac{2a_1(k+1) + k(k+1)r}{2} = \frac{a_1 + (a_1 + kr)}{2}(k+1) = \\ &= \frac{a_1 + a_{k+1}}{2}(k+1). \end{aligned}$$

Zatem dla $k + 1$ wzór 4.2 również jest prawdziwy i na mocy Zasady Indukcji Matematycznej równanie to jest prawdziwe dla dowolnej liczby naturalnej. □

Definicja 4.1.3. Ciąg $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ liczb rzeczywistych nazywamy **ciągiem geometrycznym**, gdy istnieje taka liczba rzeczywsita $q \neq 0$, że dla każdego n spełniony jest warunek

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q.$$

Liczbę r nazywamy **ilorazem** ciągu arytmetycznego $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Stwierdzenie. Jeżeli $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest ciągiem geometrycznym, o ilorazie $q \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, to

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}. \tag{4.3}$$

Dowód. Przez indukcję (ćwiczenie). □

Stwierdzenie. Dla każdego $n > 1$ zachodzi równość

$$a_n^2 = a_{n-1} \cdot a_{n+1}.$$

Jeżeli wyrazy ciągu geometrycznego są dodatnie ($a_n > 0, n \in \mathbb{N}$), to z poprzedniego stwierdzenia zachodzi równość

$$a_n = \sqrt{a_{n-1}a_{n+1}}.$$

Zatem każdu wyraz ciągu geometrycznego za wyjątkiem ostatniego jest średnią geometryczną wyrazu poprzedniego i następnego.

Twierdzenie 4.1.4. *Jeżeli przez S_n oznaczymy sumę n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ o ilorazie q, to*

$$S_n = a_1 \frac{1-q^n}{1-q}. \tag{4.4}$$

Gdy $q = 1$, to $a_n = a_1$ dla każdego n i wzór 4.4 przyjmuje oczywistą postać $S_n = n \cdot a_1$. Dla dowolnego q dowód prowadzimy ponownie przez indukcję.

Dowód. Dla $n = 2$ mamy

$$S_2 = a_1 + a_2 = a_1 + a_1 q = a_1(1+q) = a_1 \frac{1-q^2}{1-q}.$$

Ostatnia równość wynika z tożsamości 3.3.8. Załóżmy, że wzór jest prawdziwy dla liczby naturalnej k. Rozważamy sumę S_{k+1}:

$$S_{k+1} = S_k + a_{k+1} = a_1 \frac{1-q^n}{1-q} + a_1 q^n = a_1 \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

Zatem prawdziwość wzoru dla dowolnego n wynika z Zasady Indukcji Matematycznej. □

4.2 Granica ciągu

Zajmiemy się teraz kluczowym w matematyce pojęciem *granicy* ciągu. Zauważmy, że każdy kolejny wyraz ciągu $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ jest coraz mniejszy, ale zawsze pozostaje większy od zera. W tym wypadku "granicą" do której dążą wyrazy ciągu jest właśnie zero. Mówimy też, że *ciąg* „dąży" do zera. Zapisujemy ten fakt następująco: $\frac{1}{n} \to 0$. Dalej, np. ciąg $\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ dąży do 1, ciąg $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ dąży do *nieskończoności*. Zatem $\cos\left(\frac{1}{n}\right) \to 1$ i $n \to \infty$.

Definicja 4.2.1. Mówimy, że ciąg $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest **zbieżny** do granicy g lub ma **granicę** g i piszemy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = g$, gdy dla dla dowolnej liczby rzeczywistej $\varepsilon > 0$ istnieje taka liczba naturalna N, że dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant N$ zachodzi $|a_n - g| < \varepsilon$.
Możemy zapisać ten warunek symbolicznie:

$$\forall_{\varepsilon>0}\exists_{N\in\mathbb{N}}\forall_{\substack{n\in\mathbb{N}\\ n\geqslant N}}|a_n - g| < \varepsilon.$$

W praktyce warunek w powyższej definicji pisze się pomijając "$n \in \mathbb{N}$" pod kwantyfikatorem, mając w domyśle, że "wskaźnik" n wyrazu ciągu jest liczbą naturalną. Możemy też powiedzieć, że: Mówimy, że ciąg $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest **zbieżny** do granicy g i piszemy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = g$, gdy dla dowolnego $\varepsilon > 0$ **począwszy od pewnego** n zachodzi nierówność $|a_n - g| < \varepsilon$.

Spróbujmy jeszcze wzbogacić nasz język i wyrazić definicję w jeszcze bardziej naturalny a mniej symboliczny sposób. Weźmy takie nieprecyzyjne, niematematyczne wręcz stwierdzenie:

Prawie wszystkie liczby ze zbioru A mają własność $\mathcal{X}$.

Nie ważne co to za hipotetyczny zbiór A i tajemnicza własność X. Może A jest zbiorem kotów w domu pewnego matematyka a $\mathcal{X}$ to "jest czarny". Problem: co to znaczy "prawie wszystkie"? 90%? Czy może "prawie wszystkie" zaczyna się dopiero od 99%? W tekście matematycznym i ścisłych definicjach nie używamy takich nieprecyzyjnych stwierdzeń. Ale np. A mogłoby być zbiorem liczb naturalnych, a własność $\mathcal{X}$ oznaczać "jest większa od 1000". Rzeczywiście, tylko skończona liczba elementów zbioru A *nie* posiada tej własności, więc istotnie - jak wielka by ona nie była, jest "znacząco" mniejsza od nieskończoności, a tyle jest elementów zbioru A *mających* tę własność.

> *Umówmy się* więc, że dla zbioru *nieskończonego* A zdanie **prawie wszystkie elementy zbioru** A **spełniają własność** $\mathcal{X}$ oznacza, że "własność $\mathcal{X}$ zachodzi dla wszystkich elementów zbioru A za wyjątkiem pewnej skończonej ilości".

Pamiętając, że $|x - y|$ wyraża odległość między liczbami na osi rzeczywistej, możemy teraz napisać, że $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = g$, gdy dla dowolnego $\varepsilon > 0$ odległość między liczbą g a prawie wszystkimi wyrazami ciągu $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest mniejsza od ε.

Uwaga 4.2.2. Nie należy mylić ciągu $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ze zbiorem jego wartości $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ (oznaczanym czasem $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ale w starszych książkach w ten sposób oznaczano też sam ciąg, więc będziemy tego unikać. My w każdym razie staramy się rezerwować symbole otoczone nawiasami klamrowymi $\{,\}$ dla zbiorów.). Ciąg $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest odwzorowaniem, funkcją. Zbiór wartości... cóż, zbiorem.

Przykład 26. Pokażemy z definicji, że $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.
Ustalmy dowolną liczbę rzeczywistą $\varepsilon > 0$. Musimy znaleźć taką liczbę naturalną $N \in \mathbb{N}$, że

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon \text{ dla } n \geqslant N.$$

Ale gdy tylko pomnożymy powyższą nierówność obustronnie przez n i podzielimy przez ε (możemy to zrobić, gdyż z założenia $\varepsilon > 0$), to widzimy, że

$$\frac{1}{n} < \varepsilon \iff n > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Wystarczy więc przyjąć np. $N = \lfloor \frac{1}{\varepsilon} \rfloor + 1$ - jest to liczba naturalna, większa od $\frac{1}{\varepsilon}$. Zatem dla tak dobranego N dla każdego $n \geqslant N$ mamy $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Z dowolności wyboru $\varepsilon > 0$ (tzn. nie poczyniliśmy żadnych dodatkowych założeń co do ε i stąd wiemy, że dla każdej takiej liczby znajdziemy odpwiadającą mu liczbę N według powyższej procedury) mamy, że $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Ćwiczenie. Udowodnić, że jeżeli $p > 0$, to $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^p} = 0$.

Twierdzenie 4.2.3. *Ciąg nie może być zbieżny do dwóch różnych granic. Innymi słowy granica ciągu jest wyznaczona jednoznacznie.*

Dowód. Niech $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będzie ciągiem zbieżnym. Załóżmy nie wprost, że byłoby $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = g_1$ i równocześnie $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = g_2$ oraz $g_1 \neq g_2$. Ustalmy dowolny $\varepsilon > 0$. Wtedy istnieją takie $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$, że

$$|a_n - g_1| < \varepsilon \text{ dla } n \geqslant N_1$$

$$|a_n - g_2| < \varepsilon \text{ dla } n \geqslant N_2$$

Przyjmijmy $N = \max\{N_1, N_2\}$. Wtedy dla każdego $n \geqslant N$ prawdziwe są nierówności:

$$|g_1 - a_n| < \varepsilon.$$

$$|a_n - g_2| < \varepsilon.$$

Rozważmy teraz, co by było dla $\varepsilon = \frac{1}{2}|g_1 - g_2|$. Korzystając z nierówności trójkąta otrzymujemy wtedy

$$|g_1 - g_2| \leqslant |g_1 - a_n| + |a_n - g_2| < 2\varepsilon = |g_1 - g_2| \text{ - oczywista sprzeczność.}$$

Zatem ciąg nie może mieć dwóch różnych granic. □

Twierdzenie 4.2.4 (arytmetyka granic)**.** *Niech $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będą ciągami liczb rzeczywistych i niech $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, tak że $a, b \in \mathbb{R}$. Wówczas*

1. $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = a + b$,
2. $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n - b_n) = a - b$,
3. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = a \cdot b$,
4. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{a}{b}$ *o ile* $b \neq 0$ *i* $b_n \neq 0, n \in \mathbb{N}$.

Bezpośrednio z 2. w poprzednim twierdzeniu wynika

Twierdzenie 4.2.5. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = g$*, dla* $g \in \mathbb{R}$ *wtedy i tylko wtedy, gdy* $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n - g| = 0$.

Twierdzenie 4.2.6 (O zachowaniu nierówności przy przejściu do granicy)**.** *Niech* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *i* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *będą ciągami zbieżnymi. Wówczas, jeżeli* $a_n \leqslant b_n, n \geqslant k$ *dla pewnego* $k \in \mathbb{N}$*, to*

$$\lim_{n\to\infty} a_n \leqslant \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Dowód. Oznaczmy $a = \lim_{n\to\infty} a_n$ i $b = \lim_{n\to\infty} b_n$. Niech $c_n = b_n - a_n$. Wówczas z założenia $c_n \geqslant 0$ i z twierdzenia 4.2.4 wynika, że $\lim_{n\to\infty} c_n = b - a$. Załóżmy nie wprost, że byłoby $b - a < 0$. Ustalmy $\varepsilon = -\frac{b-a}{2} = \frac{a-b}{2}$. Istnieje $N \in \mathbb{N}$ takie, że

$$|a_n - a| < \varepsilon \quad \text{i} \quad |b_n - b| < \varepsilon \text{ dla } n \geqslant N.$$

Niech $n_0 = \max\{k, N\}$. Wówczas, dla $n \geqslant n_0$, korzystając z nierówności trójkąta mamy uzyskujemy oszacowania

$$\begin{aligned} c_n - (b-a) \leqslant |(b_n - a_n) - (b-a)| = |(b_n - b) - (a_n - a)| \leqslant \\ \leqslant |b_n - b| + |a_n - a| < 2\varepsilon = a - b \end{aligned}$$

Czyli

$$c_n - (b-a) = c_n + a - b < a - b$$

co oznacza, że $c_n < 0$ dla $n \geqslant n_0$, co przeczy założeniu, że $c_n = b_n - a_n \geqslant 0$. □

Uwaga 4.2.7. Jeżeli w założeniu powyższego twierdzenia przyjmiemy ostrą nierówność: $a_n < b_n, n \geqslant k$, to teza pozostanie niezmieniona: $\lim_{n\to\infty} a_n \leqslant \lim_{n\to\infty} b_n$. gdy wszystkie założenia twierdzenia są spełnione.

W szczególności, jeżeli w twierdzeniu 4.2.6 ciąg $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ spełnia $a_n \leqslant c$ dla pewnej stałej $c \in \mathbb{R}$ od pewnego n, to $\lim_{n\to\infty} x_n \leqslant c$. Analogicznie gdy $x_n \geqslant c$, to granica omawianego ciągu jest niemniejsza niż c. Dla uzasadnienia wystarczy w poprzednim twierdzeniu przyjąć za jeden z ciągów ciąg stały, zależnie od kierunku nierówności, której dowodzimy.

Definicja 4.2.8. Mówimy, że ciąg $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest ograniczony z góry [z dołu], gdy istnieje taka liczba $M \in \mathbb{N}$, że

$$a_n \leqslant M \ [M \leqslant a_n] \text{ dla każdego } n \in \mathbb{N}.$$

Gdy ciąg jest ograniczony i z góry i z dołu to mówimy po prostu, że "jest ograniczony".

Ciągi rozbieżne do nieskończoności:

Definicja 4.2.9. Mówimy, że ciąg $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest **rozbieżny do** ∞[1] i piszemy $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$, gdy

$$\forall_{E>0}\exists_{N\in\mathbb{N}}\forall_{n\geqslant N.}\ a_n > E.$$

Definicja 4.2.10. Mówimy, że ciąg $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest **rozbieżny do** $-\infty$[2] i piszemy $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$, gdy

$$\forall_{E>0}\exists_{N\in\mathbb{N}}\forall_{n\geqslant N.}\ a_n < E.$$

[1] czytamy „rozbieżny do niesończnoności" albo „rozbieżny do plus-nieskończoności".
[2] czytamy „rozbieżny do minus-niesończnoności".

Definicja 4.2.11. Jeżeli ciąg $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest rozbieżny do plus albo minus-nieskończoności, to mówimy też, że ma **granicę niewłaściwą** równą odpowiednio $+\infty$ albo $-\infty$.

Definicja 4.2.12. Jeżeli ciąg ma granicę *skończoną*, to mówimy że jest **zbieżny**. W przeciwnym wypadku, gdy granica ta nie istnieje lub jest nieskończona, to mówimy że jest **rozbieżny**.

Uwaga 4.2.13. Niech $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będą ciągami liczb rzeczywistych, oraz $b_n \leqslant a_n$ począwszy od pewnego n. Wóczas, jeżeli $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$, to również $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$. Podobnie, jeśli $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$, to $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = -\infty$.

4.3 Twierdzenia przydatne w badaniu zbieżności ciągu i szukaniu granic

Twierdzenie 4.3.1. *Każdy monotoniczny i ograniczony ciąg liczb rzeczywistych jest zbieżny. Ponadto każdy ciąg zbieżny jest ograniczony.*

Dowód. Niech np. ciąg $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będzie niemalejący i ograniczony. Oznaczmy

$$A := \{a_n \colon n \in \mathbb{N}\}.$$

Zbiór $A \subseteq \mathbb{R}$ jest ograniczony, więc z aksjomatu ciągłości istnieje $a = \sup A$. Ustalmy $\varepsilon > 0$. Istnieje $n_0 \in \mathbb{N}$ takie, że

$$a - \varepsilon < a_{n_0} < a.$$

Ale ponieważ ciąg $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest niemalejący, to

$$a \geqslant a_n \geqslant a_{n_0} > a - \varepsilon, \text{ dla każdego } n \geqslant n_0.$$

Czyli $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

Dla dowodu drugiej części twierdzenia, weźmy ciąg $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zbieżny do pewnej liczby $a \in \mathbb{R}$. Niech $\varepsilon > 0$ i N będzie taką liczbą, że

$$|a_n - a| < \varepsilon, n \geqslant N.$$

Przyjmijmy

$$M = \max\{|a_1 - a|, |a_2 - a|, \ldots, |a_N - a|\}.$$

Wówczas

$$M \leqslant a_n \leqslant M, \text{ dla } n \in \mathbb{N}.$$

□

Tak naprawdę, dokładniej mówiąc mamy dwie implikacje: jeśli ciąg jest niemalejący i ograniczony z góry, to jest zbieżny oraz jeśli ciąg jest nierosnący i ograniczony z dołu, to jest zbieżny.

Ćwiczenie. Udowodnić, że z faktu iż każdy ciąg monotoniczny i ograniczony jest zbieżny wynika Aksjomat 3.3.3 ciągłości.

Przykład 27 (Ciąg określony rekurencyjnie). Zdefiniujmy ciąg następująco

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_n = \frac{1}{2}a_n \end{cases}$$

Oczywiście łatwo zauważyć, że jest to ciąg geometryczny i $a_n = \frac{1}{2^{n-1}} \to 0$ ale zapomnijmy o tym na chwilę: spróbujemy znaleźć metodę, która pozwoli nam radzić sobie również z bardziej skomplikowanymi ciągami zadanymi rekurencyjnie. Zauważmy, że $a_n \leqslant a_{n-1}$ oraz $1 \geqslant a_n \geqslant 0$, zatem ciąg jest monotoniczny i ograniczony. Wiemy, że granica istnieje - oznaczmy ją a:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a$$

Ale również

$$\lim_{n\to\infty} a_{n-1} = a.$$

Układamy równanie:

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} a_{n-1} = \frac{1}{2} a$$

zatem $2a = a$ - jedyna liczba rzeczywista spełniająca to równanie to 0. Zauważmy, że gdybyśmy nie sprawdzili, że ciąg w ogóle **jest** zbieżny, rozumowanie byłoby niepoprawne. Nie moglibyśmy sobie po prostu *założyć*, że ciąg jest zbieżny do granicy $a \in \mathbb{R}$ a następnie zająć się jej wyznaczaniem.

Twierdzenie 4.3.2. *Niech $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będzie ciągiem.*

1. *Jeżeli $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest niemalejący (tj. słabo rosnący), to $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ma granicę (własciwą lub niewłaściwą) oraz*
$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\};$$

2. *Jeżeli $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest nierosnący (tj. słabo malejący), to $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ma granicę (własciwą lub niewłaściwą) oraz*
$$\lim_{n\to\infty} a_n = \inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Twierdzenie 4.3.3. *Niech $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będzie zbieżnym do zera, a $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ciągiem ograniczonym. Wtedy*

$$\lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = 0.$$

Dowód. Niech M będzie ograniczeniem ciągu $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, tzn. $|b_n| \leqslant M, n \in \mathbb{N}$. Ustalmy dowolny $\varepsilon > 0$. Istnieje $N \in \mathbb{N}$ takie, że $a_n < \dfrac{\varepsilon}{M}, n \geqslant N$. Wówczas $a_n \cdot b_n < \dfrac{\varepsilon}{M} \cdot M = \varepsilon, n \geqslant N$, czyli (z dowolności wyboru ε) oznacza to, że $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = 0$. □

Zauważmy, że powyższe twierdzenie można również zastosować do poprzedniego przykładu. Podamy jeszcze jeden:

Przykład 28. Łatwo możemy uzasadnić, że

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n} = 0.$$

Zauważmy, że $\sin n \leqslant 1$ oraz oczywiście $\frac{1}{n} \to 0$ więc równość wynika z poprzedniego twierdzenia.

Przykład 29 (Iteracyjne obliczanie pierwiastków). Ustalmy liczbę $a > 0$ i zdefiniujmy rekurencyjnie ciąg $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ biorąc *dowolne* $a_1 > 0$ oraz

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{a}{a_n}\right) \text{ dla } n \geqslant 1.$$

Pokażemy, że wtedy

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sqrt{a}.$$

Twierdzenie 4.3.4 (O trzech ciągach)**.** *Niech* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *będą ciągami liczb rzeczywistych, tak że* $a_n \leqslant b_n \leqslant c_n$ *od pewnego miejsca, tzn. istnieje* $N \in \mathbb{N}$, *że nierówności te zachodzą dla każdego* $n \geqslant N$. *Wówczas, jeżeli* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = g$, *to*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} c_n = g.$$

Dowód. Ustalmy $\varepsilon > 0$. Istnieją takie $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$, że

$$|a_n - g| < \varepsilon, \text{ dla } n \geqslant N_1 \tag{4.5}$$

oraz

$$|c_n - g| < \varepsilon, \text{ dla } n \geqslant N_2. \tag{4.6}$$

Niech $N := \max\{N_1, N_2\}$. Z (4.5) i (4.6) mamy, że

$$-\varepsilon < a_n - g \quad \text{oraz} \quad c_n - g < \varepsilon \text{ dla } n \geqslant N. \tag{4.7}$$

Z założenia zachodzą nierówności $a_n \leqslant b_n \leqslant c_n, n \in \mathbb{N}$. Odejmując od nich stronami g i korzystając z oszacowań (4.7) otrzymujemy ciąg nierówności

$$-\varepsilon < a_n - g \leqslant b_n - g \leqslant c_n - g < \varepsilon, \text{ dla } n \geqslant N.$$

Pokazaliśmy, że dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje takie $N \in \mathbb{N}$, że $|b_n - g| < \varepsilon$ dla $n \geqslant N$ czyli $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = g$. □

Przykład 30. Udowodnimy, że $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{q} = 1$ dla dowolnego $q > 0$, $q =$ constans. Skorzystamy z twierdzeń 4.3.4 oraz 4.2.5. Najpierw weźmy $q < 1$. Niech $a_n := 1 - \sqrt[n]{q}$. Chcemy pokazać, że $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. (Wówczas $\lim\limits_{n\to\infty} |1 - \sqrt[n]{q}| = 0$ i stąd $\sqrt[n]{q} \to 1$.) Z nierówności Bernoulliego:

$$1 - n \cdot a_n \leqslant (1 - a_n)^n = q$$

i stąd $0 \leqslant a_n \leqslant \dfrac{1-q}{n}$, $n \in \mathbb{N}$. Oczywiście $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{q-1}{n} = 0$ i stąd $a_n \geqslant 0$ i wówczas $a_n \to 0$ na mocy twierdzenia o trzech ciągach. Jeżeli $q > 1$, to bierzemy $a_n := \sqrt[n]{q} - 1$ i wówczas mamy $a_n \geqslant 0$ i ponownie szacujemy: $1 + na_n \leqslant (1 + a_n)^n = q$ a stąd $0 \leqslant a_n \leqslant \dfrac{q-1}{n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Zatem $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, gdzie $a_n = 1 - \sqrt[n]{q}$, czyli $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{q} = 1$.

Twierdzenie 4.3.5. *Jeżeli* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = g$, *to* $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = |g|$.

Dowód. Ze wzoru (3.18):
$$0 \leqslant ||a_n| - |g|| \leqslant |a_n - g|.$$
Stąd i z twierdzenia o trzech ciągach (4.3.4):
$$\lim_{n\to\infty} |a_n - g| = 0 \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} ||a_n| - |g|| = 0.$$
Z twierdzenia 4.2.5:
$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} |a_n - a| = 0.$$
Łącząc dwa poprzednie fakty:
$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \big||a_n| - |a|\big| = 0 \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} |a_n| = |g|.$$
□

4.4 Własności ciągów liczbowych

Definicja 4.4.1. Niech $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będzie dowolnym ciągiem oraz $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ rosnącym ciągiem liczb naturalnych. Ciąg $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ nazywamy **podciągiem ciągu** $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wyznaczonym przez ciąg wskaźników $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

Przykład 31. Niech $x_n = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}$ a $n_k = 2k$. Wtedy $x_{n_k} = \frac{1}{2k}, k \in \mathbb{N}$. Czyli mamy ciąg $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$ a wybrany przez nas podciąg tego ciągu to ciąg $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \ldots$.

Lemat 4.4.2. *Dla dowolnego ciągu wskaźników $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ zachodzi $n_k \geqslant k$.*

Dowód. Dowód przeprowadzimy indukcyjnie. TODO □

Twierdzenie 4.4.3. *Podciąg ciągu zbieżnego jest zbieżny do tej samej granicy.*

Dowód. Ustalmy ciąg $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zbieżny do granicy g, ciąg wskaźników $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ i dowolny jego podciąg $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$. Ustalmy dowolny $\varepsilon > 0$. Istnieje $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ takie, że dla każdego $n \geqslant N_\varepsilon$ naturalnego zachodzi
$$|a_n - a| < \delta.$$
Zauważmy, że dla $n_k \geqslant k, k \in \mathbb{N}$: jeżeli $k \geqslant N_\varepsilon$, to $n_k \geqslant N_\varepsilon$ i a_{n_k} jest wyrazem ciągu $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, zatem
$$|a_{n_k} - a| < \varepsilon, \text{ dla } k \geqslant N_\varepsilon.$$
Z dowolności wyboru ε mamy, że $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = a$. □

Udowodnimy teraz bardzo pożyteczny lemat, z którego kilkukrotnie potem skorzystamy.

Lemat 4.4.4 (O przedziałach zstępujących)**.** *Niech $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będą takimi ciągami liczb rzeczywistych, że*
$$a_n \leqslant a_{n+1}, n \in \mathbb{N},$$
$$b_n \geqslant b_{n+1}, n \in \mathbb{N},$$
$$a_n < b_n, n \in \mathbb{N}.$$

Wówczas, jeżeli
$$\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0,$$
to istnieje wspólna granica skończona c tych ciągów:
$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = c.$$

Dowód. Najpierw zauważmy, że ciągi $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ są w istocie zbieżne:

$a \leqslant a_n \leqslant b_n, n \in \mathbb{N}$ - zatem ciąg $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest ograniczony z dołu. Z założenia jest też malejący,

zatem na mocy twierdzenia 4.3.1 jest zbieżny. Analogicznie możemy pokazać, że zbieżny jest ciąg $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Dalej $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = \lim\limits_{n\to\infty} b_n - \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$ z założenia i stąd już $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

Granica jest wyznaczona jednoznacznie (własności granic) i twierdzenie jest udowodnione. □

Powyższe stwierdznie możemy zinerpretować bardziej „geometrycznie”: jeżeli mamy ciąg $([a_n, b_n])_{n\in\mathbb{N}}$ przedziałów spełniających następujące warunki:

- $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subseteq [a_n, b_n], n \in \mathbb{N}$ (mówimy wtedy, że ciąg jest **zstępujący**),

- długości $|b_n - a_n|$ kolejnych przedziałów dążą do zera;

to istnieje dokładnie jeden punkt wspólny c wszystkich przedziałów ciągu:
$$\bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n] = \{c\}\,.$$

Za chwilę wprowadzimy twierdzenie Bolzano-Weierstrassa - bardzo ważny klasyczny wynik w analizie matematycznej. Jeden z „tradycyjnych” dowodów tego twierdzenia opiera się o Lemat 4.4.4 - i ten dowód pokażemy. Lemat ten okazuje się użyteczny w klasycznej analizie dość często i sama metoda dowodzenia w oparciu o „przedziały zstępujące” nazywa się *metodą Bolazno-Weierstrassa.*

Pokażemy, że $|\mathbb{R}| \neq \aleph_0$, tj. że zbiór liczb rzeczywistych i zbiór liczb naturalnych nie są równoliczne. Klasyczny dowód tego faktu podał Georg Cantor w 1891 roku, stosując tzw. "Metodę przekątniową”, wiązaną do dziś z jego nazwiskiem. Ważne narzędzie w teorii mnogości. My jednak, dla ćwiczenia, dowiedziemy tego twierdzenia korzystając z naszego lematu.

Lemat 4.4.5. *Przedział* $[0, 1]$ *nie jest równoliczny ze zbiorem liczb naturalnych.*

Dowód. Niech $f\colon \mathbb{N} \to [0, 1]$ będzie dowolną funkcją. Niech $f(k) = c_k$ dla $k \in \mathbb{N}$. Widzimy, że funkcja ta jest ciągiem. Podzielmy przedział $[0, 1]$ na trzy domknięte podprzedziały, długości $\frac{1}{3}$ każdy i niech $[a_0, b_0]$ będzie tym z nich, do którego należy c_0.
Tak więc $[a_0, b_0] \subseteq [0, 1]$, $b_0 - a_0 = \frac{1}{3}$ oraz $c_0 \notin [a_0, b_0]$. Załóżmy, że dla pewnego $k \in \mathbb{N}$ zdefiniowaliśmy już przedział $[a_k, b_k]$ tak, że $[a_k, b_k] \subseteq [0, 1]$, $b_k - a_k = \frac{1}{3^{k+1}}$ oraz $c_k \notin [a_k, b_k]$. Wówczas dzielimy przedział $[a_k, b_k]$ na trzy domknięte podprzedziały równej długości i definiujemy $[a_{k+1}, b_{k+1}]$ jako ten podprzedział, do którego nie należy c_{k+1}. Mamy wtedy:
$$[a_{k+1}, b_{k+1}] \subseteq [a_k, b_k],\ b_{k+1} - a_{k+1} = \frac{1}{3^{k+2}}$$

$$\text{oraz } c_{k+1} \notin [a_{k+1}, b_{k+1}].$$

Mamy zatem zdefiniowany indukcyjnie ciąg przedziałów $[a_n, b_n]$ taki, że dla każdej liczby naturalnej $n \in \mathbb{N}$:

$$[a_{n+1}, b_{n+1}] \subseteq [a_n, b_n],\ b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{1}{3^{n+1}}$$

$$\text{oraz } c_{n+1} \notin [a_n, b_n].$$

Zauważmy, że $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{3^{n+1}} = 0$. Na mocy lematu 4.4.4 o przedziałach zstępujących ciągi $(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ i $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ są zbieżne do tej samej granicy. Przyjmijmy

$$c = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Zauważmy teraz, że dla każdej liczby naturalnej n mamy $c \in [a_n, b_n]$, podczas gdy $c_n \notin [a_n, b_n]$. Zatem $c \neq c_n$ dla każdego n.
Z dowolności f, nie istnieje funkcja z $\mathbb{N}$ w $[0, 1]$, w której zbiór wartości wyczerpywałby przedział $[0, 1]$ (inaczej: nie istnieje surjekcja $\mathbb{N}$ na $[0, 1]$); tym bardziej nie istnieje funkcja z $\mathbb{N}$ na całe $\mathbb{R}$. □

Twierdzenie 4.4.6. *Zbiór wszystkich liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$ nie jest równoliczny ze zbiorem wszystkich liczb naturalnych $\mathbb{N}$.*

Dowód. Korzystając z poprzedniego lematu i faktu, że $|[0, 1]| = |\mathbb{R}|$ o czym świadczy chociażby funkcja $\mathrm{tg}\colon (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$, będąca bijekcją. (I oczywiście $[0, 1] \subseteq (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$). □

Twierdzenie 4.4.7 (Bolzano-Weierstrassa)**.** *Z dowolnego ciągu ograniczonego można wybrać podciąg zbieżny.*

Dowód. Rozważmy dowolny ciąg $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ograniczony. Istnieją zatem liczby rzeczywiste a i b takie, że $x_n \in [a, b], n \in \mathbb{N}$. Skorzystamy z lematu o przedziałach zstępujących. Indukcyjnie określmy ciągi liczb $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$:
Przyjmujemy $a_0 = a$ i $b_0 = b$.
Dzielimy przedział $[a, b]$ na połowy. Co najmniej jedna połowa musi zawierać nieskończenie wiele wyrazów ciągu $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ - w przeciwnym razie wyrazów ciągu byłoby skończenie wiele - sprzeczność z definicją ciągu. Wybieramy tę połowę, która zawiera nieskończenie wiele wyrazów (dowolną, jeśli w obydwu mieści się nieskończenie wiele wyrazów ciągu) i dzielimy ponownie na połowy. Dostajemy np. przedział $[a, \frac{a+b}{2}] = [a_0, \frac{a_0+b_0}{2}]$ i przyjmujemy $a_1 = a_0, b_1 = \frac{a_0+b_0}{2}$. Otrzymany przedział $[a_1, b_1]$ ponownie dzielimy na połowy i wybieramy tę, która zawiera nieskończenie wiele wyrazów ciągu $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Postępując w ten sposób nieskończnie wiele razy dostajemy ciągi $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (zarazem ciąg przedziałów $([a_n, b_n])_{n\in\mathbb{N}}$) o następujących własnościach:

1. $a_n \leqslant a_{n+1},\ n \in \mathbb{N}$
2. $b_{n+1} \leqslant b_n,\ n \in \mathbb{N}$
3. Dla każdego $n \in \mathbb{N}$ istnieje $m \in \mathbb{N}$, że $a_n \leqslant x_k \leqslant b_n$ dla $k \geqslant m$.
4. $b_n - a_n = \frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2^n}$

Z punktów 1, 2 i 4 na mocy lematu o przedziałach zstępujących istnieje granica $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n \in \mathbb{R}$. W podpunkcie trzecim dla każdego $n \in \mathbb{N}$ bieżemy np. x_m i oznaczamy jako y_n. W ten sposób otrzymujemy podciąg $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ciągu $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ taki, że $a_n \leqslant y_n \leqslant b_n$ i na mocy twierdzenia o trzech ciągach

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n \in \mathbb{R}.$$

Czyli podciąg ten jest zbieżny, koniec dowodu. □

Zauważmy, że własność 4. naszego ciągu przdziałów w powyższym dowodzie jest intuicyjna, jednak dla formalności moglibyśmy przeprowadzić łatwy dowód indukcyjny. Oczywiście połowa długości przedziału $[a, b]$ wynosi $\frac{b-a}{2}$.Czyli:

dla dla $n = 1$ mamy $[a_1, b_1]$ - wybrana połowa przedziału $[a, b]$ i stąd

$$b_1 - a_1 = \frac{b-a}{2} = \frac{b_0 - a_0}{2}.$$

Załóżmy, że dla pewnego $m \in \mathbb{N}$ zachodzi $b_m - a_m = \dfrac{b_{m-1} - a_{m-1}}{2^m}$.

Dzielimy przedział $[a_m, b_m]$ na połowy i zgodnie z definicją naszego ciągu podziałów wybieramy jedną, zawierającą nieskończenie wiele wyrazów ciągu $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Np. niech to będzie "prawa" połówka i mamy:

$$[a_{m+1}, b_{m+1}] = \left[\frac{a_m + b_m}{2}, b_m\right]$$

Obliczamy długość przedziału: $b_{m+1} - a_{m+1} =$

$$= b_m - \frac{a_m + b_m}{2} = \frac{2b_m - a_m - b_m}{2} = \frac{1}{2}(b_m - a_m) = \frac{1}{2}\left(\frac{b_{m-1} - a_{m-1}}{2^m}\right) = \frac{b_{m-1} - a_{m-1}}{2^{m+1}}.$$

Analogicznie postąpimy jeśli nieskończenie wiele wyrazów ciągu będzie leżało w lewej połowie przedziału. Z Zasady Indukcji Matematycznej nasz wzór na odległość między wyrazami ciągu jest prawdziwy dla każdej liczby naturalnej. Podobne rozumowanie można by przeprowadzić w dowodzie lematu 4.4.5

Dla ćwiczenia, pokażemy też inny dowód - bez korzystania z lematu o przedziałach zstępujących.

Lemat 4.4.8. *Dowolny ciąg liczbowy zawiera podciąg monotoniczny.*

Dowód. Ustalmy ciąg $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Wykażemy, że jeżeli z tego ciągu nie można wybrać podciągu niemalejącego, to można wybrać z niego podciąg malejący. Najpierw pokażemy, że jeśli z ciągu nie można wybrać podciągu ściśle rosnącego, to ciąg ten ma wyraz największy. Załóżmy nie wprost, że byłoby przeciwnie. Załóżmy, że z ciągu $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nie można wybrać podciągu ściśle rosnącego. Wtedy a_1 nie nie jest największym wyrazem ciągu $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Przyjmujemy $n_1 = 1$. Istnieje $n_2 \in \mathbb{N}$ takie, że $a_{n_2} > a_{n_1}$. Jeżeli dla każdego $n > n_2$ zachodzi nierówność $a_n \leqslant a_{n_2}$, to największy z wyrazów $a_1, a_2, \ldots, a_{n_2}$ jest największym wyrazem ciągu $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Jeśli nie, to istnieje taka liczba naturalna $n_3 > n_2$, że $a_{n_3} > a_{n_2}$. Podobne rozumowanie doprowadzi nas do wniosku, że musi istnieć taka liczba naturalna $n_4 > n_3$, że $a_{n_4} > a_{n_3}$. Powtarzając to rozumowanie nieskończenie wiele razy, dochodzimy do wniosku, że z ciągu $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ można wybrać podciąg ściśle rosnący, wbrew założeniu. Zatem procedura nie może być kontynuowana bez ograniczeń, musimy więc trafić na największy wyraz.

Załóżmy teraz, że ciąg $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nie zawiera ciągu niemalejącego. Niech a_{m_1} będzie największym wyrazem ciągu $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Z ciągu $a_{m_1+1}, a_{m_1+2}, \ldots$ nie można wybrać podciągu niemalejącego bo byłby to również podciąg niemalejący ciągu $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Wobec tego ten ciąg ma wyraz największy. Niech a_{m_2} będzie największym spośród wyrazów $a_{m_1+1}, a_{m_1+2}, \ldots$. Dalej, niech a_{m_3} będzie największym spośród wyrazów $a_{m_2+1}, a_{m_2+2}, \ldots$, a_{m_4} największym spośród wyrazów $a_{m_3+1}, a_{m_3+2}, \ldots$itd. Mamy zatem $a_{m_1} \geqslant a_{m_2} \geqslant a_{m_3} \geqslant \ldots$. Przy czym nieskończenie wiele razy muszą wystąpić równości, w przeciwnym razie możliwe byłoby wybranie podciągu stałego, który jest niemalejący i jednocześnie nierosnący. Stąd mamy, że istnieje podciąg ściśle rosnący ciągu $a_{m_1}, a_{m_2}, \ldots$ i jest on oczywiście również podciągiem ciągu $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. □

Teraz zapowiedziany

Dowód. Oczywiście dla ciągu ograniczonego, dowolny jego podciąg również jest ograniczony. Z poprzedniego lematu wynika, że można wybrać taki podciąg aby był monotoniczny i jako również ograniczony - jest on zbieżny. □

4.4.1 Liczba e Eulera.

W tym paragrafie omówimy pewnę szczególną stałą matematyczną, która zdefiniowana jest przy pomocy granicy ciągu liczb rzeczywistych.

Definicja 4.4.9. Przyjmijmy $e_n := \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Liczbą e Eulera nazywamy granicę ciągu e_n.

Oczywiście musimy udowodnić, że taka granica w ogóle istnieje! Tzn. zbadać zbieżność ciągu $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Twierdzenie 4.4.10. *Ciąg $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest zbieżny. Ponadto $2 \leqslant e < 3$, gdzie $e = \lim_{n\to\infty} e_n$.*

Dowód. Najpierw zauważmy, że na mocy nierówności Bernoulliego mamy oszacowanie wartości ciągu z dołu
$$2 = 1 + 1 = 1 + n\frac{1}{n} \leqslant \left(1+\frac{1}{n}\right)^n, \; n \in \mathbb{N}.$$

Nam oszacowanie z góry będzie potrzebne do dowodu zbieżności. Korzystając z dwumianu newtona (3.8)
$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^k = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(n-k)!k!n^k} \leqslant \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(n-k)!k!n!}}_{\text{Gdyż } n^k \geqslant n!} =$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(n-k)!k!} \leqslant \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}.$$

Zauważmy, że $e_1 = 2, e_2 = 2 + \frac{1}{4} < 3$ a dla $n > 2$ mamy z powyższego oszacowania:
$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} = 2 + \underbrace{\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!}}_{<1} < 3.$$

Wiemy zatem, że ciąg jest ograniczony. Wykażemy, że jest on monotoniczny a z tąd już zbieżność wynika z twierdzenia 4.3.1. Chcemy pokazać, że $e_{n+1} > e_n$ a łatwiej pokazać równoważną nierówność: $\dfrac{e_{n+1}}{e_n} > 1$. Mamy

$$\frac{e_{n+1}}{e_n} = \frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{(1+\frac{1}{n})^n} = \left(\frac{n^2+2n}{n^2+2n+1}\right) \cdot \frac{n+2}{n+1} = \left(\frac{n^2+2n+1-1}{n^2+2n+1}\right)^n \frac{n+2}{n+1}$$

$$= \left(1 + \frac{-1}{n^2+2n+1}\right)^n \frac{n+2}{n+1}.$$

Po ostatniej równości korzystamy znowu z nierównośc Bernoulliego i otrzymujemy, że

$$\frac{e_{n+1}}{e_n} \geqslant \left(1 + n\frac{-1}{n^2+2n+1}\right) \frac{n+2}{n+1} = \left(\frac{n^2+n+1}{n^2+2n+1}\right)^n \frac{n+2}{n+1} = \frac{n^3+3n^2+3n+2}{n^3+3n^2+3n+1} > 1.$$

A więc ciąg $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest zbieżny, do liczby z przedziału $[2,3)$, co było do udowodnienia. □

Podobnie jak jak liczba π, która począwszy naturalnie pojawia się w geometrii ale stykamy się z nią na każdym kroku w całej matematyce, tak liczba e jest podstawową stałą w analizie matematycznej i drugą z podstawowych stałych pojawiających się niemal wszędzie we współczesnej matematyce. W przybliżeniu liczba Eulera wynosi:

$$e \approx 2,71828182845904523536.$$

Ciekawostka - zauważmy, że łatwo zapamiętać aż dziewięć miejsc po przecinku przybliżenia liczby e, gdyż charakterystyczny czterocyfrowy ciąg „jeden-osiem-dwa-osiem” powtarza się dwukrotnie: $e \approx 2,718281828$. Zasadniczo warto pamiętać, że e to około $2,72$, podobnie jak powinniśmy pamiętać, że π to około $3,14$.

Ćwiczenie. Udowodnić, że ciąg $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ określony wzorem $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ jest zbieżny. Wywnioskować, że dla $n = 1,2,3,\ldots$:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Przykład 32. Pokażemy, że $\lim\limits_{n\to\infty}(1+n)^{\frac{1}{n}} = e$. Podstawmy $t = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}$, to wtedy $n = \frac{1}{t}, n \in \mathbb{N}$ oraz gdy $n \to 0$, to $t \to \infty$ (gdyż $t = \frac{1}{n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$).

$$\lim_{n\to 0}(1+n)^{\frac{1}{n}} = \lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t = e.$$

Przykład 33. Zobaczymy przykład typowej klasy zadań „na liczenie ciągów”.

Obliczmy granicę $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n-3}{n+2}\right)^{2n+1}$. Mamy $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n-3}{n+2}\right)^{2n+1} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+2-5}{n+2}\right)^{2n+1} =$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{-5}{n+2}\right)^{2n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{n+2}{-5}}\right)^{2n+1} = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{n+2}{-5}}\right)^{\frac{n+2}{-5}}\right]^{\frac{-5(2n+1)}{n+2}}$$

Teraz zauważmy, że część w nawiasach kwadratowych dąży do e (jest to granica pewnego podciągu ciągu wyrazów $e_n = (1+\frac{1}{n})^n$ - porównaj twierdzenie 4.4.3 na stronie 47). Zatem nasza granica jest postaci

$$e^{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}, \quad \text{gdzie } a_n = \frac{-5(2n+1)}{n+2}.$$

Łatwo obliczamy, że $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -10$ i stąd szukana granica wynosi e^{-10}.

Można spotkać sporo „granic prowadzących do liczby e", jak w powyższym przykładzie. Bynajmniej nie jest to tylko jakiś dziwny rodzaj zadań służący (wyłącznie) dręczeniu studentów, ale jak najbardziej granice tego typu występują w fizyce, ekonomii i innych „realistycznych" zastosowaniach. Nie mowiąc o matematyce teoretycznej. Trzeba umieć sobie z nimi radzić. Warto mieć w pamięci następujące

Twierdzenie 4.4.11. *Zachodzi równość*

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e}$$

Dowód. Obliczamy

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{-n}\right)^{-(-n)} = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{-n}\right)^{-n}\right]^{-1} =$$

$$= \left[\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{-n}\right)^{-n}\right]^{-1} = [e]^{-1} = \frac{1}{e}.$$

Fakt, że mogliśmy wejść z granicą „pod nawias $(\cdots)^{-1}$" wynika właściwie z twierdzenia 1 ze strony 89, które dopiero poznamy. □

Ponadto w tym miejscu lektury, dla wprawy proponuję od razu proste

Ćwiczenie (1). Obliczyć granicę

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+7}{n-2}\right)^{4n-2}$$

Zachęcam też spróbować nieco inne rachunkowo

Ćwiczenie (2). Obliczyć granicę

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+3}{n^2+1}\right)^{2n^2+1}$$

Twierdzenie 4.4.12. *Niech $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będzie dowolnym ciągiem liczb rzeczywistych, zbieżnym. Oznaczmy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Wówczas*

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{a_n}{n}\right)^{a_n} = e^a.$$

Dowód. Ćwiczenie. □

Twierdzenie 4.4.13. $e^x > x+1$ *dla dowolnego* $x \in \mathbb{R}$.

Dowód. Dla $x < -1$ nierówność jest oczywista. Przypomnijmy nierówność Bernoulliego, zmieniając trochę oznaczenia:

$$1 + na \leqslant (1 + a)^n, \ x \geqslant -1.$$

Podstawiamy $a = \frac{x}{n}$ i mamy

$$1 + x \leqslant \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} e.$$

Zatem nierówność wynika z twierdzenia 4.2.6 o zachowaniu nierówności przy przejściu do granicy. $\square$

4.5 Granice ekstremalne

Możemy wprowadzić dodatkowe narzędzie, pozwalające na badanie podciągów, granic i ganic podciągów różnych ciągów liczb *rzeczywistych*. Określmy teraz działania na symbolach $-\infty, +\infty$ i liczbach rzeczywistych (czyli przypomnijmy: elementach *ciała* $\mathbb{R}$)

$$-(+\infty) = -\infty \quad -(-\infty) = +\infty$$

$$c + (+\infty) = c + \infty = +\infty + c = +\infty,\ c \in \mathbb{R}$$

$$c + (-\infty) = c - \infty = -\infty + c = -\infty,\ c \in \mathbb{R}$$

$$c \cdot (\pm\infty) = \pm\infty \cdot c = \pm\infty,\ c \in \mathbb{R}, c > 0$$

$$c \cdot (\pm\infty) = \pm\infty \cdot c = \mp\infty,\ c \in \mathbb{R}, c < 0$$

$$\frac{c}{\pm\infty} = 0,\ c \in \mathbb{R}$$

$$\left|\frac{c}{0}\right| = +\infty \text{ dla l. rzeczywistej } c \neq 0$$

Wyrażenia $(-\infty) + (+\infty)$, $+\infty + (-\infty)$ oraz $\frac{0}{0}$ pozostają niezdefiniowane, podobnie jak $0 \cdot (\pm\infty)$ $((\pm\infty) \cdot 0)$. Porównaj: symbole nieoznaczone.

Uwaga 4.5.1. Nawet dwa ostatnie z powyższych symboli można zdefiniować w użyteczny sposób: np. w teorii miary i teorii prawdopodobieństwa jako 0. Wszystko zależy od kontekstu. W przypadku obliczania granic, są to "symbole nieoznaczone".

Definicja 4.5.2. Zbiór $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ będziemy nazywali **rozszerzonym zbiorem liczb rzeczywistych**.

Uwaga 4.5.3. Powyższa struktura *nie* jest już ciałem!

Definicja 4.5.4. Ustalmy dowolny ciąg $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Niech

$$E = \left\{ g \in \overline{\mathbb{R}}\colon \text{ istnieje taki podciąg } (a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} \text{ ciągu } (a_n)_{n\in\mathbb{N}}, \text{ że } \lim_{k\to\infty} a_{n_k} = g. \right\}.$$

Definiujemy **granicę dolną** $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n$ ciągu $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wzorem

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \inf E$$

oraz **granicę górną** $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n$ ciągu $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wzorem

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \sup E.$$

Sam zbiór nazywamy zbiorem punktów skupienia ciągu $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ albo jego granic częściowych.

Twierdzenie 4.5.5. *Niech $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będzie dowolnym ograniczonym ciągiem liczb rzeczywistych. Wtedy*

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(\inf_{k\geqslant n} a_k\right) = \sup_{n\geqslant 0}\inf_{k\geqslant n} a_k$$

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(\sup_{k\geqslant n} a_k\right) = \inf_{n\geqslant 0}\sup_{k\geqslant n} a_k$$

Twierdzenie 4.5.6. *Dla dowolnego ciągu $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ liczb rzeczywistych*

$$\liminf_{n\to\infty} a_n \leqslant \limsup_{n\to\infty} a_n.$$

Twierdzenie 4.5.7. *Niech $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będą ciągami liczb rzeczywistych takimi, że dla pewnego $N \in \mathbb{N}$: $a_n \leqslant b_n$ o ile tylko $n \geqslant N$. Wówczas*

$$\liminf_{n\to\infty} a_n \leqslant \liminf_{n\to\infty} b_n,\ \limsup_{n\to\infty} a_n \leqslant \limsup_{n\to\infty} b_n.$$

Najważniesze twierdzenie z tej części, to

Twierdzenie 4.5.8. *Dla dowolnego ciągu $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ liczb rzeczywistych granica $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ właściwa (tj. skończona) istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n.$$

Jeżeli granica ta istnieje, to $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \liminf\limits_{n\to\infty} a_n = \limsup\limits_{n\to\infty} a_n$.

Przykład 34. Zbadamy granicę ciągu $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ danego wzorem

$$a_n = \left(1 + (-1)^n \frac{1}{n}\right)^n.$$

Dla $n = 2k, k \in \mathbb{N}$ mamy podciągi wyrazów $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ postaci $a_{2k} = \left(1 + \frac{1}{2k}\right)^{2k}$. Wtedy z twierdzenia 4.4.12 mamy, że $\lim\limits_{k\to\infty} a_{2k} = e$.
Z kolei dla $n = 2k - 1$ otrzymujemy podciągi w postaci

$$a_{2k+1} = \left(1 - \frac{1}{2k-1}\right)^{2k-1} \overset{n\to\infty}{\to} \frac{1}{e}.$$

Wtedy mamy zbiór granic częściowych $E = \left\{e, \frac{1}{e}\right\}$ (wyczerpaliśmy wszystkie możliwe podciągi, gdyż każda liczba naturalna $n \in \mathbb{N}$ jest liczbą parzystą lub nieparzystą, czyli: postaci $2k$ lub $2k-1$). Widzimy teraz, że

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = e \text{ oraz } \liminf_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{e}.$$

Granice górna i dolna są różne, zatem granica $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ nie istnieje.

Twierdzenie 4.5.9. *Dla dowolnego ciągu liczb dodatnich $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zachodzi*

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} \leqslant \liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} \leqslant \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} \leqslant \limsup_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} \tag{4.8}$$

Dowód. Środkowa nierówność jest powtórzeniem twierdzenia 4.5.6. Udowodnimy prawą nierówność. Niech $g := \limsup\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$. Jeżeli $g = +\infty$, to nierówność oczywiście zachodzi. Niech więc $g \in \mathbb{R}$. Weźmy dowolne $\alpha > g$. Istnieje (lemat 4.5.13) $N \in \mathbb{N}$ takie, że $\dfrac{x_{n+1}}{x_n} \leqslant \alpha$, $n \geqslant N$. Inaczej mówiąc $x_{N+k+1} \leqslant x_{N+k}\alpha$ dla $k \in \mathbb{N}$. Możemy napisać, że dla każdego $p > 0$ i dla kolejnych $k = 0, 1, 2, \ldots, p-1$ mamy:

$$x_{N+1} \leqslant x_N \alpha$$

$$x_{N+2} \leqslant x_{N+1}\alpha$$
$$x_{N+3} \leqslant x_{N+2}\alpha$$
$$\vdots$$

Mnożąc kolejne nierówności stronami otrzymujemy:

$$x_{N+1} \leqslant x_N\alpha$$
$$x_{N+2} \leqslant x_{N+1}\alpha \leqslant x_N\alpha^2$$
$$x_{N+3} \leqslant x_{N+2}\alpha \leqslant x_{N+1}\alpha^2 \leqslant x_N\alpha^3$$
$$\vdots$$
$$x_{N+p} \leqslant x_{N+p-1}\alpha \leqslant \ldots \leqslant x_{N+1}\alpha^{p-1} \leqslant x_N\alpha^p.$$

Mamy zatem $\boxed{x_{N+p} \leqslant x_N\alpha^p}$. Możemy wyrazić dowolne $n \geqslant N$ jako $n = N + p$ dla odpowiedniego $p > 0$ i wtedy $p = n - N$. Nasze oszacowanie ma zatem postać

$$x_n \leqslant x_N\alpha^{n-N}, \; n \geqslant N.$$

Dalej $\sqrt[n]{x_n} \leqslant \sqrt[n]{x_N\alpha^{-N}}\alpha$. Przechodząc do granicy[3] otrzymujemy, że

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} \leqslant \alpha$$

Z dowolności α i $g < \alpha$ możemy przyjąć $\alpha \to g$ i wtedy mamy, że

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} \leqslant g.$$

Lewą nierówność można udowodnić analogicznie. □

Wniosek 4.5.10. Jeżeli dla pewnego ciągu $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ istnieje granica $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$, to istnieje również granica ciągu $\left(\sqrt[n]{a_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ oraz $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$.

Ćwiczenie. Niech $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będzie ciągiem takim, że $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = q \in \mathbb{R}, \; q = \text{const}$. Pokazać, że jeżeli $q < 1$, to $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Sugestia: najpierw zająć się przypadkiem $a_n \geqslant 0, n \in \mathbb{N}$ a potem uzupełnić dowód do a_n dowolnego. Można przeprowadzić bardzo podobne rozumowanie jak w dowodzie poprzedniego twierdzenia.

Ćwiczenie. Wykazać, że $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n}{n!} = 0, a \in \mathbb{R}, \; a = \text{const}$.

Lemat 4.5.11. *Dla dowolnych ciągów liczb rzeczywistych: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ściśle rosnącego zachodzi:*

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} \leqslant \liminf_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} \leqslant \limsup_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} \leqslant \limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n}.$$

[3] $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} \leqslant \limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_N\alpha^{-N}}\alpha \leqslant \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_N\alpha^{-N}}\alpha = \alpha$

Dowód. W opracowaniu! TO-DO $\square$

Bezpośrednio z powyższego oszacowania mamy wniosek:

Twierdzenie 4.5.12 (Stolza)**.** *Niech $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będzie dowolnym ciągiem, a $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ciągiem monotonicznym i $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \infty$. Wtedy,*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}},$$

o ile granica po prawej stronie istnieje (skończona lub nie).

Ćwiczenie. Obliczyć $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n}$.

W dalszej części lektury podamy jeszcze jedno twierdzenie (tw. 5.4.12) charakteryzujące granice ekstremalne, tutaj jednak jesteśmy już w stanie udowodnić jego najużyteczniejszą w toku wykładu część:

Lemat 4.5.13. *Niech $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będzie ciągiem liczb rzeczywistych, E zbiorem jego granic częściowych oraz oznaczmy $\bar{x} = \limsup\limits_{n\to\infty} x_n = \sup E$. Wówczas:*

Jeżeli $\mathbb{R} \ni \alpha > \bar{x}$, to istnieje $n_0 \in \mathbb{N}$ taka, że $x_n < \alpha, n \geqslant n_0$.

Dowód. Niech więc $\bar{x} = \sup E$. Przypuśćmy, nie wprost, że istnieje liczba $\alpha > \bar{x}$ taka, że $x_n \geqslant \alpha$ dla nieskończenie wielu n. Niech $\{x_{n_k} : k \in \mathbb{N}\}$ będzie zbiorem tych wyrazów ciągu $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, to wtedy $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} \geqslant \alpha > \bar{x}$ - sprzeczność z definicją liczby $\bar{x}$. $\square$

4.6 *Proste zagadnienia interpolacyjne

Definicja 4.6.1. Zagadnienie **interpolacji** w naukach ścisłych i - szczególnie - technicznych, polega na znalezieniu funkcji $y = f(x)$, która w danych z góry, różnych od siebie punktach (np. wynikach pomiaru, rezultatach przeprowadzonego wielokrtotnie doświadczenia)

$$x_0, x_1, \dots, x_n;$$

przybiera dane wartości

$$y_0, y_1, \dots, y_n,$$

tj. funkcji $f\colon X \to Y$, $\{x_0, x_1, \dots, x_n\} \subseteq X, \{y_0, y_1, \dots, y_n\} \subseteq Y$ takiej, że $f(x_k) = y_k, k \in \{1, \dots, n\}$.

Postawiony powyżej problem ma nieskończenie wiele rozwiązań, ponieważ można poprowadzić nieskończenie wiele krzywych, przechodzących przez skończoną ilość punktów $x_0, x_1, \dots, x_n$. Załóżmy jednak, że chcemy, aby funkcja f była wielomianem najniższego stopnia. Zachodzi następujące

Twierdzenie 4.6.2. *Istnieje dokładnie jeden wielomian stopnia co najwyżej n-tego, który w punktach $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ przybiera wartości $\{y_0, y_1, \dots, y_n\}$.*

Dowód. Zauważmy, że wyrażenie

$$\frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\cdot(x_i-x_{i-1})(x_i+x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)}$$

jest wielomianem stopnia n, przyjmującym w punkcie $x = x_i$ wartość 1, a w pozostałych punktach wartość 0. Wobec tego wyrażenie, dane sumą:

$$W(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \prod_{\substack{0 \leqslant j \leqslant n \\ j \neq i}} \frac{x-x_j}{x_i-x_j} =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_0)\cdot(x_i-x_{i-1})(x_i+x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)}. \tag{4.9}$$

jest wielomianem stopnia co najwyżej n-tego (pewne wyrazy mogą ulec redukcji), który dla $x = x_i$ przybiera wartość $y_i = f(x_i)$, $i \in \{0, 1, \dots, n\}$. Gdyby istniał inny wielomian, np. P o tej samej własności, to wielomian $W - P$ byłby wielomianem stopnia co najwyżej n-tego mającym $n + 1$ punktów zerowych $W(x_0) - P(x_0), W(x_1) - P(x_1), \dots, W(x_n) - P(x_n)$. □

Wzór 4.9 nazywamy **wzorem interpolacyjnym Lagrange'a**.

Wzór interpolacyjny Newtona. Każdy wielomian stopnia mniejszego lub równego n można zapisać w postaci

$$W(x) = c_0 + c_1(x-x_0) + c_2(x-x_0)(x-x_1) + \ldots + c_n(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1}) \tag{4.10}$$

dobierając odpowiednio współczyniki $c_1, \ldots, c_n$. Wyznaczamy je z warunków $W(x_k) = y_k$ dla $k = 0, 1, \ldots, n$. W tym celu przyjmujemy oznaczenia:

$$w_1(x) = \frac{W(x) - W(x_0)}{(x - x_0)}, w_2(x) = \frac{W_1(x) - W_1(x_1)}{(x - x_1)}, \ldots, w_n(x) = \frac{W_{n-1}(x) - W_{n-1}(x_{n-1})}{(x - x_{n-1})}.$$

Łatwo sprawdzić, że funkcje $w_1, w_2, \ldots, w_n$ są znowu wielomianami, bo zgodnie ze wzorem 4.10

$$w_k(x) = c_1^{(k)} + c_2^{(k)}(x - x_1) + \ldots + c_n^{(k)}(x - x_1) \ldots (x - x_{n-1}), k \in \{1, \ldots, n\}.$$

Zatem $c_0^{(k)} = W(x_0)$, $c_1 = w_1(x_1), \ldots, c_n = w_n(x_n)$. Podstawiając te wyniki do wzoru 4.10 otrzymujemy

$$\begin{aligned} W(x) = W(x_0) + w_1(x_1)(x - x_0) + w_2(x_2)(x - x_0)(x - x_1) + \ldots + \\ + w_n(x_n)(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{n-1}) \end{aligned} \tag{4.11}$$

Wzór 4.11 nazywamy **wzorem interpolacyjnym Newtona**. Wzór ma nad wzorem Lagrange'a np. taką przewagę, że gdybyśmy odrzucili z punktów $x_0, x_1, \ldots, x_n$ ostatni, to we wzoreze 4.11 zniknąłby tylko ostatni wyraz, a inne wyrazy pozostałyby niezmienione.
W praktyce obliczanie współczynników $w_k(x_k)$ wzoru 4.11 wygodnie wykonuje się tworząc następującą tabelę (wypisujemy dla przypadku $n = 4$):

$$\begin{array}{c|ccccc}
x_0 & W(x_0) & & & & \\
 & & w_1(x_1) & & & \\
x_1 & W(x_1) & & w_2(x_2) & & \\
 & & w_1(x_2) & & w_3(x_3) & \\
x_2 & W(x_2) & & w_2(x_3) & & w_4(x_4) \\
 & & w_1(x_3) & & w_3(x_4) & \\
x_3 & W(x_3) & & w_2(x_4) & & \\
 & & w_1(x_4) & & & \\
x_4 & W(x_4) & & & &
\end{array}$$

Dwie pierwsze kolumny tabeli są z góry dane. Kolumny dalsze obliczamy kolejno dzieląc, zgodnie ze wzorami, różnicę dwu wyrazów kolumny poprzedniej przez różnicę odpowiadających wyrazów kolumny pierwszej. Górne wyrazy wszystkich kolumn, poza pierwszą, są szukanymi współczynnikami.

Rozdział 5

Elementy topologii przestrzeni metrycznych i algebry liniowej

5.1 Przestrzenie metryczne

5.1.1 Intuicje prowadzące do przestrzeni metrycznych

5.1.2 Ścisłe określenie przestrzeni metrycznej

Definicja 5.1.1. Mówimy, że para (X, ρ) jest przestrzenią metryczną, gdzie X jest dowolnym zbiorem a $\rho\colon X \times X \to [0, +\infty)$ odwzorowaniem, gdy ρ spełnia nast. własności

(M1) $d(x, y) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x = y$,

(M2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ dla dowolnych $x, y \in X$, (symetria)

(M3) $\rho(x, y) \leqslant \rho(x, z) + \rho(z, y)$ dla dow. $x, y, z \in X$. (warunek trójkąta).

Metrykę bardzo często oznacza się przez d, ρ, σ.

Przykład 35. Przestrzeń $(\mathbb{R}, d_e)$, gdzie $d_e(x, y) := |x - y|$ nazywamy metryką naturalną na prostej.

Łatwo wykazać, że faktycznie mamy do czynienia z przestrzenią metryczną odwołując się do twierdzenia 3.3.28 i porównując z definicją przestrzeni metrycznej.

Ćwiczenie. Niech X będzie dowolnym niepustym zbiorem. Określmy funkcję $d\colon X \to \{0, 1\}$ wzorem

$$d(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{gdy } x = y, \\ 1, & \text{gdy } x \neq y. \end{cases}$$

Udowodnić, że para (X, d) jest przestrzenią metryczną. Nazywamy ją przestrzenią metryczną **dyskretną** albo **zero-jedynkową** (w skrócie: przestrzenią 0-1).

Często będziemy stosować oznaczenie d_e na przestrzeń euklidesową, ale nie jest jakimś powszechnie przyjętym oznaczeniem na metrykę euklidesową. Często stosuje się też zapis $(\mathbb{R}, |\cdot - \cdot|)$, gdzie $|\cdot - \cdot|$ oznacza metrykę daną jako $(x, y) \mapsto |x - y|$.

Oznaczenie d dla metryki 0-1 nie jest uniwersalne, będziemy zawsze pisać jeśli będzie mowa o metryce dyskretnej.

Przykład 36. Przestrzenią metryczną jest para (S^1, ℓ), gdzie $S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 = 1\}$ oraz $\ell(a,b) = \{|\widehat{ab}| \colon |\widehat{ab}| \leqslant \pi\}$ ($|\widehat{ab}|$ oznacza długość łuku, którego końcami są punkty $a, b \in \mathbb{R}^2$ i zawartego w S^1).

A więc przestrzenią jest okrąg jednostkowy (tzn. o promieniu równym jeden) o środku w punkcie $(0,0)$ wraz z odległością między dwoma leżącymi na nim punktami określoną jako długość łuku, jaki oddzielają od okręgu, przy czym zawsze wybieramy krótszy z dwóch łuków w ten sposób wyznaczonych.

Przykład 37 (Inne metryki na $\mathbb{R}^n$). Funkcje $d_m, d_t \colon (\mathbb{R}^n)^2 \to [0, \infty)$ dane dla każdych $x, y \in \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n)$:

$$d_m(x,y) = \max_{1 \leqslant k \leqslant n} |x_k - y_k|,$$

$$d_t(x,y) = \sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|$$

są metrykami na $\mathbb{R}$ - nazywamy je odpowiednio metryką maksimum i metryką taksówkową. Przy $n = 1$ obydwie metryki sprowadzają się do metryki naturalnej na prostej.

Dla ćwiczenia warto zapisać sobie powyższe metryki dla $n = 2$ i narysować jak w tej przestrzeni wyglądają różne zbiory, np. kula $K(0,1)$.

Ćwiczenie. Sprawdzić, że jeżeli para (X, ρ) jest przestrzenią metryczną, to przestrzenią metryczną jest również para (X, ρ^*), gdzie metryka $\rho^* \colon X \times X \to [0, \infty)$ jest dana wzorem

$$\rho^*(x,y) = \frac{\rho(x,y)}{1 + \rho(x,y)}.$$

Możemy w ten sposób od razu wygenerować kilka kolejnych przykładów przestrzeni metrycznych przyjmując za $X = \mathbb{R}$ i za ρ kolejno metrykę naturalną, metrykę dyskretną, maksimum i taksówkową z poprzednich przykładów.

Ćwiczenie. Wykazać, że jeżeli ρ jest metryką w X, to metryką na $\mathbb{R}$ jest również metryka $\rho^{1/2} \colon X \to [0, \infty)$ dana wzorem

$$\rho^{1/2}(x,y) = \sqrt{\rho(x,y)}.$$

Ćwiczenie. Zinterpretować geometrycznie metrykę centralną, tj. metrykę $d_c \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ daną wzorem

$$d_c\Big((x_1,y_1),(x_2,y_2)\Big) = \begin{cases} (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2, & \text{gdy punkty } (x_1,y_1),(x_2,y_2) \text{ i } (c_1,c_2) \text{ są współliniowe,} \\ x_1^2 + y_2^2, & \text{w przeciwnym wypadku.} \end{cases}$$

gdzie punkt $c = (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2$ jest dany - nazywamy go centrum metryki d_c.

Dlaczego metryka ta nazywana też jest metryką kolejową?

Produkt kartezjański przestrzeni metrycznych

Przykład 38 (Euklidesowa przestrzeń metryczna). W przestrzeni $(\mathbb{R}^n, d_e)$, metryką jest funkcja określona wzorem:

$$d_e(x,y) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (x_k - y_k)^2},$$

dla dow. punktów $x, y \in \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ i $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$.

d_e nazywamy metryką euklidesową albo naturalną na $\mathbb{R}^n$. Oczywiście, przy $n = 1$ otrzymujemy wcześniej określoną metrykę naturalną na prostej. Czasami dla $n > 1$ piszemy po prostu $d_e^{(n)}$.

Sprawdzenie, że d_e jest metryką na $\mathbb{R}^n$ wymaga skorzystania z tzw.: Nierówności Cauchy'ego-Buniakowskiego-Schwarza (w skrócie „nierówność CBS"), najczęściej w polskiej literaturze występującej jako „nierówność Cauchy'ego-Schwarza".

Twierdzenie 5.1.2 (Nierówność Cauchy'ego-Buniakowskiego-Schwarza)**.** *Jeśli* $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$*, to zachodzi nierówność*

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right). \tag{5.1}$$

Dowód. Ustalmy funkcję $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ daną wzorem:

$$f(t) = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right) t^2 - 2\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right) t + \sum_{k=1}^{n} b_k^2.$$

Zauważmy, że $f \geqslant 0$, gdyż $f(t) = \sum\limits_{k=1}^{n} (a_k t - b_k)^2 \geqslant 0, t \in \mathbb{R}$. Stąd wyróżnik Δ równania kwadratowego $f(t) = 0$ jest mniejszy lub równy zero:

$$\Delta = 4\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 - 4\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k^2\right) \leqslant 0.$$

Ale stąd już widać, że jest to nasza dowodzona nierówność. Koniec dowodu. $\square$

Ćwiczenie. Korzystając z nierówności Cauchy'ego-Schwarza udowodnić, że jeżeli $a_1, a_2, \ldots, a_n$, $b_1, b_2, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$, to

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^2} \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2}.$$

Twierdzenie 5.1.3. *Niech* $(X_1, \rho_1), (X_2, \rho_2), \ldots, (X_n, \rho_n)$ *będą przestrzeniami metrycznymi. Wówczas zbiór* $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$ *jest przestrzenią metryczną o metryce* $\rho\colon X_1 \times \ldots \times X_n \to [0, \infty)$ *danej wzorem*

$$\rho(x, y) = \rho((x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (\rho_k(x_k, y_k))^2}$$

Dowód. Ustalamy $x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n), z = (z_1, \ldots, z_n)$. Korzystając n-krotnie z warunku (M3) mamy nierówności

$$\rho_k(x_k, y_k) \leqslant \rho_k(x_k, z_k) + \rho_k(z_k, y_k),\ k = 1, 2, \ldots, n. \tag{5.2}$$

Z nierówności (5.1) wynika nierówność

$$\sum_{k=1}^{n} \rho_k(x_k, z_k)\rho_k(z_k, y_k) \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \rho_k(x_k, z_k)}\sqrt{\sum_{k=1}^{n} \rho_k(z_k, y_k)} = \rho(x, z)\rho_k(z, y). \tag{5.3}$$

Szacujemy

$$\begin{aligned}\big(\rho(x,y)\big)^2 &= \sum_{k=1}^{n}\big(\rho_k(x_k,y_k)\big)^2 \underset{(5.2)}{\leqslant} \sum_{k=1}^{n}\big(\rho_k(x_k,z_k)+\rho_k(z_k,y_k)\big)^2 = \\ &= \sum_{k=1}^{n}\big(\rho_k(x_k,z_k)\big)^2 + 2\sum_{k=1}^{n}\rho_k(x_k,z_k)\rho_k(z_k,y_k) + \sum_{k=1}^{n}\big(\rho_k(z_k,y_k)\big)^2 \underset{(5.3)}{\leqslant} \\ &\underset{(5.3)}{\leqslant} \big(\rho(x,z)\big)^2 + 2\rho(x,z)\rho(z,y) + \big(\rho(z,y)\big)^2 = \\ &= \Big(\rho(x,z)+\rho(z,y)\Big)^2.\end{aligned}$$

Czyli $\rho(x,y) \leqslant \rho(x,z)+\rho(z,y)$ dla dowolnych $x,y,z \in X^n$. $\square$

Przyjmując $X_k = \mathbb{R}$ i $\rho_k = |\cdot - \cdot|$ w poprzednim twierdzeniu otrzymujemy metrykę euklidesową z przykładu 38.

5.2 Zbiory otwarte i domknięte

Ustalmy dla tego paragrafu przestrzeń metryczną (X,ρ). Dla każdego zbioru $A \subseteq X$ oznaczamy przez A' jego dopełnienie $X \setminus A$ względem przestrzeni X.

Definicja 5.2.1. Dla dow. $x \in X$ oraz l. rzeczywistej $r > 0$ zbiór

$$K(x,r) = \{y \in X\colon \rho(x,y) < r\}$$

nazywamy **kulą otwartą** w przestrzeni X o środku x oraz promieniu r.

Uwaga 5.2.2. Zbiór $\overline{K}(x,r) = \{y \in X\colon \rho(x,y) \leqslant r\}$ często nazywany jest „kulą domkniętą".

Definicja 5.2.3. Mówimy, że zbiór $U \subseteq X$ jest zbiorem **otwartym** (w przetrzeni X), gdy dla każdego $x \in U$ istnieje otoczenie tego punktu zawarte w zbiorze U, tzn. $\exists_{\varepsilon>0.}\ K(x,\varepsilon) \subseteq U$.

Definicja 5.2.4. Mówimy, że zbiór $F \subseteq X$ jest zbiorem **domkniętym** (w przetrzeni X), gdy zbiór $F' := X \setminus F$ jest zbiorem otwartym.

Definicja 5.2.5. Zbiór otwarty U, zawierający punkt x nazywamy **otoczeniem** punktu x. Gdy U jest otoczeniem punktu x, to zbiór $S := U \setminus \{x\}$ nazywamy **sąsiedztwem** punktu x.
Alternatywnie:
Kulę otwartą o środku w punkcie x też nazywamy **otoczeniem** punktu x. Zbiór $K(x,r) \setminus \{x\}$ nazywamy sąsiedztwem punktu x.

Praktycznie we wszystkich definicjach i twierdzeniach o przestrzeniach metrycznych, tam gdzie posługujemy się pojęciem otoczenia punktu, bez żadnych dodatkowych założeń o postaci tego zbioru, możnaby przyjąć obydwie powyższe definicje. Jeżeli istnieje zbiór otwarty zawierający punkt, to z definicji istnieje też kula otwarta o środku w tym punkcie, a gdy istnieje kula o środku w zadanym punkcie to jest ona po prostu otoczeniem otwartym w myśl obydwu definicji.

Często w wykładadach i publikacjach dotyczących przestrzeni metrycznych, przyjmuje się właśnie definicję otoczenia jako *kuli* a nie dowolnego zbioru otwartego.

Istnieje też w topologii jeszcze inna definicja otoczenia punktu x: jako zbiór V, który *zawiera* zbiór *otwarty* U, taki że $x \in U$. Wtedy w szczególności jest V jest otwarty to można o nim powiedzieć, że jest **otoczeniem otwartym**. My jednak przyjmujemy za otoczenia zbiory otwarte.

Ponadto kulę w literaturze światowej często oznacza się $B(x, \varepsilon)$ (od ang. *ball*). Czesem też pisze się w dolnym indeksie metrykę, gdy nie jest to jasne z kontekstu. Np.: $B_d(x, \varepsilon)$ będzie kulą w przestrzeni metrycznej (X, d). My będziemy czasem oznaczać sąsiedztwo przez $S(x, \varepsilon)$ - jednak uwaga: tak bywa oznaczana *sfera*, czyli zbiór $\{y \in X \colon \rho(x, y) = r\}$. Często w rozumowaniach teoretycznych nie potrzebujemy oznaczenia na promień, nawet jeśli rozważamy kule i sąsiedztwa otwarte. Będziemy wtedy oznaczać odpowiednio otoczenie punktu $x \in X$ przez K_x, B_x, U_x, kulę przez K, B oraz sąsiedztwo przez S, S_x, itp.

Wszystkie te dodatkowe uwagi terminologiczne i notacyjne mają w większości ułatwić czytelnikowi korzystanie z innej literatury i nie trzeba na razie się nimi zbytnio przejmować.

Definicja 5.2.6. Punkt $x \in X$ nazywamy **punktem skupienia** zbioru $A \subseteq X$, gdy dla każdego *sąsiedztwa* S_x punktu x zachodzi
$$S_x \cap A \neq \varnothing$$

Zbiór wszystkich punktów skupienia zbioru A nazywamy **pochodną** zbioru A i oznaczamy A^d.

Lemat 5.2.7 (Hausdorffa)**.** *Jeżeli (X, ρ) jest przestrzenią metryczną, to dla każdych $x, y \in X$, $x \neq y$ istnieją takie zbiory otwarte $U, V \subseteq X$, że*

1. $U \cap V = \varnothing$,

2. $x \in U$, $y \in V$.

Dowód. Wystarczy przyjąć $\varepsilon = \frac{\rho(x,y)}{2}$. Wówczas oczywiście $K(x, \varepsilon) \cap K(y, \varepsilon) = \varnothing$. $\square$

Twierdzenie 5.2.8. *Niech $A, B \subseteq X$ i A^d, B^d będą pochodnymi tych zbiorów. Wtedy*

1. $(A \cup B)^d = A^d \cup B^d$.

2. $(A^d)^d \subseteq A^d$.

3. $\bigcup\limits_{i \in I} A_i^d \subseteq \left(\bigcup\limits_{i \in I} A_i\right)^d$ *dla dowolnej rodziny $\{A_n \colon n \in I\}$.*

Twierdzenie 5.2.9. *Jeżeli x jest punktem skupienia zbioru A, to dowolne otoczenie punktu x zawiera nieskończenie wiele punktów zbioru A.*

Dowód. Ustalmy zbiór A i jego punkt skupienia x. Załóżmy, że istnieje otoczenie $K(x, \epsilon)$ punktu x takie, że $K(x, \epsilon) \cap A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Przyjmijmy $\varepsilon = \min\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} \rho(x, a_k)$. Oczywiście $\varepsilon > 0$. Wtedy otoczenie $K(x, \varepsilon)$ nie zawiera ani jednego punktu zbioru A różnego od x - sprzeczność. $\square$

Wniosek 5.2.10. Skończony zbiór nie ma punktów skupienia.

Twierdzenie 5.2.11.

1. *Dla dowolnej rodziny $\{U_t \colon t \in T\}$ zbiorów otwartych zbiór $\bigcup\limits_{t \in T} U_t$ jest otwarty.*

2. *Dla dowolnej rodziny $\{F_t \colon t \in T\}$ zbiorów domkniętych zbiór $\bigcap\limits_{t \in T} F_t$ jest domknięty.*

Dowód. 1. Niech $x \in \bigcup_{t\in T} U_t$. Oznacza to, że istnieje $t_0 \in T$ iż $x \in U_{t_0}$. A z otwartości zbioru $x \in U_{t_0}$ istnieje $r > 0$ iż $K(x,r) \subseteq U_{t_0}$. A więc $K(x,r) \subseteq U_{t_0} \subseteq \bigcup_{t\in T} U_t$ - z dowolności wyboru x wynika otwartość naszej sumy.

2. Zauważmy, że jeżeli $\{F_t : t \in T\}$ jest rodziną zbiorów domkniętych, to $\{X \setminus F_t : t \in T\}$ jest rodziną zbiorów otwartych. $\bigcup_{t\in T} X \setminus F_t$ jest zbiorem otwartym na mocy poprzedniego punktu. Ale w takim razie zbiór $\bigcup_{t\in T} X \setminus F_t = X \setminus \bigcap_{t\in T} F_t$ jest otwarty, czyli zbiór $\bigcap_{t\in T} F_t$ jest domknięty.

□

Twierdzenie 5.2.12.

1. *Dla dowolnej skończonej rodziny $U_1, U_2, \dots U_n$ zbiorów otwartych zbiór $\bigcap_{t=1}^{n} U_t$ jest otwarty.*

2. *Dla dowolnej skończonej rodziny $F_1, F_2, \dots F_n$ zbiorów domkniętych zbiór $\bigcup_{t=1}^{n} F_t$ jest domknięty.*

Dowód. 1. Niech $x \in \bigcap_{t=1}^{n} U_t$. Oznacza to, że istnieją takie liczby $r_1, r_2, \dots, r_n > 0$, że

$$K(x, r_t) \subseteq U_t,\ t = 1, 2, \dots, n.$$

Niech $r = \min\{r_1, r_2, \dots, r_n\}$. Wówczas $K(x,r) \subseteq K(x,r_t) \subseteq U_t$ dla dowolnego $t = 1, \dots, n$. Wnioskujemy:

$$y \in K(x,r) \implies \big(\forall_{t\in\{1,\dots,n\}.}\ y \in K(x,r_t)\big) \implies \big(\forall_{t\in\{1,\dots,n\}.}\ y \in U_t\big) \implies y \in \bigcap_{t=1}^{n} U_t.$$

A więc $K(x,r) \subseteq \bigcap_{t=1}^{n} U_t$ czyli suma jest otwarta i teza została udowodniona.

2. $F_1, F_2, \dots, F_n$ - domknięte $\implies$ $X \setminus F_1, X \setminus F_2, \dots, X \setminus F_n$ - otwarte.

$$\underbrace{\bigcap_{t=1}^{n} X \setminus F_t}\ \text{- otwarty (z poprzedniego punktu)}$$
$$\|$$
$$\overbrace{X \setminus \bigcup_{t=1}^{n} F_t}\ \text{- otwarty} \implies \bigcup_{t=1}^{n} F_t\ \text{- domknięty.}$$

□

5.2.1 Operacje na podzbiorach przestrzeni metrycznych

Ustalmy przestrzeń metryczną (X, ρ).

Definicja 5.2.13. Wnętrzem zbioru $A \subseteq X$ w przestrzeni X nazywamy zbiór

$$\operatorname{int} A = \bigcup \{U \subseteq X \colon U \text{ jest zbiorem otwartym i } U \subseteq A\}.$$

Zbiór $\operatorname{int} A$ jest więc największym (w sensie inkluzji) zbiorem otwartym, zawartym w zbiorze A. Zauważmy, że $x \in \operatorname{int} A$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje otoczenie U_x punktu a, takie że $U_x \subseteq A$.

Uwaga 5.2.14. $\operatorname{int} A = \{x \in X \colon A \text{ jest otoczeniem punktu } x\}$.

Przykład 39. W przypadku przestrzeni $\mathbb{R}^n$ z naturalną metryką, łatwo o intuicyjne przykłady:

- $\operatorname{int}[0, 2] = (0, 2)$,
- $\operatorname{int}[-1, 1) = (-1, 1)$,
- $\operatorname{int}(-1, 1) = (-1, 1)$,
- $\operatorname{int}\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 \leqslant 1\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 < 1\}$.

Twierdzenie 5.2.15.

1. $\operatorname{int} A \subseteq A$, *dla dow.* $A \subseteq X$.
2. $\operatorname{int}(\operatorname{int} A) = \operatorname{int} A$ *dla dow.* $A \subseteq X$.
3. $\operatorname{int} X = X$.
4. $\operatorname{int} A = A$ *dla dow. zbioru otwartego* $A \subseteq X$.
5. $\operatorname{int}(A \cap B) = \operatorname{int} A \cap \operatorname{int} B$ *dla dow.* $A, B \subseteq X$.

Dowód. 1. Niech $x \in \operatorname{int} A$, to $x \subseteq U \subseteq A$ dla pewn. otoczenia U - czyli $x \in A$.

□

Definicja 5.2.16. Domknięciem zbioru $A \subseteq X$ w przestrzeni X nazywamy zbiór

$$\operatorname{cl} A = \bigcap \{F \subseteq X \colon F \text{ jest zbiorem domkniętym i } A \subseteq F\}$$

Zbiór $\operatorname{cl} A$ jest zatem najmniejszym (w sensie inkluzji) zbiorem domkniętym, zawierającym zbiór A. Domknięcie zbioru A bywa też często oznaczane: $\overline{A}$.

Uwaga 5.2.17. $x \in \operatorname{cl} A$ wtedy i tylko wtedy, gdy $A \cap U_x \neq \varnothing$ dla każdego otoczenia U_x punktu x.

Dowód. $x \in \operatorname{cl} A$ gdy x nie jest punktem wewnętrznym zbioru $X \setminus A$, czyli w każdym otoczeniu U_x punktu x istnieje punkt nienależący do $X \setminus A$ (a więc należący do A). □

Zauważmy, że powyższa charakteryzacja jest bardzo podobna do definicji punktu skupienia. Jednak punkt x jest punktem skupienia zbioru A, gdy przecięcie każdego *sąsiedzta* punktu x ze zbiorem A jest niepuste, podczas gdy aby x należał do domknięcia potrzeba i wystarcza aby przecięcie każdego *otoczenia* punktu x ze zbiorem A było niepuste. Podsumowując i formułując powyższe fakty (równoważnie) w języku kul otwartych, możemy napisać iż:

$$x \in \operatorname{cl} A \iff \forall_{\varepsilon>0.}\, K(x,\varepsilon) \cap A \neq \varnothing,$$
$$x \in A^d \iff \forall_{\varepsilon>0.}\, K(x,\varepsilon) \setminus \{x\} \cap A \neq \varnothing.$$

Sformułowanie przy pomocy zbiorów otwartych, przenosi się jednak bez zmian na przestrzenie topologiczne.

Przykład 40. $\operatorname{cl}(-1,3) = [-1,3]$.

Definicja 5.2.18. Mówimy, że zbiór $A \subseteq X$ jest **gęsty** (w X), gdy $\operatorname{cl} A = X$.

Przykład 41. Zbiór liczb wymiernych jest gęsty w zbiorze liczb rzeczywistych.

Ćwiczenie. Udowodnić, że zbiór $A \subseteq X$ jest gęsty w X wtedy i tylko wtedy, gdy $U \cap A \neq \varnothing$ dla dowolnego niepustego zbioru otwartego $U \subseteq X$.

Twierdzenie 5.2.19.

1. $A \subseteq \operatorname{cl} A$ *dla dow.* $A \subseteq X$.
2. $\operatorname{cl}(\operatorname{cl} A) = \operatorname{cl} A$ *dla dow.* $A \subseteq X$.
3. $\operatorname{cl} F = F$ *dla dow. zbioru domkniętego* $F \subseteq X$.
4. $\operatorname{cl} \varnothing = \varnothing$.
5. $\operatorname{cl} X = X$.
6. $\operatorname{cl}(A \cup B) = \operatorname{cl} A \cup \operatorname{cl} B$ *dla dow.* $A, B \subseteq X$.

Dowód.
1. Niech $x \in A$. Wówczas $x \in F$ dla każdego F zawierającego A a w szczególności gdy F jest zbiorem domkniętym. Czyli $x \in \operatorname{cl} A$ z definicji domknięcia.
2. Z poprzedniego punktu $\operatorname{cl} A \subseteq \operatorname{cl}(\operatorname{cl} A)$. Niech więc $x \in \operatorname{cl}(\operatorname{cl} A)$. Z drugiej strony, $\operatorname{cl} A \subseteq \operatorname{cl} A$ - zbiór domknięty, czyli $x \in \operatorname{cl} A$ z definicji domknięcia zbioru. A więc również $\operatorname{cl}(\operatorname{cl} A) \subseteq \operatorname{cl} A$.

□

Ćwiczenie. Pokazać, że $\operatorname{cl}(A \cap B) \subseteq \operatorname{cl} A \cap \operatorname{cl} B$ dla dow. $A, B \subseteq X$, gdzie X - prz. metryczna. Podać przykład pokazujący, że inkluzja nie zachodzi w drugą stronę.

Twierdzenie 5.2.20. *Dla dowolnego zbioru* $A \subseteq X$ *zachodzi* $\operatorname{cl} A = A \cup A^d$.

Definicja 5.2.21. Średnicą zbioru $A \subseteq X$ nazywamy liczbę

$$\operatorname{diam} A = \sup \{\rho(x,y) \colon x, y \in A\}$$

Definicja 5.2.22. Odległością zbiorów $A, B \subseteq X$ nazywamy liczbę

$$\operatorname{dist}(A,B) = \inf \{\rho(a,b) \colon a \in A, b \in B\}.$$

Analogicznie odległością punktu $x \in X$ od zbioru $A \subseteq X$ określamy liczbę

$$\operatorname{dist}(x,A) = \inf \{\rho(x,a) \colon a \in A\}.$$

Uwaga 5.2.23. $\operatorname{diam} A = \operatorname{diam} \operatorname{cl} A$, $A \subseteq X$ dla dow. prz. metrycznej X.

5.3 Brzeg zbioru i zbiory brzegowe

Definicja 5.3.1. **Brzegiem** zbioru $A \subseteq X$ nazywamy zbiór

$$\Big\{x \in X : \forall_{r>0.}\ K(x,r) \cap A \neq \varnothing \text{ oraz } K(x,r) \cap (X \setminus A) \neq \varnothing\Big\},$$

który oznaczamy przez $\operatorname{fr} A$ od ang. *frontier*. Zauważmy, że jest to po prostu taki zbiór, że w otoczeniu dowolnego jego elementy leżą zarówno punkty należące do A jak i punkty nalężące do jego dopełnienia A' względem przestrzeni X.

Mówimy, że zbiór A jest **brzegowy**, gdy $\operatorname{int} A = \varnothing$.

Gdy $\operatorname{int}\operatorname{cl} A = \varnothing$, czyli domknięcie zbioru A jest zbiorem brzegowym, to mówimy, że zbiór A jest **nigdziegęsty**.

Brzeg zbioru A oznaczany jest w literaturze także przez ∂A oraz Bd A od ang. *boundary.*

Przykład 42. Niech $x \in \mathbb{R}$. Wówczas $\operatorname{int}\operatorname{cl}\{x\} = \operatorname{int}\{x\} = \varnothing$ zatem zbiór $\{x\}$ jest nigdziegęsty.

Z definicji łatwo widać, że zbiór $A \subseteq X$ (w przestrzeni metrycznej X) jest brzegowy wtedy i tylko wtedy, gdy $\operatorname{cl}(X \setminus Z) = X$.

Twierdzenie 5.3.2. *Niech $A \subseteq X$. Wówczas*

1. $\operatorname{fr} A = \operatorname{cl} A \setminus \operatorname{int} A$*,*
2. $\operatorname{fr} A$ *jest zbiorem domkniętym,*
3. $\operatorname{cl} A = \operatorname{int} A \cup \operatorname{fr} A$*,*
4. $\operatorname{int} A = A \setminus \operatorname{fr} A$*,*
5. $\operatorname{fr}(X \setminus A) = \operatorname{fr} A$*,*
6. $\operatorname{fr}\operatorname{cl} A \subseteq \operatorname{fr} A$*,*
7. $\operatorname{fr} A = \overline{A} \cap \overline{X \setminus A}$*.*

Dowód.

1. Niech $x \in \operatorname{fr} A$. Wówczas dla każdego otoczenia U_x punktu x mamy $U_x \cap A \neq \varnothing$, zatem $x \in \operatorname{cl} A$. Załóżmy, że byłoby $x \operatorname{int} A$. Wówczas musiałoby istnieć otoczenie U_x punktu x takie, czyli zbiór otwarty tak, że $x \in U_x \subseteq A$. Ale z założenia w każdym otoczeniu x istnieją punkty nie należące do A. Sprzeczność dowodzi, że $x \notin \operatorname{int} A$. Mamy więc, że $\operatorname{fr} A \subseteq \operatorname{cl} A \setminus \operatorname{int} A$.

   W drugą stronę, niech $x \in \operatorname{cl} A \setminus \operatorname{int} A$. Oczywiście wtedy w każdym otoczeniu punktu x znajdują się punkty należące do A a z drugiej strony żadne takie otoczenie nie zawiera się w A, czyli istnieją w nim również punkty leżące w A'. Stąd wynika, że $x \in \operatorname{fr} A$.

2. Musimy wykazać, że zbiór $X \setminus \operatorname{fr} A$ jest zbiorem otwartym w X. Niech $x \in X \setminus \operatorname{fr} A$. To znaczy, że

   $$x \in X$$

   oraz istnieje $r > 0$ takie, że

   $$K(x,r) \cap A = \varnothing \ \text{ lub } \ K(x,r) \cap (X \setminus A) = \varnothing.$$

   Gdyby było $K(x,r) \cap (X \setminus A) = \varnothing$, to $K(x,r) \nsubseteq X$ - sprzeczność, bo $x \in X$. A więc $K(x,r) \cap A = \varnothing$, a to oznacza że $K(x,r) \subseteq X \setminus A \subseteq X$. Z dowolności wyboru x wynika, że zbiór $X \setminus \operatorname{fr} A$ jest zbiorem otwartym w X, czyli $\operatorname{fr} A$ jest w X domknięty.

3. Z 1. mamy $\operatorname{fr} A = \operatorname{cl} A \setminus \operatorname{int} A$, więc $\operatorname{fr} A \cup \operatorname{int} A = (\operatorname{cl} A \setminus \operatorname{int} A) \cup \operatorname{int} A = \operatorname{cl} A$.

4. Niech $x \in \operatorname{int} A$. Z jednej strony $x \in A$, gdyż $\int A \subseteq A$. Z drugiej, ponieważ istnieje takie otoczenie U_x punktu x, że $U_x \subseteq A$, to nie istnieją punkty należące do $(X \setminus A) \cap U_x$ a stąd x nie może należeć do $\operatorname{fr} A$. Czyli $x \in A \setminus \operatorname{fr} A$. W drugą stronę [TO-DO]

5. $\operatorname{fr}(X \setminus A) = \{x\colon \forall_{r>0.}\, K(x,r) \cap A \neq \varnothing \text{ i } K(x,r) \cap (X \setminus A) \neq \varnothing\} = \operatorname{fr} A$ z samej definicji. Powinno to być oczywiste.

6. w opracowaniu

7. tożsamość 7 jest często wykorzystywana jako definicja brzegu zbioru.

□

Twierdzenie 5.3.3. *Niech $A \subseteq X$, gdzie X jest przestrzenią metryczną. Wówczas następujące warunki są równoważne*

1. *A jest zbiorem brzegowym,*
2. *$A \subseteq \operatorname{fr} A$,*
3. *$\operatorname{cl}(X \setminus A) = X$.*

Dowód. Załóżmy, że zbiór A jest brzegowy, czyli $\operatorname{int} A = \varnothing$. Wówczas $\operatorname{fr} A = \operatorname{cl} A \setminus \operatorname{int} A = \operatorname{cl} A$. Ale $A \subseteq \operatorname{cl} A$ z własności domknięcia. A więc $A \subseteq \operatorname{fr} A$.

Załóżmy więc teraz, że $A \subseteq \operatorname{fr} A$ i pokażemy, że wówczas $X = \operatorname{cl}(X \setminus A)$. Niech $x \in X$. Jeżeli $x \notin A$, to $x \in X \setminus A \subseteq \operatorname{cl}(X \setminus A)$. Załóżmy więc, że $x \in A$. Wówczas, z założenia $x \in \operatorname{fr} A$, czyli w dowolnym otoczeniu punktu x leżą punkty należące do $X \setminus A$. Jest więc x punktem skupienia zbioru $X \setminus A$, a stąd $x \in \operatorname{cl}(X \setminus A)$. Wykazaliśmy, że $X \subseteq (X \setminus A)$. W drugą stronę: jeżeli $x \in \operatorname{cl}(X \setminus A)$, to albo $x \in X \setminus A$ i wtedy $x \in X$, albo x jest punktem skupienia zbioru $X \setminus A$ w przestrzeni X, czyli i tak należy do X.

Pozostaje wykazać, że jeżeli $\operatorname{cl}(X \setminus A) = X$, to zbiór A jest brzegowy. Niech ponownie $x \in X$. Wówczas z założenia $x \in (X \setminus A)$ lub x jest punktem skupienia zbioru $X \setminus A$, czyli w dowolnym sąsiedztwie punktu x leżą punkty należące do $X \setminus A$. Załóżmy, że byłoby $x \in \operatorname{int} A$. Wtedy istnieje zbiór otwarty $U_x \subseteq A$, $x \in U_x$. Ale $U_x \cap (X \setminus A) = \varnothing$ - sprzeczność z założeniem, że $U_x \subseteq A$. Czyli $x \notin A$ dla każdego $x \in X$ oraz $\operatorname{int} A \subseteq A \subseteq X$. Stąd już wynika, że koniecznie $\operatorname{int} A = \varnothing$, czyli zbiór A jest brzegowy. □

Twierdzenie 5.3.4. *Niech $A \subseteq X$. Wówczas $X = \operatorname{int} A \cup \operatorname{fr} A \cup \operatorname{int}(X \setminus A)$ i zbiory te są parami rozłączne.*

Ćwiczenie. Pokazać, że jeżeli zbiór jest nigdziegęsty, to jest brzegowy ale nie zachodzi implikacja w drugą stronę.

5.4 Granica ciągu w przestrzeni metrycznej

Definicja 5.4.1. Mówimy, że ciąg $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wyrazów przestrzeni metrycznej (X, ρ) jest zbieżny do granicy $x \in X$, gdy

$$\forall_{\varepsilon>0} \exists_{N\in\mathbb{N}} \forall_{n\geqslant N.}\ \rho(x_n, x) < \varepsilon.$$

Analogicznie jak dla ciągów rzeczywistych określamy podciąg $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ ciągu $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ w przestrzeni metrycznej, poprzez pewien ciąg $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ liczb naturalnych.

Definicja 5.4.2. Niech dany będzie ciąg $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ w przestrzeni metrycznej (X,ρ) oraz podciąg $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ zbieżny do pewnej granicy w przestrzeni X. Wówczas $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k}$ nazywamy **punktem skupienia ciągu** $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$[1].

Definicja 5.4.3. Mówimy, że ciąg $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wyrazów przestrzeni metrycznej (X,ρ) jest ograniczony, gdy wszystkie jego wyrazy są zawarte w pewnej kuli. Tzn. istnieją takie $s\in X$, $r\in\mathbb{R}$, $r>0$, że $\{x_n\colon n\in\mathbb{N}\}\subseteq K(s,r)$.

Twierdzenie 5.4.4. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x \iff \lim\limits_{n\to\infty} d(x_n,x)=0.$

Dowód. Ustalmy $\varepsilon>0$. Istnieje $N\in\mathbb{N}$ takie, że

$$0\leqslant d(x_n,x)<\varepsilon,\ \text{ dla każdego } n\geqslant N.$$

Zatem ciąg liczb rzeczywistych $\big(d(x_n,x)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ jest zbieżny do zera.

W drugą stronę, jeżeli $\lim\limits_{n\to\infty} d(x,x_n)=0$, to znaczy że dla każdego $\varepsilon>0$ istnieje $N\in\mathbb{N}$ takie, że $d(x,x_n)<\varepsilon$ o ile $n\geqslant N$, czyli $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x$. □

Twierdzenie 5.4.5. *Granica ciągu zbieżnego w przestrzeni metrycznej jest wyznaczona jednoznacznie.*

Dowód. Niech (X,d) będzie prz. metryczną, a $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zbieżnym ciągiem wyrazów tej przestrzeni i załóżmy, że byłoby $x_1\neq x_2$ oraz $\lim_{n\to\infty}x_n=x_1$ i $\lim_{n\to\infty}x_n=x_2$. Wówczas

$$0\leqslant d(x_1,x_2)\leqslant d(x_1,x_n)+d(x_n,x_n)\overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Zatem $d(x_1,x_2)=0$ i stąd $x_1=x_2$ wbrew założeniom. □

Twierdzenie 5.4.6. *Jeżeli ciąg $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest zbieżny, to jest ograniczony.*

Dowód. Rozważmy dowolny ciąg $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\subseteq X$ taki, że $x_n\to x$ dla pewnego $x\in X$. Wtedy dla pewnego $N\in\mathbb{N}$ $\rho(x_n,x)<1$ o ile $n\geqslant N$. Niech

$$M=\max\{\rho(x_1,x),\rho(x_2,x),\dots,\rho(x_{N-1},x),\rho(x_N,x),1\}.$$

Wtedy dla $n<N$ mamy $x_n\in K(x,M)$ a dla $n\geqslant N$ $x_n\in K(x,1)\subseteq K(x,M)$. □

Związki między ciągami a własnościami przestrzeni metrycznych i ich podzbiorów.

Definicja 5.4.7. Niech $\rho_1\colon X\times X\to X$, $\rho_2\colon X\times X\to X$ będą metrykami w ustalonym zbiorze X. Mówimy, że metryki ρ_1 i ρ_2 są **równoważne**, gdy dowolny zbieżny ciąg $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wyrazów zbioru X jest zbieżny do tej samej granicy $x\in X$ w obydwu metrykach.

Twierdzenie 5.4.8. *Niech X będzie dowolnym zbiorem a $\rho_1\colon X\times X\to X$, $\rho_2\colon X\times X\to X$ będą metrykami. Jeżeli istnieją takie liczby $\alpha>0$ i $\beta>0$, że*

$$\alpha\cdot\rho_1(x,y)\leqslant\rho_2(x,y)\leqslant\beta\cdot\rho_1(x,y),$$

dla dowolnych $x,y\in X$, to metryki ρ_1 i ρ_2 są równoważne.

[1] nazywa się je też **granicami częściowymi**

Dowód. Łatwe ćwiczenie - korzystamy dwukrotnie z twierdzenia o trzech ciągach. □

Przykład 43. Zbadamy równoważność metryk $d(x,y) = \frac{|x-y|}{1+|x-y|}$ i metryki euklidesowej.

Przykład 44. Zbadamy równoważność metryk $d(x,y) = \min(|x-y|, 1)$ i metryki euklidesowej.

Ćwiczenie. Wykazać, że dla dowolnych stałych $a_1, \dots, a_n > 0$ funkcja d^*_σ dana wzorem

$$d^*_\sigma(x,y) = \sum_{k=1}^{n} a_k \frac{|x_k - y_k|}{1 + |x_k - y_k|}, y = (y_1, y_2, \dots, y_n), x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

jest metryką na $\mathbb{R}^n$, równoważną metryce euklidesowej (patrz, przykład 38).

Twierdzenie 5.4.9. *Dla dowolnego zbioru $A \subseteq X$, gdzie X jest prz. metryczną $x \in A$ jest punktem skupienia zbioru A wtedy i tylko wtedy, gdy jest granicą pewnego ciągu $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ takiego, że $x_n \in A \setminus \{x\}, n \in \mathbb{N}$.*

Lemat 5.4.10. *Jeżeli (X, ρ) jest przestrzenią metryczną, $A \subseteq X$, to $x \in \operatorname{cl} A$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taki ciąg $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ elementów należących do A, że*

$$x = \lim_{n\to\infty} x_n.$$

Dowód. Załóżmy, że $A \subseteq X$ oraz, że $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest ciągiem elementów należących do A zbieżnym do x. Dla dowolnego otoczenia otwartego U_x punktu x istnieje $n_0 \in \mathbb{N}$ takie, że $x_n \in U_x$ dla $n \leqslant n_0$. Wobec tego $U \cap A \neq \varnothing$. Z dowolności U wynika, że $x \in \operatorname{cl} A$.

Załóżmy teraz, że $x \in \operatorname{cl} A$. Dla każdego $n \in \mathbb{N}$ kula otwarta $B(x, \frac{1}{n})$ przecina niepusto zbiór A. Wybierzmy (korzystając z pewnika wyboru) z każdego zbioru $A \cap B(x, \frac{1}{n})$ element x_n. Ponieważ $\rho(x, x_n) \leqslant \frac{1}{n}$, to

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x.$$

□

Twierdzenie 5.4.11. *Jeżeli X jest przestrzenią metryczną, to zbiór $F \subseteq X$ jest domknięty wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego zbieżnego ciągu $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wyrazów ze zbioru F jego granica należy do F:*

$$\lim_{n\to\infty} x_n \in F.$$

Dowód. Załóżmy najpierw, że F jest domkniętym podzbiorem przestrzeni metrycznej X. Weźmy dowolny ciąg $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zbieżny.

$$\text{Niech } \lim_{n\to\infty} x_n = x. \text{ Wtedy na mocy poprzedniego lematu } x \in F.$$

Załóżmy teraz, że dla każdego zbieżnego ciągu elementów ze zbioru F, jego granica leży w zbiorze F. Weźmy dowolny $x \in \operatorname{cl} F$. Z lematu, istnieje ciąg $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ elementów zbioru F zbieżny do x. Czyli $x \in F$ z założenia i stąd mamy, że $\operatorname{cl} F \subseteq F$. Czyli $F = \operatorname{cl} F$ i F jest zbiorem domkniętym. □

Ćwiczenie. Niech (X, ρ) będzie przestrzenią metryczną, $x \in A \subseteq X$ i istnieją takie ciągi $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$, że $\alpha_n \in A$, $\beta_n \in X \setminus A$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$ i

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \lim_{n\to\infty} \beta_n = x.$$

- Czy $A = X$?
- Czy $\operatorname{int} A = \varnothing$?
- Czy A jest zbiorem brzegowym?

Na koniec wrócimy do tematu granic ekstremalnych i podamy jedno twierdzenie charakteryzujące granice ekstremalne, które teraz jesteśmy w stanie łatwo udowodnić.

Twierdzenie 5.4.12. *Niech $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będzie ciągiem liczb rzeczywistych, E zbiorem jego granic częściowych oraz oznaczmy $\bar{x} = \limsup_{n\to\infty} x_n = \sup E$. Wówczas:*

1. *$\bar{x} \in E$,*
2. *Jeżeli $\mathbb{R} \ni \alpha > \bar{x}$, to istnieje $n_0 \in \mathbb{N}$ taka, że $x_n < \alpha, n \geqslant n_0$.*
3. *$\bar{x}$ jest jedyną liczbą spełniającą warunki 1. i 2.*

Dowód. Niech więc $\bar{x} = \sup E$.

1. Jeżeli $\bar{x} = +\infty$, to istnieje $(n_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ tak, że $x_{n_k} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$, czyli $+\infty \in E$ i oczywiście $\bar{x} \in E$. Załóżmy więc, że $\bar{x} \in \mathbb{R}$. Czyli istnieje przynajmniej jedna liczba $g \in \mathbb{R}$ będąca granicą pewnego podciągu ciągu $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Zbiór granic częściowych ciągu jest zbiorem domkniętym, zatem $\bar{x} = \sup E \in E$.
2. udowodniliśmy już ten fakt jako lemat 4.5.13.
3. Dla dowodu jedyności liczby $\bar{x}$ załóżmy, że $p, q \in \mathbb{R}$ spełniają 1. i 2. Dla ustalenia uwagi możemy przyjąć, że $p < q$. Weźmy α leżące między p i q: $p < \alpha < q$. Istnieje więc n_p takie, że $x_n < \alpha, n \geqslant n_p$ - gdyż p spełnia 2. Ale wówczas q nie może należeć do E: $q > x_n, n \geqslant n_p$ a E jest zbiorem granic częściowych ciągu $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

□

Można (ćwiczenie) sformułować analogiczne stwierdzenie dla granicy dolnej.

5.5 *Przestrzenie liniowe i unormowane. Przestrzeń $\mathbb{R}^n$

TO-DO:

1. Ogólna dyskusja przestrzeni współrzędnych.
2. Wzmianka o przestrz. liniowych.
3. Przestrzenie unormowane. (**w trakcie**)
4. Norma wyznaczona przez metrykę. (**w trakcie**)
5. Przestrzeń $\mathbb{R}^n$.
6. Zbieżność ciągów w $\mathbb{R}^n$.

Definicja 5.5.1. Niech X będzie przestrzenią liniową nad ciałem $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.
Odwzorowanie $\|\cdot\|\colon X \to [0, \infty)$ nazywamy **normą** przestrzeni X, jeśli dla dowolnych elementów $x, y \in X$ oraz skalarów $a \in \mathbb{K}$:

(N1) $\|x\| = 0 \Rightarrow x = \theta$ (θ - wektor zerowy w prz. X)

(N2) $\|ax\| = |a| \cdot \|x\|$

(N3) $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$

Wówczas $(X, \|\cdot\|)$ nazywamy **przestrzenią unormowaną**.

Definicja 5.5.2. Jeżeli $(X, \|\cdot\|)$ jest przestrzenią metryczną, to odwzorowanie $\rho\colon X^2 \to \mathbb{R}$ dane wzorem

$$\rho(x, y) = \|x - y\|$$

jest przestrzenią metryczną. Mówimy, że (X, ρ) jest **przestrzenią metryczną z normą wyznaczoną (zadaną) przez metrykę** ρ.

Definicja 5.5.3. Niech $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będzie ciągiem wyrazów przestrzeni unormowanej X i $x \in X$. Przyjmujemy że $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, gdy

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\,\| = 0.$$

Zauważmy: $(\|x_n - x\,\|)_{n\in\mathbb{N}}$ jest po prostu ciągiem liczb rzeczywistych.

Twierdzenie 5.5.4. *Niech* $(\bar{x}_k)_{k\in\mathbb{N}} = \left(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ *będzie ciągiem wyrazów przestrzeni* $\mathbb{R}^n$ *oraz* $\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. *Wówczas* $\lim\limits_{k\to\infty} \bar{x}_k = \bar{x}$ *wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\lim_{k\to\infty} x_j^{(k)} = x_j, \quad \textit{dla każdego } j \in \{1, \ldots, n\}.$$

Dowód. Jeżeli $\bar{x}_k \to \bar{x}$, to z oszacowania

$$|x_j^{(k)} - x_j| \leqslant \|\bar{x}_k - \bar{x}\,\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i^{(k)} - x_i)^2}$$

i twierdzenia o trzech ciągach wynika, że $x_j^{(k)} \to x_j, j = 1, \ldots, n$.

Teraz załóżmy, że $x_j^{(k)} \to x_j, j = 1, \ldots, n$. Ustalmy $\varepsilon > 0$. Istnieje $N \in \mathbb{N}$ takie, że dla $k \geqslant N$ zachodzi

$$|x_j^{(k)} - x_j| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}},\ 1 \leqslant j \leqslant k.$$

Stąd mamy, że $\|\bar{x}_k - \bar{x}\,\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i^{(k)} - x_i)^2} < \varepsilon$ i ostatecznie $\bar{x}_k \to \bar{x}$. □

Ćwiczenie. Uogólnić twierdzenie 4.2.4 o arytmetyce granic na przestrzenie $\mathbb{R}^n$.

5.6 Różne własności przestrzeni metrycznych

5.6.1 Zupełność

Definicja 5.6.1. Ciągiem Cauchy'ego nazywamy ciąg $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wyrazów danej przestrzeni metrycznej (X,ρ) spełniający następujący **warunek Cauchy'ego**:

$$\forall_{\varepsilon>0}\exists_{N\in\mathbb{N}}\forall_{\substack{n,m\in\mathbb{N}\\ n,m\geqslant N}}\ \rho(a_n,a_m)<\varepsilon.$$

Inaczej mówiąc, ciąg $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest zbieżny, gdy:

$$\lim_{n\to\infty}\operatorname{diam}\{x_m : m\geqslant n\}=0.$$

Jeśli ciąg $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest ciągiem Cauchy'ego, to prawie wszystkie jego wyrazy leżą w kuli o dowolnie małym promieniu (tzn. tylko skończona ilość wyrazów leży poza kulą o zadanym promieniu). Zatem jest to ciąg ograniczony.

Definicja 5.6.2. Przestrzeń metryczną nazywamy **zupełną**, gdy każdy ciąg spełniający warunek Cauchy'ego jest w niej ciągiem zbieżnym.

Podstawowy przykład zapewnia następujące

Twierdzenie 5.6.3. *Przestrzeń* $(\mathbb{R},|\cdot|)$ *jest zupełna.*

Dowód. Ustalmy dowolny ciąg $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ spełniający warunek Cauchy'ego. Istnieje $N\in\mathbb{N}$ takie, że $|a_n-a_N|<1$ dla dowolnego $n\in\mathbb{N}$. A więc

$$1-a_N\leqslant a_n\leqslant 1+a_N,\ \text{dla każdego } n\in\mathbb{N}$$

gdzie a_N jest pewnym konkretnym wyrazem ciągu. Czyli ciąg $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest ograniczony. Na mocy twierdzenia 4.4.7 Bolzano-Weierstrassa, istnieje podciąg (a_{n_k}) zbieżny, np. do granicy g. Ponieważ $n_k\geqslant k$ dla każdego $k\in\mathbb{N}$ (patrz lemat 4.4.2), to $|a_k-a_{n_k}|\leqslant\varepsilon$. Z dowolności ε wnosimy, że $\lim\limits_{k\to\infty}(a_k-a_{n_k})=0$, czyli $\lim\limits_{k\to\infty}a_k=\lim\limits_{k\to\infty}a_{n_k}=g$[2]. □

Ćwiczenie. Udowodnić następujące *twierdzenie Cantora* (zauważmy, że jest to pewne uogólnienie lematu 4.4.4):

Twierdzenie. *Niech* (X,ρ) *będzie przestrzenią metryczną zupełną i niech* $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *będzie ciągiem podzbiorów niepustych i ograniczonych*[3] *w* X *takim, że* $H_{n+1}\subseteq H_n, n\in\mathbb{N}$ *oraz* $\lim\limits_{n\to\infty}\operatorname{diam}H_n=0$. *Wówczas zbiór* $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}H_n$ *składa się dokładnie z jednego punktu.*

Definicja 5.6.4. Przestrzeń unormowaną, która wraz z metryką wyznaczona przez swoją normę stanowi przestrzeń metryczną zupełną, nazywamy **przestrzenią Banacha**.

[2]w wyrażeniu po lewej stronie ostatniej równości oczywiście bez znaczenia jest, że dla przejrzystości wskaźnik ciągu oznaczyliśmy jako k zamiast n

[3]można udowodnić dla zbiorów niepustych i *domkniętych* zamiast ograniczonych.

5.6.2 Zwartość

Ustalmy przestrzeń metryczną (X, ρ).

Definicja 5.6.5. Mówimy, że rodzina $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}(X)$ *zbiorów otwartych* jest **pokryciem** zbioru $A \subseteq X$ jeżeli $A \subseteq \bigcup \mathcal{U}$.

Dowolną podrodzinę pokrycia $\mathcal{U}$ przestrzeni X nazywamy **podpokryciem** przestrzeni X.

Definicja 5.6.6. Mówimy, że podzbiór $A \subseteq X$ przestrzeni metrycznej jest **zwarty**, jeżeli z każdego podpokrycia tego zbioru można wybrać jego podpokrycie skończonym.

Definicja 5.6.7. Mówimy, że podzbiór $A \subseteq X$ przestrzeni metrycznej jest **ciągowo zwarty**, jeżeli z każdego ciągu wyrazów tego zbirou można wybrać podciąg zbieżny do granicy leżącej w tym zbiorze.

Możemy rozważać zbiory zwarte same w sobie jako przestrzenie metryczne:

Uwaga 5.6.8. Niech $X \subseteq Y \subseteq Z$. Zbiór X jest zwarty względem Z wtedy i tylko wtedy, gdy jest zwarty względem Y.

Pojęcia „przestrzeni otwartej" lub „przestrzeni domkniętej" nie mają zastosowania, gdyż każda przestrzeń metryczna jest swoim podzbiorem otwartym i domkniętym zarazem.

Twierdzenie 5.6.9 (O liczbie Lebesgue'a)**.** *Dla każdego pokrycia otwartego przestrzeni metrycznej zwartej istnieje taka liczba $\delta > 0$, że dowolny podzbiór tej przestrzeni, o średnicy mniejszej niż δ jest zawarty w pewnym elemencie tego pokrycia.*

Dowód. Ustalmy przestrzeń metryczną zwartą (X, d) i dowolne pokrycie $\mathcal{U}$ tej przestrzeni. Bez straty ogólności, wystarczy udowodnić, że istnieje taka liczba $\delta > 0$, że każda kula o promieniu $\delta > 0$ jest w całości zawarta w którymś zbiorze pokrycia $\mathcal{U}$. □

Uwaga 5.6.10. Gdy istnieje największa liczba λ spośród liczb spełniających tezę powyższego twierdzenia, to nazywamy ją **liczbą Lebesgue'a**. Gdy pokrycie przestrzeni jest skończone, to taka liczba na pewno istnieje. W wypadku pokrycia nieskończonego liczba Lebesgue'a dla danej przestrzeni nie musi istnieć.

Twierdzenie 5.6.11. *Przestrzeń metryczna (X, ρ) jest zwarta wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej rodziny $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{P}(X)$ zbiorów domkniętych, takiej że $X \subseteq \bigcup \mathcal{R}$*[4] *istnieje podrodzina skończona.*

Twierdzenie 5.6.12 (Borela-Lebesgue'a)**.** *Niech (X, ρ) będzie przestrzenią metryczną. Wówczas X jest zwarta wtedy i tylko wtedy, gdy jest ciągowo zwarta.*

Dowód. Najpierw załóżmy, że X jest ciągowo zwarta. Niech $\{A_i : i \in I\}$ będzie pokryciem otwartym przestrzeni X. Wykażemy, że istnieje liczba $\lambda > 0$ taka, że

$$\forall_{x \in X} \exists_{i \in I.}\ K(x, \lambda) \subseteq A_i.$$

Przypuśćmy, że powyższe zdanie nie jest prawdziwe, czyli

$$(*) \qquad \forall_{n \in \mathbb{N}} \exists_{x_n \in X} \forall_{i \in I.}\ K\left(x_n, \frac{1}{n}\right) \subseteq A_i.$$

[4]nazywa się też taką rodzinę pokryciem domkniętego przestrzeni X, wówczas jednak musimy nazywać pokryciem otwar1tym, to co my nazwaliśmy po prostu pokryciem.

Z ciągu można jednak wybrać podciąg $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ zbieżny do $x_0 \in X$. Ponieważ $\{A_i\colon i \in I\}$ jest pokryciem otwartym, więc istnieje $r_0 > 0$ oraz $i_0 \in I$ takie, że $K(x_0, r_0) \subseteq A_{i_0}$. Ze zbieżności $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ mamy, że

$$\exists_{k\in\mathbb{N}}\forall_{k>k_0}.\ |x_{n_k} - x_0| < \frac{1}{2}r_0.$$

Zatem, dobierając k tak, by było $k > k_0$ oraz $n_k > 2/r_0$ otrzymujemy następujący ciąg inkluzji:

$$K\left(x_{n_k}, \frac{1}{n_k}\right) \subseteq K\left(x_{n_k}, \frac{1}{2}r_0\right) \subseteq K(x_0, r_0) \subseteq A_{i_0},$$

co przeczy $(*)$.

Mając $\lambda > 0$ o podanej wyżej własności, postępujemy następująco:

- wybieramy $y_1 \in X$;
- następnie przyjmujemy $y_2 \in X \setminus K(y_1, \lambda)$;
- $y_3 \in X \setminus (K(y_1, \lambda) \cup K(y_2, \lambda))$;
- itd. indukcyjnie przyjmujemy
$$y_n \in X \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} K(y_k, \lambda)$$

otrzymujemy ciąg $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ taki, że $|y_n - y_m| \geqslant \lambda$ dla dowolnych $n, m \in \mathbb{N}$. Ale ciąg taki nie posiada podciągów zbieżnych. Sprzeczność. Zatem nasza konstrukcja może być powtórzona tylko skończoną ilość kroków, tj. dla pewnego $k \in \mathbb{N}$ istnieją $y_1, \ldots, y_k$ takie, że

$$\bigcup_{n=1}^{k} K(y_n, \lambda) = X.$$

Ale każda kula $K(y_n, \lambda)$ zawarta jest w pewnym zbiorze A_{i_n}, czyli

$$\bigcup_{n=1}^{k} A_{i_n} = X.$$

Załóżmy teraz, że przestrzeń X jest zwarta.

Rozważmy ciąg $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, który nie posiada żadnego podciągu zbieżnego. Zatem jego zbiór wyrazów $A = \{x_n\colon n \in \mathbb{N}\}$ jest zbiorem domkniętym. Ponieważ $X \setminus A$ jest zbiorem otwartym, to

$$\forall_{x\in X\setminus A}\exists_{r_x>0}.\ K(x, r_x) \subseteq X \setminus A.$$

Z drugiej strony dla każdego x_n istnieje $\varepsilon_n > 0$ taki, że $K(x_n, \varepsilon_n) \cap A$ jest zbiorem skończonym. Oczywiście zbiór

$$\{K(x, r_x)\colon x \in X \setminus A\} \cup \{K(x_n, \varepsilon_n)\colon n \in \mathbb{N}\}$$

jest pokryciem otwartym przestrzeni X. Gdy jednak wybierzemy z niego dowolne skończone podpokrycie X, to jego suma będzie zawierać tylko skończoną liczbę kul $K(x_n, \varepsilon_n)$ a zatem tylko skończoną liczbę punktów zbioru A. Ale A jest zbiorem nieskończonym - sprzeczność. $\square$

Jak widzimy, w wypadku przestrzeni metrycznych zwartość i ciągowa zwartość są równoważne (nie jest tak w przypadku ogólniejszych struktur - topologii; przy czym każda przestrzeń metryczna jest przestrzenią topologiczną ale nie odwrotnie - istnieją topologie „niemetryzowalne”, tj. nie dające się zdefiniować jako pewna przestrzeń metryczna).

Twierdzenie 5.6.13. *Domknięta podprzestrzeń zwartej przestrzeni metrycznej jest zwarta.*

Dowód 1. Ustalmy przestrzeń metryczną X zwartą i niech $F \subseteq X$ będzie zbiorem domkniętym. Weźmy dowolne pokrycie $\{U_t \colon t \in T\}$ przestrzeni F (z metryką indukowaną z X). Chcemy pokazać, że istnieje podpokrycie skończone przestrzeni F. Zauważmy, że $\{U_t\}_{t\in T} \cup F'$ jest pokryciem otwartym przestrzeni X. Ze zwartości X istnieje podpokrycie $U_{t_1}, U_{t_2}, \ldots, U_{t_n} \in \{U_t\}_{t\in T} \cup F'$ i

$$F \subseteq X \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U_{t_i}.$$

Jeżeli F' znajduje się wśród zbiorów $U_{t_1}, U_{t_2}, \ldots, U_{t_n}$, to po prostu odrzucamy ten zbiór. Szukanym podpokryciem jest więc rodzina $\{U_{t_1}, U_{t_2}, \ldots, U_{t_n}\}$ lub $\{U_{t_1}, \ldots, U_{t_n}\} \setminus \{F'\}$. $\square$

Dowód 2. Niech X będzie przestrzenią metryczną zwartą oraz $F \subseteq X$ zbiorem domkniętym. Ustalmy dowolny ciąg $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tak, że

$$x_n \in F \subseteq X,\ n \in \mathbb{N}$$

i już widzimy, że ze zwartości X musi istnieć podciąg $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ zbieżny. Ale $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} \in F$ z domkniętości F (twierdzenie 5.4.11). Zatem dowolny ciąg wyrazów przestrzeni F ma podciąg zbieżny do granicy leżącej w F i twierdzenie jest udowodnione. $\square$

Twierdzenie 5.6.14. *Zwarty podzbiór przestrzeni metrycznej jest domknięty.*

Dowód. Niech X będzie przestrzenią zwartą oraz $F \subseteq X$ będzie zbiorem domkniętym. Ustalmy pokrycie otwarte $\mathcal{U}$ zbioru F. Wtedy $\mathcal{U} \cup \{X \setminus F\}$ jest pokryciem otwartym X. Ze zwartości X istnieje podpokrycie skończone $\mathcal{U}_0 \subseteq \mathcal{U} \cup \{X \setminus F\}$. Wtedy rodzina $\mathcal{U}_0 \setminus \{X \setminus F\} \subseteq \mathcal{U}$ jest podpokryciem skończonym $\mathcal{U}$. Pokazaliśmy dla dowolnego pokrycia otwartego zbioru F istnieje podpokrycie skończone, co oznacza, że F jest zwarty. $\square$

Ćwiczenie. Udowodnić twierdzenie 5.6.14 w oparciu o ciągową definicję zwartości.

Przykład 45. Dowolny przedział domknięty $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ jest zbiorem zwartym na mocy twierdzenia 4.4.7 Bolzano-Weierstrassa, gdyż jeżeli wyrazy ciągu leżą w przedziale $[a,b]$, to znaczy że jest on ograniczony. Zauważmy, że granica taka może leżeć na krańcu przedziału (tj. być równa a lub b), zatem wnętrze (a,b) tego przedziału nie musi (i nie jest) być zbiorem zwartym.

Twierdzenie 5.6.15. *Iloczyn (produkt) kartezjański n przestrzeni metrycznych zwartych jest przestrzenią metryczną zwartą.*

Dowód. Niech $X_1, X_2, \ldots, X_k$ będą przestrzeniami metrycznymi zwartymi. Dla $k = 1$ twierdzenie jest prawdziwe w sposób oczywisty. Załóżmy jego prawdziwość dla $k-1$. Ustalmy ciąg $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, tak że $x_n = \left(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \ldots, x_k^{(n)}\right) \in X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_k$. Z założenia ciąg punktów $y_n = \left(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \ldots, x_{k-1}^{(n)}\right) \in X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_{k-1}$ zawiera podciąg zbieżny $(y_{n_i})_{i\in\mathbb{N}}$ - zatem jego ciągi składowe $\left(x_j^{(n_i)}\right)_{i\in\mathbb{N}}$, $j = 1, \ldots, k-1$ są zbieżne z definicji. Ze zwartości przestrzeni X_k z ciągu $(x_k^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ można wybrać podciąg zbieżny $(x_k^{(n_i)})_{i\in\mathbb{N}}$. Mamy zatem, że zbieżne są ciągi

$$\left(x_1^{(n_i)}\right)_{i\in\mathbb{N}}, \left(x_2^{(n_i)}\right)_{i\in\mathbb{N}}, \ldots, \left(x_k^{(n_i)}\right)_{i\in\mathbb{N}}$$

Stąd, z definicji zbieżny jest ciąg $(x_{n_i})_{i\in\mathbb{N}}$, gdzie

$$x_{n_i} = \left(\left(x_1^{(n_i)}\right)_{i\in\mathbb{N}}, \left(x_2^{(n_i)}\right)_{i\in\mathbb{N}}, \ldots, \left(x_k^{(n_i)}\right)_{i\in\mathbb{N}}\right)$$

będący podciągiem ciągu $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Na mocy Zasady Indukcji Matematycznej twierdzenie jest prawdziwe dla dowolnego k. $\square$

Przykład 46. Kostka n-wymiarowa $[a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n] \subseteq \mathbb{R}^n$, jest prz. metryczną zwartą.

Twierdzenie 5.6.16. *Podzbiór zwarty dowolnej przestrzeni metrycznej jest domknięty i ograniczony (tj. zawarty w pewnej kuli).*

Dowód. Ustalmy przestrzeń metryczną (X, ρ). Niech $A \subseteq X$ będzie podzbiorem zwartym - wtedy musi on być też domknięty. Wybierzmy punkt $a_0 \in A$ i rozważmy funkcję
$x \mapsto \rho(a_0, x)$ $(X \to \mathbb{R})$. Ponieważ A jest zbiorem zwartym, istnieje $E > 0$ takie, że dla każdego $a \in A$ zachodzi nierówność $\rho(a_0, a) \leqslant E$, stąd zbiór A jest zawarty w kuli $K(a_0, E)$. $\square$

Twierdzenie 5.6.17 (Charakteryzacja zbiorów zwartych w przestrzeni $\mathbb{R}^n$)**.** *Jeżeli $E \subseteq \mathbb{R}^n$, to następujące warunki są równoważne:*

1. *E jest zwarty,*
2. *Każdy nieskończony podzbiór[5] zbioru E ma punkt skupienia należący do E,*
3. *E jest ograniczony i domknięty.*

Dowód. TO-DO: jeszcze raz przejrzeć i poprawić dowód.

- (1) $\Rightarrow$ (2). Niech $A \subseteq E$ będzie zbiorem nieskończonym. Załóżmy, że żaden punkt zbioru E nie jest punktem skupienia zbioru A. x jest punktem skupienia zbioru A, gdy każde otoczenie punktu x zawiera co najmniej jeden punkt $y \neq x$ taki, że $y \in A$. Zatem z naszego założenia wynka, że każdy punkt $x \in E$ ma otoczenie $K(x, \varepsilon)$ zawierające nie więcej niż jeden punkt zbioru A (jeśli $x \in A$ to właśnie x jest tym jedynym punktem). Żadna skończona podrodzina rodziny $\{K(x, \varepsilon) \colon x \in E, \varepsilon \text{ dowolne}\}$ nie może pokryć zbioru A, więc również jego nadzbioru E. Sprzeczność, gdyż zbiór E jest zwarty[6].
- (2) $\Rightarrow$ (3). Załóżmy, że zbiór E nie jest ograniczony. Wtedy istnieje ciąg $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ punktów, takich że $|x_n| > n$, $n \in \mathbb{N}$. Zbiór $\{x_n \colon n \in \mathbb{N}\}$ jest nieskończony i z założeń nie ma punktów skupienia w $\mathbb{R}^n$ a więc tym bardziej w E. Mamy, że E musi być ograniczony. Załóżmy, że E nie byłby domknięty. Wtedy istnieje $x_0 \in \mathbb{R}^n$, taki że $x_0 \in E^d$ i $x_0 \notin E$. Istnieje ciąg $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wyrazów zbioru E taki, że $|x_n - x_0| < \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}$. Niech S będzie zbiorem tych punktów.

[5] niejawnie zakładamy, że dodatkowo E jest nieskończony.

[6] Możemy zauważyć, że nie korzystamy tu właściwie z własności specyficznych dla przestrzeni $\mathbb{R}^n$. Implikacja ta zachodzi tak naprawdę dla dowolnej przestrzeni zwartej.

Wówczas S jest zbiorem nieskończonym (w przeciwnym razie wyrażenie $|x_n - x_0|$ byłoby od pewnego n stałą). x_0 jest punktem skupienia zbioru S i jedynym takim punktem skupienia S, który równocześnie należy do $\mathbb{R}^n$. Gdyby np. $x_1 \in \mathbb{R}^n$, $x_1 \neq x_0$, to

$$|x_n - x_1| \geqslant |x_0 - x_1| - |x_n - x_0| \geqslant |x_0 - x_1| - \frac{1}{n} \geqslant \frac{1}{2}|x_0 - x_1|, \text{ od pewnego } n,$$

co dowodzi, że $x_1 \notin S^d$. S nie ma punktów skupienia w E i E jest domknięty.

- (3) $\Rightarrow$ (1). Niech $E \subseteq \mathbb{R}^n$ będzie domkniętym i ograniczonym podzbiorem przestrzeni euklidesowej. Wtedy istnieje odcinek $[a, b]$ taki, że $E \subseteq [a, b]^n \subseteq \mathbb{R}^n$. Ponieważ kostka $[a, b]^n$ jest zwarta, to E jako jej podzbiór domknięty jest zbiorem zwartym (na mocy twierdzenia 5.6.16).

Mamy, że (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (1). Możemy jeszcze dodatkowo zauważyć, że (1) $\Rightarrow$ (3) wynika z poprzedniego twierdzenia (5.6.16). □

Twierdzenie 5.6.18. *Każdy nieskończony i ograniczony podzbiór przestrzeni $\mathbb{R}^n$ ma punkt skupienia w $\mathbb{R}^n$.*

Dowód. Niech $E \subseteq \mathbb{R}^n$ będzie nieskończony i ograniczony. Ograniczony, zatem zawarty w pewnej kuli otwartej. Możemy wziąć n-wymiarową kostkę K zawierającą tę kulę i wtedy, mamy że E jest zwarty w zbiorze zwartym. Z poprzedniego twierdzenia wynika, że E ma punkt skupienia należący do K. □

Twierdzenie 5.6.19. *Przestrzeń metryczna zwarta jest zupełna.*

Twierdzenie 5.6.20. *Jeżeli $\{K_t \colon t \in T\}$ jest rodziną zwartych podzbiorów ustalonej przestrzeni metrycznej X, taką że iloczyn dowolnej skończonej podrodziny rodziny $\{K_t\}_{t \in T}$ jest niepusty, to zbiór $\bigcap_{t \in T} K_t$ jest niepusty.*

Dowód. Ustalmy zbiór K_j rodziny $\{K_t\}_{t \in T}$ i zdefiniujmy kolejną rodzinę zbiorów przyjmując $G_i = K_i'$. Przypuśćmy, że w K_j nie ma takiego punktu, który należałby do wszystkich zbiorów $K_t, t \in T$. Wówczas zbiory $G_t, t \in T$ tworzą pokrycie zbioru K_j. Ze zwartości tego ostatniego, znajdziemy skończoną ilość wskaźników $t_1, t_2, \dots, t_n$ takich, że $K_j \subseteq G_{t_1} \cup G_{t_2} \cup \dots \cup G_{t_n}$. Ale to oznacza, że zbiór

$$K_j \cap K_{t_1} \cap K_{t_2} \cap \dots \cap K_{t_n}$$

jest pusty. Sprzeczność z założeniem. □

Ćwiczenie. W oparciu o twierdzenie 5.6.20 uzasadnić, że jeżeli $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jest ciągiem zstępującym (tzn. $K_{n+1} \subseteq K_n, n \in \mathbb{N}$) zbiorów zwartych i niepustych, to zbiór $\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$ jest niepusty.

Ćwiczenie. Uogólnić lemat 4.4.4 o przedziałach zstępujących, w następujący sposób:
Niech k będzie liczbą naturalną. Jeżeli $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jest ciągiem kostek k-wymiarowych, $K_{n+1} \subseteq K_n$, $n \in \mathbb{N}$, to zbiór $\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$ jest niepusty.

Ćwiczenie. Udowodnić, że nie istnieje pokrycie przestrzeni $\mathbb{R}$ (z metryką naturalną) przeliczalną liczbą rozłącznych odcinków domkniętych.

5.6.3 Spójność

Definicja 5.6.21. Mówimy, że dwa zbiory $A, B \subseteq X$ ustalonej przestrzeni metrycznej X są **oddzielone**, jeżeli

$$A \cap \operatorname{cl} B = \varnothing \text{ oraz } \operatorname{cl} A \cap B = \varnothing$$

Mówimy, że zbiór $C \subseteq X$ jest **spójny**, gdy *nie* jest sumą dwóch zbiorów odddzielonych.

Uwaga 5.6.22. Zbiory rozłączne nie muszą być oddzielone. Np. przedziały $[-1, 0)$ i $[0, 1]$ nie są oddzielone, bo $0 \in \operatorname{cl}[-1, 0)$:

$$\operatorname{cl}[-1, 0) \cap [0, 1] = [-1, 0] \cap [0, 1] = \{0\} \neq \varnothing.$$

Ćwiczenie. Podać przykład zbiorów oddzielonych.

Twierdzenie 5.6.23. *Zbiór $C \subseteq \mathbb{R}$ jest spójny wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\forall_{x,y \in C} \forall_{z \in \mathbb{R}}.\ \textit{jeżeli } x < z < y \textit{ to } z \in C.$$

Rozdział 6

Granica funkcji

Intuicje Chcemy określić wartość, do której „dążą” *wyrazy* funkcji, gdy jej *argumenty* dążą do zadanego punktu.

6.1 Granica w przestrzeni metrycznej

Definicja 6.1.1. Mówimy, że funkcja $f\colon X \to Y$ ma granicę $g \in Y$ w punkcie skupienia x_0 przestrzeni X w sensie Cauchy'ego, gdy

$$\forall_{\varepsilon>0}\exists_{\delta>0}\forall_{x\in X}. 0 < \rho(x, x_0) < \delta \Rightarrow \sigma(f(x), g) < \varepsilon.$$

Równoważnie, możemy powiedzieć, że dla każdego sąsiedztwa $S_X(x_0)$ punktu x_0 w przestrzeni X, istnieje takie otoczenie $U_Y(g)$ (kula $K_Y(g,\delta)$) punktu g w przestrzeni Y, że jeżeli

$$x \in S_X(x_0) \implies f(x) \in U_Y(g).$$

Definicja 6.1.2. Mówimy, że funkcja $f\colon X \to Y$ ma granicę $g \in Y$ w punkcie skupienia x_0 przestrzeni X w sensie Heinego, gdy dla każdego ciągu $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wyrazów przestrzeni X takiego, że $x_n \neq x_0, n \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ zachodzi $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = g$.

Twierdzenie 6.1.3. *Funkcja $f\colon X \to Y$ ma granicę w punkcie x_0 w sensie Cauchy'ego wtedy i tylko wtedy, gdy ma w tym punkcie granicę w sensie Heinego. Innymi słowy, definicje Cauchy'ego i Heinego granicy funkcji w punkcie są równoważne.*

Dowód. Rozważamy dowolną funkcję $f\colon X \to Y$ między przestrzeniami metrycznymi (X,ρ), (Y,σ).

Załóżmy najpierw, że funkcja f ma w punkcie $x_0 \in X$ granicę g sensie Heinego. Załóżmy nie wprost, że funkcja nie ma granicy g w punkcie x_0 w sensie Cauchy'ego. Istnieje zatem taki $\varepsilon > 0$, że dla każdego $\delta > 0$ istnieje $x \in X$ taki, iż

$$\rho(x_0, x) < \delta \text{ ale } \sigma\big(f(x), g\big) \geqslant \varepsilon.$$

Przyjmijmy $\delta_n := \frac{1}{n}$ i określmy przez x_n taki punkt w X, że

$$\rho(x_0, x_n) < \delta_n \quad \text{oraz} \quad \sigma\big(f(x), g\big) \geqslant \varepsilon.$$

Ponieważ $0 \leqslant \rho(x_0, x_n) < \delta_n, n \in \mathbb{N}$ i $\lim_{n\to\infty} \delta_n = 0$, to $\lim_{n\to\infty} \rho(x_0, x_n) = 0$ na mocy twierdzenia 4.3.4 o trzech ciągach czyli $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ (na mocy tw. 5.4.4). Z drugiej strony $\sigma(f(x_n), g)$ jest stale różne od zera (większe od $\varepsilon > 0$), czyli granica $\lim_{n\to\infty} f(x_n)$ nie może być równa g - sprzeczność z założeniem, o ciągłości f w punkcie x_0 w sensie Heinego.

W drugą stronę, niech funkcja f ma teraz w punkcie $x_0 \in X$ granicę g sensie Cauchy'ego. Ustalmy ciąg $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zbieżny do $x_0 \in X$, taki że $x_n \neq x_0, n \in \mathbb{N}$. Niech $\varepsilon > 0$ będzie dowolnie obrany. Wówczas z założenia istnieje $\delta > 0$ takie, że

$$\rho(x, x_0) < \delta \text{ pociąga, że } \sigma(f(x), g) < \varepsilon. \tag{6.1}$$

Ponieważ $x_n \to x_0$, to istnieje takie $N \in \mathbb{N}$, że

$$\rho(x_n, x_0) < \delta, \text{ dla każdego } n \geqslant N.$$

Z warunku (6.1) wynika, że w takim razie dla każdego $n \geqslant N$ $\sigma(f(x_n), g) < \varepsilon$. Pokazaliśmy, że $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = g$. □

Twierdzenie 6.1.4 (O trzech funkcjach)**.** *Niech X będzie przestrzenią metryczną i $f, g, h\colon X \to \mathbb{R}$. Wówczas, jeśli dla pewnego sąsiedztwa S punktu $x_0 \in X$ zachodzi warunek*

$$f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x), \; x \in S,$$

oraz dla pewnej liczby $g \in \mathbb{R}$ zachodzą równości

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} h(x) = g,$$

to

$$\lim_{x\to x_0} g(x) = g.$$

Dowód. Z twierdzenia 4.3.4 w oparciu o definicję Heinego granicy funkcji. □

6.2 Przypadek rzeczywisty

Będziemy rozważać przypadek, gdy $\rho\colon D \to \mathbb{R}$, gdzie $D \subseteq \mathbb{R}$ i $\rho(x, y) = |x - y|$.

Ćwiczenie. Ustalmy $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Uzasadnić, że $\lim_{x\to 1} \frac{x^n - 1}{x - 1} = n$. Wskazówka: wzór na różnicę n-tych potęg (patrz, tw. 3.3.8).

Przykład 47. Niech $f\colon \mathbb{R} \setminus \{2\} \to \mathbb{R}$ będzie dana wzorem

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}.$$

Obliczymy $\lim_{x\to 2} f(x)$, czyli granicę funkcji f w punkcie 2. Oczywiście, funkcja jest nieokreślona w samym punkcie $x = 2$, ale jest określona w każdym sąsiedztwie tego punktu. Dla $x \neq 2$ mamy:

$$\frac{x^2 - 4}{x - 2} = \frac{(x - 2)(x + 2)}{x - 2} = x + 2.$$

Więc

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} (x + 2) = 2 + 2 = 4.$$

Przykład 48. Obliczymy granicę $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x^2-1}$. Można określić funkcję $x\mapsto \frac{x^3-1}{x^2-1}, x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Dla $x\neq 0$ (aczkolwiek dowolnie blisko zera) możemy obliczyć:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x+1}{x+1}=\frac{1^2+1+1}{1+1}=\frac{3}{2}$$

Przykład 49. Wykażemy, że funkcja $f\colon \mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$ dana wzorem

$$f(x)=\frac{x+|x|}{2x}$$

nie ma granicy w punkcie $x=0$.

6.2.1 Granica funkcji w nieskończoności

Definicja 6.2.1. Mówimy, że funkcja $f\colon (a,+\infty)\to\mathbb{R}$ ma granicę $g\in\mathbb{R}$ w **plus** nieskończoności (w sensie Cauchy'ego) i piszemy $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=g$ albo, że $f(x)\to g$, przy $x\to\infty$, gdy

$$\forall_{\varepsilon>0}\exists_{A\in(a,+\infty)}\forall_{x>A}.\ |f(x)-g|<\varepsilon.$$

Analogicznie, mówimy że funkcja $f\colon (-\infty,b)\to\mathbb{R}$ ma granicę $g\in\mathbb{R}$ w **minus** nieskończoności i piszemy $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=g$, gdy

$$\forall_{\varepsilon>0}\exists_{A\in(-\infty,b)}\forall_{x<A}.\ |f(x)-g|<\varepsilon.$$

W powyższych przypadkach, mówimy też, że f ma granicę skończoną (w odpowiednio plus/minus nieskończoności).

Definicja 6.2.2. Mówimy, że funkcja $f\colon (a,\infty)\to\mathbb{R}$ ma granicę g w **plus** nieskończoności (w sensie Heinego) i piszemy $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x)=g$ albo, że $f(x)\to g$, przy $x\to\infty$, gdy
dla każdego ciągu $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ takiego, że $x_n>a, n\in\mathbb{N}$ oraz $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\infty$ ciąg $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ wartości funkcji dąży do g przy $n\to\infty$, czyli

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=g.$$

Analogicznie mówimy, że $f\colon (-\infty,b)$, gdy dla każdego ciągu $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ takiego, że $x_n<b, n\in\mathbb{N}$ oraz $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\infty$ zachodzi $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=g$.

6.2.2 Granica niewłaściwa

Definicja 6.2.3. Mówimy, że funkcja $f\colon D\to\mathbb{R}$ dąży do $\pm\infty$ gdy x dąży do $x_0\in D$ albo, że ma w punkcie $x_0\in D$ granicę $\pm\infty$, gdy dla każdego ciągu $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x_0$ zachodzi $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=\pm\infty$. Mówimy wtedy, że f ma w x_0 granicę **niewłaściwą** i piszemy $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\pm\infty$. Przez $\pm\infty$ rozumiemy, że w powyższej definicji można przyjąć (równocześnie za każde wystąpienie tego symbolu) plus albo minus nieskończoność.

Ćwiczenie. Zdefiniować granicę *niewłaściwą* funkcji $f\colon D\to\mathbb{R}$ w (plus/minus) *nieskończoności.*

6.2.3 Granice lewo i prawostronne

Definicja 6.2.4. Mówimy, że funkcja[1] $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ ma **granicę lewostronną** (właściwą) w punkcie $x_0 \in (a,b)$, gdy istnieje taka liczba $g \in \mathbb{R}$, że

$$\forall_{\varepsilon>0}\exists_{\delta>0}\forall_{x\in(a,x_0)}.\ \text{jeśli } x_0-\delta < x < x_0 \text{ to } |g-f(x)|<\varepsilon.$$

Piszemy wtedy $f(x-) = \lim\limits_{x\to x_0-} f(x) = g$.

Zauważmy, że $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} f(x-\varepsilon) = \lim\limits_{x\to x_0-} f(x)$. Stąd czasem widujemy też w literaturze zapis $\lim\limits_{x\to x_0-\varepsilon} f(x)$ albo $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$.

Analogicznie mamy definicję granicy prawostronnej:

Definicja 6.2.5. Mówimy, że funkcja $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ ma **granicę prawostronną** (właściwą) w punkcie $x_0 \in (a,b)$, gdy istnieje taka liczba $g \in \mathbb{R}$, że

$$\forall_{\varepsilon>0}\exists_{\delta>0}\forall_{x\in(a,x_0)}.\ \text{jeśli } x_0 < x < x_0+\delta \text{ to } |g-f(x)|<\varepsilon.$$

Piszemy wtedy $f(x+) = \lim\limits_{x\to x_0+} f(x) = g$.

Twierdzenie 6.2.6. *Funkcja $f\colon D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$ ma granicę w punkcie $x_0 \in \operatorname{cl} D$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją w tym punkcie granica lewo i prawostronna oraz są sobie równe. Wtedy*

$$\lim_{x\to x_0-} f(x) = \lim_{x\to x_0+} f(x) = \lim_{x\to x_0} f(x).$$

Przykład 50. Funkcja $f(x) = \frac{1}{x}$ określona jest na $D = \mathbb{R}\setminus\{0\}$ oraz $0 \in \operatorname{cl} D = \mathbb{R}$. Mamy

$$\lim_{x\to 0-} \frac{1}{x} = -\infty \neq +\infty = \lim_{x\to 0+} \frac{1}{x}$$

zatem f nie ma granicy w 0.
Rozważmy funkcję $g(x) = \frac{1}{|x|}$. Jest ona również określona na D oraz

$$\lim_{x\to 0-} \frac{1}{|x|} = \lim_{x\to 0+} \frac{1}{|x|} = +\infty,$$

zatem $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{|x|} = +\infty$.

Definicja 6.2.7. Mówimy, że funkcja $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ ma **granicę lewostronną** niewłaściwą $+\infty$ $[-\infty]$ w punkcie $x_0 \in (a,b)$, gdy

$$\forall_{E>0}\exists_{\delta>0}\forall_{x\in(a,b)}.\ x_0-\delta < x < x_0 \Rightarrow f(x) > E[f(x) < -E].$$

Z twierdzenie o równoważności definicji granicy ciągu mamy dwa oczywiste twierdzenia.

Twierdzenie 6.2.8. *Funkcja $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ ma granicę lewostronną w punkcie $x_0 \in (a,b)$ równą $g \in \overline{\mathbb{R}}$, gdy dla każdego ciągu $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ takiego, że*

1. $x_n < x_0$, $n \in \mathbb{N}$,

[1] w szczególności może być $(a,b) = (-\infty,+\infty) = \mathbb{R}$

2. $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$*;*

zachodzi $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = g$*.*

Twierdzenie 6.2.9. *Funkcja* $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ *ma granicę lewostronną w punkcie* $x_0 \in (a,b)$ *równą* $g \in \overline{\mathbb{R}}$*, gdy dla każdego ciągu* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *takiego, że*

1. $x_n > x_0$*,* $n \in \mathbb{N}$*,*

2. $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$*;*

zachodzi $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = g$*.*

Twierdzenie 6.2.10. *Funkcja* f *rosnąca w przedziale* $(a,b) \subseteq \mathbb{R}$ *ma w każdym punkcie tego przedziału granice jednostronne (skończone lub nie).*

Dowód. Z założenia, zbiór $\{f(t)\colon a < t < x\}$ jest ograniczony z góry, przez liczbę $f(x)$. Niech więc $A = \sup_{a<t<x} f(t)$. Oczywiście $f(x) \leqslant A$. Musimy udowodnić, że $f(x-) = A$. Ustalmy $\varepsilon > 0$. Z definicji kresu górnego wynika, że istnieje $x - \delta$, dla pewn. $\delta > 0$, że $a < x - \delta < x$ oraz

$$A - \varepsilon < f(x-\delta) \leqslant A.$$

Z monotoniczności f mamy, że

$$f(x-\delta) \leqslant f(t) \leqslant A, \text{ dla } t \in (x-\delta, x).$$

Porównując nasze oszacowania, wnioskujemy iż

$$|f(t) - A| < \varepsilon, \text{ gdy } x - \delta < t < x.$$

Stąd $f(x-) = A = \sup_{a<t<x} f(t)$. Analogicznie dowodzimy, że $f(x+) = \inf_{x<t<b} f(t)$. □

6.2.4 Obliczanie granic, symbole nieoznaczone.

Definicja 6.2.11. Następujące wyrażenia nazywamy **symbolami nieoznaczonymi**.

$$\frac{0}{0},\ \frac{\infty}{\infty},\ 0^0,\ \infty^0,\ \infty^0,\ 1^\infty,\ \infty-\infty,\ 0\cdot\infty.$$

Np. $(-n)\cdot(-1/n) = 1$ jest ciągiem stałym zbieżnym do 1. Mimo, że $n \to \infty$, $\frac{1}{n} \to 0$.

Granice specjalne. Wyróżnia się jeszcze kilka tożsamości, do których daje się sprowadzić niektóre trudniejsze granice:

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a, \tag{6.2}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1, \tag{6.3}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log_a(x+1)}{x} = \log_a e \text{ dla } a > 0 \text{ i } a \neq 1, \tag{6.4}$$

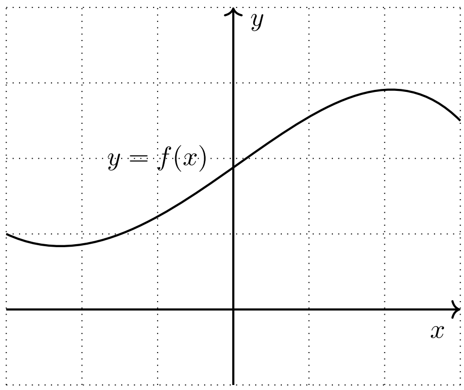
$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^a - 1}{x} = a. \tag{6.5}$$

Rozdział 7

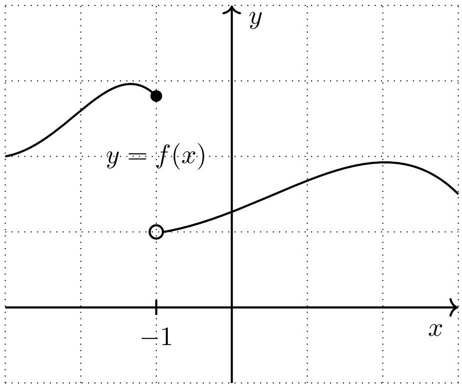
Ciągłość funkcji

7.1 Intuicje

Pojęcie ciągłości funkcji bieże się od próby sformalizowania tej własności funkcji, że jej wykres jest *ciągłą* linią, nie mającą nigdzie przerw - w zadanym przedziale, w przypadku funkcji jednej zmiennej, określonej na $\mathbb{R}$. Uogólnia się to również na wykresy funkcji wielu zmiennych (różne powierzchnie w przestrzeni, etc.). Jak to zwykle bywa, intuicje mogą się okazać zawodne w przypadku skomplikowanych obiektów matematycznych. Ale dla „prostych" funkcji:



Rysunek 7.1: Funkcja $y = f(x)$ jest ciągła w widocznym przedziale.



Rysunek 7.2: Funkcja $y = f(x)$ nie jest ciągła w punkcie $x = -1$.

7.2 Ciągłość w przestrzeni metrycznej

Niech (X, ρ), (Y, σ) będą przestrzeniami metrycznymi.

Definicja 7.2.1. Mówimy, że funkcja $f\colon X \to Y$ jest ciągła w punkcie $x_0 \in X$ w sensie Heinego, gdy dla każdego ciągu $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wyrazów X zbieżnego do x_0 ciąg wartości $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ jest zbieżny do $f(x_0)$.

Definicja 7.2.2. Mówimy, że funkcja $f\colon X \to Y$ jest **ciągła** w sensie Cauchy'ego w punkcie $x_0 \in X$, gdy

$$\forall_{\varepsilon>0}\exists_{\delta>0}\forall_{x\in X}.\ \rho(x_0, x) < \delta \Rightarrow \sigma\big(f(x_0), f(x)\big) < \varepsilon.$$

Definicja 7.2.3. Mówimy, że funkcja $f\colon X \to Y$ jest **ciągła** w sensie Cauchy'ego (Heinego), gdy jest ciągła w każdym punkcie $x \in X$ w sensie Cauchy'ego (Heinego).

Twierdzenie 7.2.4. *Definicje Cauchy'ego i Heinego ciągłości funkcji są równoważne.*

Dowód. Wynika z twierdzenia 6.1.3. □

Przykład 51. Funkcje trygonometryczne są ciągłe w swoich dziedzinach. Dla przykładu pokażemy, że sinus jest funkcją ciągłą. Ustalmy $x_0 \in \mathbb{R}$. Z podstaw trygonometrii wiadomo, że

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}, \alpha, \beta \in \mathbb{R},$$

Biorąc pod uwagę, że $\cos(\alpha) \leqslant 1$ dla dowolnego α, mamy oszacowanie

$$|\sin x - \sin x_0| \leqslant 2\left|\sin\frac{x-x_0}{2}\right|, \text{ dla dowolnego } x \in \mathbb{R}.$$

Weźmy dowolny ciąg $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zbieżny do x_0. Wówczas $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n-x_0}{2} = 0$ a więc

$$0 \leqslant \lim_{n\to\infty} |\sin x_n - \sin x_0| \leqslant 2\lim_{n\to\infty}\left|\sin\frac{x_n-x_0}{2}\right| = 0.$$

A więc $\lim\limits_{n\to\infty} \sin x_n = \sin x_0$, czyli funkcja sin jest ciągła w x_0. Punkt ten wybraliśmy dowolnie, więc wnioskujemy że jest ciągła w całej dziedzinie.

Twierdzenie 7.2.5. *Niech $I, P \subseteq \mathbb{R}$ będą przedziałami oraz niech $f \colon I \to P$ będzie ciągłą bijekcją. Wówczas funkcja $f^{-1} \colon P \to I$ jest ciągła w P.*

Dowód wynika np. z twierdzenia 7.2.28 na stronie 96 przy pomocy twierdzenia Cantora-Heinego, ze strony 90. Czytelnik może spróbować udowodnić powyższe twierdzenie samemu, bez tych ogólnych rezultatów.

Ćwiczenie. Niech $A \subseteq X$. Wykazać, że funkcja $x \mapsto \operatorname{dist}(x, A)$ jest ciągła oraz $\operatorname{dist}(x, A) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x \in \operatorname{cl} A$.

W trakcie obliczania granic często posługujemy się następującym faktem, wynikającym niemal wprost z definicji Heinego ciągłości funkcji:

Fakt 1. Niech X będzie przestrzenią metryczną, Y dowolnym zbiorem i $f \colon X \to Y$ będzie funkcją ciągłą. Dla dowolnego ciągu $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ wyrazów przestrzeni X, zachodzi:

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right).$$

Przykład 52. Ponieważ funkcja sinus jest ciągła, to możemy wykonać następujące rachunki:

$$\lim_{n\to\infty} \sin\frac{1}{n} = \sin\left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\right) = \sin 0 = 0.$$

Punkty nieciągłości: Ustalmy funkcję $f \colon X \to Y$. Wyróżnimy dwie sytuacje, w których funkcja f nie spełnia warunku ciągłości w zadanym punkcie $x_0 \in X$.

Definicja 7.2.6. Mówimy, że $x_0 \in X$ jest **punktem nieciągłości pierwszego rodzaju** funkcji f, jeżeli istnieją skończone granice $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ oraz $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ ale są one różne lub $f(x+) = f(x-) \neq f(x)$.

Definicja 7.2.7. Mówimy, że $x_0 \in X$ jest **punktem nieciągłości drugiego rodzaju** funkcji f, gdy nie istnieje choć jedna z granic $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ *lub* $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$.

Przykład 53. Funkcja $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dana wzorem

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{dla } x \neq 0; \\ 0, & \text{dla } x = 0. \end{cases}$$

ma w punkcie $x = 0$ nieciągłość pierwszego rodzaju, gdyż

$$f(0-) = \lim_{x\to 0-} f(x) = -\infty \neq +\infty = \lim_{x\to 0+} f(x) = f(0+).$$

Ponadto również $f(0) = 0 \neq f(0+)$ i $f(0) \neq f(0-)$.

Prostym wnioskiem z twierdzenia 6.2.10 jest, że funkcja rosnąca (malejąca) nie ma nieciągłości drugiego rodzaju.

Definicja 7.2.8. Mówimy, że funkcja $f \colon X \to Y$ jest **jednostajnie ciągła**, gdy

$$\forall_{\varepsilon>0}\exists_{\delta>0}\forall_{x_1,x_2\in X}.\ \rho(x_1,x_2) < \delta \Rightarrow \sigma(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon.$$

Przykład 54. Funkcja $x \mapsto x^2$ jest ciągła na $\mathbb{R}$ ale nie jest jednostajnie ciągła.

Przykład 55. Funkcja $x \mapsto \sqrt{x}$ jest jednostajnie ciągła na $[1, +\infty)$.
Istotnie: niech $\varepsilon > 0$. Weźmy $x, y \in [1, \infty)$ i $x > y$ tak aby $x - y < 2\varepsilon$. Zauważmy, że

$$\frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{x - y} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} < \frac{2\varepsilon}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \underset{\substack{x \geqslant 1 \\ y \geqslant 1}}{\leqslant} \frac{2\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Przyjmijmy $\delta = 2\varepsilon$ i widzimy, że warunek jednostajnej ciągłości jest spełniony dla $x - y < \delta$.

Ćwiczenie. Pokazać, że warunek jednostajnej ciągłości funkcji f można sformułować następująco:

Funkcja $f \colon X \to Y$ jest jednostajnie ciągła wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall_{\varepsilon > 0} \exists_{\delta > 0} \forall_{E \subseteq X.} \ \operatorname{diam} E < \delta \Rightarrow \operatorname{diam} f[E] < \varepsilon.$$

Przy pomocy twierdzeń o arytmetyce granic możemy udowodnić

Twierdzenie 7.2.9. *Niech $f, g \colon X \to Y$ będą funkcjami ciągłymi określonymi na przestrzni metrycznej X. Wówczas ciągłe są funkcje $f + g$, $f \cdot g$ oraz $\frac{f}{g}$ (pod warunkiem, że $g(x) \neq 0, x \in X$).*

Twierdzenie 7.2.10. *Niech X, Y, Z będą przestrzeniami metrycznymi, $A \subseteq X$ oraz*

$$f \colon A \to Y, \ g \colon f[A] \to Z.$$

Wówczas funkcja $h := g \circ f$ jest ciągła w punkcie $x \in A$, gdy f jest ciągła w punkcie x a funkcja g jest ciągła w punkcie $f(x)$.

Następne twierdzenie daje nam do dyspozycji szeroką klasę funkcji, dla których możemy stosować warunek jednostajnej ciągłości; jednak za chwilę pokażemy twierdzenie ogólniejsze, zatem poniższy dowód ma wyłącznie charakter poglądowy i dydaktyczny

Twierdzenie (Heinego-Cantora - przypadek szczególny)**.** *Jeżeli funkcja f jest określona i ciągła w przedziale domkniętym $[a, b]$, to jest ona również jednostajnie ciągła w tym przedziale.*

Dowód. Dowód poprowadzimy nie wprost. Załóżmy, że dla pewnego $\varepsilon > 0$ nie istnieje takie $\delta > 0$, żeby spełniona była definicja jednostajnej ciągłości. W takim przypadku dla dowolnej liczby $\delta > 0$ istnieją w przedziale $[a, b]$ takie dwie liczby $x_0^{(1)}$ i $x^{(1)}$, że

$$|x^{(1)} - x_0^{(1)}| < \delta, \text{ a równocześnie } |f\left(x^{(1)}\right) - f\left(x_0^{(1)}\right)| \geqslant \varepsilon.$$

Weźmy teraz ciąg $(\delta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ liczb dodatknich, $\delta_n \to 0$.
Jak pokazaliśmy wyżej, dla każdego δ_n znajedziemy w przedziale $[a, b]$ wartości $x_0^{(n)}$ i $x^{(n)}$ takie, że

$$|x^{(n)} - x_0^{(n)}| < \delta_n, \text{ a równocześnie } |f\left(x^{(n)}\right) - f\left(x_0^{(n)}\right)| \geqslant \varepsilon.$$

Na mocy twierdzenia 4.4.7 Bolzano-Weierstrassa z ciągu ograniczonego $(x^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ można wybrać podciąg zbieżny do pewnego punktu x_0 przedziału $[a, b]$. Oznaczmy go $(x^{(n_k)})_{k \in \mathbb{N}}$. Mamy $|x^{(n_k)} - x_0^{(n_k)}| < \delta_{n_k} \overset{k \to \infty}{\longrightarrow} \lim\limits_{n \to \infty} \delta_n = 0$ i stąd $x^{(n_k)} - x_0^{(n_k)} \to 0$. W takim razie ciąg $x_0^{(n_k)}$ również dąży do x_0. W takim razie na mocy ciągłości funkcji w punkcie x_0 powinno być

$$f(x^{n_k}) \to f(x_0) \text{ oraz } f(x_0^{(n)}) \to f(x_0), \text{ czyli } f(x^{n_k}) - f(x_0^{(n_k)}) \to 0,$$

co przeczy temu, że dla wszystkich n $|f(x^{(n_k)}) - f(x_0^{(n_k)})| \geqslant \varepsilon$. $\square$

Przykład 56. Funkcja $f\colon [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ dana wzorem $f(x) = \sqrt{x}$ jest jednostajnie ciągła na $[0,+\infty)$. Istotnie: pokazaliśmy już wcześniej, że f jest jednostajnie ciągła na $[1,+\infty)$. Z poprzedniego twierdzenia, wynika, że f jest jednostajnie ciągła również np. na przedziale $[0,2]$. Ustalmy $\varepsilon > 0$. Weźmy takie $\delta_1 > 0$ i takie $\delta_2 > 0$, że

$$\begin{array}{ll} \text{dla każdych } x,y \in [0,2]: & |x-y| < \delta_1 \text{ pociąga, że } |f(x)-f(y)| < \varepsilon; \\ \text{dla każdych } x,y \in [1,+\infty): & |x-y| < \delta_2 \text{ pociąga, że } |f(x)-f(y)| < \varepsilon. \end{array}$$

Bierzemy $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, 1\}$. Wówczas, gdy $|x-y| < \delta$, to $|x-y| < 1$ a więc nie jest możliwe[1], aby x i y nie leżały razem w przedziale $[0,2]$ lub $[1,+\infty)$ - mamy dwa przypadki:

1. $x,y \in [1,\infty)$ i wówczas $|x-y| < \delta_2$ pociąga, że $|f(x)-f(y)| < \varepsilon$;
2. $x,y \in [0,2]$ i wtedy $|x-y| < \delta_1$ pociąga, że $|f(x)-f(y)| < \varepsilon$.

Widzimy, że gdy $|x-y| < \delta$ to musi być $|f(x)-f(y)| < \delta$, czego chcieliśmy dowieść.

Definicja 7.2.11. Niech (X,ρ), (Y,σ) będą przestrzeniami metrycznymi. Mówimy, że funkcja $f\colon X \to Y$ spełnia **warunek Lipschitza** ze stałą $L \geqslant 0$, gdy dla dowolnych $x_1, x_2 \in X$ zachodzi

$$\sigma(f(x_1), f(x_2)) \leqslant L \cdot \rho(x_1, x_2). \tag{7.1}$$

Najmniejszą liczbą L (o ile istnieje) dla której spełniona jest powyższa nierówność dla dowolnych $x_1, x_2 \in X$ nazywamy **stałą Lipschitza** funkcji f. Funkcję spełniającą warunek Lipschitza ze stałą $L < 1$ nazywamy **kontrakcją** albo **odwzorowaniem zwężającym**.

Twierdzenie 7.2.12. *Funkcja spełniająca warunek Lipschitza jest jednostajnie ciągła.*

Dowód. Niech (X,ρ), (Y,σ) - przestrzenie metryczne i $f\colon X \to Y$ sp. warunek Lipschitza z ustaloną stałą $L \leqslant 0$. Weźmy dowolne $\varepsilon > 0$. wówczas dla $\delta = \frac{\varepsilon}{L}$ dostajemy, że dla dowolnych $x,y \in X$ spełniających $\rho(x,y) < \delta$ zachodzi

$$\sigma(f(x), f(y)) \leqslant L\rho(x,y) < L\delta = L \cdot \frac{\varepsilon}{L} = \varepsilon.$$

czyli f jest jednostajnie ciągła na X. □

Ćwiczenie. Niech $I \subseteq \mathbb{R}$ będzie przedziałem. Udowodnić, że funkcja $f\colon I \to \mathbb{R}$ spełniająca dla pewnych $L \geqslant 0$ i $\alpha \in (0,1]$, warunek[2]

$$|f(x)-f(y)| \leqslant L|x-y|^\alpha, \; x,y \in I$$

jest jednostajnie ciągła na I.

Twierdzenie 7.2.13 (Heinego-Cantora)**.** *Każda funkcja ciągła na przestrzeni zwartej jest jednostajnie ciągła.*

[1] zwróćmy uwagę, na długośc przedziału: $|[0,2] \cap [1,+\infty)| = |[1,2]| = 1$.

[2] mówimy wtedy, że funkcja f spełnia warunek Höldera ze stałą L i wykładnikiem α.

Dowód. Niech $f\colon X \to Y$ będzie funkcją ciągłą działającą z przestrzeni zwartej (X, ρ) w przestrzeń metryczną (Y, σ). Ustalmy dowolny $\varepsilon > 0$. Z ciągłości f dla każdego $x \in X$ istnieje liczba $\delta_x > 0$ taka, że $\sigma(f(x), f(y)) < \varepsilon/2$ dla każdego $y \in K(x, \delta_x)$.
Ze zwartości X z pokrycia $\left\{K\left(x, \dfrac{\delta_x}{2}\right) : x \in X\right\}$ można wybrać podpokrycie skończone

$$K\left(x_1, \frac{\delta_{x_1}}{2}\right), K\left(x_2, \frac{\delta_{x_2}}{2}\right), \ldots, K\left(x_m, \frac{\delta_{x_m}}{2}\right).$$

Niech $\delta = \dfrac{1}{2}\min\{\delta_{x_1}, \delta_{x_2}, \ldots, \delta_{x_m}\}$. Wówczas dla dowolnych $x, y \in X$ takich, że $\rho(x, y) < \delta$ istnieje punkt x_k taki, że $x \in K\left(x_k, \dfrac{\delta_{x_k}}{2}\right)$. Wtedy

$$\rho(y, x_k) \leqslant \underbrace{\rho(y, x)}_{\substack{<\delta\leqslant\frac{\delta_{x_k}}{2} \\ \text{z założenia}}} + \overbrace{\rho(x, x_k)}^{<\frac{\delta_{x_k}}{2}} < \frac{\delta_{x_k}}{2} + \frac{\delta_{x_k}}{2} = \delta_{x_k},$$

zatem $x, y \in K(x_k, \delta_{x_k})$ $\Big(x$ również należy do tej kuli, ponieważ $K\left(x_k, \frac{\delta_{x_k}}{2}\right) \subseteq K\left(x_k, \delta_{x_k}\right)\Big)$. Możemy już obliczyć

$$\sigma(f(x), f(y)) \leqslant \sigma(f(x), f(x_i)) + \sigma(f(x_i), f(y)) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Stąd mamy, że $f\colon X \to Y$ jest jednostajnie ciągła, co było do okazania. □

Dowód można też przeprowadzić, przy pomocy ciągowej definicji zwartości:

Dowód. Niech $f\colon X \to Y$ będzie funkcją ciągłą działającą z przestrzeni zwartej (X, ρ) w przestrzeń metryczną (Y, σ).

Przypuśćmy, że f nie jest jednostajnie ciągła, tzn.:

$$(*) \qquad \exists_{\varepsilon>0}\forall_{\delta>0}\exists_{x_1,x_2\in X}\, \rho(x_1, x_2) < \delta \text{ i } \sigma\left(f(x_1), f(x_2)\right) \geqslant 0.$$

Weźmy ε spełniający $*$. Niech $\delta = \frac{1}{n}$, gdzie $n \in \mathbb{N}$. Wtedy istnieją $x_n, x_n' \in X$ takie, że $\rho(x_n, x_n') < \frac{1}{n}$ oraz $\sigma\left(f(x_n), f(x_n')\right) \geqslant 0$. Ze zwartości przestrzeni X istnieje $a \in X$ oraz ciąg $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ liczb naturalnych taki, że $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = a$.

$$\rho(x_{n_k}', a) \leqslant \rho(x_{n_k}', x_{n_k}) + \rho(x_{n_k}, a) < \frac{1}{n} + \rho(x_{n_k}, a) \longrightarrow 0.$$

W takim razie $x_{n_k} \to 0$ i $x_{n_k}' \to 0$. Ale f jest funkcją ciągła w a. Wówczas $f\left(x_{n_k}\right) \to f(a)$ i $f\left(x_{n_k}'\right) \to f(a)$. Stąd wynika, że

$$0 = \sigma\left(f(x), f(a)\right) = \lim_{k\to\infty} \sigma\left(f(x_{n_k}), f(x_{n_k}')\right) \geqslant \varepsilon > 0 \text{ - sprzeczność.}$$

Funkcja f musi być jednostajnie ciągła. □

Wniosek 7.2.14. Jeżeli funkcja ciągła f jest określona na przedziale domkniętym $[a, b]$, to jest również jednostajnie ciągła w tym przedziale.

Definicja 7.2.15. Mówimy, że funkcja $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ ma **własność Darboux**, gdy dla dowolnego $y \in [f(a), f(b)]$ istnieje takie $c \in (a,b)$, że $f(c) = y$.

Lemat 7.2.16 (Bolzano)**.** *Niech $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, $a < b$ będzie funkcją ciągłą oraz $f(a) \cdot f(b) < 0$. Wtedy istnieje takie $c \in (a,b)$, że $f(c) = 0$.*

Dowód. Dla ustalenia uwagi przyjmijmy, że $f(a) < 0$ a $f(b) > 0$. Podzielimy przedział $[a,b]$ na połowy punktem $c_0 = \frac{a+b}{2}$. Jeśli $f(c_0) = 0$, to $c = c_0$ i twierdzenie jest udowodnione. Jeśli $f(c_0) \neq 0$, to na końcach jednego z przedziałów $[a, c_0]$, $[c_0, b]$ funkcja przyjmuje wartości różnych znaków - na lewym końcu wartość ujemną, a na prawym dodatnią. Oznaczając ten przedział przez $[a_1, b_1]$, mamy $f(a_1) < 0$, $f(b_1) > 0$ i $[a_1, b_1] \subseteq [a,b]$. Dzielimy ten nowy przedział na połowy punktem $c_1 = \frac{a_1+b_1}{2}$. Jeśli $f(c_1) = 0$, to twierdzenie jest udowodnione. Kontynuujemy ten proces:
Jeśli dla $m \in \mathbb{N}$ mamy przedział $[a_m, b_m] \subseteq [a_{m-1}, b_{m-1}]$ taki, że $f(a_m) < 0$ i $f(b_m) > 0$, to dzielimy go punktem $c_m = \frac{a_m+b_m}{2}$. Jeśli $f(c_m) = 0$ - twierdzenie jest udowodnione. W przeciwnym wypadku, wybieramy ten z przedziałów $[a_m, c_m]$, $[c_m, b_m]$ na końcach którego funkcja f przyjmie wartości różnych znaków.
Albo po skończonej liczbie kroków trafimy w punkt, w którym f przyjmuje wartość zero, albo otrzymamy zdefiniowany indukcyjnie nieskończony ciąg $([a_n, b_n])_{n\in\mathbb{N}}$ niepustych przedziałów zstępujących a dla n-tego przedziału, jego długość wynosi $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$. Wtedy na mocy lematu 4.4.4 o przedziałach zstępujących istnieje taki punkt $c \in [a,b]$, dla którego $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = c$.
Zauważmy teraz, że

$$f(a_n) < 0,\ f(b_n) > 0,\ n \in \mathbb{N},\ \text{i stąd}\ \lim_{n\to\infty} f(a_n) \leqslant 0,\ \lim_{n\to\infty} b_n \geqslant 0.$$

Korzystając z ciągłości funkcji f: $f(c) = \lim\limits_{n\to\infty} f(a_n)$ i $f(c) = \lim\limits_{n\to\infty} f(b_n)$, czyli $f(c) \leqslant 0$ i zarazem $f(c) \geqslant 0$. Ostatecznie $f(c) = 0$.

□

Twierdzenie 7.2.17 (Darboux I)**.** *Każda funkcja ciągła $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ ma własnośc Darboux.*

Dowód. Weźmy dowolny $y \in (f(a)), f(b))$. Zdefinujmy funkcję pomocniczą $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ wzorem $F(x) = f(x) - y$. Funkcja ta jest oczywiście ciągła. Ponieważ $f(a) < y < f(b)$, to $F(b) = f(a) - c < 0$, zaś $F(b) = f(b) - c > 0$. Zatem na mocy lematu Bolzano, istnieje punkt $x \in [a,b]$ taki, że $F(x) = 0$, czyli $f(x) = y$. □

Uwaga 7.2.18. Twierdzenie nie zachodzi w drugą stronę. Np. funkcja $f\colon [-1,1] \to [-1,1]$ określona wzorem

$$f(x) = \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{dla } x \neq 0; \\ 0 & \text{dla } x = 0. \end{cases}$$

ma własność Darboux ale nie jest ciągła w punkcie $x = 0$.
Podobnie funkcja $f\colon [-1,1] \to [0,2]$ dana wzorem

$$f(x) = \begin{cases} -x, & x \in [-1,0]; \\ x+1, & x \in (0,1]; \end{cases}$$

ma własność Darboux ale nie jest ciągła w punkcie $x = 0$ (ćwiczenie).

Uwaga 7.2.19. Twierdzenie, często określane jako tw. Darboux jako pierwszy w istocie udowodnił Bernard Bolzano - matematyk, który pracował samotnie i nie opublikował swoich prac, które doczekały się dopiero wydania po śmierci autora. Ponadto w literaturze występuje ono czasem jako twierdzenie Bolzano-Cauchy'ego. Możemy sformułować:

Twierdzenie (Bolzano-Cauchy'ego)**.** *Jeżeli $f\colon D \to \mathbb{R}$ jest funkcją ciągłą, a zbiór $D \subseteq \mathbb{R}$ przedziałem, to zbiór wartości funkcji jest także przedziałem.*

Widzimy, że tak naprawdę powyższe twierdzenie wyraża dokładnie tę samą treść, co twierdzenie 7.2.17.

Uwaga 7.2.20. Jeszcze ogólniej, na gruncie topologii twierdzenie Darboux przyjmuje postać stwierdzenia:

Twierdzenie. *Jeśli $f\colon X \to Y$ jest ciągłą funkcją różnowartościową między przestrzeniami metrycznymi (topologicznymi) X i Y, oraz X jest zb. spójnym, to przestrzeń Y również jest zbiorem spójnym.*

Dowód. Ćwiczenie. Wskazówka: założyć nie wprost, że $f[X]$ nie jest spójny. □

Uwaga 7.2.21. Jeżeli $I, P \subseteq \mathbb{R}$ są przedziałami a $f\colon I \to P$ ciągłą bijekcją, to albo funkcja f jest w I rosnąca, albo malejąca.

Dowód. Załóżmy, że istniałyby takie punkty $x_1, x_2, x_3 \in I$, że $x_1 < x_2 < x_3$ oraz

$$f(x_1) < f(x_2) \text{ i } f(x_2) > f(x_3)$$

lub

$$f(x_1) > f(x_2) \text{ i } f(x_2) < f(x_3).$$

Niech np. $f(x_1) < f(x_2)$ i $f(x_2) > f(x_3)$. Wtedy

$$\min\{f(x_1), f(x_3)\} = f(x_1)$$

$$\max\{f(x_1), f(x_3)\} = f(x_3)$$

Mamy $x_1 < c < x_2 < x_3$ oraz $f(c) = f(x_3)$ - sprzeczność, ponieważ f jest różnowartościowa. □

Ćwiczenie. Wykazać, że każde ciągłe odzworowanie f przedziału $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ w siebie ma co najmniej jeden punkt stały, tj. punkt $x \in [a, b]$ taki, że $f(x) = x$.

Twierdzenie 7.2.22. *Jeśli funkcja jest ściśle monotoniczna w przedziale domkniętym i ma własność Darboux, to jest ciągła w tym przedziale.*

Dowód. **[TO-DO:WIP]** Niech $y \in [f(a), f(b)]$, to z założenia istnieje $x \in [a, b]$ takie, że $y = f(x)$. Załóżmy najpierw, że $x \in (a, b)$. Z twierdzenia 6.2.10 granice $f(x-)$, $f(x+)$ istnieją i

$$f(x-) \leqslant f(x) \leqslant f(x+).$$

Ustalmy $\varepsilon > 0$. Wówczas mamy:

$$\begin{aligned} &\text{dla pewn. } \delta_1 > 0 : x - \delta_1 < t < x \implies |f(x) - f(t)| < \varepsilon, \\ &\text{dla pewn. } \delta_2 > 0 : x < t < x + \delta_2 \implies |f(x) - f(t)| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Niech $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, to dla $t \in (x-\delta, x+\delta)$ zachodzi $|f(x) - f(t)| < \varepsilon$ czyli

$$\lim_{t \to x} f(t) = f(x).$$

Funkcja f jest ciągła w x. $\square$

Uwaga 7.2.23. Założenie zwartości (ograniczoności i domkniętości) dziedziny funkcji w powyższym twierdzeniu nie może być pominięte. Np. funkcja $f\colon (0,1] \to \mathbb{R}$ określona wzorem

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

jest ciągła, ale nie jest ograniczona. Podobnie funkcja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dana jako $f(x) = e^x$ nie jest ograniczona, mimo że jej dziedzina - cała prosta rzeczywista - jest domknięta.
Klasycznie twierdzenie dotyczy funkcji $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}, [a,b] \subseteq \mathbb{R}$.

Twierdzenie 7.2.24. *Funkcja $f\colon X \to Y$, gdzie X, Y są przestrzeniami metrycznymi, jest ciągła wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego zbioru otwartego $U \subseteq X$ zbiór $f^{-1}[U]$ jest otwarty.*

Dowód. Najpierw przeprowadzimy dowód w lewo: rozważmy dowolny $x \in X$. Chcemy sprawdzić, że

$$(*)\ \forall_{\varepsilon>0}\exists_{\delta>0}\forall_{x'}.\ x' \in K(x,\delta) \Rightarrow f(x') \in K(f(x),\varepsilon)$$

Ustalmy więc dowolny $\varepsilon > 0$. Zbiór $K(f(x),\varepsilon)$ jest otwarty, zatem z założenia zbiór $f^{-1}[K(f(x),\varepsilon)]$ jest również otwarty i stąd istnieje pewne otoczenie $K(x,\delta) \subseteq f^{-1}[K(f(x),\varepsilon)]$ punktu x. Ale z definicji przeciwobrazu dla każdego punktu $x' \in K(x,\delta)$ mamy $f(x') \in K(f(x),\varepsilon)$ czyli inaczej mówiąc zachodzi warunek $(*)$. W drugą stronę: ustalmy dowolny zbiór otwarty $U \subseteq X$. Rozważmy dowolny $x \in f^{-1}[U]$. Istnieje $y = f(x) \in U$ wraz z otoczeniem (otwartość U) $K(y,\varepsilon) \subseteq U$. Z ciągłości f dla otoczenia $K(f(x),\varepsilon)$ istnieje takie otoczenie $K(x,\delta)$ punktu x, że dla każdego $x' \in K(x,\delta)$ zachodzi $f(x') \in K(f(x),\varepsilon) = K(y,\varepsilon)$. Czyli $K(x,\delta) \subseteq f^{-1}[K(y,\varepsilon)] \subseteq f^{-1}[U]$. Stąd zbiór $f^{-1}[U]$ jest otwarty. $\square$

Łatwo z powyższego uzasadnić

Wniosek 7.2.25. Funkcja $f\colon X \to Y$ określona na przestrzeniach metrycznych (X,ρ), (X,σ) jest ciągła wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego zbioru domkniętego $F \subseteq Y$ zbiór $f^{-1}[F]$ jest domknięty.

Ćwiczenie. Sprawdzić, że $f^{-1}[X \setminus B] \subseteq X \setminus f^{-1}[B]$, $B \subseteq Y$ i udowodnić poprzednie twierdzenie.

Ćwiczenie. Udowodnić, że jeżeli $f\colon X \to Y$, gdzie X, Y są przestrzeniami metrycznymi, jest funkcją ciągłą, to $f[\operatorname{cl} E] \subseteq \operatorname{cl} f[E]$ dla dowolnego zb. $E \subseteq X$.

Rozwiązanie. Niech $y \in f[\operatorname{cl} E]$. Wówczas $y = f(x)$ dla pewnego $x \in \operatorname{cl} E$. Istnieje ciąg $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wyrazów zbioru E, $x_n \to x$. Zauważmy, że $f(x_n) \in f[E]$, $n \in \mathbb{N}$. Z ciągłości funkcji f musi być $f(x_n) \to f(x)$. Czyli $y = f(x) \in \operatorname{cl} f[E]$. A więc $y \in f[\operatorname{cl} fE] \Rightarrow y \in \operatorname{cl} f[E]$. $\square$

Twierdzenie 7.2.24 może stanowić punkt wyjścia dla topologicznej definicji ciągłości. Albo przynajmniej dla omówienia tego tematu. Tak naprawdę, w przestrzeni metrycznej „nasze” definicje ciągłości (Cauchy'ego, Heinego) pokrywają się z definicją topologiczną. Topologią $\mathcal{T}$ na zbiorze X jest wyróżniona rodzina jego podzbiorów, spełniających pewne „aksjomaty”. Parę $(X,\mathcal{T})$ nazywamy przestrzenią topologiczną. Zbiory rodziny $\mathcal{T}$ nazywają się zbiorami otwartymi tej przestrzeni.

Czytelnik może się już domyślać, że zbiory otwarte w przestrzeni metrycznej wyznaczają na niej topologię. Przestrzenie metryczne są szczególnym przypadkiem przestrzeni topologicznej. Równoważnik ciągłości w twierdzeniu 7.2.24 jest prawdziwy dla funkcji określonej między przestrzeniami topologicznymi, również nie będącymi przestrzeniami metrycznymi. Mógłby on więc również stanowić definicję ciągłości.

Twierdzenie 7.2.26. *Obraz ciągły przestrzeni zwartej jest przestrzenią zwartą.*

Dowód. Niech $f\colon X \to Y$ będzie odwzorowaniem ciągłym przestrzeni zwartej X na przestrzeń Y. Rozważmy dowolne pokrycie $\mathcal{V}$ przestrzeni Y. Rodzina

$$\{f^{-1}[V]\colon V \in \mathcal{V}\}$$

jest pokryciem przestrzeni X na mocy tego, że f jest na Y oraz składa się ze zbiorów otwartych, gdyż f jest ciągłe. Ze zwartości przestrzeni X wynika, że istnieje skończenie wiele zbiorów $f^{-1}[V_1], \dots, f^{-1}[V_n]$, gdzie $V_i \in \mathcal{V}$, które pokrywają przestrzeń X. Stąd

$$Y = f[X] = f[f^{-1}[V_1] \cup \dots \cup f^{-1}[V_n]] = V_1 \cup \dots \cup V_n.$$

Koniec dowodu. □

Lemat 7.2.27. *Niech $f\colon X \to Y$ będzie ciągłą bijekcją zwartej przestrzeni metrycznej (X, ρ) na przestrzeń metryczną (Y, σ). Wówczas dla każdego zbioru otwartego $U \subseteq X$ zbiór $f[U]$ jest otwarty.*

Dowód. Ustalmy zbiór otwarty $U \subseteq X$. Wówczas $X \setminus U$ zbiorem otwartym i zawartym w zbiorze zwartym X, a więc zwartym na mocy twierdzenia 5.6.13. Z poprzedniego twierdzenia wynika, że $f[X \setminus U]$ jest zbiorem zwartym. Z założenia, że funkcja jest na Y zachodzi równość $f[X \setminus U] = Y \setminus f[U]$. W takim razie zbiór $Y \setminus f[U]$ jest zwarty, a więc domknięty i stąd $f[U]$ jest zbiorem otwartym. □

Twierdzenie 7.2.28. *Niech $f\colon X \to Y$ będzie ciągłą bijekcją zwartej przestrzeni metrycznej (X, ρ) na przestrzeń metryczną (Y, σ). Wówczas odwzorowanie odwrotne $f^{-1}\colon Y \to X$ jest ciągłą bijekcją przestrzeni Y na przestrzeń X.*

Dowód. Ustalmy zbiór otwarty $U \subseteq X$. Z różnowartościowości funkcji f wynika, że $\left(f^{-1}\right)^{-1}[U] = f[U]$. Z poprzedniego lematu wynika teraz otwartość zbioru $f[U]$. Czyli przeciwobraz dowolnego zbioru otwartego U przez funkcję f^{-1} jest otwarty i z twierdzenia 7.2.24 funkcja f^{-1} jest ciągła. □

Twierdzenie 7.2.29 (Weierstrassa)**.** *Niech $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą. Wtedy jej obraz jest zbiorem ograniczonym, tzn. $m \leqslant f(x) \leqslant M$ dla pewnych stałych m i M. Ponadto funkcja f osiąga swoje kresy, tzn. istnieją takie $\underline{x}, \overline{x} \in X$, że*

$$f(\underline{x}) = \inf_{x \in X} f(x),\ f(\overline{x}) = \sup_{x \in X} f(x).$$

Wtedy oczywiście

$$f(\underline{x}) \leqslant f(x) \leqslant f(\overline{x}),\ \textit{dla każdego } x \in [a, b].$$

Klasyczne twierdzenie 7.2.29 Weierstrassa jest wnioskiem z twierdzenia 4.4.7 Bolzano-Weierstrassa. Czytelnik może spróbować udowodnić to twierdzenie wychodząc właśnie z tego twierdzenia. Jednak, po dawce topologii przestrzeni metrycznych, pozwólmy sobie skorzystać z naszej ciężko zdobytej wiedzy i udowodnić ogólniejsze, uwspółcześnione:

Twierdzenie 7.2.30 (Weierstrassa)**.** *Funkcja ciągła na przestrzeni zwartej o wartościach w $\mathbb{R}$ jest ograniczona i przyjmuje swoje kresy.*

Dowód. Niech $f\colon \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą, określoną na przestrzeni zwartej X. Wówczas $f[X]$ jest zwarty jako ciągły obraz przestrzeni zwartej. Na mocy twierdzenia 5.6.16 $f[X]$ jest domknięty i ograniczony. Zatem f jest funkcją ograniczoną. Z definicji supremum i infimum oraz domkniętości $f[X]$ mamy, że $\inf f[X], \sup f[X] \in f[X]$. $\square$

Kilka faktów ciekawych z punktu widzenia teorii mnogości.

Twierdzenie 7.2.31. *Jeżeli f jest funkcją monotoniczną o wartościach rzeczywistych, to zbiór jej punktów nieciągłości jest co najwyżej przeliczalny.*

Dowód. Dla ustalenia uwagi, przypuśćmy, że $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ jest niemalejąca, i niech $K = \{x \in (a,b)\colon f \text{ jest nieciągła w } x\}$. Dla każdego $x \in K$ mamy $f(x-) < f(x+)$. Dla każdego takiego x istnieje więc taka liczba $r_x \in \mathbb{Q}$, że

$$f(x-) < r_x < f(x+).$$

Oczywiste jest, że dla $x_1 \neq x_2$: $r_x \neq r_x$. Niech np. $x_1 < x_2$, to wówczas

$$f(x_1-) < r_{x_1} < f(x_1+) \leqslant f(x_2-) < r_{x_2} < f(x_2+).$$

Oznacza to, że istnieje wzajemnie jednoznaczne odwzorowanie między K a pewnym podzbiorem zbioru $\mathbb{Q}$, a ten musi być oczywiście co najwyżej przeliczalny. $\square$

Lemat 7.2.32. *Ustalmy X, Y - prz. metryczne. Niech $f, g\colon X \to Y$ będą funkcjami ciągłymi i $E \subseteq X$ będzie zbiorem gęstym w X. Wówczas, jeżeli $f(x) = g(x), x \in E$, to $f = g$ (tzn. $f(x) = g(x)$, $x \in X$)*

Dowód. Załóżmy nie wprost, że $f(x) \neq g(x)$ dla pewnego $x \in X \setminus E$. Niech $U, V \subseteq Y$ tak, że

$$U, V \text{ - są zbiorami otwartymi;}$$

$$U \cap V = \varnothing,$$

$$f(x) \in U,\ g(x) \in V.$$

(Zbiory takie istnieją na mocy 5.2.7.) Wówczas $x \in f^{-1}[U] \cap g^{-1}[V] \subseteq X$. Z gęstości zbioru E: $X = E \cup E^d$. $x \notin E$ z założenia, więc x jest punktem skupienia zbioru E. Zatem istnieje w $E \cap f^{-1}[U] \cap g^{-1}[V]$(otoczenie punktu x!) pewien punkt c. Ale wówczas $f(c) \neq g(c)$. Ale $c \in E$ - sprzeczność z założeniem. $\square$

Twierdzenie 7.2.33. *Zbiór funkcji ciągłych jest mocy continuum.*

Dowód. Niech $C = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}\colon f \text{ jest ciągła.}\}$. Określamy $F\colon C \overset{\text{na}}{\to} \mathbb{R}^{\mathbb{Q}}$ wzorem $F(f) = f\big|_{\mathbb{Q}}$. Z teorii mnogości wiadomo, że $\operatorname{card} \mathbb{R}^{\mathbb{Q}} = \mathfrak{c}$ i stąd wynika teza. $\square$

7.3 Ciągłość bezwzględna.

Ten temat można pominąć w pierwszym czytaniu.

Definicja 7.3.1. Niech $I \subseteq \mathbb{R}$ będzie przedziałem i dana będzie funkcja $f\colon I \to \mathbb{R}$. Funkcję f nazywamy *bezwzględnie ciągłą na przedziale* I, gdy dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje takie $\delta > 0$, że dla każdego *skończonego* ciągu $(a_1, b_1), (a_2, b_2), \ldots, (a_n, b_n)$ przedziałów otwartych i rozłącznych i takich, że

$$1.)\quad (a_k, b_k) \subseteq I, k \in \{1, \ldots, n\},$$

$$2.)\quad \sum_{k=1}^{n} (b_k - a_k) \leqslant \delta;$$

zachodzi nierówność

$$\sum_{k=1}^{n} |f(b_k) - f(a_k)| \leqslant \varepsilon.$$

Uwaga 7.3.2. Złożenie dwóch funkcji bezwzględnie ciągłych *nie* musi być funkcją bezwzględnie ciągłą!

Twierdzenie 7.3.3. *Każda funkcja bezwzględnie ciągła $f\colon I \to \mathbb{R}$, gdzie $I \subseteq \mathbb{R}$ jest przedziałem, jest jednostajnie ciągła.*

Powyższe twierdzenie nie zachodzi w drugą stronę.

Twierdzenie 7.3.4. *Niech $f\colon I \to \mathbb{R}$, gdzie $I \subseteq \mathbb{R}$ jest przedziałem. Jeżeli f spełnia warunek Höldera dla stałej $L \geqslant 0$ i wykładnika $\alpha \in (0, 1]$, czyli:*

$$|f(x) - f(y)| \leqslant L|x - y|^{\alpha},\ x, y \in I,$$

to jest bezwzględnie ciągła.

7.4 Półciągłość.

Ten rozdział jest w dużej mierze opcjonalny.

Twierdzenie 7.4.1. *Funkcja $f\colon X \to \mathbb{R}$, X - prz. metryczna; jest ciągła wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzą równocześnie warunki*

(1) dla dow. $c \in \mathbb{R}$ zbiór $\{x \in X\colon f(x) > c\}$ jest zbiorem otwartym;

(2) dla dow. $c \in \mathbb{R}$ zbiór $\{x \in X\colon f(x) < c\}$ jest zbiorem otwartym.

Dowód. Implikacja w prawo wynika z twierdzenia 7.2.24. W drugą stronę: ustalmy dow. $x_0 \in X$. Rozważmy dowolny $\varepsilon > 0$. Niech $c_1 = f(x_0) - \varepsilon$ i $c_2 = f(x_0) + \varepsilon$. Wtedy, z założenia istnieją takie $r_1, r_2 > 0$, że

$$K(x_0, r_1) \subseteq \{x \in X\colon f(x) > f(x_0) - \varepsilon\},$$
$$K(x_0, r_2) \subseteq \{x \in X\colon f(x) < f(x_0) + \varepsilon\},$$

Przyjmijmy $r = \min\{r_1, r_2\}$ i wtedy

$$K(x_0, r) \subseteq K(x_0, r_1) \cap K(x_0, r_2) = \{x \in X\colon |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon\}.$$

Pokazaliśmy zatem, że $\forall_{\varepsilon>0}\exists_{r>0}\forall_{x\in X} x \in K(x_0, r) \Rightarrow f(x) \in K(f(x_0), \varepsilon)$. f jest ciągła w punkcie x_0 a z dowolności wyboru tego punktu: jest ciągła w X. □

Definicja 7.4.2. Ustalmy funkcję $f\colon X \to \mathbb{R}$, gdzie X - prz. metryczna. Jeżeli f spełnia warunek (1) z poprzedniego twierdzenia, to mówimy, że jest **półciągła z góry**. Jeżeli f spełnia warunek (2) to mówimy, że jest **półciągła z dołu**.

Z poprzedniego twierdzenia wynika w sposób oczywisty

Twierdzenie 7.4.3. *Funkcja jest ciągła wtedy i tylko wtedy, gdy jest równocześnie półciągła z dołu i z góry.*

Przykład 57. Ustalmy $a > 0$. Funkcja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dana wzorem

$$f(x) = \begin{cases} a, & x \geqslant 0, \\ -a, & x < 0. \end{cases}$$

jest półciągła z góry w $x = 0$, chociaż nie jest w tym punkcie ciągła.

Przykład 58. Funkcja $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ jest półciągła z góry. Podobnie $x \mapsto \lceil x \rceil$ jest półciągła z dołu.

7.5 *Twierdzenia o punkcie stałym

Twierdzenie 7.5.1 (Banacha o punkcie stałym)**.** *Niech (X, ρ) będzie przestrzenią metryczną zupełną a $T\colon X \to X$ odzworowaniem zwężającym. Wówczas istnieje dokładnie jeden punkt $a \in X$ taki, że $T(a) = a$. Ponadto ciąg $(T^n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ dla dowolnego $x \in X$ jest zbieżny do a oraz $\rho(T^n(x), a) \leqslant L^n \cdot \rho(x, a)$, gdzie L jest stałą, dla której T spełnia warunek Lipschitza.*

Dowód. Niech $a \in X$. Pokażemy, że ciąg $(T^n(a))_{\mathbb{N}}$ spełnia warunek Cauchy'ego.
Indukcyjnie udowodnimy najpierw, że

$$\rho\left(T^{n+1}(x), T^n(x)\right) \leqslant L^n \rho(T(x), x)$$

Dla $n = 0$: $\rho\left(T^1(x), T^0(x)\right) = \rho(T(x), x)$. Dla $n = 1$ mamy $\rho\left(T^2(x), T^1(x)\right) = \rho(T\left(T(x)\right), T(x)) \leqslant L\rho\left(T(x), x\right)$. Załóżmy, że dla pewnego $m \in \mathbb{N}$ zachodzi:

$$\rho\left(T^{m+1}(x), T^m(x)\right) \leqslant L^m \rho(T(x), x).$$

Pokażemy, że

$$\rho\left(T^{m+2}(x), T^{m+1}(x)\right) \leqslant L^{m+1} \rho(T(x), x).$$

Mamy:

$$\rho\left(T^{m+2}(x), T^{m+1}(x)\right) = \rho\left(T(T^{m+1}(x)).T(T^m(x))\right) \leqslant L\rho\left(T^{m+1}(x), T^m(x)\right) \leqslant$$

$$\leqslant L \cdot L^m \rho(T(x), x) = L^{m+1}\rho(T(x), x).$$

Ustalmy teraz dowolne $m, n \in \mathbb{N}$, $m > n$. Wtedy

$$\rho\left(T^m(x), T^n(x)\right) \leqslant \rho\left(T^m(x, T^{m-1})(x)\right) + \rho\left(T^{m-1}(x, T^{m-2})(x)\right) + \ldots + \rho\left(T^{n+1}(x, T^n)(x)\right) \leqslant$$

$$\leqslant L^{m-1}\rho(T(x), x) + L^{m-2}\rho(T(x), x) + \ldots + L^n\rho(T(x), x) = (L^{m-1} + L^{m-2} + \ldots + L^n) \cdot \rho(T(x), x) \leqslant$$

$$\leqslant \rho(T(x), x) \cdot \sum_{k=n}^{\infty} L^k = L^n \frac{\rho(T(x), x)}{1 - L} = C \cdot L^n.$$

Ustalmy $\varepsilon > 0$. Wtedy istnieje $n_0 \in \mathbb{N}$ takie, że $C \cdot L^{n_0} < \varepsilon$. Biorąc dowolne $m, n \geqslant n_0$ mamy

$$\rho(T^m(x), T^n(x)) \leqslant C \cdot L^{\min(n,m)} \leqslant C \cdot L^{n_0} < \varepsilon.$$

Stąd mamy już, że ciąg $(T^n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ spełnia warunek Cauchye'go, a zatem z zupełności przestrzeni X jest zbieżny. Niech

$$a = \lim_{n\to\infty} T^n(x).$$

T jest ciągła (gdyż spełnia warunek Lipschitza), zatem

$$T(a) = T\left(\lim_{n\to\infty} T^n(x)\right) = \lim_{n\to\infty} T(T^n(x)) = \lim_{n\to\infty} T^{n+1}(x) = a.$$

Indukcyjnie możemy pokzać, że $\rho(T^n(x), a) \leqslant L^n\rho(x, a), n \in \mathbb{N}$ dla dowolnego $x \in X$. (ćwiczenie)
□

Twierdzenie 7.5.2 (Brouwera o punkcie stałym)**.** *Niech K jest n-wymiarową kulą domkniętą w przestrzeni $\mathbb{R}^n$ oraz $T\colon K \to K$ będzie odwzorowaniem ciągłym. Wówczas istnieje taki punkt $a \in K$, że $T(a) = a$.*

Rozdział 8

Pochodna funkcji jednej zmiennej, różniczkowalność funkcji

8.1 Pochodna funkcji jednej zmiennej

Definicja 8.1.1 (Pochodna funkcji jednej zmiennej w punkcie)**.** Niech $D \subseteq \mathbb{R}$ będzie zbiorem otwartym, $f\colon D \to \mathbb{R}$ oraz $x_0 \in D$. **Pochodną funkcji** f w punkcie x_0 nazywamy granicę

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \tag{8.1}$$

i oznaczamy ją $f'(x_0)$.

Wyrażenie $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ oznaczamy czasem przez $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ i nazywamy **ilorazem różnicowym**. Pochodną oznaczamy też czasem jako $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}$ - jest to oznaczenie pochodzące od Leibniza[1].

Przykład 59. Obliczmy pochodną funkcji $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ danej wzorem $y = x,\ x \in \mathbb{R}$ (czyli identyczności na $\mathbb{R}$). Ustalmy $x_0 \in \mathbb{R}$. Wtedy

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = (x)' = \lim_{x \to x_0} \frac{x - x_0}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} 1 = 1$$

Uwaga 8.1.2. Pochodna z dowolnej stałej jest równa 0 (ćwiczenie).

Ćwiczenie. Udowodnić z definicji pochodnej, że $(x^n)' = nx^{n-1}$ dla dowolnej liczby naturalnej n. Wskazówka: skorzystać ze wzoru (3.3.8) na różnicę n-tych potęg.

Przypomnijmy, że otwartość podzbioru D przestrzeni $\mathbb{R}$ (w domyśle z metryką naturalną) oznacza, iż dla każdego $x \in D$ istnieje taki otwarty przedział $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$, że $x \in (a, b) \subseteq D$. Warunek ten zapewnia, że możemy rozważać w punkcie x granice obustronne.

[1]Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) - niemiecki polihistor: matematyk i fizyk ale także filozof, inżynier, historyk, prawnik i dyplomata. Niezależnie od Isaaca Newtona wynalazca rachunku różniczkowego i całkowego. Jako osobisty asystent księcia Hanoweru - Jerzego Ludwika podróżował po całej Europie z tajnymi misjami dyplomatycznymi, które nie tylko przysparzały mu licznych przygód ale też dały okazję poznać wszystkich ważniejszych filozofów i naukowców swoich czasów. Był też twórcą jednej z pierwszych koncepcji "maszyny liczącej", czyli proto-komputera.

Definicja 8.1.3. Oznaczamy

$$f'(x+) := \lim_{h\to 0+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

oraz

$$f'(x-) := \lim_{h\to 0-} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

$f'(x+)$ nazywamy **pochodną prawostronną** a $f'(x-)$ **pochodną lewostronną** funkcji f. Pochodne prawo i lewostronne możemy rozważać również w krańcach przedziału, jeśli funkcja nie jest określona na zbiorze otwartym.

Oczywiste jest, że jeśli granice $f'(x+)$, $f'(x-)$ istnieją i $f'(x+) = f'(x-)$, to f jest różniczkowalna w x i $f'(x) = f'(x+) = f'(x-)$. Ustalmy zbiór E, niebędącym zbiorem otwartym, ale niezawierającym punktów izolowanych. Możemy przyjąć, że funkcja f określona na zbiorze E jest różniczkowalna, gdy istnieje jej pochodna w każdym punkcie $x \in \operatorname{int} E$ oraz w każdym punkcie brzegowym istnieje jej pochodna lewostronna lub prawostronna.

Definicja 8.1.4. Jeżeli funkcja $f\colon D \to \mathbb{R}$, gdzie D jest zbiorem otwartym, jest różniczkowalna w każdym punkcie swojej dziedziny, to mówimy że jest **różniczkowalna** a jej pochodną nazywamy funkcję g taką, że

$$g(x) = f'(x),\ x \in D$$

i przyjmujemy oznaczenie $g = f'$.

Interpretacja fizyczna pochodnej. Niech $x(t)$ oznacza położenie na osi OX punktu materialnego w chwili $t \in [0, +\infty)$. Ustalmy pewną chwilę t_0. *Średnią* prędkość punktu w przedziale czasu $[t_0, t]$ (dla $t > t_0$) definiuje się jako $v_{\text{śr}} := \frac{x(t)-x(t_0)}{t-t_0}$. **Prędkość chwilową** $v(t_0)$ w chwili t_0 definijemy jako granicę:

$$v(t_0) = x'(t_0) = \lim_{t\to t_0} \frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0}.$$

Interpretacja geometryczna pochodnej. Ustalmy funkcję f określoną w otoczeniu pewnego $x_0 \in \mathbb{R}$. Oznaczmy punkt $P = \big(x_0, f(x_0)\big)$. Niech dodatkowo $H = (x_1, f(x_1))$ będzie dowolnym punktem położonym na wykresie funkcji f. Prostą przechodzącą przez punkty P i H nazywamy **sieczną**. Równanie siecznej PH ma więc postać (porównaj wzór (**??**))

$$y = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0) + f(x_0).$$

Wyrażenie $\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$ jest tu współczynnikiem kierunkowym. Zbliżając się punktem H do punktu P, czyli przechodząc do granicy przy $x_1 \to x_0$ otrzymujemy **styczną** do wykresu funkcji f w punkcie $(x_0, f(x_0))$. Jeżeli istnieje pochodna funkcji f w punkcie x_0, to mamy

$$\lim_{x\to x} y = \lim_{x\to x} \left(\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x_1 - x_0) + f(x_0) \right) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

Uzasadniliśmy następujące

Twierdzenie 8.1.5. *Jeżeli funkcja f jest różniczkowalna w punkcie x_0 swojej dziedziny, to prosta o równaniu*

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

jest styczną do wykresu funkcji w punkcie $(x_0, f(x_0))$.

Z drugiej strony:

Twierdzenie 8.1.6. *Jeżeli funkcja f jest ciągła w punkcie x_0 i istnieje taka liczba $c \in \mathbb{R}$, że prosta o równaniu*

$$y = f(x_0) + c(x - x_0)$$

jest styczną do wykresu funkcji f w punkcie x_0, to funkcja f jest w tym punkcie różniczkowalna oraz $f'(x_0) = c$.

Jak później zobaczymy, pochodne są narzędziem służącym do dokładnego badania tego jak zachowuje się „wykres" funkcji. Korzystając z pochodnych jesteśmy w stanie przynajmniej naszkicować wykres funkcji $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, włącznie z funkcjami zadanymi względnie skomplikowanymi równaniami. Pomaga nam to określić zachowanie funkcji. Kiedy funkcja rośnie, maleje, gdzie osiąga największe wartości, etc. Pochodne mają więc duże znaczenie praktyczne.

Definicja 8.1.7. Rozważmy krzywą, będącą wykresem funkcji o równaniu $y = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Prostą prostopadłą do prostej stycznej w punkcie $x_0 \in \mathbb{R}$, przechodzącą przez punkt x_0, nazywamy **normalną** do krzywej.

Obserwacja. Normalna do krzywej $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = f(x)\}$ w punkcie (x_0, y_0) ma równanie

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0).$$

8.2 Różniczka funkcji jednej zmiennej

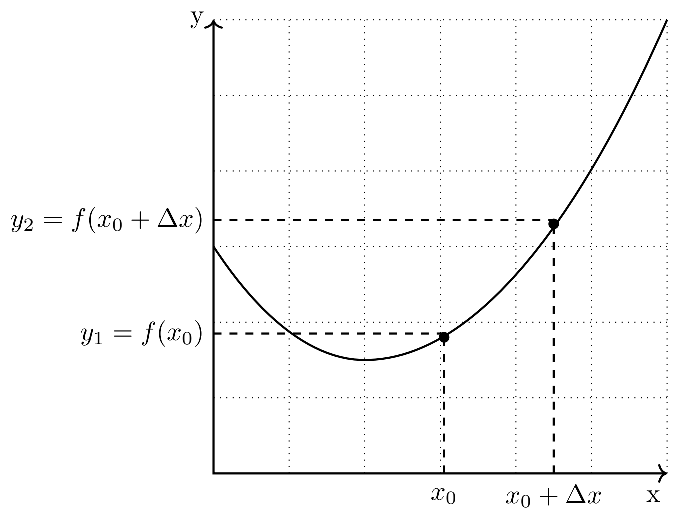
Definicja 8.2.1 (Różniczka funkcji rzeczywistej jednej zmiennej)**.** Różniczką w punkcie $x_0 \in (a, b)$ funkcji $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ różniczkowalnej (w punkcie x_0) nazywamy wyrażenie $f'(x_0)\Delta x$ i oznaczamy $\mathrm{d}f_x(x_0, \Delta x)$. Czyli

$$\mathrm{d}f_x(x_0, \Delta x) = f'(x_0)\Delta x$$

Tradycyjnie różniczkę oznacza się jako $\mathrm{d}f$ lub $\mathrm{d}y$ i wtedy piszemy

$$\mathrm{d}f = \mathrm{d}y = f'(x_0)\Delta x$$

Rozważać będziemy dowolną funkcję różniczkowalną f. Ustalmy dowolny punkt $x_0 \in D_f$ oraz rozważmy przyrost Δx zmiennej x w okolicy x_0. Tzn. x wyraża się: $x = x_0 + \Delta x$.



Rysunek 8.1: Przyrost Δy zależy od przyrostu Δx.

Z powyższego wykresu widzimy, że dla ustalonego przyrostu Δx ustalonego argumentu x_0 odpowiadająca im zmiana (przyrost) argumentu y wynosi $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$:

$x_0 + \Delta x - x_0 = \Delta x$ - długość przedziału $[x_0, x_0 + \Delta x]$ w którym rozpatrujemy zachowanie funkcji f.

$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = y_2 - y_1 = \Delta y$ - o tyle zmienia się y w przedziale $[x_0, x_0 + \Delta x]$.

Wyrażenie

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

nazywamy ilorazem różnicowym (i czasem oznaczamy też np. $\frac{\Delta f}{\Delta x}$. Zauważmy, że jeżeli oznaczamy $x = x_0 + \Delta x$ to mamy

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{x_0 + \Delta x - x_0} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Przechodząc do granicy otrzymujemy pochodną, zatem mamy inny zapis definicji 8.1.1:

(8.2)
$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x)}{\Delta x_0}.$$

Ta postać definicji bywa często wygodniejsza w rachunkach.

W starszych podręcznikach można zetknąć się z następującym zapisem różniczki.

$$\mathrm{d}y = f'(x_0)\,\mathrm{d}x.$$

Niegdyś pochodną próbowano zdefiniować przy pomocy różniczek (nie różniczkę przy pomocy pochodnej jak właśnie to czynimy) jednak rozumiejąc różniczkę w zupełnie inny sposób: jako **nieskończenie małą** zmianę (przyrost) danej zmiennej. Pochodną rozumiano jako iloraz różniczek zmiennej zależnej y i zmiennej wolnej x funkcji f.

Jak wspominaliśmy, wciąż stosuje się zapis

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Jest on spotykany w fizyce, inżynierii a także w pewnych działach matematyki. Symbol $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ na oznaczenie pochodnej wprowadził Leibniz, rozumiejąc go jako dosłowny iloraz dwóch "różniczek" rozumianych jako właśnie "nieskończenie małe" - "infinitezymalne" przyrosty Δy, Δx. W XVII-XVIII wieku nie operowano jeszcze ścisłym pojęciem granicy!

Niestety próby ścisłego zdefiniowania różniczki prowadziły do licznych sprzeczności logicznych i zakończyły się fiaskiem.

My jednak możemy spróbować tradycyjny zapis uzasadnić następująco

$$\mathrm{d}x \stackrel{\text{def}}{=} (x)'\Delta x = 1 \cdot \Delta x = \Delta x,$$

gdzie x rozumiemy jako funkcję identycznościową $x \mapsto x$. Wcześniej już pokazaliśmy, że pochodna takiej funkcji jest funkcją stale równą jeden. Możemy też stąd przyjąć, że pochodną daje się wyrazić jako iloraz:

$$f'(x) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}.$$

Podkreślmy jeszcze raz, że powyższa równość to co najwyżej **tożsamość** wynikająca z definicji **różniczki** a nie **definicja** pochodnej.

Przykład 60. Weźmy funkcję wyznaczoną przez równanie $y = f(x) = \sin^2(x)$. Obliczmy pochodną f' funkcji f:

$$\frac{\sin^2(x+\Delta x) - \sin^2(x)}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x}\left((\sin(x)\cos(\Delta x) + \sin(\Delta x)\cos(x))^2 - \sin^2 x \right) =$$

$$= \frac{1}{\Delta x}\left(\sin^2(x)\cos^2(\Delta x) + 2\sin(x)\sin(\Delta x)\cos(x)\cos(\Delta x) + \sin^2(\Delta x)\cos^2(x) - \sin^2 x \right)$$

Zauważmy, że

$$\lim_{\Delta x \to 0} \underbrace{\frac{\sin(\Delta x)}{\Delta x}}_{\substack{\downarrow \\ 1}} \underbrace{\cos(\Delta x)}_{\substack{\downarrow \\ \cos(0)=1}} 2\sin(x)\cos(x) = 2\sin(x)\cos(x).$$

Pozostałe składniki dążą do zera:

$$\frac{1}{\Delta x}\left(\sin^2(x)\cos^2(\Delta x) + \sin^2(\Delta x)\cos^2(x) - \sin^2 x \right) =$$

$$= \frac{1}{\Delta x}(\sin^2 x \underbrace{(\cos^2(\Delta x) - 1)}_{\substack{\| \\ \sin^2(\Delta x) \\ \text{(jedynka tryg.)}}} + \sin^2(\Delta x)\cos^2 x) = \frac{\sin^2(\Delta x)}{\Delta x}\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right) =$$

$$= \frac{\sin(\Delta x)}{\Delta x}\sin(\Delta x) \stackrel{\Delta x \to 0}{\longrightarrow} 1 \cdot \sin(0) = 0.$$

Wszystkie poniższe równości są prawdą w świetle przyjętych oznaczeń i definicji i przeprowadzonych powyżej rachunków:

$$y' = f'(x) = (\sin^2 x)' = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\sin^2(x)\right) = 2\sin(x)\cos(x).$$

8.3 Podstawowe reguły i przykłady różniczkowania:

W ostatnim przykładzie widzieliśmy, że obliczanie pochodnych z definicji może być nader uciążliwe. A obliczaliśmy pochodną bardzo prostej funkcji $x \mapsto \sin^2 x$. Istnieje niewielki zestaw rachunkowych własności pochodnych, które pozwalają obliczać pochodne będące złożeniem, sumą bądź różnicą, ilorazem i iloczynem funkcji, których pochodne już znamy, bez korzystania z definicji pochodnych. Istnieje też wiele „standardowych pochodnych". Znajomość wzorów na te pochodne (lub tablica takowych pod ręką) i tych podstawowych reguł rachunkowych jest podstawą w posługiwaniu się pochodnymi.

Twierdzenie 8.3.1. *Niech $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ będdzie funkcją różniczkowalną a $c \in \mathbb{R}$ dowolną stałą. Wtedy*

$$(c \cdot f)' = c \cdot f'.$$

Dowód. Oczywisty - z definicji i własności granic. □

Twierdzenie 8.3.2. *Niech $f, g\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ będą funkcjami różniczkowalnymi. Wtedy*

$$(f+g)' = f' + g'.$$

Dowód. Ćwiczenie. □

Z powyższych dwóch twierdzeń wynika, że operacja różniczkowania jest *liniowa*, tzn. $(a \cdot f + b \cdot g)' = a \cdot (f') + b \cdot (g')$ dla dowolnych funkcji różniczkowalnych f, g oraz $a, b \in \mathbb{R}$.

Twierdzenie 8.3.3. *Niech $f, g\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ będą funkcjami różniczkowalnymi oraz $g \neq 0$ $(g(x) \neq 0, x \in (a,b))$. Wtedy*

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}.$$

Dowód. Załóżmy, że funkcje f, g są różniczkowalne w punkcie $x_0 \in (a,b)$. Ponieważ

$$\frac{\frac{1}{g}(x) - \frac{1}{g}(x_0)}{x - x_0} = -\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \cdot \frac{1}{g(x)g(x_0)}.$$

to uwzględniając ciągłość funkcji g w punkcie x_0 otrzymujemy

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = -\frac{g'(x_0)}{((g(x_0))^2}.$$

Z poprzedniego twierdzenia i powyższego wzrou otrzymujemy równość z tezy. □

Twierdzenie 8.3.4 (o pochodnej złożenia funkcji)**.** *Niech g będzie funkcją różniczkowalną w punkcie x_0, a f funkcją różniczkowalną w punkcie $y_0 = g(x_0)$. Wówczas funcja $f \circ g$ jest różniczkowalna w x_0 oraz*

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0). \tag{8.3}$$

Dowód. Obliczamy

$$(f \circ g)'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(f \circ g)(x_0 + \Delta x) - f(f \circ g)(x_0)}{\Delta x}.$$

Niech $\Delta y = g(x_0 + \Delta x) - g(x_0)$. Wtedy $\Delta y \overset{\Delta x \to 0}{\longrightarrow} 0$ oraz

$$(f \circ g)'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(y_0 + \Delta y) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Jeśli dodatkowo założymy, że $\Delta y \neq 0$, to z powyższego mamy

$$(f \circ g)'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(y_0 + \Delta y) - f(y_0)}{\Delta y} \cdot \frac{g(x_0 + \Delta x) - g(x_0)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(y_0 + \Delta y) - f(y_0)}{\Delta y} \cdot g'(x_0) = f'(y_0)g'(x_0) = f'(g(x_0))g'(x_0).$$

więc funkcja $f \circ g$ jest różniczkowalna w x_0 i zachodzi wzór (8.3). □

Powyższe twierdzenie jest znane jako *reguła łańcuchowa.*

Ćwiczenie. Niech $f(x) =$ **TO-DO**

Przykład 61 (Pochodna logarytmiczna). Pochodna funkcji złożonej $y = \ln f(x), x \in D_f$ dow. funkcji f z funkcją $x \mapsto \ln x$ wyraża się w myśl twierdzenia o poch. funkcji złożonej wzorem

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} \ln f(x) = (\ln f(x))' = \frac{f'(x)}{f(x)}. \tag{8.4}$$

Czasem łatwiej jest obliczyć pochodną logarytmiczną niż pochodną f'. Wówczas obliczamy f' z wzoru (8.4) w postaci $f'(x) = f(x) \cdot (\ln f(x))', x \in D_f$.

Twierdzenie 8.3.5 (o pochodnej funkcji odwrotnej)**.** *Jeżeli funkcja f jest ciągła i ściśle monotoniczna w otoczeniu $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ pewnego punktu $x \in D_f$ oraz ma pochodną właściwą $f'(x_0) \neq 0$. Wtedy*

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} \tag{8.5}$$

gdzie $y_0 = f(x_0)$ (czyli $x_0 = f^{-1}(y_0)$).

Podstawowe pochodne: Znając już nasze reguły rachunkowe, możemy przytoczyć podstawowe pochodne:

$$(x^a)' = a \cdot x^{a-1}, a \in \mathbb{R} \tag{8.6}$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}, x \neq 0 \tag{8.7}$$

$$(a^x)' = a^x \ln a, a \in \mathbb{R} \tag{8.8}$$

$$(e^x)' = e^x \tag{8.9}$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a} \tag{8.10}$$

$$(\sin x)' = \cos x \tag{8.11}$$

$$(\cos x)' = -\sin x \tag{8.12}$$

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x} \tag{8.13}$$

$$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} \tag{8.14}$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \tag{8.15}$$

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \tag{8.16}$$

$$(\operatorname{arctg})' = \frac{1}{1+x^2} \tag{8.17}$$

$$(\operatorname{arcctg})' = -\frac{1}{1+x^2} \tag{8.18}$$

Uzasadnimy, że

$$\frac{\mathrm{d}(a^x)}{\mathrm{d}y} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} a^x = (a^x)' = a^x \ln a.$$

Lemat 8.3.6.

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

Dowód. Podstawmy $e^x - 1 = \frac{1}{t}$. Wtedy $x = \ln\left(1 + \frac{1}{t}\right)$ a ponadto przy $t \to \pm\infty$, x dąży do zera i otrzymujemy

$$\lim_{t \to \pm\infty} \frac{1 + \frac{1}{t} - 1}{\ln\left(1 + \frac{1}{t}\right)} = \lim_{t \to \pm\infty} \frac{1}{t \ln\left(1 + \frac{1}{t}\right)} = \lim_{t \to \pm\infty} \frac{1}{\ln\left(1 + \frac{1}{t}\right)^t} =$$

$$= \frac{1}{\ln\left[\lim\limits_{t \to \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t\right]} = \frac{1}{\ln e} = 1.$$

□

Mamy

$$\lim_{h \to 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = a^x \lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h}.$$

Zauważmy, że $a^h = e^{h\ln a}$. Zatem

$$\lim_{h\to 0}\frac{e^{h\ln a}-1}{h} = \ln a \lim_{h\to 0}\frac{e^{h\ln a}-1}{h\ln a}.$$

Podstawmy $t = h\ln a$, wtedy $t \to 0$ i z poprzedniegp lematu

$$\ln a \cdot \lim_{t\to 0}\frac{e^t - 1}{t} = \ln a \cdot 1 = \ln a.$$

Zatem

$$(a^x)' = a^x \ln a.$$

Teraz wystarczy przyjąć $a = e$ i mamy, że $(e^x)' = e^x$ - i liczba e jest jedyną taką liczbą, dla której pochodna funkcji wykładniczej jest równa wyjściowej funkcji. Można też było skorzystać ze wzoru (6.3).

Niech $f(x) = \ln x$. Zauważmy, że traktując w tym wzorze x jako funkcję identycznościową, możemy sztucznie potraktować to wyrażenie jako złożenie funkcji identycznościowej $x \mapsto x$ z funkcją $x \mapsto \ln x$ i zastosować regułę łańcuchową. Porównaj tw. 8.3 i wzór (8.4) z przykładu do twierdzenia. Mamy zatem

$$(\ln x)' = \frac{x'}{x} = \frac{1}{x}.$$

Pamiętamy, że policzyliśmy już pochodną $(x)' = 1$.

Dalej niech $f(x) = x^a,\ a \in \mathbb{R}$. Stosując ponownie wzór (8.4) możemy otrzymać, że

$$(x^a)' = x^a(a\ln x)' = ax^a\frac{1}{x} = ax^{a-1}.$$

(zauważmy, że proponowaliśmy jako ćwiczenie wykazać prawdziwość powyższego wzoru, dla a naturalnych - wciąż po można się tego podjąć. Ponadto z tego wzoru wynika, że $(x)' = (x^1)' = 1 \cdot x^{1-1} = 1 \cdot x^0 = 1 \cdot 1 = 1$.) Teraz niech $f(x) = a^x$. Skorzystamy z twierdzenia 8.3.5. Jeżeli $y = f(x)$, to $f^{-1}(y) = \dfrac{\ln y}{\ln a}$ - wystarczy zlogarytmować obustronnie równanie $y = f(x)$:

$$y = a^x$$

$$\ln y = \ln a^x = x\ln a$$

$$x = \frac{\ln y}{\ln a} = f^{-1}(y).$$

Zatem

$$f'(x) = \frac{1}{(f^{-1}(y))'}.$$

$$(a^x)' = \frac{1}{\left(\frac{\ln y}{\ln a}\right)'} = y\ln a.$$

Ostatnia równość wynika z tego, że $(\frac{\ln y}{\ln a})' = \frac{1}{\ln a}\cdot(\ln y)' = \frac{1}{\ln a}\cdot\frac{1}{y}$[2] Zauważmy jeszcze, że $y = a^x$ a więc $y\ln a = a^x\ln a$ i ostatecznie $(a^x)' = a^x\ln a$.

[2] $\ln a$ jest po prostu stałą, gdyż a jest ustalone a nie jest żadną zmienną, natomiast pokazaliśmy już, że $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ dla zmiennej x. Tutaj zmienną było po prostu y.

Pochodne funkcji trygonometrycznych.

$$(\sin x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x+\Delta x) - \sin(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2}{\Delta x} \sin\left(\frac{x+\Delta x - x}{2}\right) \cos\left(\frac{x+\Delta x + x}{2}\right) =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2}{\Delta x} \sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right) \cos\left(\frac{x+\Delta x + x}{2}\right) = \lim_{\Delta x \to 0} \underbrace{\frac{\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\frac{\Delta x}{2}}}_{\downarrow \atop 1} \cos\left(\frac{2x+\Delta x}{2}\right) =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \cos(x + \underset{\underset{0}{\downarrow}}{\frac{\Delta x}{2}}) = \cos x \quad \text{(ostatnia równość z ciągłości funkcji } \cos.)$$

Analogicznie obliczamy pochodną funkcji cos (ćwiczenie). Pozostaje obliczyć tg' i ctg'.

Pochodne funkcji cyklometrycznych. Skorzystamy z twierdzenia o pochodnej funkcji odwrotnej. Funkcja $\arcsin\colon (-1,1) \to \left(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi\right)$ jest funkcją odwrotną funkcji

$$\sin\big|_{\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)}$$

czyli obcięcia funkcji $\sin\colon \mathbb{R} \to\colon (-1,1)$. Zatem niech $y = \arcsin x$ i ze wzoru 8.3.5:

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \ \big(x = \sin y \text{ skoro } y = \arcsin x!\big)$$

przy czym $\cos y > 0$, ponieważ pamiętamy, że $y \in \left(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi\right)$ i z tego samego powodu pozwalamy sobie dla uproszczenia napisać $\sin y$ zamiast $\sin\big|_{\left(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi\right)}(y)$. Analogicznie otrzymamy pozostałe wzory. Np.

$$(\arctan x)' = \frac{1}{(\mathrm{tg}\, y)'} = \cos^2 x = \frac{1}{1+\mathrm{tg}^2 y} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Ciekawe przypadki.

Przykład 62. Rozważmy funkcję $f\colon \mathbb{R} \to [0,+\infty)$ daną wzorem $f(x) = |x|$. Funkcja f nie jest różniczkowalna w punkcie $x = 0$:

$$f'(0+) = \lim_{x\to 0+} \frac{|x|-|0|}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{x} = 1.$$

$$f'(0-) = \lim_{x\to 0-} \frac{|x|-|0|}{x-0} = \lim_{x\to 0-} \frac{-x}{x} = -1. \text{Gdyż } x < 0 \text{ gdy } x \to 0- .$$

Zatem $f'(0+) \neq f'(0-)$ czyli pochodna funkcji f w zerze nie istnieje.

Zobaczmy, co się dzieje, gdy $x \neq 0$. Niech najpierw $x > 0$, to wtedy możemy obliczyć $(f\big|_{(0,+\infty)})' = (|x|)' = (x)' = 1$. Dla $x < 0$ mamy funkcję $f\big|_{(-\infty,0)}$ i jej pochodną: $(|x|)' = (-x)' = -1$.

$$\text{W ten sposób możemy przyjąć, że } (|x|)' = \frac{\mathrm{d}|x|}{\mathrm{d}y} = \begin{cases} 1, & \text{dla } x > 0; \\ -1, & \text{dla } x < 0. \end{cases}$$

Zauważmy jeszcze, że
$$\frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1, & \text{dla } x > 0; \\ -1, & \text{dla } x < 0. \end{cases}$$

Możemy więc przyjąć:
$$\boxed{(|x|)' = \frac{|x|}{x}, \text{ dla } x \neq 0.}$$

Przykład 63. Obliczymy $(x^x)'$. Przyjmijmy $f(x) = x^x$, $x \in \mathbb{R}$.
$$x^x = e^{\ln x^x} = e^{x \ln x}$$

$$(x^x)' = (e^{x \ln x})' = e^{x \ln x}(x \ln x)' = x^x(x \ln x)' =$$
$$= x^x \left(\ln x + x\frac{1}{x}\right) = x^x(\ln x + 1).$$

Ćwiczenie. Obliczyć pochodną funkcji f danej wzorem $f(x) = x^{x^x}$, $x \in \mathbb{R}$.

8.4 Pochodna w badaniu przebiegu zmienności funkcji

Pochodne są w istocie narzędziem służącym głównie badaniu *przebiegu zmienności* funkcji, tj. jej *monotoniczności* w danych podzbiorach dziedziny, czy potocznie mówiąc: „kształtu” jej wykresu.

Definicja 8.4.1. Ustalmy $x_0 \in \mathbb{R}$. Na „prostej rzeczywistej”, tj. zbiorze $\mathbb{R}$ otoczenie $K(x_0, \varepsilon)$ punktu x_0 jest przedziałem postaci $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$. *Lewostronnym sąsiedztwem* punktu $x_0 \in \mathbb{R}$ o promieniu $\varepsilon > 0$ nazwiemy przedział $(x_0 - \varepsilon, x_0)$. *Prawostronnym sąsiedztwem* punktu $x_0 \in \mathbb{R}$ o promieniu $\varepsilon > 0$ nazwiemy przedział $(x_0, x_0 + \varepsilon)$. *Sąsiedztwem* $U(x_0, \varepsilon)$ nazwiemy przedział $K(x_0, \varepsilon) \setminus \{x_0\}$.

Monotoniczność funkcji.

Definicja 8.4.2. Mówimy, że funkcja f przechodząc przez punkt $x_0 \in D_f$:

- **rośnie** gdy w pewnym otoczeniu punktu x funkcja f jest rosnąca;
- **maleje** gdy w pewnym otoczeniu punktu x funkcja f jest malejąca.

Zatem moglibyśmy na przykład powiedzieć, że funkcja maleje (w dotychczasowym rozumieniu, patrz monotoniczność funkcji 3.2.14) *w przedziale* (a, b), gdy *maleje przechodząc przez każdy punkt* $x_0 \in (a, b)$.

Twierdzenie 8.4.3. *Niech funkcja f ma w pewnym otoczeniu punktu $x_0 \in D_f$ pochodną skończoną. Jeśli*

- $f'(x_0) > 0$, *to funkcja f przechodząc przez punkt x_0 rośnie.*
- $f'(x_0) < 0$, *to funkcja f przechodząc przez punkt x_0 maleje.*

Dowód. Rozpatrzymy przypadek, gdy $f'(x_0) > 0$.

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0, \text{ zatem można znaleźć takie otoczenie } (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

punktu x_0, w którym przy $x \neq x_0$:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0.$$

Niech najpierw $x_0 < x < x_0 + \delta$, tak że $x - x_0 > 0$. Z powyższej nierówności wynika wtedy, że $f(x) - f(x_0) > 0$, czyli $f(x) > f(x_0)$. Analogicznie, jeżeli $x_0 - \delta < x < x_0$ i $x - x_0 < 0$, to mamy, że $f(x) > f(x_0)$. Koniec dowodu. □

Definicja 8.4.4. Mówimy, że funkcja $f \colon I \to \mathbb{R}$ ($I \subseteq \mathbb{R}$ - przedział) ma w punkcie $x_0 \in I$:

1. **minimum lokalne**, jeżeli istnieje takie otoczenie U_{x_0} punktu x_0, że

$$f(x_0) \leqslant f(x), \ x \in U_{x_0} \cap I,$$

2. **maksimum lokalne**, jeżeli istnieje takie otoczenie U_{x_0} punktu x_0, że

$$f(x_0) \geqslant f(x), \ x \in U_{x_0} \cap I.$$

Czyli minimum/maksimum to wartość funkcji w punkcie spełniającym odpowiednią z powyższych własności. Ponadto, jeżeli nierówności w obydwu definicjach zastąpimy nierównościami ostrymi a otoczenie U_{x_0} sąsiedztwem $U_{x_0} \setminus \{x_0\}$, to powiemy, że dane minimum/maksimum jest **właściwe**.

Warto jeszcze wspomnieć, że największy element w zbiorze maksimów lokalnych nazywa się, całkiem logicznie, **maksimum globalnym** lub po prostu wartością największą funkcji f. Analogicznie określa się **minimum globalne** a punkt który jest globalnym maksimum/minimum nazywa się **ekstremum globalnym**.

Ćwiczenie. Udowodnić, że zbiór ekstremów funkcji ciągłej o wartościach rzeczywistych jest co najwyżej przeliczalny.

Lemat 8.4.5 (Fermata)**.** *Niech $f \colon [a, b] \to \mathbb{R}$ osiąga w pewnym $x_0 \in (a, b)$ minimum lub maksimum lokalne oraz istnieje pochodna funkcji f w tym punkcie. Wtedy $f'(x_0) = 0$.*

Dowód. Niech na przykład f osiąga w punkcie c maksimum lokalne. Załóżmy, że byłoby $f'(c) \neq 0$. Wtedy albo $f'(c) > 0$ i wtedy, jeśli $x > c$ jest dostatecznie bliskie c, to $f(x) > f(c)$, albo $f'(c) < 0$ i wtedy, jeśli $x < c$ jest dostatecznie bliskie c, to $f(x) > f(c)$. W obu wypadkach mamy sprzeczność, bo $f(c)$ nie może być wtedy największą wartością funkcji f w przedziale $[a, b]$. □

Twierdzenie 8.4.6 (Rolle'a)**.** *Niech $f \colon [a, b] \to \mathbb{R}$ będzie ciągła w przedziale domkniętym $[a, b]$ oraz różniczkowalna w przedziale (a, b). Jeżeli $f(a) = f(b)$, to istnieje taki punkt $c \in (a, b)$, że $f'(c) = 0$.*

Dowód. Z ciągłości funkcji f w przedziale $[a, b]$ na mocy twierdzenia 7.2.29 Weierstrassa przyjmuje ona wartości najmniejszą $f(\underline{x})$ i największą $f(\overline{x})$ w tym przedziale. Rozpatrzmy dwa przypadki:

1. $f(\underline{x}) = f(\overline{x})$. Wtedy w przedziale $[a, b]$ funkcja f zachowuje stałą wartość: $f(\underline{x}) \leqslant f(x) \leqslant f(\overline{x}), x \in [a, b]$ i $f(\underline{x}) = f(\overline{x})$. Stąd $f'(x) = 0$ w całym przedziale, a za c możemy przyjąć dowolny punkt z przedziału (a, b).

2. $f(\underline{x}) < f(\overline{x})$. Wiemy, że funkcja osiąga obydwie te wartości, ponieważ jednak $f(a) = f(b)$, to z ciągłości choćby jedna z nich jest osiągnięta w pewnym punkcie $c \in (a, b)$. W takim razie z lematu 8.4.5 Fermata wynika, że $f'(c) = 0$.

□

Geometrycznie powyższe twierdzenie oznacza, że jeżeli skrajne rzędne krzywej $y = f(x)$ są równe, to na krzywej znajdzie się punkt, w którym styczna jest równoległa do osi Ox.

Przykład 64. Pokażemy, że

8.5 Wypukłość funkcji

Niemiecki matematyk, Hermann Minkowski stwierdził „interesuje mnie wszystko, co jest wypukłe". Przyjrzyjmy się zatem temu, co w matematyce znaczy „wypukłość" i komplementarnie „wklęsłość".

Niech X będzie przestrzenią liniową (wektorową) nad ciałem liczb rzeczywistych.

Definicja 8.5.1. Zbiór $W \subseteq X$ nazywamy wypukłym, gdy

$$\forall_{x,y \in W} \forall_{\substack{\alpha,\beta \geqslant 0 \\ \alpha+\beta=1.}} \ \alpha x + \beta y \in W.$$

Oznacza to po prostu, że dla dowolnych dwóch punktów $x, y \in W$ odcinek $\overline{xy}$ zawiera się w zbiorze W.

Twierdzenie 8.5.2. *Przekrój dowolnej rodziny zbiorów wypukłych jest zbiorem wypukłym.*

Dowód. Niech $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{P}(X)$ będzie dowolną rodziną zbiorów wypukłych. Ustalmy $x, y \in \bigcap \mathcal{R}$. Wtedy dla każdego $R \in \mathcal{R}$ i dowolnych $\alpha, \beta \geqslant 0$ mamy $\alpha x + \beta y \in R$, gdyż R jest wypukły z założenia. Z dowolności R wnosimy, że $\alpha x + \beta y \in \bigcap \mathcal{R}$. Zatem przekrój ten jest wypukły. □

Definicja 8.5.3. Niech $W \subseteq \mathbb{R}$ będzie zbiorem wypukłym. Funkcję $f\colon W \to \mathbb{R}$ nazywamy **wypukłą**, gdy dla dowolnych $x, y \in W$ i $\alpha, \beta \geqslant 0$ takich, że $\alpha + \beta = 1$ zachodzi nierówność

$$f(\alpha x + \beta y) \leqslant \alpha f(x) + \beta f(y).$$

Jeżeli powyższa nierówność jest ostra, to mówimy, że f jest *ściśle wypukła.*

Podstawiając $\alpha = \lambda$, $\beta = (1 - \lambda)$, mamy że funkcja f jest wypukła, gdy dla dow. $\lambda \in (0, 1)$ zachodzi $f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leqslant \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$.

Uwaga 8.5.4. Jeżeli odwrócimy nierówność w powyższej definicji, to dostaniemy definicję funkcji „wklęsłej".

Twierdzenie 8.5.5. *Dowolna funkcja $f\colon I \to \mathbb{R}$ wypukła ($I \subseteq \mathbb{R}$ - przedział) spełnia następujący warunek*

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leqslant \frac{f(x) + f(y)}{2}, \ x, y \in I \tag{8.19}$$

Dowód. f jest wypukła, więc: $f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leqslant \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$, dla dowolnego $\lambda \in (0, 1)$. Wystarczy podstawić $\lambda = \frac{1}{2}$. □

Nierówność 8.19 nazywamy **nierównością Jensena**. Jest to przykład nierówności funkcyjnej. Dla funkcji wklęsłej otrzymamy analogiczne twierdzenie zmieniając kierunek znaku nierówności w 8.19.

Przy pomocy nierówności Jensena można wyprowadzić wiele bardzo ważnych nierówności, wykorzystywanych w różnych działach matematyki.

Ćwiczenie. Ustalmy liczby $t_1, t_2, \ldots, t_n \in [0,1]$ takie, że $t_1, \ldots t_n = 1$. Udowodnić, że dla dowolnego przedziału $I \subseteq \mathbb{R}$ i funkcji wypukłej $f\colon I \to \mathbb{R}$ prawdziwa jest uogólniona nierówność Jensena:

$$f\left(\sum_{k=1}^{n} t_k x_k\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n} t_k f(x_k),\ x_1, \ldots, x_n \in I.$$

Napisać jak wygląda powyższa nierówność dla $t_1 = t_2 = \ldots = t_n = \frac{1}{n}$.

8.5.1 Pochodne w badaniu wypukłości funkcji

Wprost z definicji (i interpretacji geometrycznej) wyukłości funkcji mamy:

Twierdzenie 8.5.6. *Jeżeli $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ jest różniczkowalna na przedziale (a,b), to f jest wypukła, gdy dla każdych $x, x_0 \in (a,b)$ zachodzi nierówność $f'(x_0)(x - x_0) \leqslant f(x) - f(x_0)$.*

Twierdzenie 8.5.7. *Niech $D \subseteq \mathbb{R}$. Funkcja $f\colon D \to \mathbb{R}$ jest [ściśle] wypukła wtedy i tylko wtedy, gdy jest różniczkowalna w zbiorze D i f' jest niemalejąca [rosnąca].*

Stąd wynika kilka oczywistych wniosków:

Twierdzenie 8.5.8. *Funkcja $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ wypukła jest ciągła w (a,b).*

Twierdzenie 8.5.9. *Jeżeli $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ jest dwukrotnie różniczkowalna na przedziale (a,b), to f jest wypukła, gdy dla każdego $x \in (a,b)$ zachodzi $f''(x) \geqslant 0$.*

Punkty przegięcia funkcji:

Definicja 8.5.10. Niech $f\colon D \to \mathbb{R}$ będzie funkcją, $D \subseteq \mathbb{R}$ oraz $x_0 \in D$ będzie takim punktem, że f jest określona w pewnym otoczeniu tegu punktu. Punkt x_0 nazywamy **punktem przegięcia** wykresu funkcji f, jeżeli w sąsiedztwie lewostronnym punktu x_0 funkcja f jest wypukła, a w prawostronnym sąsiedztwie p. x_0 jest odwrotnie wypukła albo na odwrót - wypukła odwrotnie w lewostronnym sąsiedztwie i wypukła w prawostronnym.

Twierdzenie 8.5.11. *Jeżeli funkcja $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ jest klasy C^2, to wykres funkcji f ma w punkcie $x_0 \in (a,b)$ punkt przegięcia wtedy i tylko wtedy, gdy $f''(x_0) = 0$ oraz druga pochodna zmienia znak przechodząc przez punkt x_0.*

8.6 Twierdzenia o wartości średniej

Twierdzenie 8.6.1 (Lagrange'a o wartości średniej)**.** *Niech $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą w przedziale domkniętym $[a,b]$, $a < b$ oraz różniczkowalną w przedziale otwartym (a,b). Wtedy istnieje taki punkt $\xi \in (a,b)$, że dla niego spełniona będzie nierówność*

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Dowód. Zdefinujmy funkcję pomocniczą $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ wzorem

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a).$$

Łatwo zauważyć, że funkcja ta spełnia wszystkie założenia twierdzenia Rolle'a. Rzeczywiście jest ona ciągła w $[a,b]$, jako różnica funkcji ciągłej i funkcji liniowej. W przedziale (a,b) ma ona pochodną skończoną, równą

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Podstawiając pod x kolejno a i b sprawdzamy, że $F(a) = F(b) = 0$, czyli F przyjmuje na końcach przedziału tę samą wartość.
Z twierdzenia Rolle'a wynika więc, że istnieje taki punkt $c \in (a,b)$, że $F'(c) = 0$. Tak więc

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \quad \text{czyli szukane } \xi = c.$$

□

Ćwiczenie. Korzystając z twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej, udowodnić że

$$\sin(x+h) - \sin x = h\cos\xi \quad \text{dla pewnego } x < \xi < x+h.$$

Twierdzenie 8.6.2 (Cauchy'ego o wartości średniej)**.** *Niech $f,g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ będą ciągłe w przedziale domkniętym $[a,b]$ oraz różniczkowalne w przedziale (a,b). Wówczas istnieje takie $\xi \in (a,b)$, że*

$$g'(\xi)\cdot(f(b)-f(a)) = f'(\xi)\cdot(g(b)-g(a)).$$

Dowód. Zdefiniujmy funkcję pomocniczą $\varphi\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ w następujący sposób:

$$\varphi(x) = (f(b)-f(a))g(x) - (g(b)-g(a))f(x), x \in [a,b].$$

φ jest różniczkowalna na (a,b) oraz $h(a) = h(b)$ i z twierdzenia Rolle'a istnieje takie $\xi \in (a,b)$, że $\varphi'(\xi) = 0$. Ale

$$0 = \varphi'(\xi) = (f(b)-f(a))g'(\xi) - (g(b)-g(a))f'(\xi)$$

co kończy dowód. □

Zauważmy, że twierdzenie Lagrange'a jest przypadkiem szczególnym twierdzenia Cauchy'ego: wystarczy w tym drugim położyć za g funkcję identycznościową: $g(x) = x,\ x \in [a,b]$ by otrzymać twierdzenie Lagrange'a.

8.7 Różniczkowalność a ciągłość funkcji

Twierdzenie 8.7.1. *Funkcja $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ różniczkowalna w przedziale (a,b) jest w tym przedziale ciągła.*

Dowód. Rozważmy dowolny $x_0 \in (a, b)$. Zauważmy, że $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} h = f(x_0 + h) - f(x_0)$. Przechodząc do granicy mamy

$$\lim_{h\to 0}(f(x_0 + h) - f(x_0)) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} h = f'(x_0) \cdot \lim_{h\to 0} h = 0$$

Zatem $\lim_{h\to 0}(f(x_0 + h) - f(x_0)) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) = \lim_{h\to 0} f(x_0 + h)$. Dowolny $x \neq x_0$ przedstawiamy jako $x_0 + h$ i wtedy dla $h \to 0$ zachodzi $x \to x_0$. Ostatecznie mamy, że $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$. Z dowolności wyboru $x_0 \in (a, b)$ f jest ciągła w całym przedziale (a, b). □

Twierdzenie odwrotne nie jest prawdziwe.

Jak wspominaliśmy, twierdzenie znane jako tw. Darboux pochodzi od Bolzano. Podamy drugie bardzo ważne twierdzenie - do którego będziemy odnosić sią jako do „drugiego twierdzenia Darboux" dla porządku; ale w literaturze możemy się spotkać po prostu z określeniem „twierdzenie Darboux".

Twierdzenie 8.7.2 (Darboux II)**.** *Niech $f : D \to \mathbb{R}$ będzie funkcją różniczkowalną w przedziale $D \subseteq \mathbb{R}$. Wówczas pochodna f' tej funkcji ma w tym przedziale własność Darboux.*

Dowód. Niech $D \subseteq \mathbb{R}$ będzie przedziałem, a $f : D \to \mathbb{R}$.
Ustalmy $a, b \in D$, $a < b$. Dla dalszych rozważań możemy przyjąć, że $f'(a) \neq f'(b)$. Weźmy teraz punkt y z przedziału $(f'(a), f'(b))$ i zdefiniujmy dwie funkcje $f_a, f_b : D \to \mathbb{R}$ następująco

$$f_a(t) = \begin{cases} f'(a), & \text{gdy } t = a, \\ \frac{f(t)-f(a)}{t-a}, & \text{gdy } t \in D \setminus \{a\}; \end{cases}$$

$$f_b(t) = \begin{cases} f'(b), & \text{gdy } t = b, \\ \frac{f(b)-f(t)}{b-t}, & \text{gdy } t \in D \setminus \{b\}; \end{cases}$$

Zauważmy, że $f_a(a) = f'(a)$, $f_a(b) = f_b(a)$, $f_b(b) = f'(b)$. Zatem element y leży pomiędzy liczbami $f_a(a)$ a $f_a(b)$ lub pomiędzy liczbami $f_b(a)$ a $f_b(b)$. Jeżeli y leży pomiędzy liczbami $f_a(a)$ oraz $f_b(b)$, to ponieważ funkcja f_a jako ciągła ma własność Darboux, więc istnieje taki element $s \in (a, b]$, że $y = f_a(s)$, tj.

$$y = \frac{f(s) - f(a)}{s - a}. \tag{8.20}$$

Z twierdzenia 8.6.1 Lagrange'a o wartości średniej istnieje taki punkt $\xi \in (a, s)$, że

$$\frac{f(s) - f(a)}{s - a} = f'(\xi). \tag{8.21}$$

Z równości 8.20 i 8.21 wynika zatem, że $y = f'(\xi)$ dla pewnej liczby $\xi \in (a, s) \subseteq (a, b)$, co kończy dowód w rozważanym przypadku.
Jeżeli y leży pomiędzy liczbami $f_b(a)$ i $f_b(b)$, to postępujemy analogicznie. □

Ćwiczenie. Udowodnić powyższe twierdzenie, korzystając z lematu 8.4.5 Fermata. Wskazówka: dobrać odpowiednią funkcję pomocniczą.

Twierdzenie 8.7.3. *Niech $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ będzie funkcją różniczkowalną. Wówczas f spełnia warunek Lipschitza ze stałą Lipschitza L wtedy i tylko wtedy, gdy jej pochodna jest ograniczona przez L.*

Dowód. Załóżmy, że f spełnia warunek Lipschitza ze stałą L. Niech $x_0 \in (a,b)$. Wówczas dla $x \in (a,b)$, $x \neq x_0$:

$$\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right| = \frac{|f(x)-f(x_0)|}{|x-x_0|} \leqslant L.$$

Stąd $|f'(x_0)| \leqslant L$. Dla dowodu w drugą stronę załóżmy, że $|f'(x)| \leqslant L$ dla wszystkich $x \in (a,b)$. Niech $x_1, x_2 \in (a,b)$. Możemy przyjąć, że $x_1 < x_2$. Z twierdzenia 8.6.1 Lagrange'a o wartości średniej wynika, że istnieje takie $\xi \in (x_1, x_2)$, że

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1).$$

Ponieważ $|f'(\xi)| \leqslant L$, to

$$|f(x_2) - f(x_1)| = |f'(\xi)||x_2 - x_1| \leqslant L|x_2 - x_1|,$$

i stąd f spełnia warunek Lipschitza ze stałą L. □

Definicja 8.7.4. Definiujemy C^n jako zbiór funkcji mających n-tą pochodną *ciągłą*. Gdy $f \in C^n$, to mówimy, że funkcja f **jest klasy** C^n.
Przyjmujemy też, dla dow. przedziału $D \subseteq \mathbb{R}$:

$$C^n D = \{f\colon D \to \mathbb{R}\colon f \text{ ma } n\text{-tą pochodną ciągłą w przedziale } D\}$$

Jeżeli $n = \infty$, to C^∞ jest zbiorem funkcji nieskończenie wiele razy różniczkowalnych w swojej dziedzinie, a $C^\infty D$ funkcji, których obcięcie do zbioru D jest nieskończenie wiele razy róźcznickowalne.

Przykład 65. $C^2(0,1)$ jest zbiorem wszystkich funkcji $f\colon (0,1) \to \mathbb{R}$ dwukrotnie różniczkowalnych w $(0,1)$ tak, że f'' jest ciągła.

Przykład 66. $\sin, \cos \in C^\infty$.

Przykład 67. Rozważmy funkcję $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ daną wzorem:

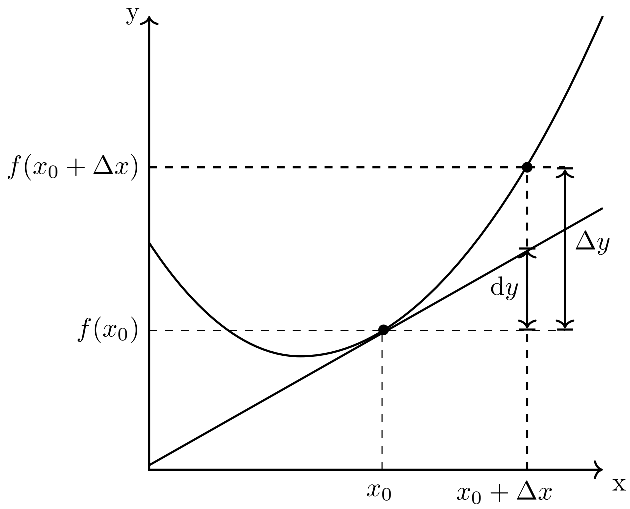
$$f(x) = \begin{cases} \delta(x) & \text{dla } x \in [0,1] \\ \sin x & \text{dla } x \in \mathbb{R} \setminus [0,1] \end{cases}$$

Wtedy $f\big|_{(-\infty,0)} \in C^\infty(-\infty,0)$ oraz $f\big|_{(1,+\infty)} \in C^\infty(1,+\infty)$ natomiast $f\big|_{[0,1]}$ nie jest różniczkowalna.

Twierdzenie 8.7.5. *Jeżeli funkcja f jest klasy $C^2(a,b)$, to punkt $(x_0, f(x_0))$ jest punktem przegięcia wykresu funkcji f wtedy i tylko wtedy, gdy $f''(x_0) = 0$ oraz f'' zmienia znak przy przejściu przez punkt x_0.*

8.8 *Zastosowanie różniczki do rachunków przybliżonych

Różniczkę w punkcie możemy definiować jako część liniową przyrostu funkcji w otoczeniu punktu x_0.



Rysunek 8.2: Porównanie przyrostu Δy wartości funkcji f i przyrostu dy.

Jak widzimy $\Delta y \approx \mathrm{d}y$ dla odpowiednio „małego" przyrostu y.

Twierdzenie 8.8.1. *Niech $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą oraz $x \in (a,b)$ - ustalone.*

$$f(x + \Delta x) \approx f'(x) \cdot \Delta x + f(x). \tag{8.22}$$

Dowód. Równość z tezy możemy inaczej zapisać jako $f(x+\Delta x) - f(x) = f'(x) \cdot \Delta x + o(\Delta x)$, gdzie $\frac{o(\Delta x)}{\Delta x} \xrightarrow[\Delta x \to 0]{} 0$. Przy $\Delta x \to 0$, korzystając z ciągłości funkcji uzyskujemy $f(x + \Delta x) \to f(x)$ oraz x jest ustalone, zatem $f'(x)$ jest stałą i $f'(x) \cdot \Delta x \to 0$.

$$\lim_{\Delta x \to 0} (f(x + \Delta x) - f(x)) = 0 = \lim_{\Delta x \to 0} f'(x) \cdot \Delta x.$$

$\square$

Warto przywyknąć do powyższej tożsamości i różnych wygodnych (równoważnych) sposobów jej wyrażenia:

$$\boxed{f(x + \Delta x) \approx \mathrm{d}f + f(x)}$$

$$\boxed{\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x) \approx f'(x)\Delta x = f'(x)\,\mathrm{d}x.}$$

Przykład 68. Obliczymy w przybliżeniu liczbę $\sqrt{4,3}$. Zgodnie ze wzorem 8.22 mamy

$$\sqrt{x + \Delta x} \approx (\sqrt{x})' \cdot \Delta x + \sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \Delta x + \sqrt{x}.$$

Podstawmy $x = 4$ i $\Delta x = 0,3$. Wtedy

$$\sqrt{x + \Delta x} = \sqrt{4 + 0,3} = \sqrt{4,3} \approx \frac{1}{2\sqrt{4}} \cdot 0,3 + \sqrt{4} = \frac{0,3}{4} + 2 = \frac{3}{40} + 2 = \frac{83}{40}.$$

Zatem $\sqrt{4,3} \approx \frac{83}{40}$. Porównajmy jeszcze wynik z obliczeniami kalkulatora: $\sqrt{4,3} = 2,0736\ldots$, podczas gdy $\frac{83}{40} = 2,075$.

Przykład 69. Pokażemy, że $\operatorname{tg} x \approx x$ dla x bliskich zeru. We wzorze

$$f(x + \Delta x) \approx f'(x)\Delta x + f(x)$$

za punkt x, w pobliżu którego szukamy przybliżenia funkcji tg przyjmujemy 0 oraz przyrost Δx oznaczać będziemy jako x (zmieniamy tylko oznaczenia, zaraz zobaczymy dlaczego).
Mamy $f(0 + x) \approx f'(0) \cdot x + f(0)$ czyli kładąc $f = \operatorname{tg}$ mamy $\operatorname{tg}(0 + x) \approx [\operatorname{tg}(0)]'x + \operatorname{tg}(0)$. Dalej $[\operatorname{tg}(x)]' = \frac{1}{\cos^2(x)}$ oraz $\cos^2(0) = 1$ i $\operatorname{tg}(0) = 0$ zatem

$$\operatorname{tg}(x + 0) = \operatorname{tg}(x) \approx \frac{1}{\cos^2(0)} \cdot x + \operatorname{tg}(0) = 1 \cdot x + 0 = x.$$

Ćwiczenie. Uzasadnić, że $\sin x \approx x$ dla x bliskich zeru.

8.9 *Uwagi o pochodnych cząstkowych i różniczce zupełnej funkcji

Definicja 8.9.1. Pochodną cząstkową funkcji $f\colon D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$ po zmiennej x_k definiujemy jako granicę (jeśli istnieje)

$$\lim_{\Delta x_k \to 0} \frac{f(x_1, x_2, \ldots, x_k + \Delta x_k, \ldots, x_n) - f(x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots, x_n)}{\Delta x_k}$$

i oznaczamy jako

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(x_1, \ldots, x_n) \;\text{ lub }\; \frac{\partial f(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_k}$$

Definicja 8.9.2. Różniczką zupełną $\mathrm{d}f(a_1, \ldots, a_n, \Delta a_1, \ldots, \Delta a_n)$ funkcji $f\colon D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$ w punkcie $(a_1, \ldots, a_n)$ nazywamy wyrażenie

$$\frac{\partial f(a_1, \ldots, a_n)}{\partial x_1}\Delta a_1 + \cdots + \frac{\partial f(a_1, \ldots, a_n)}{\partial x_n}\Delta a_n.$$

Ponownie różniczkę zupełną funkcji wielu zmiennych f będziemy często oznaczać po prostu $\mathrm{d}f$. Niech $\overrightarrow{x} = (a_1, \ldots, a_n)$. Przyrost $\overrightarrow{x}$ zapiszemy jako $\Delta\overrightarrow{x} = (\Delta a_1, \ldots, \Delta a_n)$. Wtedy stosujemy zapis $f(a_1, \ldots, a_n) = f(\overrightarrow{x})$. Odpowiadający przyrost wartości Δf funkcji f wyraża się wzorem

$$\Delta f = f(\overrightarrow{x} + \Delta\overrightarrow{x}) - f(\overrightarrow{x}) = \frac{\partial f(\overrightarrow{x})}{\partial x_1}\Delta a_1 + \cdots + \frac{\partial f(\overrightarrow{x})}{\partial x_n}\Delta a_n + o(\Delta\overrightarrow{x}),$$

gdzie $\frac{o(\Delta x)}{\Delta x} \xrightarrow{\Delta x \to 0} 0$. Zatem $f(\overrightarrow{x} + \Delta\overrightarrow{x}) \approx \mathrm{d}f(\overrightarrow{x}, \Delta\overrightarrow{x}) + f(\overrightarrow{x})$. Ponadto, jeżeli przyjmiemy

$$\mathrm{d}f(\overrightarrow{x}) = \left[\frac{\partial f(\overrightarrow{x})}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial f(\overrightarrow{x})}{\partial x_n}\right],$$

to $\mathrm{d}f(\overrightarrow{x}, \Delta\overrightarrow{x}) = \mathrm{d}f(\overrightarrow{x}) \circ \Delta\overrightarrow{x}$, gdzie $\circ$ oznacza zwykły iloczyn skalarny. Mamy postać różniczki zupełnej funkcji analogiczną do równości 8.22.

$$\boxed{f(\overrightarrow{x} + \Delta\overrightarrow{x}) \approx \mathrm{d}f(\overrightarrow{x}) \circ \Delta\overrightarrow{x} + f(\overrightarrow{x})}$$

8.10 Reguła de l'Hospitala

Reguła de l'Hospitala: jeżeli dla pewnego wyrażenia $\frac{f}{g}$ przy przejściu do granicy otrzymujemy symbol nieoznaczony $\left[\frac{0}{0}\right]$ lub $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$, to pod pewnymi warunkami możemy obliczyć pochodne f' i g' i wtedy $\lim \frac{f}{g} = \lim \frac{f'}{g'}$.

Lemat 8.10.1. *Niech $f\colon (0,d) \to \mathbb{R}$ będzie ciągła, istnieje granica $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0$, oraz istnieje pochodna $f'\colon (0,d) \to \mathbb{R}$ funkcji f i jej granica $\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x)$. Wówczas*

$$\lim_{x\to 0+} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0+} f'(x).$$

Dowód. Otóż

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(\lambda x), \text{ gdzie } 0 < \lambda < 1.$$

Jeśli $x \to 0^+$, to $\lambda x \to 0^+$, a zatem

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0^+} f'(x).$$

□

Twierdzenie 8.10.2. *Niech $f, g\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ są ciągłe w całej dziedzinie, oraz*

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^+} g(x) = 0.$$

Dalej, niech istnieją pochodne $f', g'\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ odpowiednio funkcji f i g, $g' \neq 0$ oraz istnieje granica $\lim\limits_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. Wówczas

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Dowód. Zdefiniujmy $f(a) = g(a) = 0$. Oznaczmy $u = f(x)$. Wówczas mamy $x = \varphi(u)$, $f(x) = f(\varphi(x)) = F(u)$,

$$F'(u) = \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Jeżeli $x \to a^+$, to $u \to 0^+$ i na odwrót, zatem

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a^+} \frac{F(u)}{u} = \lim_{x\to a^+} F'(u) = \lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

□

Twierdzenie 8.10.3. *Niech $f, g\colon (a, +\infty) \to \mathbb{R}$ są ciągłe dla $x > a$, oraz $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} g(x) = 0$. Niech ponadto istnieją w (a, ∞) pochodne f', g' funkcji f i g oraz $g' \neq 0$. Wówczas, jeżeli istnieje*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

to

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Dowód. Niech $x = \frac{1}{u}$. Wtedy

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{u\to 0^+} \frac{f(1/u)}{g(1/u)} = \lim_{u\to 0^+} \frac{f'(1/u)(-1/u^2)}{g'(1/u)(-1/u^2)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

□

Uwaga 8.10.4. W twierdzeniu 8.10.3 założenie

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} g(x) = 0$$

można zastąpić założeniem

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} g(x) = \infty.$$

Dowód pomijamy (ćwiczenie).

Przykład 70. Obliczymy $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x}$. Zauważmy, że $\lim\limits_{x\to 0}(e^x - 1) = 0$ oraz $\lim\limits_{x\to 0} x = 0$ zatem nie zastosujemy twierdzeń o arytmetyce granic, gdyż mamy do czynienia z symbolem nieoznaczonym $\left[\frac{0}{0}\right]$. Jednak stosując naszą regułę łatwo dostajemy:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{(e^x - 1)'}{(x)'} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{1} = \lim_{x\to 0} e^x = 1.$$

Przykład 71. Obliczymy (ponownie) granicę $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3 - 1}{x^2 - 1}$. Gdybyśmy wstawili $x = 1$, to otrzymamy symbol nieoznaczony $\left[\frac{0}{0}\right]$. Korzystając z reguły de l'Hospitala:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x^3 - 1)'}{(x^2 - 1)'} = \lim_{x\to 1} \frac{3x^2}{2x} = \frac{3}{2}$$

Zdarza się, że również pochodne przy przejściu do granicy dają nam jeden z wymienionych symboli nieoznaczonych - czasem regułę daje się zastosować *kilka razy* aż pozbędziemy się symbolu nieoznaczonego.

Ćwiczenie. Obliczyć granicę

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin \operatorname{tg} x - \operatorname{tg} \sin x}{\arcsin \arctan x - \arctan \arcsin x}.$$

Rozdział 9

Funkcje hiperboliczne

Definicja 9.0.1. Sinusem hiperbolicznym nazywamy funkcję $\sinh\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ określoną jako

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, x \in \mathbb{R}$$

a **cosinusem hiperbolicznym** funkcję $\cosh\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ określoną jako

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, x \in \mathbb{R}$$

Funkcje te narodziły się w trakcie rozważań geometrycznych, zbiór $\{(\cosh(t), \sinh(t))\colon t \in \mathbb{R}$ jest wykresem (w tej postaci, tzw. parametryzacją) prawej (dodatniej) gałęzi hiperboli o równaniu $x^2 - y^2 = 1$. (o parametryzacji krzywych powiemy trochę w rozdziale o całkowaniu). Oprócz tego używa się funkcji **tangensa hiperbolicznego** tanh i **cotangensa hiperbolicznego** coth danych wzorami $\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$ i $\coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x}$ dla dowolnych $x \in \mathbb{R}$.

Twierdzenie 9.0.2. *Funkcje* sinh, cosh *spełniają nast.* ***tożsamości hiperbolocze***

1. $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$, $x \in \mathbb{R}$;
2. $\cosh 0 = 1$ *i* $\sinh 0 = 0$;
3. $\cosh(-x) = \cosh x$ *i* $\sinh(-x) = -\sinh x$, $x \in \mathbb{R}$;
4. $(\sinh)' = \cosh$ *oraz* $(\cosh') = \sinh$.

Dowód. Proste ćwiczenie. □

Uwaga 9.0.3. Sinus hiperboliczny jest funkcją odwracalną. Rzeczywiście: $(\sinh x)' = \cosh x > 0$ zatem sinh jest f. ściśle monotoniczną $\Rightarrow$ różnowartościową $\Rightarrow$ odwracalną (uwzgl. jeszcze że $D_{\sinh} = R_{\sinh}$. Podobnie cosinus hiperboliczny jest f. odwracalną. Te funkcje odwrotne do sinusa i cosinusa hiperbolicznego nazywane są **funkcjami polowymi** lub funkcjami **area** i bywają w polskiej literaturze oznaczane odpowiednio arcsinh i arccosh, ale np. w literaturze anglojęzycznej przeważnie oznaczane są po prostu jako $\sinh^{-1}$ i $\cosh^{-1}$.

Lemat 9.0.4. *Funkcje odwrotne do funkcji hiperbolicznych spełniają tożsamości:*

$$\sinh^{-1}(y) = \ln\left(y + \sqrt{y^2+1}\right)$$

$$\cosh^{-1}(y) = \ln\left(y + \sqrt{y^2-1}\right)$$

Dowód. Niech $y = \sinh x, x \in \mathbb{R}$ $(x = \sinh^{-1} y)$. Czyli $y = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$. Podstawmy $t = e^x$, wówczas $y = \frac{1}{2}\left(\frac{t-1}{t}\right)$ i stąd mamy równanie $t^2 - 2yt - 1 = 0$, o dwóch rozwiązaniach:

$$t = y \pm \sqrt{y^2+1}$$

Uwzględniając, że $t = e^x > 0$ możemy wziąć $t = y + \sqrt{y^2+1}$ i stąd już logarytmując równość

$$e^x = y + \sqrt{y^2+1}$$

otrzymujemy, że

$$\sinh^{-1} = x = \ln\left(y + \sqrt{y^2+1}\right).$$

Drugą tożsamość z tezy dowodzimy analogicznie (ćwiczenie). □

Twierdzenie 9.0.5. *Pochodzne funkcji odwrotnych do funkcji hiperbolicznych mają postać:*

$$(\sinh^{-1}(y))' = \frac{1}{\sqrt{y^2+1}},$$

$$(\cosh^{-1}(y))' = \frac{1}{\sqrt{y^2-1}}.$$

Dowód. W oparciu o porzedni lemat i reguły różniczkowania - proste ćwiczenie. □

Definicja 9.0.6. Tangensem hiperbolicznym nazywamy funkcję tanh określoną wzorem

$$\tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

Cotangensem hiperbolicznym nazywamy funkcję coth określoną wzorem $\coth x = \dfrac{1}{\tanh x}$.

Twierdzenie 9.0.7. *Zachodzą tożsamości:*

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$$

$$\coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x}$$

Dowód. Łatwe ćwiczenie. □

Rozdział 10

Antypochodna albo inaczej całka nieoznaczona

10.1 Definicja antypochodnej

Definicja 10.1.1. Niech $D \subseteq \mathbb{R}$ będzie przedziałem niezdegenerowanym i $f\colon D \to \mathbb{R}$. Mówimy, że funkcja $F\colon D \to \mathbb{R}$ jest **funkcją pierwotną** funkcji f, jeżeli funkcja F jest różniczkowalna w F oraz

$$F'(x) = f(x), x \in D.$$

Przykład 72. Funkcja $F(x) = 2x,\ x \in \mathbb{R}$ jest funkcją pierwotną funkcji $f(x) = x^2,\ x \in \mathbb{R}$, ponieważ

$$F'(x) = \left(x^2\right)' = 2x,\ x \in \mathbb{R}$$

Przykład 73. Niech $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie dana wzorem $f(x) = 3x - \sin(x)$. Funkcja F dana wzorem $F(x) = x^3 + \cos(x),\ x \in \mathbb{R}$ jest funkcją pierwotną funkcji f.

Uwaga 10.1.2. Jeżeli $F_1, F_2\colon D \to \mathbb{R}$ są funkcjami pierwotnymi funkcji f, to istnieje taka stała $C \in \mathbb{R}$, że

$$F_2(x) = F_1(x) + C, x \in D.$$

Dowód. Rozważmy funkcję $\varphi\colon D \to \mathbb{R}$ określoną wzorem $\varphi(x) = F_2(x) - F_1(x), x \in D$. Wtedy funkcja φ jest różniczkowalna, oraz $\varphi'(x) = F_2'(x) - F_1'(x) = f(x) - f(x) = 0, x \in D$. Zatem funkcja φ jest stała, tzn. istnieje $C \in \mathbb{R}$, że $\varphi(x) = C$ dla każdego $x \in D$. Stąd $F_2(x) = F_1(x) + C, x \in D$. □

Definicja 10.1.3. Jeżeli $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ma funkcję pierwotną, to zbiór wszystkich funkcji pierwotnych funkcji f nazywamy **całką nieoznaczoną** albo **antypochodną** funkcji f i oznaczamy

$$\int f \text{ lub } \int f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Każda funkcja ciągła ma funkcję pierwotną, jednak tylko dla pewnych typów funkcji istnieją ich funkcje pierwotne wyrażające się poprzez funkcje elementarne. Antypochodne funkcji, które nie dają się wyrazić za pomocą funkcji logarytmu, funkcji trygonometrycznych i cyklometrycznych i skończonej ilości podstawowych działań arytmetycznych (dodawanie, możenie, odejmowanie, dzielenie), potęgowania (w tym - pierwiastkowania) nazywamy **całkami nieelementarnymi**. Ważną klasą całek nieoznaczonych, które są nieelementarne tworzą tzw. **całki eliptyczne**. Całkami nieelementarnymi są na przykład całki

$$\int e^{x^2}\,\mathrm{d}x, \quad \int \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x, \quad \int \frac{e^x}{x}\,\mathrm{d}x, \int \frac{1}{\ln x}\,\mathrm{d}x, \int \sqrt{1+x^3}\,\mathrm{d}x.$$

Zauważmy, że wobec uwagi 10.1.2:

$$\int f = \left\{\Phi \in D^{\mathbb{R}} \colon \exists_{C\in\mathbb{R}}\forall_{x\in D}.\ \Phi(x) = F(x) + C\right\} = \{F + C \colon C \in \mathbb{R}\},$$

gdzie $F\colon D \to \mathbb{R}$ jest dowolną funkcją pierwotną funkcji f.
Będziemy często dla uproszczenia pisać:

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C,\ C \text{ - dowolna stała.}$$

lub

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + constans.$$

Przypomnijmy, że $(\ln x)' = \frac{1}{x}$. Funkcja $x \mapsto \ln x$ jest określona tylko dla $x > 0$, podczas gdy funkcja $x \mapsto \frac{1}{x}$ jest określona dla wszystkich x rzeczywistych różnych od zera. Na dla jakich x możemy obliczyć $\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$?

1.) $x > 0$, to oczywiście $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$.

2.) $x < 0$, to wtedy $|x| = -x > 0$ i korzystając z reguły łańcuchowej oraz przykładu 62 możemy obliczyć

$$(\ln|x|))' = \frac{1}{|x|}\left(\frac{|x|}{x}\right)' = \frac{1}{|x|}\cdot\frac{|x|}{x} = \frac{1}{x}.$$

Zatem i w tym przypadku istnieje funkcja pierwotna dla funkcji $x \mapsto \dfrac{1}{x}$.

Do tego oczywiście $\ln|x| = \ln x$ dla $x > 0$. Zatem funkcja $F(x) = \ln|x|, x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ jest funkcją pierwotną funkcji $f(x) = \frac{1}{x}, x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ i stąd:

$$\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln|x| + C,\ x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$$

Opierając się na wzorach podstawowych pochodnych, możemy podać listę "podstawowych" całek, z których można korzystać obliczając całki bardziej złożonych funkcji:

$$\int x^a \,\mathrm{d}x = \frac{1}{a+1} x^{a+1} + C,\ C \in \mathbb{R},\quad \text{dla } a \neq 1 \tag{10.1}$$

$$\int x^{-1} \,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{x} \,\mathrm{d}x = \ln|x| + C,\ C \in \mathbb{R},\ \text{dla } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \tag{10.2}$$

$$\int a^x \,\mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + C,\ C \in \mathbb{R}\ (\text{dla dow. } a \in \mathbb{R}) \tag{10.3}$$

$$\int e^x \,\mathrm{d}x = e^x + C,\ C \in \mathbb{R} \tag{10.4}$$

$$\int a^x \,\mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + C,\ C \in \mathbb{R} \tag{10.5}$$

$$\int \sin x \,\mathrm{d}x = -\cos x + C,\ C \in \mathbb{R} \tag{10.6}$$

$$\int \cos x \,\mathrm{d}x = \sin x + C,\ C \in \mathbb{R} \tag{10.7}$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} \,\mathrm{d}x = -\operatorname{ctg} x + C,\ C \in \mathbb{R} \tag{10.8}$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} \,\mathrm{d}x = \operatorname{tg} x + C,\ C \in \mathbb{R} \tag{10.9}$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} \,\mathrm{d}x = \arctan x + C,\ C \in \mathbb{R} \tag{10.10}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \,\mathrm{d}x = \arcsin x + C,\ C \in \mathbb{R} \tag{10.11}$$

10.2 Własności antypochodnej i twierdzenia o całkowaniu

Twierdzenie 10.2.1 (O liniowości całki)**.** *Niech $f\colon D \to \mathbb{R}$ oraz $g\colon I \to D$ będą funkcjami ciągłymi w przedziale $D \subseteq \mathbb{R}$ a $a, b \in \mathbb{R}$ będą dane. Wówczas*

$$\int (a \cdot f + b \cdot g) = a \cdot \int f + b \cdot \int g,$$

gdzie

$$a \cdot \int f + b \cdot \int g = \{a \cdot F + b \cdot G \colon F' = f \ i\ G' = g\}.$$

Twierdzenie 10.2.2 (O całkowaniu przez podstawienie)**.** *Niech $f\colon D \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą w przedziale $D \subseteq \mathbb{R}$ oraz niech $g\colon I \to D$ będzie funkcją klasy C^1 w przdziale $I \subseteq D$. Wtedy*

$$\int (f \circ g) \cdot g' = \left(\int f\right) \circ g,$$

$$\textit{gdzie}\ \left(\int f\right) \circ g = \left\{F \circ g \colon F \in \int f\right\}.$$

Metoda oparta o powyższe twierdzenie jest podstawą obliczania prostych całek, ale sztuka znajdywania odpowiedniego podstawienia wymaga wpary i doświadczenia. Aby sprawnie opanować tego typu rachunki, warto przeliczyć wiele przykładów.

Przykład 74 (trywialny).

Obliczymy $\displaystyle\int \cos(2x)\,\mathrm{d}x$. Podstawmy $t = 2x$. Wtedy $\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = (2x)' = 2$ i stąd $\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}\,\mathrm{d}t$.

Łatwo obliczamy całkę:

$$\int \cos(2x)\,\mathrm{d}x = \int \cos(t)\frac{1}{2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int \cos(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\sin(t) + C$$

i pamiętając, że $t = 2x$ mamy

$$\int \cos(2x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sin(2x) + C$$

Przykład 75 (łatwy).

$$\text{Obliczymy } \int 2e^{\sin x}\cos x\,\mathrm{d}x.$$

Podstawiamy $t = \sin x$. Stąd $\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \cos x$ czyli $\mathrm{d}t = \cos x\,\mathrm{d}x$. Zatem

$$\int 2e^{\sin x}\cos x\,\mathrm{d}x = 2\int e^t\,\mathrm{d}t + C = 2e^{\sin x} + C.$$

Przykład 76 (trudny).

$$\text{Obliczymy } \int \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}\,\mathrm{d}x. \text{ Podstawmy } t = x + \sqrt{a+x^2}.$$

Wtedy

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = (x + \sqrt{a+x^2})'$$

i dalej

$$\mathrm{d}t = \left(1 + \frac{2x}{2\sqrt{a+x^2}}\right)\mathrm{d}x = \left(1 + \frac{x}{\sqrt{a+x^2}}\right)\mathrm{d}x$$

czyli

$$\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{a+x^2}+x}{\sqrt{a+x^2}}\,\mathrm{d}x.$$

Mamy

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\sqrt{a+x^2}+x}{\sqrt{a+x^2}}\left(\frac{1}{x+\sqrt{a+x^2}}\right)\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln|t| + C = \ln|x + \sqrt{a+x^2}| + C$$

Ćwiczenie. Pokazać, że

$$\int e^{ax}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}e^{ax} + C, \text{ dla } a \in \mathbb{R}.$$

Przykład 77. Pokażemy, że jeżeli $\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C$, to $\int f(ax+b)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$.

Podstawmy $t = ax + b$, to wówczas $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = a$, czyli

$$\frac{1}{a}\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}x.$$

Mamy $f(ax+b)\,\mathrm{d}x = f(t)\frac{1}{a}\,\mathrm{d}t$, czyli

$$\int f(ax+b)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\int f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{a}F(t) + C = \frac{1}{a}F(ax+b) + C.$$

Podstawiając $f(t) = e^t$ i $t = ax$ otrzymujemy rozwiązanie poprzedniego ćwiczenia. A jak wygląda rozwiązanie całki $\int e^{2x+1}\,\mathrm{d}x$? A dla całki $\int \sin(7x+1)\,\mathrm{d}x$?

Ćwiczenie. Udowodnić, że:

1. $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \ln|f(x)| + C$,
2. $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}\,\mathrm{d}x = \sqrt{f(x)} + C$,
3. $\displaystyle\int f'(x)f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}f^2(x) + C$.

Przykład 78. Korzystając z poprzedniego ćwiczenia łatwo sprawdzić, że na przykład

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln|x| + C, \int \frac{2x+1}{x^2+x}\,\mathrm{d}x = \ln|2x+1| + C.$$

Przykład 79. Również łatwo obliczyć całkę:

$$\int \tan x\,\mathrm{d}x = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,\mathrm{d}x = -\int \frac{(\cos x)'}{\cos x}\,\mathrm{d}x = -\ln|\cos x| + C.$$

Przykład 80. Obliczymy całkę $\int \frac{2x+1}{\sqrt{4x+1}}\,\mathrm{d}x$. Podstawiamy $t^2 = 4x+1$ i mamy

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(4x+1) = \frac{4\,\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 2t \implies 4\,\mathrm{d}x = 2t\,\mathrm{d}t,$$

$$t^2 = 4x+1 \implies 2x = \frac{t^2-1}{2}.$$

Czyli

$$\int \frac{2x+1}{\sqrt{4x+1}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\frac{t^2-1}{2}+1}{t}\frac{t}{2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{4}\int (t^2+1)\,\mathrm{d}t =$$
$$= \frac{t^3}{12} + \frac{t}{4} + C = \frac{\sqrt{(4x+1)^3}}{12} + \frac{1}{4}\sqrt{4x+1} + C.$$

Twierdzenie 10.2.3 (O całkowaniu przez części)**.** *Niech $f, g\colon D \to \mathbb{R}$ będą funkcjami klasy C^1 w przedziale $D \subseteq \mathbb{R}$. Wtedy*

$$\int f \cdot g' = f' \cdot g - \int f' \cdot g, \ \textit{gdzie}$$

$$f' \cdot g - \int f' \cdot g = \left\{ f \cdot g - \Psi \colon \Psi \in \int f' \cdot g \right\}.$$

Przykład 81.

$$\int 2x \ln x \,\mathrm{d}x = \int (x^2)' \ln x \,\mathrm{d}x = 2x \ln x - \int x^2 (\ln x)' \,\mathrm{d}x = 2x \ln x - \int x^2 \cdot \frac{1}{x} \,\mathrm{d}x =$$
$$= 2x \ln x - \int x \,\mathrm{d}x = 2x \ln x - \frac{1}{3}x^3 + C$$

Przykład 82.

$$\int \ln x \,\mathrm{d}x = \int 1 \cdot \ln x \,\mathrm{d}x = \int (x)' \cdot \ln x \,\mathrm{d}x = x \ln x - \int x (\ln x)' \,\mathrm{d}x =$$
$$= x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} \,\mathrm{d}x = x \ln x - \int \mathrm{d}x = x \ln x - x + C$$

Przykład 83.

Obliczymy $\int x^2 \sin x \,\mathrm{d}x$. Podstawmy $f'(x) = \sin x, \ g(x) = x^2$. Wtedy

$g'(x) = 2x$ oraz $f(x) = \int f'(x) \,\mathrm{d}x = -\cos x$ - zapominamy na chwilę o stałej.

$$\int x^2 \sin x \,\mathrm{d}x = \cos x \cdot x^2 + \int 2x \cos x \,\mathrm{d}x$$

zatem dalej po prawej stronie występuje całka - nie możemy tego uznać za końcowy wynik. Zatem całkujemy przez części po raz kolejny:

$$\int 2x \cos x \,\mathrm{d}x = 2 \int x (\sin x)' \,\mathrm{d}x = 2 \left(x \sin x - \int (x)' \sin x \,\mathrm{d}x \right) = 2 \left(x \sin x - \int 1 \cdot \sin x \,\mathrm{d}x \right) =$$
$$= 2(x \sin x - (-\cos x)) + C = 2(x \sin x + \cos x) + C.$$

Ostatecznie:

$$\int x^2 \sin x \,\mathrm{d}x = x^2 \cos x + 2(x \sin x + \cos x) + C.$$

Przykład 84 (Całka „pętląca się”).

$$\int e^x \cos x \,\mathrm{d}x = e^x \sin x - \int e^x \sin x \,\mathrm{d}x = e^x \sin x - \left(-e^x \cos x - \int -e^x \cos x \,\mathrm{d}x \right) =$$

$e^x \sin x + e^x \cos x - \int e^x \cos x \,\mathrm{d}x$. - Zauważmy, że oblczanie po raz kolejny całki z

$e^x \cos x$ jest bezcelowe - moglibyśmy tak obliczać w nieskończoność. Możemy jednak dodać do całego róœnania obustronnie $\int e^x \cos x \,\mathrm{d}x$ i wtedy mamy, że

$$2\int e^x \cos x \,\mathrm{d}x = e^x(\sin x + \cos x) + C \Rightarrow \int e^x \cos x \,\mathrm{d}x = \frac{e^x}{2}(\sin x + \cos x) + C$$

Zauważmy, że nie podzieliliśmy C przez 2. Jest to zbyteczne z powodu dowolności stałej (dla stałej $\frac{1}{2}C$ przyjmujemy nową stałą $C := \frac{1}{2}C$ - „połowę" poprzedniej stałej).

Przykład 85 (Całkowanie „tabelkowe”).

Obliczymy teraz $\int x^3 \sin x \,\mathrm{d}x$. Tym razem pokażemy nową sztuczkę. Utwórzmy następującą tabelkę:

Uważamy na znak ↓	Liczymy pochodne	Liczymy całki
$+$	x^3	$\sin x$
$-$	$3x^2$	$-\cos x$
$+$	$6x$	$-\sin x$
$-$	$6x$	$\cos x$
Koniec! →	0	$\sin x$

Rozwiązanie jest pewną sumą 4 iloczynów wyrażeń z tabeli (gdyż piąta pochodna funkcji $x \mapsto x^3$ jest równa zero i wszystkie pozostałe iloczyny się zerują). k-ty składnik tej sumy powstaje przez pomnożenie pochodnej z pierwszej komórki k-tego wiersza z całką z drugiej komórki $(k+1)$-szego(!) wiersza:

$$\int x^3 \sin x \,\mathrm{d}x = -x^3 \cos x + 3x^2 \sin x + 6x \cos x - 6 \sin x + C.$$

Przykład 86 (Iloczyn $e^x \cdot f(x)$).

Obliczymy $\int e^x x^2 \,\mathrm{d}x.$

Uważamy na znak ↓	Liczymy pochodne	Liczymy całki
$+$	x^2	e^x
$-$	$2x$	e^x
$+$	2	e^x
Koniec! →	0	e^x

Zatem: $\int e^x x^2 \,\mathrm{d}x = x^2 e^x - 2x \cdot e^x + 2e^x + C = e^x(x^2 - 2x + 2) + C.$

Przykład 87. Obliczymy, korzystając z tabelki, jeszcze raz całkę

$$\int \ln x \,\mathrm{d}x.$$

znak	pochodne	całki	
$+$	$\ln x$	1	
$-$	$\frac{1}{x}$	x	zauważamy, że $\frac{1}{x} \cdot x = 1$!

Mamy jak poprzednio

$$\int \ln x \,\mathrm{d}x = \ln x \cdot x - \int \left(\frac{1}{x} \cdot x\right) \mathrm{d}x = x \ln x - \int \mathrm{d}x = x \ln x - x.$$

Pułapką w tym zadaniu mogłoby być, gdyby zamiast skorzystać z tego, że dostajemy w pewnym momencie całkę z 1, zaczęlibyśmy liczyć kolejne pochodne i liczyć każdą kolejną całkę niepotrzebnie przez części:

znak	pochodne	całki
$+$	$\ln x$	1
$-$	$\frac{1}{x}$	x
$+$	$-\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{x^2}$
$-$	$\frac{2}{x^3}$	$\frac{6}{x^3}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Ćwiczenie. Obliczyć następujące trzy, proste całki:

$$\text{(a)} \int e^x(x^3-1)\,\mathrm{d}x. \quad \text{(b)} \int \cos^2 x\,\mathrm{d}x. \quad \text{(c)} \int \operatorname{tg} x\,\mathrm{d}x.$$

Ćwiczenie. Na koniec proponujemy do policzenia zestaw prostych całek

$$\int e^x \sin e^x\,\mathrm{d}x \qquad \int x\arctan x\,\mathrm{d}x \qquad \int x\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$$

$$\int \left(\frac{1-x}{x}\right)^2 \mathrm{d}x \qquad \int x^2e^{-x}\,\mathrm{d}x \qquad \int \ln^2 x\,\mathrm{d}x$$

10.3 Całki funkcji wymiernych

Rozkład na ułamki proste:

Przykład 88. Obliczymy całkę $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^4}$. Zauważmy, że

$$\frac{1}{1+x^4} = \frac{1}{2}\left(\frac{1-x^2}{1+x^4} + \frac{1+x^2}{1+x^4}\right).$$

Z liniowości całki wynika, że mamy do policzenia dwie całki: $\int \frac{1-x^2}{1+x^4}\,\mathrm{d}x$ i $\int \frac{1+x^2}{1+x^4}\,\mathrm{d}x$.

Ćwiczenie. Udowodnić, że $\pi < \frac{22}{7}$ dowodząc, że

$$0 < \int_0^1 \frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{22}{7} - \pi.$$

Wzór redukcyjny:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^n} = \frac{1}{(2n-2)(1+x^2)^{n-1}} - \frac{2n-3}{2n-2}\int \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^{n-1}}, \quad n \geqslant 2 \ (n \in \mathbb{N}).$$

10.4 Całki wyrażeń zawierających funkcje trygonometryczne

Podstawienie uniwersalne:

Wzory redukcyjne: Podamy jeszcze kilka wzorów rekurencyjnych, na całki z potęg funkcji trygonometrycznych. Niech $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. Wtedy

$$\int \sin^n x\,\mathrm{d}x = \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2} x\,\mathrm{d}x - \frac{1}{n}\sin^{n-1} x\cos x$$
$$\int \cos^n x\,\mathrm{d}x = \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} x\,\mathrm{d}x - \frac{1}{n}\cos^{n-1} x\sin x$$
$$\int \operatorname{tg}^n x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n-1}\operatorname{tg}^{n-1} x - \int \operatorname{tg}^{n-2} x\,\mathrm{d}x$$

10.5 Całki funkcji niewymiernych

10.5.1 Podstawienia Eulera:

I podstawienie

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = t \pm x\sqrt{a},\ a>0$$

II podstawienie

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = xt \pm \sqrt{c},\ c>0$$

III podstawienie

$$\sqrt{a(x-x_1)(x-x_2)} = |x-x_1|t,\ \Delta>0$$

10.5.2 Metoda współczynników nieoznaczonych:

$$\int \frac{W_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,\mathrm{d}x = (a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0)\sqrt{ax^2+bx+c} + A\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{ax^2+bx+c}}.$$

$$\int \sqrt{ax^2+bx+c}\,\mathrm{d}x = \int \frac{ax^2+bx+c}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,\mathrm{d}x$$

10.6 Funkcje hiperboliczne

Całki funkcji hiperbolicznych

Rozdział 11

Całka oznaczona

11.1 Całka Darboux

Niech $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ograniczoną na $[a,b]$. Wprowadzimy tera szereg oznaczeń, które dla funkcji f tej postaci będą obowiązywać w całym rozdziale. Niech więc

$$m = \inf\{f(x)\colon x \in [a,b]\}$$

$$M = \sup\{f(x)\colon x \in [a,b]\}$$

Mówimy, że $\pi = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$, $n \in \mathbb{N}$ jest podziałem przedziału $[a,b]$, jeżeli

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Zbiór wszystkich podziałów przedziału $[a,b]$ oznaczamy symbolem $\mathcal{P}[a,b]$.

Ustalmy $\pi = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\} \in \mathcal{P}[a,b]$. Oznaczamy

$$m_k = \inf\{f(x)\colon x \in [x_{k-1}, x_k]\}$$

$$M_k = \sup\{f(x)\colon x \in [x_{k-1}, x_k]\}$$

$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1} \text{ dla } k = 1, 2, \ldots, n.$$

Określamy **sumę dolną**

$$\underline{S}(f,\pi) = \sum_{k=1}^{n} m_k \Delta x_k$$

oraz **sumę górną**

$$\overline{S}(f,\pi) = \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta x_k$$

Zauważmy, że

$$\sum_{k=1}^{n} \Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) = x_n - x_0 = b - a$$

oraz $m \leqslant M_k \leqslant M_k \leqslant M$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Zatem $m\Delta x_n \leqslant m_k\Delta x_k \leqslant M_k\Delta x_k \leqslant M\Delta x_n$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Stąd

$$\sum_{k=1}^{n} m\Delta x_k \leqslant \sum_{k=1}^{n} m_k\Delta x_k \leqslant \sum_{k=1}^{n} M_k\Delta x_k \leqslant \sum_{k=1}^{n} M\Delta x_k$$

$$m(b-a) \leqslant \underline{S}(f,\pi) \leqslant \overline{S}(f,\pi) \leqslant M(b-a).$$

Uwaga 11.1.1. Jeżeli $\widetilde{\pi} = \{y_0, y_1, \ldots, y_m\} \in \mathcal{P}[a,b]$ jest **zagęszczeniem podziału** $\pi = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$, tzn.

$$\{x_0, x_1, \ldots, x_n\} \subseteq \{y_0, y_1, \ldots, y_m\},\ n, m \in \mathbb{M};\ n \leqslant m,$$

to

$$\underline{S}(f,\pi) \leqslant \underline{S}(f,\widetilde{\pi}) \leqslant \overline{S}(f,\widetilde{\pi}) \leqslant \overline{S}(f,\pi)$$

Dowód. Dowód przeprowadzimy indukcyjnie względem liczby dodatkowych elementów leżących w zagęszczeniu $\widetilde{\pi}$ przedziału $\pi = \{x_0, \ldots, x_n\}$. Załóżmy, że $\widetilde{\pi} = \pi \cup \{y\}$ dla pewnego $y \in (x_{i-1}, x_i) \subseteq [a,b]$, dla pewnych punktów x_i, x_{i-1} podziału π.

$$m_i(x_i - x_{i-1}) = m_i(x_i - y) + m_i(y - x_{i-1}). \tag{11.1}$$

$$m_i = \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x) \leqslant \widetilde{m}_2(x_i - y) + \widetilde{m}_1(y - x_{i-1}), \tag{11.2}$$

gdzie

$$\widetilde{m}_1 := \inf_{x\in[x_{i-1},y]} f(x),$$
$$\widetilde{m}_2 := \inf_{x\in[y,x_i]} f(x).$$

Zauważmy, że lewa strona równania (11.1) jest składnikiem sumy $\underline{S}(f,\pi)$ a prawa strona nierówności (11.2) składa się ze składników sumy $\underline{S}(f,\widetilde{\pi})$. Zatem

$$\underline{S}(f,\pi) \leqslant \underline{S}(f,\widetilde{\pi}). \tag{11.3}$$

Załóżmy, że dla pewnej liczby $k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant n$ nierówność (11.3) zachodzi dla dowolnego $\widetilde{\pi}$ takiego, że $\widetilde{\pi} = \pi \cup \{y_0, y_1, \ldots, y_k\}$ jest zagęszczeniem przedziału π.

Niech $\overline{\pi} = \pi \cup \{y_0, \ldots, y_k, t\}$ będzie zagęszczeniem przedziału π, tak że $t \in (x_{i-1}, x_i)$ dla pewnego $i \in \{0, \ldots, n\}$. Chcemy pokazać, że

$$\underline{S}(f,\pi) \leqslant \underline{S}(f,\overline{\pi}).$$

[TO-DO]

□

Definiujemy **całkę dolną**:

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \sup\left\{\underline{S}(f,\pi)\colon \pi \in \mathcal{P}[a,b]\right\} = \underline{\int_a^b} f$$

oraz **całkę górną**:

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \inf\left\{\overline{S}(f,\pi)\colon \pi \in \mathcal{P}[a,b]\right\} = \overline{\int_a^b} f$$

Zachodzi nierówność

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x$$

Definicja 11.1.2. Mówimy, że ograniczona funkcja $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ jest **całkowalna w sensie Riemanna** w przedziale $[a,b]$, jeżeli

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x$$

Tę wspólną wartość oznaczamy

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

i nazywamy **całką ozaczoną Riemanna** (albo całką Darboux) dla funkcji f w przedziale $[a,b]$. Piszemy też $f \in \mathcal{R}[a,b]$.

Należy się tu pewien komentarz historyczny: definicję całki Bernhard Riemann podał w 1854 w swojej pracy doktorskiej, a drukiem w czasopiśmie naukowym opublikowano ją w 1868 roku. Podaną przez nas konstrukcję całki podał Jean Darboux w pracy z 1870, a w 1875 wykazał jej równoważność z całką Riemanna w swojej „Rozprawie o teorii funkcji nieciągłych" (w tej samej pracy podał też twierdzenie, które wiążemy z jego nazwiskiem.) Stąd można mówić też o całce Darboux, ale biorąc pod uwagę przełomowy charakter prac Riemanna i równoważność późniejszej konstrukcji, lepiej wydaje się powiedzieć, że podaliśmy konstrukcję całki Riemanna autorstwa Darboux albo wersję Darboux całki Riemanna. Zaletą całki Darboux jest wygoda w niektórych rachunkach i dowodach. Podamy jednak również definicję klasyczną a także czasem będziemy z niej korzystać.

11.2 Klasyczna całka Riemanna

Niech $\pi_n = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ będzie podziałem przedziału $[a,b]$. Określmy średnicę podziału $\operatorname{diam}(\pi_n)$ następująco:

$$\operatorname{diam}(\pi_n) = \max_{k\in\{1,\ldots,n\}} \Delta x_k.$$

Definicja 11.2.1. Ciąg podziałów $(\pi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ nazywamy **normalnym ciągiem podziałów**, jeżeli

$$\lim_{k\to\infty} \operatorname{diam}(\pi_k) = 0.$$

Niech $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ograniczoną.

Definicja 11.2.2. Jeżeli dla dowolnego ciągu normalnego podziałów $(\pi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ przedziału $[a,b]$ oraz dowolnego ciągu punktów pośrednich $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i \in \{1, \ldots, n_k\}$ istnieje granica

$$\text{(R)} \qquad \lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{n_k} f(\xi_i)\Delta x_i$$

to funkcję f nazywamy całkowalną w sensie Riemanna a granicę (R) nazywamy całką Riemanna funkcji f na przedziale $[a,b]$. Czasem będziemy też mówić o **sumie całkowej Riemanna** albo **sumie całkowej średniej**, mając na myśli sumy postaci

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

Czasem będziemy oznaczać taką sumę przez $\sigma_n(f,\pi)$.

Przy ustalonym podziale π przedziału $[a,b]$ łatwo zauważyć, że

$$\underline{S}(f,\pi) \leqslant \sigma_n(f,\pi) \leqslant \overline{S}(f,\pi)$$

Obserwacja. Jeżeli funkcja f jest całkowalna w przedziale $[a,b]$, to

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)\right).$$

11.3 Równoważność całki Riemanna i całki Darboux

Jak już zauważyliśmy, prawdą jest:

Lemat 11.3.1. *Sumy całkowe Riemanna zawsze leżą między odpowiadającymi im sumami górnymi i dolnymi Darboux.*

Twierdzenie 11.3.2. *Definicje całki Riemanna i Darboux są równoważne.*

Dowód. Niech $f\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ będzie funkcją ograniczoną. Załóżmy, że f jest całkowalna w sensie Darboux. Ustalmy ciąg normalny podziałów $(\pi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ przedziału $[a,b]$ i punkty pośrednie $\xi_i, i\in\{1,\ldots,n_k\}$. Mamy

$$\sum_{i=1}^{n_k}\inf\{f(x_i)\colon x\in[x_{i-1},x_i]\}\Delta x_i =$$

$$\underline{S}(f,\pi_k) \leqslant \sum_{i=1}^{n_k} f(\xi_i)\Delta x_i \leqslant \overline{S}(f,\pi_k) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n_k}\sup\{f(x_i)\colon x\in[x_{i-1},x_i]\}\Delta x_i \to \overline{\int_a^b} f.$$

$$\left(\text{i } \sum_{i=1}^{n_k}\inf\{f(x_i)\colon x\in[x_{i-1},x_i]\}\Delta x_i \to \underline{\int_a^b} f\right)$$

Z twierdzenia o trzech ciągach mamy już, że $\displaystyle\sum_{i=1}^{n_k} f(\xi_i)\Delta x_i \to \int_a^b f$

W drugą stronę. Załóżmy, że funkcja f jest całkowalna w sensie Riemanna. Dla dowolnego podziału π

$$\sum_{i=1}^{n_k}\inf\{f(x)\colon x\in[x_{i-1},x_i]\}\Delta x_i \leqslant \sum_{i=1}^{n_k} f(\xi_i)\Delta x_i \leqslant \sum_{i=1}^{n_k}\sup\{f(x)\colon x\in[x_{i-1},x_i]\}\Delta x_i.$$

(*Można dobrać ξ_i aby odległości były dowolnie małe.*)
Jeśli weźmiemy ciąg normalny podziałów $(\pi_k)_{k\in\mathbb{N}}$, to dla każdego k wybieramy takie punkty pośrednie ξ_i, żeby spełniało nierówność

$$\overline{S}(f,\pi_k) - \sum_{i=1}^{n_k} f(\xi_i)\Delta x_i < \frac{1}{k}.$$

Jeżeli $k \to \infty$, to

$$\lim_{k\to\infty}\left(\overline{S}(f,\pi_k) - \sum_{i=1}^{n_k} f(\xi_i)\Delta x_i\right) = 0.$$

Granica $\lim\limits_{k\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n_k} f(\xi_i)\Delta x_i = I$ istnieje z założenia o całkowalności w sensie Riemanna.

Czyli istnieje granica $\lim\limits_{k\to\infty}\overline{S}(f,\pi_k) = \overline{\int_a^b} f = I$. Analogicznie dla dowolnego k dobieramy ξ_i, żeby zachodziło

$$\sum_{i=1}^{n_k} f(\xi_i)\Delta x_i - \underline{S}(f,\pi_k) < \frac{1}{k}.$$

W ten sposób analogicznie otrzymaliśmy $\underline{\int_a^b} f = I$. Ostatecznie $\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f$. □

Uwaga 11.3.3 (Jeszcze jedno równoważne podejście)**.** Ustalamy ciąg normalny $(\pi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ podziałów funkcji ograniczonej $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$.

$$\lim_{n\to\infty}\operatorname{diam}(\pi_n) = 0.$$

Wtedy istnieją granice

$$\lim_{n\to\infty}\underline{S}(f,\pi_n),\ \lim_{n\to\infty}\overline{S}(f,\pi_n)$$

Całka dolna

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\underline{S}(f,\pi_n)$$

Całka górna

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\overline{S}(f,\pi_n)$$

Z definicji wynika nierówność $\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x$. Gdy całki górna i dolna w powyższym sensie są sobie równe, to ponownie mówimy, że f jest całkowalna w sensie Riemanna i przyjmujemy $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x$.

W ogólności *wyznaczanie* całek Riemanna z definicji jest *bardzo* trudne. Po omówieniu twierdzeń o całkowaniu podamy kilka skromnych, łatwiejszych przykładów takich rozumowań. Istnieje wiele metod rachunkowych liczenia całek z *pominięciem* definicji, w oparciu o tablice znanych całek (podobnie jak korzystamy z pewnych „standardowych" pochodnych) - zademonstrujemy jednak tylko kilka z nich. Niestety, takie metody rachunkowe stosują się tylko do pewnych klas funkcji i na dodatek - są trudniejsze od metod wyznaczania pochodnych. Podamy za to przykład funkcji niecałkowalnej w sensie Riemanna i uzasadnimy ten fakt z definicji Darboux.

Przykład 89. Funkcja $D\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ (przedz. $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ jest dowolny) określona wzorem

$$D(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \in \mathbb{R}; \\ 1 & \text{dla } x \in \mathbb{Q}. \end{cases}$$

(znana jako **Funkcja Dirichleta**) nie jest całkowalna w sensie Riemanna.
Rzeczywiście, łatwo zauważymy, że dla *każdego* podziału π przedziału $[a,b]$ musi być $\overline{S}(f,\pi)=1$ i $\underline{S}(f,\pi)=0$. Zatem

$$0=\underline{\int_a^b} D(x)\,\mathrm{d}x \neq \overline{\int_a^b} D(x)\,\mathrm{d}x = 1.$$

Interpretacja geometryczna całki Riemanna. Jeżeli funkcja $f\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ jest w $[a,b]$ nieujemna, to:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \text{ jest polem figury } \{(x,y)\in\mathbb{R}\colon 0\leqslant y\leqslant f(x), x\in[a,b]\}}$$

tj. obszaru ograniczonego osią OX, prostymi $x=a, x=b$ i wykresem (krzywą) funkcji f.

Przykład 90. W oparciu o to co powiedzieliśmy, możemy np. nie przeprowadzając żadnych rachunków i ścisłych rozważań teoretycznych uzasadnić, że

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}.$$

Zauważmy, że ponieważ $y^2+x^2=1$ jest równaniem wyznaczającym okrąg o środku w punkcie $(0,0)$ i promieniu długości 1, to po przekształceniu tego równania do postaci: $y=\pm\sqrt{1-x^2}$, wykres funkcji $f(x)=y$ jest górną lub dolną połową okręgu (zależnie od wybranego znaku). Czyli nasza całka wyraża pole *ćwiartki* okręgu ($x\in[0,1], y\geqslant 0$, *ćwiczenie*: wykonać rysunek tej sytuacji) a więc wynosi $\frac{\pi}{4}$.

11.4 Twierdzenia o całkowaniu

11.4.1 Kryteria całkowalności

Twierdzenie 11.4.1 (I kryterium całkowalności w sensie Riemanna)**.** *Niech $f\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ będzie funkcją ograniczoną. Funkcja f jest całkowalna w sensie Riemanna wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$(*)\ \ \forall_{\varepsilon>0}\exists_{\pi\in\mathcal{P}[a,b]}.\ \overline{S}(f,\pi)-\underline{S}(f,\pi)<\varepsilon$$

Dowód. Najpierw załóżmy, że $f\in\mathcal{R}[a,b]$, czyli

$$I=\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f$$

$$\underline{\int_a^b} f = \sup\{\underline{S}(f,\pi)\colon \pi\in\mathcal{P}[a,b]\}$$

$$\overline{\int_a^b} f = \inf\{\overline{S}(f,\pi)\colon \pi\in\mathcal{P}[a,b]\}$$

Ustalmy dowolne $\varepsilon>0$. Istnieje $\pi_1\in\mathcal{P}[a,b]$ takie, że

$$I-\frac{\varepsilon}{2}<\underline{S}(f,\pi_1)$$

oraz $\pi_2 \in \mathcal{P}[a,b]$, że

$$\overline{S}(f,\pi_2) < I + \frac{\varepsilon}{2}$$

Niech $\pi = \pi_1 \cup \pi_2$. Wtedy π jest zagęszczeniem podziałów π_1 oraz π_2 i mamy

$$I - \frac{\varepsilon}{2} < \underline{S}(f,\pi_1) \leqslant \underline{S}(f,\pi) \leqslant \overline{S}(f,\pi) \leqslant \overline{S}(f,\pi_2) < I + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Zatem $\overline{S}(f,\pi) - \underline{S}(f,\pi) \leqslant I + \frac{\varepsilon}{2} - \underline{S}(f,\pi)$ ale $\underline{S}(f,\pi) > I - \frac{\varepsilon}{2}$ i $I + \frac{\varepsilon}{2} \geqslant 0$ więc

$$I + \frac{\varepsilon}{2} - \underline{S}(f,\pi) < I + \frac{\varepsilon}{2} - \Big(I - \frac{\varepsilon}{2}\Big) = \varepsilon$$

i stąd

$$\overline{S}(f,\pi) - \underline{S}(f,\pi) < \varepsilon$$

Teraz załóżmy, że spełniony jest warunek $(*)$. Ustalmy $\varepsilon > 0$. Z $(*)$ istnieje taki podział $\pi \in \mathcal{P}[a,b]$, że

$$\overline{S}(f,\pi) - \underline{S}(f,\pi) < \varepsilon$$

Ale

$$\underline{S}(f,\pi) < \varepsilon \leqslant \underline{\int_a^b} f \leqslant \overline{\int_a^b} f \leqslant \overline{S}(f,\pi)$$

$$\overline{\int_a^b} f - \underline{\int_a^b} f < \varepsilon$$

Z dowolności wybour ε otrzymujemy, że

$$0 \leqslant \overline{\int_a^b} f - \underline{\int_a^b} f \leqslant 0 \Rightarrow \overline{\int_a^b} f = \underline{\int_a^b} f.$$

□

Twierdzenie 11.4.2 (II kryterium całkowalności w sensie Riemanna)**.** *Niech $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ograniczoną. Funkcja f jest całkowalna wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$(*)\ \ \forall_{\varepsilon>0}\exists_{\delta>0}\forall_{\pi\in\mathcal{P}[a,b]}.\ \operatorname{diam}(\pi) < \delta \Rightarrow \overline{S}(f,\pi) - \underline{S}(f,\pi) < \varepsilon$$

Dowód. **TO-DO** □

Twierdzenie 11.4.3 (III kryterium całkowalności w sensie Riemanna)**.** *Niech $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ograniczoną, a $\pi = \{\underset{a}{\overset{\|}{x_0}}, x_1, \ldots, \underset{b}{\overset{\|}{x_n}}\}$ podziałem przedziału $[a,b]$ a $\delta_k := \max\limits_{1\leqslant i\leqslant k} \Delta x_i$. Liczbę $\omega_i := M_i - m_i$ nazwiemy „oscylacją” funkcji f na przedziale $[x_{i-1}, x_i]$, $i \in \{1,\ldots,n\}$. Funkcja f jest całkowalna w sensie Riemanna na przedziale $[a,b]$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\delta_n \to 0$ pociąga, że*

$$\sum_{i=1}^n \omega_i \Delta x_i = 0.$$

Dowód. **TO-DO** □

11.4.2 Własności całki Riemanna

Twierdzenie 11.4.4. *Jeżeli f jest funkcją całkowalną w przedziale $[a, b]$, to*

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f \leqslant M(b-a).$$

(prosty dowód, z definicji.)
Jeżeli ponadto $f \geqslant 0$ to z powyższej równości natychmiast mamy, że

$$\int_a^b f \geqslant 0.$$

Twierdzenie 11.4.5. *Jeżeli f, g są funkcjami całkowalnymi w przedziale $[a, b]$ oraz $f \leqslant g$, to*

$$\int_a^b f \leqslant \int_a^b g.$$

Dowód. Ustalamy π - podział przedziału $[a, b]$. Dla każdego $i \in \{1, \dots, n\}$ oznaczamy

$$m_i(f) = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$$

$$M_i(g) = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} g(x)$$

Mamy

$$\sum_{i=1}^n m_i(f)\Delta x_i \leqslant \sum_{i=1}^n M_i(g) = \underline{S}(g, \pi) \leqslant \underline{\int_a^b} g = \int_a^b g. \text{ (g jest całkowalna)}$$

Zatem:

$$\forall_{\pi \in \mathcal{P}[a,b]}.\ \underline{S}(f, \pi) \leqslant \int_a^b g.$$

$$\int_a^b f = \underline{\int_a^b} f = \sup\{\underline{S}(f, \pi) \colon \pi \in \mathcal{P}[a, b]\} \leqslant \int_a^b g.$$

□

Twierdzenie 11.4.6. *Jeżeli f jest funkcją całkowalną w na przedziale $[a, b]$ a λ dowolną liczbą rzeczywistą, to funkcja λf jest całkowalna na przedziale $[a, b]$ oraz*

$$\int_a^b \lambda f = \lambda \int_a^b f.$$

Dowód. Przypomnijmy, że

$$\sup \lambda A = \lambda \sup A,$$

$$\inf \lambda A = \lambda \inf A$$

dla dow. zbioru[1] $A \subseteq \mathbb{R}$ i $\lambda \geqslant 0$. Rozważymy przypadki:

[1] $\lambda A := \{\lambda a \colon a \in A\}$

1) $\lambda > 0$. Niech $\pi \in \mathcal{P}[a,b]$.

$$\overline{S}(\lambda f, \pi) - \underline{S}(\lambda f, \pi) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sup\{\lambda f(x) \colon x \in [x_{i-1}, x_i]\} - \inf\{\lambda f(x) \colon x \in [x_{i-1}, x_i]\}\right) \Delta x_i =$$

$$= \lambda \left(\overline{S}(f,\pi) - \underline{S}(f,\pi)\right)$$

$$\int_a^b \lambda f = \sup\{\overline{S}(\lambda f, \pi) \colon \pi \in \mathcal{P}\} = \sup\{\lambda \overline{S}(f,\pi)\} = \lambda \underline{\int_a^b} f = \lambda \int_a^b f, \text{ bo } f \text{ jest całkowalna.}$$

Analogicznie pokazujemy, że $\underline{\int_a^b} \lambda f = \lambda \underline{\int_a^b} f = \lambda \int_a^b f$. Mamy, że $\underline{\int_a^b} \lambda f = \overline{\int_a^b} \lambda f$ i ostatecznie λf jest całkowalna a ponadto z wyprowadzonych po drodze równości wynika, że

$$\int_a^b \lambda f = \lambda \int_a^b f.$$

2) $\lambda = -1$. Przypomnijmy jeszcze wzory

$$\sup(-A) = -\inf A$$

$$\inf(-A) = -\sup A$$

dla dow. $A \subseteq \mathbb{R}$(, gdzie $-A = \{-a \colon a \in A\}$).

$$\underline{S}(-f,\pi) = \sum_{i=1}^{n} \inf\{-f(x) \colon x \in [x_{i-1}, x_i]\}\Delta x_i = -\sum_{i=1}^{n} \sup\{f(x) \colon x \in [x_{i-1}, x_i]\}\Delta x_i = -\overline{S}(f,\pi).$$

Podobnie $\overline{S}(-f,\pi) = -\underline{S}(f,\pi)$.

$$\int_a^b (-f) = \sup\{\underline{S}(-f,\pi) \colon \pi \in \mathcal{P}[a,b]\} = \sup\{-\overline{S})f,\pi) \colon \pi \in \mathcal{P}[a,b]\} =$$

$$-\inf\{\overline{S}(f,\pi) \colon \pi \in \mathcal{P}[a,b]\} = -\overline{\int_a^b} f = -\int_a^b f.$$

Analogicznie

$$\overline{\int_a^b} (-f) = -\underline{\int_a^b} f = -\int_a^b f.$$

$-f$ jest całkowalna ponieważ $\overline{\int_a^b}(-f) = \underline{\int_a^b}(-f)$.

3) $\lambda < 0$. Wtedy $-\lambda > 0$.

$$\underline{\int_a^b} \lambda f = \underline{\int_a^b} (-(-\lambda) f) = -\overline{\int_a^b} ((-\lambda) f) = -(-\lambda) \int_a^b f = \lambda \int_a^b f.$$

Analogicznie możemy pokazać, że również

$$\overline{\int_a^b} \lambda f = \overline{\int_a^b} (-(-\lambda) f) = \lambda \int_a^b f.$$

Ostatecznie λf jest całkowalna w przedziale $[a, b]$ i

$$\int_a^b \lambda f = \lambda \int_a^b f.$$

□

Twierdzenie 11.4.7 (Addytywność całki)**.** *Niech f_1, f_2 będą funkcjami całkowalnymi w przedziale $[a, b]$. Wówczas funkcja $f_1 + f_2$ jest również całkowalna w przedziale $[a, b]$ oraz*

$$\int_a^b (f_1 + f_2) = \int_a^b f_1 + \int_a^b f_2.$$

Dowód. Ćwiczenie. Całkowalność z pomocą I-szego kryterium całkowalności, równość w tezie z definicji. □

Dla swobody rachunków, z poprzednich dwóch twierdzeń należy po prostu zapamiętać, że operacja całkowania jest liniowa, tzn.:

$$\boxed{\int_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R} \text{ - dowolne stałe.}}$$

Twierdzenie 11.4.8. *Niech $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ograniczoną oraz niech $c \in (a, b)$. Wówczas f jest całkowalna w przedziale $[a, b]$ wtedy i tylko wtedy, gdy $f\big|_{[a,c]}$ i $f\big|_{[c,b]}$ są całkowalne odpowiednio w przedziałach $[a, c]$ i $[c, b]$. Wtedy*

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

Uogólniając powyższe twierdzenie dostajemy

Twierdzenie 11.4.9. *Niech $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ograniczoną oraz P_j będą takimi przedziałami domkniętymi, że*

$$[a, b] = \bigcup_{j=1}^{m} P_j$$

oraz $\inf P_i \cap \inf P_j = \varnothing, i \neq j$. Wówczas f jest całkowalna w przedziale $[a, b]$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $j \in \{1, \dots, m\}$ $f\big|_{P_j}$ jest całkowalna w przedziale P_j. Ponadto

$$\int_a^b f = \sum_{j=1}^{m} \int_{P_j} f.$$

Twierdzenie 11.4.10. *Jeżeli f jest całkowalna na przedziale $[a, b]$ to jest całkowalna w dowolnym przedziale $[\alpha, \beta] \subseteq [a, b]$.*

Twierdzenie 11.4.11. *Niech f będzie całkowalna w przedziale $[a, b]$ oraz $g\colon [\inf f[a, b], \sup f[a, b]] \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą. Wówczas $g \circ f$ jest całkowalna w przedziale $[a, b]$.*

11.5 Klasy funkcji całkowalnych

Twierdzenie 11.5.1. *Każda funkcja ciągła $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ jest całkowalna w sensie Riemanna.*

Dowód. Funkcja $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ jest ciągła i określona na przedziale domkniętym (czyli zbiorze zwartym) a stąd jest jednostajnie ciągła na mocy twierdzenia 7.2.13 Heinego-Cantora. Pokażemy, że funkcja spełnia warunek $(*)$ z I-szego kryterium całkowalności (tw. 11.4.1).
Ustalmy $\varepsilon > 0$. Z jednostajnej ciągłości istnieje $\delta > 0$ takie, że

$$\forall_{x,y\in[a,b]} \left(|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{b-a} \right).$$

Niech $\pi = \{x_0, \ldots, x_n\}$ będzie takim podziałem przedziału $[a,b]$, że $\operatorname{diam}(\pi) < \delta$. Wtedy

$$\overline{S}(f,\pi) - \underline{S}(f,\pi) = \overbrace{\sum_{k=1}^{n} (\overset{f(x)}{\overset{\parallel}{M_k}} - \overset{f(y)}{\overset{\parallel}{m_k}})}^{\text{dla } x,y\in[x_{k-1},x_k]}\Delta x_k < \sum_{k=1}^{n} \frac{\varepsilon}{b-a}\Delta x_k = \frac{\varepsilon}{b-a}\sum_{k=1}^{n} \Delta x_k = \frac{\varepsilon}{b-a}(b-a) = \varepsilon.$$

Z I-szego kryterium całkowalności wynika, że funkcja f jest całkowalna w przedziale $[a,b]$. $\square$

Twierdzenie 11.5.2. *Każda funkcja monotoniczna $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ jest całkowalna w sensie Riemanna.*

Dowód. Jeżeli funkcja f jest funkcją stałą, to teza wynika natychmiastowo. Załóżmy, że f jest funkcją niemalejącą, różną od stałej - $f(a) \neq f(b)$.
Ustalmy $\varepsilon > 0$. Weźmy podział $\pi = \{x_0, \ldots, x_n\}$ przedziału $[a,b]$, że $\operatorname{diam}(\pi) < \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}$. Wówczas

$$\overline{S}(f,\pi) - \underline{S}(f,\pi) = \sum_{k=1}^{n}(M_k - m_k)\Delta x_k < \left(\sum_{k=1}^{n}(M_k - m_k)\right) \cdot \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}.$$

Ale $M_i = f(x_i)$, $m_i = f(x_{i-1})$. Czyli

$$\overline{S}(f,\pi) - \underline{S}(f,\pi) < \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)} \cdot \underbrace{(f(x_n) - f(x_0))}_{\overset{\parallel}{\sum_{k=1}^{n}(f(x_k)-f(x_{k-1}))}} = \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}(f(b)-f(a)) = \varepsilon.$$

$\square$

Twierdzenie 11.5.3. *Każda funkcja wypukła jest całkowalna w sensie Riemanna.*

Dowód. Wynika z twierdzeń 8.5.8 i 11.5.1. $\square$

Przykład 91. Obliczymy całkę funkcji $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ określonej jako $f(x) = x, x \in [0,1]$. Funkcja ta jest ciągła, więc całka jest równa *dowolnej* sumie całkowej (dolnej/górnej sumie Darboux, sumie Riemanna): Podzielmy przedział $[0,1]$ na n równych części uzyskując podział

$$\pi = \left\{ \frac{0}{n}, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}, \frac{n}{n} \right\}.$$

Czyli punkty $x_k = \frac{k-1}{n}$ dla $k = 1, 2, \ldots, n$ stanowią punkty podziału π. Łatwo też sprawdzimy, że długości przedziałów się zgadzają: $\frac{1}{n}$. $\Delta x_k = x_k - x_{k-1} = \dfrac{k}{n} - \dfrac{k-1}{n} = \dfrac{1}{n}$ (tak jak już powiedzieliśmy - przedział podzieliliśmy na n równych części.) Dalej, weźmy $\xi_k = \frac{k}{n} \in [x_{k-1}, x_k]$ i wówczas $f(\xi_k) = \xi_k = \frac{k}{n}$. Czyli mamy

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} \cdot \frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} k =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \frac{n(n+1)}{2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+n}{2n^2} = \frac{1}{2}.$$

Przykład 92. Obliczymy całkę funkcji $f\colon \mathbb{R} \to [-1, 1]$ określonej jako $f(x) = \sin x, x \in \mathbb{R}$.

Przykład 93. Obliczymy całkę funkcji $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ określonej wzorem $f(x) = x^2, x \in \mathbb{R}$ w przedziale $[0, a]$, gdzie $a > 0$ jest dane. Przyjmujemy $\pi_n := \left\{\dfrac{a}{n}, \dfrac{2a}{n}, \ldots, \dfrac{(n-1)a}{n}, \dfrac{na}{n}\right\}$ i

$$\Delta x_k := \frac{a}{n}, \quad \xi_k := x_k$$

Wówczas

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{diam}(\pi_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{a}{n} = 0.$$

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{ka}{n}\right)\frac{a}{n} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{ka}{n}\right)^2 \frac{a}{n} =$$
$$= \sum_{k=1}^{n} k^2 \left(\frac{a}{n}\right)^3 = \left(\frac{a}{n}\right)^3 \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{a^3}{6}$$

Ćwiczenie. Obliczyć *z definicji* całkę funkcji $f\colon [0, 2] \to \mathbb{R}$ (na przedziale $[1, 10]$) danej wzorem $f(x) = x + 1$.

Ćwiczenie. Sprawdzić, że funkcja $f\colon [0, 1] \to \{1, 0\}$ dana wzorem

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{dla } x = \frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}; \\ 0, & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases}$$

jest całkowalna w sensie Riemanna w przedziale $[0, 1]$. Wyznaczyć $\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

Przykład 94. Pokażemy, że następująca funkcja $f\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$ (f. Riemanna) jest niemalejącą, nieciągłą w całej dziedzinie funkcją całkowalną w sensie Riemanna:

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ dla } x \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q}; \\ \frac{1}{q} \text{ dla } x = \frac{p}{q}, p, q \in \mathbb{N}, NWD(p, q) = 1; \\ 1 \text{ dla } x = 0. \end{cases}$$

1. Z własności liczb rzeczywistych i określenia funkcji, oczywiste jest że nie jest ona monotoniczna w przedziale $[0, 1]$.

2. Rozważmy dowolny $a \in [a,b] \cap \mathbb{Q}$. Każda liczba rzeczywista jest granicą pewnego ciągu liczb rzeczywistych, ale weźmy np. ciąg $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ określony wzorem $x_n = \frac{p}{q} + \frac{1}{n}$ dla pewnych $p, q \in \mathbb{Z}$. Wtedy $x_n \to \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ i $x_n \in \mathbb{Q}, n \in \mathbb{N}$ ale $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{nq} = 0 \neq f(\frac{p}{q}) = \frac{1}{q}$. Zatem f nie jest ciągła w przedziale $[0,1]$ (aczkolwiek można pokazać, że jest ciągła w punktach niewymiernych swojej dziedziny!)

3. Oczywiste jest, że $\underline{S}(f,\pi) = 0$ dla dowolnego podziału π odcinka $[0,1]$. (W każdym podprzedziale $[x_{k-1}, x_k]$ prz. $[0,1]$ znajdziemy liczbę niewym. i $m_k = 0$). Zatem

$$\underline{\int_0^1} f = 0.$$

$f \geqslant 0$, $\overline{\int_0^1} f \geqslant 0$. Pokażemy, że dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje $\overline{S}(f,\pi) < \varepsilon$ i tym samym $\overline{\int_0^1} f = 0$. Ustalmy $\varepsilon > 0$. Weźmy $N \in \mathbb{N}$ takie, że $\frac{1}{N} < \frac{\varepsilon}{2}$. Rozważmy zbiór

$$A = \left\{ \frac{p}{q} \colon p \leqslant q,\ q < N, p, q \in \mathbb{N} \right\}.$$

Zbiór A jest skończony. Niech $m = |A|$. Podzielmy przedział $[0,1]$ na $n = m \cdot N$ równych części. Wybieramy punkty podziału $0 = \frac{0}{n} < \frac{1}{n} < \frac{2}{n} < \ldots < \frac{n-1}{n} < \frac{n}{n} = 1$ uzyskując podział π_k przedziału $[0,1]$. Określamy $\overline{S}(f,\pi_k)$:

$$\begin{aligned}
\overline{S}(f,\pi_k) &= \sum_{\substack{k\in\{1,\ldots,n\} \\ \left[\frac{k-1}{n},\frac{k}{n}\right]\cap A = \varnothing}} M_k \Delta x_k + \sum_{\substack{k\in\{1,\ldots,n\} \\ \left[\frac{k-1}{n},\frac{k}{n}\right]\cap A \neq \varnothing}} M_k \Delta x_k \leqslant \\
&\leqslant \sum_{\substack{k\in\{1,\ldots,n\} \\ \left[\frac{k-1}{n},\frac{k}{n}\right]\cap A = \varnothing}} 1 \cdot \frac{1}{n} + \sum_{\substack{k\in\{1,\ldots,n\} \\ \left[\frac{k-1}{n},\frac{k}{n}\right]\cap A \neq \varnothing}} \frac{1}{N} \cdot \frac{1}{n} \leqslant \\
&\leqslant \frac{m}{n} + n \cdot \frac{1}{N} \cdot \frac{1}{n} = \frac{m}{n} + \frac{1}{N} = \frac{m}{m\cdot N} + \frac{1}{N} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Z dowolności wyboru ε mamy $\inf\{\overline{S}(f,\pi) \colon \pi \text{ jest podziałem przedziału } [0,1]\} = 0$. Zatem

$$\overline{\int_0^1} f = \underline{\int_0^1} f = 0 \text{ i stąd } \int_0^1 f = 0.$$

11.6 Zasadnicze Twierdzenie Rachunku Całkowego, Wzór Newtona-Leibniza

Definicja 11.6.1. Niech $f \colon [a,b] \to \mathbb{R}$ będzie funkcją całkowalną w sensie Riemanna oraz niech $F \colon [a,b] \to \mathbb{R}$ będzie dana wzorem

(FGC) $$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t, x \in [a,b]$$

Funkcję F nazywamy **funkcją górnej granicy całkowania**.

Twierdzenie 11.6.2 (Zasadnicze Twierdzenie Rachunku Całkowego)**.** *Niech* $f \in \mathcal{R}[a,b]$ *oraz* $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *będzie dana wzorem* (FGC)*. Wówczas*

- *F jest ciągła;*
- *jeżeli f jest ciągła w $x_0 \in [a,b]$, to F jest różniczkowalna w x_0 oraz zachodzi wzór*

$$F'(x_0) = f(x_0).$$

Dowód. Załóżmy, że f jest całowalna na przedziale $[a,b]$. Ustalmy $x, y \in [a,b]$, $x < y$. Wtedy

$$|F(y) - F(x)| = \left| \int_a^y f(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \right| =$$

$$\left| \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t + \int_x^y f(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \right| = \left| \int_x^y f(t)\,\mathrm{d}t \right| \leqslant \int_x^y |f(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \int_x^y M\,\mathrm{d}t = M(x-y).$$

Czyli $|F(y) - F(x)| \leqslant M|x-y|$; $x, y \in [a,b]$. Funkcja F spełnia warunek Lipschitza, ze stałą $M > 0$, zatem jest jednostajnie ciągła.

Załóżmy, że f jest ciągła w punkcie x_0.

Ustalmy $\varepsilon > 0$. Mamy

$$\exists_{\delta>0} \forall_{x\in[a,b]} \left(|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon\right).$$

$$\forall_{x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)\cap[a,b]}.\ f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon.$$

Ustalmy $h \in \mathbb{R}$, $|h| < \delta$. Rozważmy przypadki:

- $h > 0$. Ze stosownych własności całki:

$$\int_{x_0}^{x_0+h} (f(x_0) - \varepsilon)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_{x_0}^{x_0+h} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_{x_0}^{x_0+h} (f(x_0) + \varepsilon)\,\mathrm{d}x$$

$$(f(x_0) - \varepsilon)h \leqslant \int_{x_0}^{x_0+h} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant (f(x_0) + \varepsilon)h$$

  Dzielimy obustronnie przez h i mamy

$$f(x_0) - \varepsilon \leqslant \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant f(x_0) + \varepsilon.$$

- $h < 0$. Mamy

$$\int_{x_0+h}^{x_0} (f(x_0) - \varepsilon)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_{x_0+h}^{x_0} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_{x_0+h}^{x_0} (f(x_0) + \varepsilon)\,\mathrm{d}x$$

$$(f(x_0) - \varepsilon)(-h) \leqslant \int_{x_0+h}^{x_0} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant (f(x_0) + \varepsilon)(-h)$$

  Pamiętamy (własność), że gdy zamieniamy granice całkowania to zmieniamy znak całki. Mamy

$$f(x_0) - \varepsilon \leqslant \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant f(x_0) + \varepsilon.$$

Zatem, dla każdego $h \in (-\delta, \delta) \setminus \{0\}$, $\left| \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} f(x)\,\mathrm{d}x - f(x_0) \right| \leqslant \varepsilon$ czyli

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} f(x)\,\mathrm{d}x = f(x_0).$$

$$F(x_0+h) - F(x_0) = \int_a^{x_0+h} f(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^{x_0} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{x_0}^{x_0+h} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Jest $\frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h}$ i dalej $\lim_{h \to 0} \frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} = f(x_0)$. Zatem F jest różniczkowalna w x_0 oraz $F'(x_0) = f(x_0)$. □

Zatem, jeżeli f jest ciągła w zadanym przedziale (a, b), to F jest funkcją pierwotną funkcji f w tym przedziale (funkcją pierwotną funkcji $f|_{(a,b)}$).

Wniosek 11.6.3. Niech $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą. Wówczas

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \Phi(b) - \Phi(a),$$

gdzie $\Phi\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ jest jakąkolwiek funkcją pierwotną funkcji f.

Dowód. Rozważmy funkcję f - ciągłą i niech Φ będzie *jakąkolwiek* jej funkcją pierwotną. Wtedy również funkcja górnej granicy całkowania F funkcji f jest jej funkcją pierwotną.
Istnieje takie $C \in \mathbb{R}$, że dla każdego $x \in [a, b]$ $F(x) = \Phi(x) + C$.

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \overset{=0}{\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x} = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

$$F(b) - F(a) = \Phi(b) + C - \Phi(a) - C = \Phi(b) - \Phi(a).$$ □

Zachodzi znacznie mocniejsze twierdzenie:

Twierdzenie 11.6.4 (Wzór Newtona Leibniza)**.** *Załóżmy, że $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ jest całkowalna w sensie Riemanna oraz ma funkcję pierwotną $\Phi\colon [a, b] \to \mathbb{R}$. Wówczas*

(NL)
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \Phi(b) - \Phi(a).$$

Dowód. Ustalmy $\varepsilon > 0$. f jest całkowalna, czyli istnieje taki podział $\pi = \{x_0, \ldots, x_n\}$ przedziału $[a, b]$, że

(11.4)
$$\overline{S}(f, \pi) - \underline{S}(f, \pi) < \varepsilon.$$

Ponadto mamy

(11.5)
$$\underline{S}(f, \pi) \leqslant \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \overline{S}(f, \pi).$$

f ma funkcję pierwotną. $\Phi'(x) = f(x), x \in [a,b]$. Z twierdzenia 8.6.1 Lagrange'a o wartości średniej dla każdego $i \in \{1,\dots,n\}$ istnieje $\xi \in (x_{i-1}, x_i)$.

$$\frac{\Phi(x_i) - \Phi(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} = \Phi'(\xi_i) = f(\xi_i). \tag{11.6}$$

Mamy $m_i \leqslant f(\xi_i) \leqslant M_i$,

$$\underline{S}(f,\pi) \leqslant \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \leqslant \overline{S}(f,\pi)$$

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \overset{(11.6)}{=} \sum_{i=1}^{n} (\Phi(x_i) - \Phi(x_{i-1})) = \Phi(x_n) - \Phi(x_0) = \Phi(b) - \Phi(a) \quad \text{zatem}$$

$$\underline{S}(f,\pi) \leqslant \Phi(b) - \Phi(a) \leqslant \overline{S}(f,\pi). \tag{11.7}$$

Z równości (11.4), (11.5), (11.7) mamy

$$\left| \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - (\Phi(b) - \Phi(a)) \right| < \varepsilon.$$

Z dowolności wyboru ε mamy, że

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \Phi(b) - \Phi(a).$$

□

Przyjmujemy kilka bardzo wygodnych w rachunkach oznaczeń:

$$f(x)\Big|_a^b := f(b) - f(a),$$

Wzór ten być niejednoznaczny: np.

$$f(x) + g(x)\Big|_a^b = f(b) + g(b) - (f(a) + g(a))$$

czy

$$f(x) + g(x)\Big|_a^b = f(x) + g(b) - g(a)?$$

Dlatego często piszemy też:

$$\big[f(x)\big]_a^b := f(b) - f(a),$$

Wtedy widzimy, że $\big[f(x) + g(x)\big]_a^b := f(b) + g(b) - (f(a) + g(a))$.

Gdy we wzorze na wyraz funkcji f występują parametry, to dla uniknięcia pomyłki, za jaką „literkę" podstawić granice całkowania piszemy:

$$f(x)\Big|_{x=a}^{x=b} = f(b) - f(a),$$

lub

$$\Big[f(x)\Big]_{x=a}^{x=b} = f(b) - f(a).$$

Przykład 95. $\int_{-1}^{2} \mathrm{d}t = t\Big|_{-1}^{2} = 2 - (-1) = 2 + 1 = 3.$

Przykład 96. $\int_0^T (v_0 + gt)\,\mathrm{d}t = \left[v_0 t + \frac{1}{2}gt^2\right]_0^T = v_0 T + \frac{1}{2}gT^2.$

Przykład 97. Obliczymy pole S obszaru ograniczonego łukiem kosinusoidy od $y = \cos x$ od $x = -\frac{\pi}{2}$ do $x = \frac{\pi}{2}$ i osią OX. Otóż

$$S = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,\mathrm{d}x = \big[\sin x\big]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 1 - (-1) = 2.$$

(Porównaj: interpretacja geometryczna całki oznaczonej)

Uwaga 11.6.5. Istnieją funkcje całkowalne w sensie Riemanna, które nie mają funkcji pierwotnej i odwrotnie - istnieją funkcje mające f. pierwotne ale nie będące całkowalnymi w sensie Riemanna.

Twierdzenie 11.6.6 (O całkowaniu przez części)**.** *Załóżmy, że* $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *są takimi funkcjami różniczkowalnymi, że* f', g' *są całkowalne w przedziale* $[a,b]$. *Wówczas*

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Dowód. f, g jako różniczkowalne są też ciągłe a stąd całkowalne (tw. 11.5.1). Do tego f', g' są ciągłe z założenia i mamy, że

$$\text{ciągłe są funkcje } f'g, fg' \text{ oraz } f'g + fg'.$$

Dalej $(fg)' = f'g + fg'$, zatem fg jest funkcją pierwotną dla funkcji $f'g + fg'$. Ostatecznie

$$\int_a^b (f'g + fg') = f(x)g(x)\Big|_a^b.$$

□

Twierdzenie 11.6.7 (O całkowaniu przez podstawienie dla całki oznaczonej)**.** *Załóżmy, że* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *jest funkcją ciągłą, a* $\varphi\colon [\alpha,\beta] \to [a,b]$ *jest taką funkcją różniczkowalną, że* φ' *jest całkowalna w przdziale* $[a,b]$. *Wówczas*

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta f(\varphi(x))\varphi'(x)\,\mathrm{d}x.$$

Dowód. f jest ciągła, więc całkowalna w przedz. $[a,b]$. φ jest różniczkowalna, stąd ciągła i również różniczkowalna w $[\alpha,\beta]$.

$$f \circ \varphi \text{ jest całkowalna w } [\alpha,\beta],$$

$$(f \circ \varphi) \circ \varphi' \text{jest całkowalna w } [\alpha,\beta].$$

F - funkcja pierwotna dla f.

$$(F \circ \varphi)'(x) = F'\left(\varphi(x)\right) \cdot \varphi'(x) = f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x).$$

$F \circ \varphi$ jet funkcją pierwotną dla $(f \circ \varphi)\varphi'$, czyli

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = (*).$$

Jeżeli $\varphi(\alpha) < \varphi(\beta)$, to

$$(*) = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Dla $\varphi(\alpha) = \varphi(\beta) = 0$ zachodzi równość

$$0 = (*) = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Jeśli $\varphi(\alpha) > \varphi(\beta)$, to $(*) = -\left(F(\varphi(\alpha)) - F(\varphi(\beta))\right) =$

$$= -\int_{\varphi(\beta)}^{\varphi(\alpha)} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

$\square$

Ćwiczenie. Niech $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą i taką, że dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$:

$$\int_0^1 f(xt)\,\mathrm{d}t = 0.$$

Wykazać, że $f = 0$.

Rozwiązanie. Podstawmy $u = xt$, to wówczas $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = x$, czyli mamy

$$\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}u}{x}.$$

Ponadto $t = 0$, to $u = 0$ a gdy $t = 1$, to $u = x$. Zatem

$$\int_0^1 f(xt)\,\mathrm{d}t = \int_0^x f(u)\frac{\mathrm{d}u}{x} = \frac{1}{x}\int_0^x f(u)\,\mathrm{d}u = 0, \ x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}.$$

$$F(x) := \int_0^x f(u)\,\mathrm{d}u = 0 \cdot x = 0, \text{ dla } x \neq 0.$$

Z ciągłości funkcji f i twierdzenia 11.6.4: $F'(x) = f(x), x \in (0,1]$. Mamy więc, że $f(x) = F'(x) = 0, x \in (0,1]$. Zatem $f(x) = 0$ dla $x \in [0,1]$, czyli $f = 0$. $\square$

Przykład 98. Wyznaczymy funkcję F daną wzorem $F(x) = \displaystyle\int_{-1}^x f(t)\,\mathrm{d}t, x \in [-1,2]$, gdzie

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{dla } x \in [-1,0), \\ \sin x & \text{dla } x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \\ x & \text{dla } \left(\frac{\pi}{2}, 1\right]. \end{cases}$$

[TO-DO]

Ćwiczenie. Niech $f\colon [0,3] \to \mathbb{R}$ będzie funkcją daną wzorem:

$$f(t) = \begin{cases} x+1 & \text{dla } x \in [0,1), \\ -3x+1 & \text{dla } x \in [1,2), \\ 1 & \text{dla } x \in [2,3]. \end{cases}$$

Wyznaczyć jawny wzór funkcji $F(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t, x \in [0,3]$.

Przykład 99. Niech $f\colon [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ będzie taką funkcją, że $f(1) = 1$ oraz

$$f'(x) = \frac{1}{x^2 + f^2(x)},\ x \in [0,+\infty).$$

Udowodnić, że granica $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ istnieje i jest mniejsza niż $1 + \frac{\pi}{4}$.

Rozwiązanie. Zauważmy, że $f'(x) > 0$ dla dowolnego $x \in D_f$, więc funkcja f jest rosnąca w całej dziedzinie. Czyli

$$f(x) > f(1) = 1 \text{ dla } x > 1.$$

Stąd uzyskujemy oszacowanie:

$$f'(x) = \frac{1}{x^2 + f^2(x)} < \frac{1}{x^2+1},\ x > 1$$

Dla każdego $x > 1$ możemy scałkować obustronnie powyższą nierówność i wówczas

$$\begin{aligned} f(x) - f(1) = \int_1^x f'(t)\,\mathrm{d}t < \int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1} = \arctan t\big|_1^x = \\ = \arctan x - \arctan 1 = \arctan x - \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

Czyli

$$1 < f(x) < \arctan x - \frac{\pi}{4} + 1.$$

Przy $x \to +\infty$ otrzymujemy, że

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) < 1 - \frac{\pi}{4} + \lim_{x\to+\infty} \arctan x = 1 - \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} = 1 + \frac{\pi}{4}.$$

□

Logarytm naturalny jako funkcja górnej granicy całkowania. Logarytm naturalny liczby x można zdefiniować jako całka funkcji $x \mapsto \frac{1}{x}$ w granicach od 1 do x:

$$\ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t.$$

Okazuje się, że w tej postaci łatwo udowodnić podstawowe własności logarytmu.

11.7 Twierdzenia o wartości średniej dla całek

Twierdzenie 11.7.1. *Niech $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą. Wówczas istnieje $\xi \in [a,b]$ takie, że*

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Dowód. Mamy $m \leqslant f(x) \leqslant M$, $x \in [a,b]$. Z ciągłości funkcji f:

$$m = \inf f\,[[a,b]] = \min f\,[[a,b]]$$

$$M = \sup f\,[[a,b]] = \max f\,[[a,b]]$$

oraz z własności całki

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant M(b-a)$$

$$m \leqslant \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant M$$

Z własności Darboux wynika, że istnieje $\xi \in [a,b]$ spełniające tezę twierdzenia. □

Twierdzenie 11.7.2. *Niech $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą, a $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ funkcją całkowalną stałego znaku. Wówczas istnieje $\xi \in [a,b]$ takie, że*

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi) \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Dowód. Mamy

$$\min_{[a,b]} f = m \leqslant f(x) \leqslant M = \max_{[a,b]} f.$$

g jest stałego znaku; załóżmy, że $g(x) \geqslant 0, x \in [a,b]$.

$$mg(x) \leqslant f(x)g(x) \leqslant Mg(x).$$

Z odpowiednich właności całki

$$m \cdot \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \cdot M.$$

Z własności Darboux istnieje $\xi \in [a,b]$ takie, że

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi) \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

□

Twierdzenie 11.7.3. *Niech $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą, a $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ funkcją monotoniczną klasy C^1. Wówczas istnieje $\xi \in [a,b]$ takie, że*

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = g(a) \int_a^\xi f(x)\,\mathrm{d}x + g(b) \int_\xi^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Dowód. f jest ciągła, niech F będzie funkcją pierwotną funkcji f.

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b F'(x)g(x)\,\mathrm{d}x =$$

$$= F(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b F(x)g'(x)\,\mathrm{d}x = I$$

Z poprzedniego twierdzenia istnieje $\xi \in [a,b]$ takie, że

$$\int_a^b F(x)g'(x)\,\mathrm{d}x = F(\xi)\int_a^b g'(x)\,\mathrm{d}x = F(\xi)g(x)\Big|_a^b = F(\xi)(g(b)-g(a)).$$

Dalej

$$\begin{aligned} I = \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = F(b)g(b) - F(a)g(a) - F(\xi)g(b) + F(\xi)g(a) = \\ = g(a)\left(F(\xi)-F(a)\right) + g(b)\left(F(b)-F(\xi)\right) = \\ = g(a)\int_a^\xi f(x)\,\mathrm{d}x + g(b)\int_\xi^b f(x)\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

□

Ćwiczenie. Udowodnić, że dla każdego $\varepsilon > 0$ i każdych $a,b \in \mathbb{R}$ spełniajacych $a > b > \frac{4}{\varepsilon}$ zachodzi nierównośc:

$$\left|\int_a^b \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x\right| < \varepsilon.$$

Rozwiązanie. Ustalmy $\varepsilon > 0$ oraz $a > b > \frac{4}{\varepsilon}$. Z twierdzenia 11.7.3 istnieje $x_1 \in [a,b]$ takie, iż

$$\int_a^b \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\int_a^\xi \sin x\,\mathrm{d}x + \frac{1}{b}\int_\xi^b \sin x\,\mathrm{d}x.$$

$$\left|\int_a^b \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{1}{a}\left|[-\cos x]_a^\xi\right| + \frac{1}{b}\left|[-\cos x]_\xi^b\right| = \frac{1}{a}|-\cos\xi + \cos a| + \frac{1}{b}|-\cos b + \cos\xi| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{a}(|\cos\xi| + |\cos a|) + \frac{1}{b}(|\cos b| + |\cos\xi|) \leqslant \frac{2}{a} + \frac{2}{b} < \frac{2}{4}\varepsilon + \frac{2}{4}\varepsilon = \varepsilon; \quad \text{c. b. d. o.}$$

□

Ćwiczenie. Wykazać, że dla pewnego $y \in (0, \frac{\pi}{2})$ zachodzi $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x\,\mathrm{d}x = e^y$.

Fakt 2 (Całkowa nierówność między średnimi). Niech $f\colon [a,b] \to (0,\infty)$ będzie funkcją całkowalną. Wówczas

$$\exp\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b \ln f(x)\,\mathrm{d}x\right) \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

11.8 *Całkowanie przybliżone

Wprost z definicji całki Riemanna widzimy, że całkę $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ z funkcji nieujemnej f możemy aproksymować biorąc podział $\{x_0, \ldots, x_n\}$ przedziału $[a, b]$ i sumując prostokąty $[x_{k-1}, x_k] \times [0, \xi_k]$, $k = 1, \ldots, n$, gdzie ξ_k są punktami pośrednimi. Dokładniejsze przybliżenie dostaniemy w oparciu o nast. metodę:

Metoda trapezów: Będziemy przybliżać całkę

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

funkcji $f \geqslant 0$, sumą pól n trapezów. Przedział całkowania $[a, b]$ dzielimy na n przedziałów częściowych, wszystkich tej samej długości $(b-a)/n$. Kolejne punkty podziału na osi OX oznaczamy

$$a = x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n = b$$

zaś odpowiadające im wartości na osi OY jako

$$y_k = f(x_k), k = 0, \ldots, n.$$

Wtedy

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{(b-a)}{2n}\left(y_0 + y_n + 2(y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1})\right),$$

a błąd Δ bezwzględny przybliżenia spełnia:

$$\Delta \leqslant \frac{(b-a)^3}{12n^2} M,$$

gdzie $M = \sup\limits_{x \in [a,b]} |f''(x)|$.

Przykład 100. Dla $n = 1$ mamy

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{(b-a)}{2}\left(f(a) + f(b)\right)$$

Ćwiczenie. Obliczyć $\int_0^1 e^{x^2}\,\mathrm{d}x$ metodą trapezów przyjmując $n = 5$. Oszacować błąd.

Metoda prostokątów: Dzielimy przedział $[a, b]$ na $2n$ (parzystą liczbę) podprzedziałów.

$$h := \frac{b-a}{2n},\ x_i := a + ih, i = 1, 2, \ldots, 2n.$$

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx$$

$$\approx \frac{h}{3}\left(f(x_0) + 4(f(x_1) + f(x_3) + \ldots + f(x_{2n-1})) + 2(f(x_2) + f(x_4) + \ldots + f(x_{2n-2})) + f(x_{2n})\right).$$

Błąd bezwzględny Δ w tym wypadku ma oszacowanie:

$$\Delta \leqslant \frac{(b-a)^3}{24n^2} M,$$

gdzie $M = \sup_{x \in [a,b]} |f''(x)|$.

Przykład 101. Dla $n = 1$ mamy

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx (b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

Dla $n = 3$ mamy TO-DO

11.9 *Uwagi o całkowaniu funkcji wektorowych

Ustalmy

$$f\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n, f = (f_1, \dots, f_n)$$
$$f_i\colon [a,b] \to \mathbb{R}, f_i \text{całkowalna na } [a,b];\ i \in \{1, \dots, n\}$$

Definiujemy

$$F(x) := \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = \left(\int_a^x f_1(t_1)\,\mathrm{d}t_1, \dots, \int_a^x f_n(t_n)\,\mathrm{d}t_n\right) \text{ gdzie } t = (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Twierdzenie 11.9.1. *F jest funkcją ciągłą. Ponadto, jeżeli $f_1, \dots, f_n$ są ciągłe w punkcie $x_0 \in (a,b)$, to F jest różniczkowalna w x_0.*

Twierdzenie 11.9.2. *Jeżeli f ma funkcję pierwotną F, to*

$$\int_a^b f = F(b) - F(a).$$

Przykład 102. Niech $f(x) = (2x, \cos x)$, to $\displaystyle\int_0^\pi f(x)\,\mathrm{d}x = \left(\int_0^\pi 2x\,\mathrm{d}x, \int_0^\pi \cos x\,\mathrm{d}x\right) =$

$$= \left(x^2\Big|_0^\pi,\ \sin x\Big|_0^\pi\right) = (\pi^2, 1)$$

Funkcje zespolone: funkcje postaci $f = \Re f + i\Im f$.
Funkcję $f\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ całkowalną możemy zapisać jako $f = f_1 + if_2$, gdzie

$$f_1, f_2\colon [a,b] \to \mathbb{R} \text{ pewne funkcje całkowalne na } [a,b].$$

Przykład 103. Niech $f(x) = 2x - i7x$. Wówczas $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \left(x, i(-\frac{7}{2})x\right)$.

Twierdzenie 11.9.3. *Jeżeli $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ (lub $f\colon [a,b] \to \mathbb{C}$) jest całkowalna w sensie Riemanna, to funkcja $\|f\|$ ($|f|$, gdzie $|\cdot|$ oznacza moduł liczby zespolonej) jest całkowalna w sensie Riemanna, oraz*

$$\left\|\int_a^b f\right\| \leqslant \int_a^b \|f\| \qquad \left(\left|\int_a^b f\right| \leqslant \int_a^b |f|\right)$$

Dowód.

$$f = (f_1, \dots, f_n),$$
$$\|f\| = \sqrt{\sum_{k=1}^n f_k^2},$$

$$y_i = (y_1, \dots, y_n) = \left(\int_a^b f_1, \dots, \int_a^b f_n \right).$$

$$\|y\|^2 = \sum_{k=1}^{n} y_k^2 = \sum_{k=1}^{n} y_k \int_a^b f_k = \int_a^b \sum_{k=1}^{n} y_k f_k \leqslant \int_a^b \sqrt{\sum_{k=1}^{n} y_k^2} \sqrt{\sum_{k=1}^{n} f_k^2} =$$
$$\|y\| \int_a^b \sqrt{\sum_{k=1}^{n} f_k^2} = \|y\| \int_a^b \|f\|$$

Jeżeli

1. $\|y\| \neq 0$, to $\|y\| = \left\| \int_a^b f \right\| \leqslant \int\limits_a^b \|f\|$,

2. $\|y\| = 0$, to $0 \leqslant \int\limits_a^b \|f\|$.

$\square$

Rozdział 12

Zastosowania geometryczne rachunku różniczkowego i całkowego

12.1 Krzywe w przestrzeni

Niech $\Phi\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$, $\Phi = (x_1, \ldots, x_n)$ gdzie x_i jest funkcją ciągłą dla $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Definicja 12.1.1. Zbiór K wartości funkcji Φ, czyli

$$K = \{(x_1(t), \ldots, x_n(t)) : t \in [a,b]\}$$

nazywamy **krzywą** o początku w punkcie $\Phi(a)$ i końcu w punkcie $\Phi(b)$.

Jeżeli w $\Phi(a) = \Phi(b)$, to krzywą będziemy nazywali krzywą **zamkniętą**. Φ nazywamy **parametryzacją** krzywej i zwykle zakładamy, że $\Phi\big|_{[a,b)}$ oraz $\Phi\big|_{(a,b]}$ są różnowartościowe - mówimy wtedy, że krzywa jest **łukiem zwykłym** albo **łukiem Jordana**. Prościej mówiąc K jest łukiem zwykłym, gdy nie posiada jej wykres nie posiada punktów wielokrotnych, tj.:

$$t_1 \neq t_2 \implies \big(\varphi(t_1), \psi(t_1)\big) \neq \big(\varphi(t_2), \psi(t_2)\big), t_1, t_2 \in [\alpha, \beta].$$

Przykład 104. Korzystając z twierdzenia pitagorasa, łatwo sprawdzić, że wszystkie punkty okręgu S o środku w punkcie $(0,0)$ i promieniu długości r otrzymamy z następujących równości:

$$\begin{cases} x = r\cos t, \\ y = r\sin t \end{cases}$$

Zatem odwzorowanie $\Psi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ dane jako $\Psi(t) = (r\cos t, r\sin t)$ jest parametryzacją S:

$$S = \{(x,y) \in \mathbb{R}\colon \Psi(t)\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}\colon x = r\cos t, y = r\sin t\}$$

Przykład 105. Ustalmy dwa punkty $P_1 = (x_1, y_1)$, $P_1 = (x_2, y_2)$. Łatwo możemy wskazać parametryzację prostej przechodzącej przez te dwa punkty:

$$\begin{cases} x = x_1 + (x_2 - x_1)t, \\ x = y_1 + (y_2 - y_1)t \end{cases}$$

Czyli odwzorowanie $T\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ dane jako $(x,y) = T(t) = P_1 + (P_2 - P_1)t = tP_1 + (1-t)P_2$ jest równaniem prostej przechodzącej przez punkty P_1 i P_2. Zbiór

$$K = \{(x,y) \in \mathbb{R}\colon x = tx_1 - (1-t)x_2 \text{ i } y = ty_1 - (1-t)y_2\}$$

czyli nasza „prosta" jest formalnie „krzywą". Dla $t \in [0,1]$ równanie $(x,y) = T(t)$ daje wszystkie punkty odcinka o końcach w punktach P_1 i P_2.

Definicja 12.1.2. Jeżeli

$$\begin{cases} x_i \in C^1([a,b]), i \in \{1,\dots,n\}, \\ \sum\limits_{i=1}^{n} [x_i'(t)]^2 > 0 \end{cases}$$

to mówimy, że krzywa jest **gładka**.

Ćwiczenie. Czy okrąg o równaniu $x^2+y^2 = 1$ jest krzywą gładką? (Oczywista wskazówka: rozważyć jego równanie *parametryczne*).

Ćwiczenie. Liść Kartezjusza jest krzywą o parametryzacji danej jako:

$$\begin{cases} x = \dfrac{6t}{1+t^3}, \\ y = \dfrac{6t^2}{1+t^3}. \end{cases}$$

Wyznaczyć kilka punktów tej krzywej dla ćwiczenia i spróbować narysować wykres. Czy krzywa ta jest gładka?

Definicja 12.1.3. Krzywą **regularną** nazywamy krzywą złożoną ze skończonej liczby krzywych (łuków) gładkich.

Definicja 12.1.4. Jeżeli krzywa $K \subseteq \mathbb{R}^n$ (ewentualnie, gdy pewien jej spójny podzbiór) jest zbiorem rozwiązań równania postaci

$$F(x_1,\dots,x_n) = 0 \tag{12.1}$$

to równanie 12.1 nazywamy jej **równaniem uwikłanym** i mówimy, że jest ona (ew. pewien jej podzbiór) „dana w sposób uwikłany".

12.2 Pochodna funkcji określonej równaniami parametrycznymi.

Krzywa na płaszczyźnie. Niech dany będzie układ $\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t); \end{cases}$ gdzie φ i ψ są ciągłe. Oczywiście jest to parametryzacja pewnej krzywej K w przestrzeni $\mathbb{R}^2$. Niech $(x_0, y_0) = (\varphi(t_0), \psi(t_0))$ dla pewnego $t_0 \in \mathbb{R}$ będzie punktem nieosobliwym krzywej K. Załóżmy, że $\varphi'(t_0) \neq 0$. Pochodna φ' zachowuje więc znak w pewnym otoczeniu punktu t_0 a funkcja φ na mocy ciągłości jest wówczas w tym otoczeniu różnowartościowa. Istnieje zatem funkcja odwrotna $\Phi := \varphi^{-1}$. Podsumujmy:

$$t = \Phi(x), \text{ dla } t \text{ w pewnym otoczeniu punktu } t_0,$$
$$\Phi \text{ jest różnowartościową funkcją klasy } C^1.$$

Podstawmy $y = \psi(t) = \psi(\Phi(x))$. Widzimy, że w otoczeniu punktu t_0, y jest dana funkcją zmiennej x. Przyjmijmy $f = \psi \circ \Phi$ i wówczas możemy (w pewnym otoczeniu t_0!) posługiwać się zależnością $y = f(x)$. Ponadto funkcja f jest również klasy C^1, gdyż f' jest ciągła, jako iloraz funkcji ciągłych, co za chwilę udowodnimy. Punkt $\varphi(t_0), \psi(t_0)$ krzywej K, w którym $\varphi'(t_0) = 0$ i równocześnie $\psi'(t_0) = 0$ może nie dać się wyrazić zależnością $y = f(x)$. Punkt taki nazywamy też **puntkem osobliwym**.

Definicja 12.2.1. Jeżeli krzywą $K \subseteq \mathbb{R}^2$ w otoczeniu punktu t_0 można przedstawić w postaci równania $y = f(x)$, tzn. w pewnym otoczeniu t_0 krzywa pokrywa się z wykresem funkcji f, to mówimy, że można ją przedstawić w *postaci nieuwikłanej* (w danym otoczeniu).

Twierdzenie 12.2.2. *Niech $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, gdzie φ i ψ są funkcjami ciągłymi. Wówczas, jeżeli $\varphi'(t_0) \neq 0$ dla pewnego t_0, to istnieje takie otoczenie U punktu t_0, że*

$$y' = f'(x) = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}, \ \ \textit{dla } t \in U$$

Dowód. Obliczamy pochodną funkcji f, tzn. pochodną y w otoczeniu U wzgl. zmiennej x.

$$y' = (\psi\left((\Phi(x))\right)' = \Psi'\left(\Phi(x)\right) \cdot \Phi'(x) = \psi'(t)\Phi'(x).$$

Korzystając ze wzoru 8.3.5 otrzymujemy, że $\Phi'(t) = \dfrac{1}{\left(\Phi^{-1}(t)\right)'} = \dfrac{1}{\left(\phi(t)\right)'}$ dla $t \in U$. Stąd już wystarczy podstawić

$$y' = \psi'(t)\Phi'(x) = \psi'(t)\frac{1}{\varphi'(t)} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$$

□

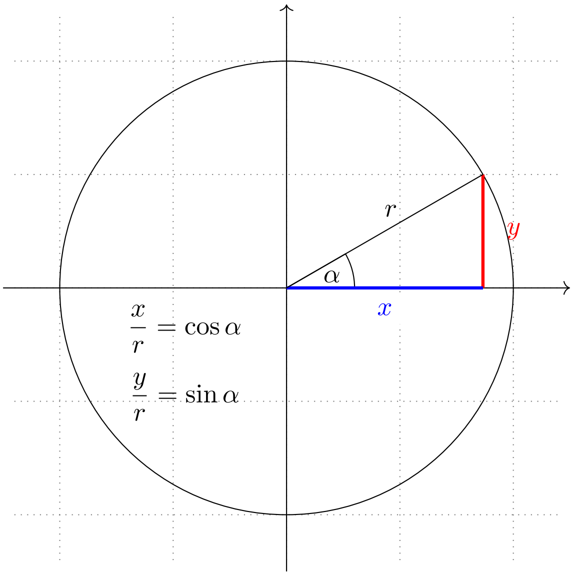
Oznaczając $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \psi'(t)$ oraz $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \varphi'(t)$ łatwo zapamiętać powyższy wzór:

$$\boxed{y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}} \tag{12.2}$$

12.3 Współrzędne biegunowe

Współrzędne (x, y) dowolnego punktu $P \in \mathbb{R}^2$ można przedstawić podając odległość r punktu P od początku układu współrzędnych oraz kąt α nachylenia prostej o początku w punkcie $(0, 0)$ i końcu w punkcie P - np. do osi OX. Wówczas mamy

$$\begin{cases} x = r\cos\alpha, \\ y = r\sin\alpha. \ \ r \geqslant 0, \alpha \in [0, 2\pi). \end{cases}$$



Rysunek 12.1: Współrzędne punktu $P = (x, y)$ związane są z kątem α i promieniem r.

Formalnie: Układ współrzędnych **kartezjańskich** to w istocie dane na płaszczyźnie dwie proste prostopadłe, przechodzące przez zadany punkt O zwany **środkiem** układu współrzędnych i arbitralnie nazywane osią OX i OY. Taki układ nazywamy też **prostokątnym**. Niech $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dane będzie wzorem $\varphi(r, \alpha) = (r\cos\alpha, r\sin\alpha)$. Zauważmy, że przekształcenie takie przyporządkowuje każdemu punktowi $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ wzajemnie jednoznacznie punkt $(x^*, y^*) \in \mathbb{R}^2$. Odwzorowanie φ nazywamy odwzorowaniem biegunowym. Układ współrzędnych na płaszczyźnie wyznaczony przez pewien punkt O zwany **biegunem** oraz pewną półprostą o początku w punkcie O zwaną **osią biegunową** nazywamy **układem współrzędnych biegunowych**. Zwykle przechodząc między układem prostokątnym a biegunowym przyjmujemy, że środek (biegun, w przypadku układu biegunowego) nowo wprowadzonego układu pokrywa się ze środkiem już adanego „starego" układu.

Przykład 106. Krzywa jest zadana parametrycznie:

$$\begin{cases} x = \sqrt{3}\cos t, \\ y = 3\sin t. \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Można ją przedstawić w postaci uwikłanej $F(x, y) = 0$.

12.4 Zastosowania geometryczne całki oznaczonej

Wprost definicji wynika

Fakt 3. Pole $|D|$ obszaru D ograniczonego krzywymi ciągłymi $y = f(x)$ i $y = g(x)$, gdzie $f(x) \geqslant g(x), x \in [a, b]$ i prostymi $x = a$, $x = b$ wyraża się wzorem

$$|D| = \int_a^b (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x.$$

12.4.1 Pole i objętość bryły obrotowej

Załóżmy, że funkcja $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ ma ciągłą pochodną na przedziale $[a,b]$. Po obrocie krzywej $y = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$ dookoła osi OX otrzymujemy bryłę obrotową o objętości V i polu powierzchni P i zachodzi:

$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2 \, \mathrm{d}x,$$

$$P = 2\pi \int_a^b |f(x)| \sqrt{1 + (f'(x))^2} \, \mathrm{d}x.$$

Twierdzenie 12.4.1. *Jeżeli $f\colon [a,b] \to [0,+\infty)$ jest funkcją ciągłą, to bryła V powstała poprzez obrót obszaru*

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon a \leqslant x \leqslant b,\ 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}$$

dookoła osi OX ma objętość $|V|$ i zachodzi równość

$$|V| = \int_a^b \pi f^2(x) \, \mathrm{d}x.$$

Dowód. Ustalmy podział $\Pi = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ przedziału $[a,b]$. Określamy sumy całkowe:

$$\underline{S}(f,\Pi) = \sum_{k=1}^{n} \pi m_k^2 \Delta x_k,$$

$$\overline{S}(f,\Pi) = \sum_{k=1}^{n} \pi M_k^2 \Delta x_k.$$

Funkcja $x \mapsto \pi\big(f(x)\big)^2, x \in [a,b]$ jest ciągła, a więc całkowalna, czyli

$$\sup_{\Pi} \underline{S}(f,\Pi) = \inf_{\Pi} \overline{S}(f,\Pi) = \int_a^b \pi (f(x))^2 \, \mathrm{d}x.$$

(Kresy bierzemy po wszystkich podziałach Π przedziału $[a,b]$.) □

Twierdzenie 12.4.2. *Jeżeli $f\colon [a,b] \to [0,+\infty)$ jest funkcją klasy C^1, to powierzchnia obrotowa S powstała poprzez obrót krzywej*

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon a \leqslant x \leqslant b \text{ i } y = f(x)\}$$

dookoła osi OX ma pole $|S|$ i zachodzi równość

$$|S| = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} \, \mathrm{d}x.$$

Przykład 107. Objętość V stożka o wysokości $h > 0$ i promieniu podstawy $R > 0$ można obliczyć określając funkcję $f\colon [0,h] \to [0,+\infty)$ wzorem

$$f(x) = \frac{R}{h} x, x \in [0,h].$$

Wówczas

$$|V| = \pi \int_0^h \pi \left(\frac{R}{h} x\right)^2 \mathrm{d}x = \pi \frac{R^2}{h^2} \int_0^h x^2 \, \mathrm{d}x = \pi \frac{R^2}{h^2} \left[\frac{1}{3} x^3\right]_0^h = \frac{1}{3} \pi R^2 h.$$

12.4.2 Długość krzywej

Definicja 12.4.3. **Długością krzywej** nazywamy kres górny długości łamanych wpisanych w krzywą.

Długość krzywej K oznaczamy $L(K)$ (od ang. *lenght* - długość) albo przez $|K|$.

Uwaga 12.4.4. Nie każda krzywa ma długość. Przykładem jest np. tzw. **krzywa Peano**. Krzywą, która ma długość nazywamy **prostowalną**.

Twierdzenie 12.4.5. *Jeżeli K jest krzywą gładką o parametryzacji $\Phi\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$, $\Phi(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))$, $t \in [a,b]$, to długość $L(K)$ krzywej dana jest wzorem*

$$L(K) = \int_a^b \sqrt{[x_1'(t)]^2 + \ldots + [x_n'(t)]^2}\,\mathrm{d}t.$$

Dowód - przypadek szczególny. Przeprowadzimy najpierw dowód dla $n = 2$. Ustalmy krzywą K oraz dowolną parametryzację $\Psi\colon [a,b] \to K$. Zatem możemy przyjąć $(x(t), y(t)) = \Psi(t)$.
Ustalmy $\varepsilon > 0$. Niech $\delta > 0$ będzie taką stałą, że

$$(*)\ \forall_{s,t\in[a,b]} |s-t| < \delta \Rightarrow \left|[y'(t)]^2 - [y'(s)]^2\right| < \varepsilon^2.$$

Niech $\pi \in \mathcal{P}[a,b]$ będzie takim podziałem przedziału $[a,b]$, że $\pi = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$,

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b,\ \ \mathrm{diam}(\pi) < \delta.$$

Obliczymy długość łamanej ℓ_π wpisanej w krzywą K.

$$\ell_\pi = \sum_{i=1}^n \sqrt{(x(t_i) - x(t_{i-1}))^2 - (y(t_i) - y(t_{i-1}))^2}.$$

Z twierdzenia Lagrange'a istnieje takie $\xi_i \in [t_{i-1}, t_i]$, że

$$x'(\xi_i) = \frac{x(t_i) - x(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}},$$

oraz takie $\zeta_i \in [t_{i-1}, t_i]$, że

$$y'(\zeta_i) = \frac{y(t_i) - y(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}}.$$

Dalej

$$\ell_\pi = \sum_{i=1}^n \sqrt{[x'(\xi_i)^2 \Delta t_i]^2 + [y'(\zeta_i)\Delta t_i]^2} =$$

$$= \sum_{i=1}^n \sqrt{([x'(\xi_i)]^2 + [y'(\xi_i)]^2) + ([y'(\zeta_i)]^2 - [y'(\xi_i)]^2)}\Delta t_i \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^n \sqrt{[x'(\xi_i)]^2 + [y'(\xi_i)]^2}\,\Delta t_i + \sum_{i=1}^n \sqrt{[y'(\zeta_i)]^2 - [y'(\xi_i)]^2}\,\Delta t_i \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^n \varphi(\xi_i)\Delta t_i + \varepsilon \sum_{i=1}^n \Delta t_i \leqslant \overline{S}(\varphi, \pi) + \varepsilon(b-a)$$

gdzie $\varphi(t) := \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}$ i stąd $\varphi(\xi_i) \leqslant \sup \varphi([t_{i-1}, t_i])$.
Podobnie:

$$\ell_\pi \geqslant \sum_{i=1}^{n} \varphi(\xi_i)\Delta t_i - \varepsilon \sum_{i=1}^{n} \Delta t_i \geqslant \underline{S}(\varphi, \pi) - \varepsilon(b-a).$$

Mamy zatem

$$\underline{S}(\varphi, \pi) - \varepsilon(b-a) \leqslant \ell_\pi \leqslant \overline{S}(\varphi, \pi) + \varepsilon(b-a)$$

o ile $\operatorname{diam}(\pi) < \delta$.

$$\int_a^b \varphi = \sup_{\pi \in \mathcal{P}[a,b]} \underline{S}(\varphi, \pi) \leqslant \sup_{\substack{\pi \in \mathcal{P}[a,b] \\ \operatorname{diam}(\pi) < \delta}} \underline{S}(\varphi, \pi) \leqslant \sup_{\substack{\pi \in \mathcal{P}[a,b] \\ \operatorname{diam}(\pi) < \delta}} \ell_\pi + \varepsilon(b-a) = L(K) + \varepsilon(b-a).$$

$$\int_a^b \varphi \leqslant L(K) + \varepsilon(b-a).$$

Przy $\varepsilon \to 0$ dostajemy, że

$$\int_a^b \varphi \leqslant L(K).$$

Z drugiej strony - ustalmy $\gamma > 0$. Niech $\pi_0 \in \mathcal{P}[a, b]$ będzie takim przedziałem, że

$$(**) \qquad \int_a^b \varphi + \gamma > \overline{S}(\varphi, \pi_0)$$

$$L(K) = \sup_{\pi \in \mathcal{P}[a,b]} \ell_\pi = \sup_{\substack{\pi \in \mathcal{P}[a,b] \\ \operatorname{diam}(\pi) < 0}} \ell_\pi \leqslant \sup_{\substack{\pi \in \mathcal{P}[a,b] \\ \operatorname{diam}(\pi) < 0}} \left(\overline{S}(\varphi, \pi) + \varepsilon(b-a)\right) \leqslant$$

$$\leqslant \overline{S}(\varphi, \pi) + \varepsilon(b-a) \overset{(**)}{<} \int_a^b \varphi + \gamma + \varepsilon(b-a).$$

Mamy

$$L(K) < \int_a^b \varphi + \gamma + \varepsilon(b-a)$$

i przy $\varepsilon \to 0$, $\gamma \to 0$ otrzymujemy, że

$$\int_a^b \varphi \leqslant L(K) \leqslant \int_a^b \varphi \text{ i ostatecznie } L(K) = \int_a^b \varphi.$$

$\square$

Dla krzywej K o parametryzacji $\Phi\colon [a, b] \to \mathbb{R}^n$; dla każdego podziału $\pi = \{t_0, \ldots, t_m\}$ odcinka $[a, b]$ określmy

$$L(K, \pi) := \sum_{i=1}^{m} \|\Phi(t_i) - \Phi(t_{i-1})\|$$

($\|\cdot\|$ oznacza normę) Widzimy, że jest to długość łamanej o wierzchołkach $\Phi(t_1), \ldots, \Phi(t_n)$ wpisanej w krzywą. Zatem długość $L(K)$ możemy wyrazić następująco:

$$L(K) = \sup_{P \in \mathcal{P}[a,b]} L(K, \pi),$$

a gdy $L(K) < \infty$, to krzywa K jest prostowalna. Teraz przeprowadzimy pełny

Dowód twierdzenia 12.4.5. Jeżeli $a \leqslant t_{i-1} < t_i \leqslant b$, to

$$\|\Phi(t_i) - \Phi(t_{i-1})\| = \left\| \int_{t_{i-1}}^{t_i} \Phi'(t)\,\mathrm{d}t \right\| \leqslant \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|\Phi'(t)\|\,\mathrm{d}t.$$

Stąd dla dowolnego podziału $\pi \in \mathcal{P}[a,b]$ mamy

$$L(K,\pi) \leqslant \int_a^b \|\Phi'(t)\|\,\mathrm{d}t$$

i stąd

$$L(K) \leqslant \int_a^b \|\Phi'(t)\|\,\mathrm{d}t.$$

Pokażemy, że nierówność w drugą stronę też zachodzi. Ustalmy dowolne $\varepsilon > 0$. Φ jest klasy C^1, zatem Φ' jest ciągła jednostajnie (tw. Heinego-Cantora) i stąd istnieje $\delta > 0$ taka, że

$$|x-y| < \delta \Rightarrow \|\Phi'(x) - \Phi'(y)\| < \varepsilon.$$

Niech $\pi = \{t_0, \ldots, t_m\} \in \mathcal{P}[a,b]$ tak, że $\Delta t_i < \delta$, $1 \leqslant i \leqslant m$. Wówczas

$$\|\Phi'(x)\| \leqslant \|\Phi'(t_i)\| + \varepsilon, \text{ dla } x \in [t_{i-1}, t_i].$$

Mamy

$$\int_{t_{i-1}}^{t_i} \|\Phi'(x)\|\,\mathrm{d}t \leqslant \|\Phi'(t_i)\|\Delta t_i + \varepsilon \cdot \Delta t_i = \left\| \int_{t_{i-1}}^{t_i} \big(\Phi'(x) + \Phi'(t_i) - \Phi'(x)\big)\,\mathrm{d}t \right\| + \varepsilon \Delta t_i \leqslant$$

$$\leqslant \left\| \int_{t_{i-1}}^{t_i} (\Phi'(x) \right\| + \|\Phi'(t_i) - \Phi'(x))\,\mathrm{d}t\| + \varepsilon\Delta t_i \leqslant \|\Phi(t_i) - \Phi(t_{i-1})\| + 2\varepsilon\Delta t_i.$$

Sumując nierówności po wszystkich $i = 1, \ldots, n$ otrzymujemy, że

$$\int_a^b \|\Phi'(t)\|\,\mathrm{d}t \leqslant L(K,\pi) + 2\varepsilon(b-a) \leqslant L(K) + 2\varepsilon(b-a).$$

Przy $\varepsilon \to 0$ dostajemy, że $\displaystyle\int_a^b \|\Phi'(t)\|\,\mathrm{d}t \leqslant L(K)$, czyli ostatecznie $L(K) = \displaystyle\int_a^b \|\Phi'(t)\|\,\mathrm{d}t$. □

Twierdzenie 12.4.6. *Jeżeli funkcja $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ jest klasy C^1 w $[a,b]$, to krzywa*

$$K = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon a \leqslant x \leqslant b \text{ oraz } y = f(x)\big\}$$

jest prostowalna i jej długość $|K|$ wyraża się wzorem

$$|K| = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,\mathrm{d}x.$$

Dowód. Niech $\varphi, \psi\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ będą określone wzorami

$$\Big\{\varphi(t) = t, \psi(t) = f(t),\ t \in [a,b].$$

Wówczas krzywa K jest postaci

$$\Big\{x = \varphi(t), y = \psi(t) = f(t),\ t \in [a,b].$$

Ponadto φ i ψ są klasy C^1, gdyż $\varphi'(t) = 1, \psi'(t) = f'(t), t \in [a,b]$. Z twierdzenia 12.4.5:

$$|K| = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(t)]^2}\,\mathrm{d}t.$$

□

Przykład 108. Okrąg S^R o promieniu $R > 0$ jest krzywą o przedstawieniu parametrycznym:

$$\begin{cases} x = R\cos t, \\ y = R\sin t,\ t \in [0, 2\pi]; \end{cases}$$

$$l = |S^R| = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-R\cos t)^2 + (R\sin t)^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \sqrt{R^2}\,\mathrm{d}t =$$
$$= \int_0^{2\pi} R\,\mathrm{d}t = [Rt]_0^{2\pi} = R(2\pi - 0) = 2\pi R.$$

12.4.3 Pole figury ograniczonej krzywą opisaną we współrzędnych biegunowych.

Będziemy rozważać obszar D ograniczony łukiem krzywej K, zadanej parametrycznie:

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t), \quad t \in [\alpha, \beta] \end{cases}$$

osią OX oraz prostymi $x = \varphi(\alpha)$, $y = \psi(\beta)$. Pole $|D|$ tego obszaru możemy obliczyć w oparciu o następujące

Twierdzenie 12.4.7. *Jeżeli $\varphi, \psi\colon [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ są ciągłe, φ jest klasy C^1 w przedziale $[\alpha, \beta] \subseteq \mathbb{R}$ oraz*

$$\psi(t) \geqslant 0, t \in [\alpha, \beta],$$
$$\varphi'(t) > 0, t \in (\alpha, \beta),$$

to obszar

$$D = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}\colon \varphi(\alpha) \leqslant x \leqslant \varphi(\beta) \text{ oraz } 0 \leqslant y \leqslant \psi(t)\big\}$$

ma pole $|D|$ i zachodzi równość

$$|D| = \int_\alpha^\beta \psi(t) \cdot \varphi'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Dowód. Ponieważ $\varphi'(t) > 0, t \in (\alpha, \beta)$, to φ jest w przedziale $[\alpha, \beta]$ rosnąca i stąd - odwracalna w tym przedziale. Niech $a = \varphi(\alpha)$ i $b = \varphi(\beta)$. Wówczas φ odwzorowuje przedział $[\alpha, \beta]$ na $[a, b]$ i mamy funkcję do niej odwrotną $\varphi^{-1}\colon [a, b] \to [\alpha, \beta]$.

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t), \quad t \in [\alpha, \beta] \end{cases}$$

Zatem $t = \varphi^{-1}(x), t \in [\alpha, \beta]$ i $y = \psi\big(\varphi^{-1}(x)\big), x \in [a, b]$. Ponieważ φ^{-1} i ψ są ciągłe, to $\psi \circ \varphi^{-1}$ jest ciągła. Korzystając z faktu 3 i twierdzenia 11.6.7 o całkowaniu przez podstawienie przeprowadzamy rachunki:

$$\begin{aligned} |D| &= \int_a^b \psi\big(\varphi^{-1}(x)\big)\,\mathrm{d}x = \\ &= \int_\alpha^\beta \psi\Big(\varphi^{-1}\big(\varphi(t)\big)\Big) \cdot \varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta \psi(t)\varphi'(t)\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

□

Możemy opuścić warunek nieujemności funkcji ψ. Komplikując nieznacznie dowód można udowodnić, że prawdziwy będzie wzór

$$|D| = \int_a^b |\psi(t)| \cdot \varphi'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Twierdzenie 12.4.8. *Pole bszaru płaskiego D ograniczonego łukiem AB o równaniu biegunowym $r = f(\varphi) \geqslant 0$ dla $\alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta$ oraz $\beta - \alpha \leqslant 2\pi$ i promieniu wodzącym OA i OB o długościach odpowiednio $f(\alpha)$, $f(\beta)$, to o ile f jest funkcją ciągłą na przedziale $[\alpha, \beta]$ wyraża się wzorem:*

$$|D| = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \big(f(\varphi)\big)^2\,\mathrm{d}\varphi$$

Dowód. Niech $f\colon [\alpha, \beta] \to [0, \infty)$, gdzie $[\alpha, \beta] \subseteq [0, 2\pi]$ będzie funkcją ciągłą oraz niech

$$D = \{(\varphi, r)\colon \alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta \text{ oraz } 0 \leqslant r \leqslant f(\varphi)\}$$

Ustalamy podział π przedziału $[\alpha, \beta]$:

$$\alpha = \varphi_0 < \varphi_1 < \varphi_2 < \ldots < \varphi_n = \beta.$$

Dla $k \in \{1, \ldots, n\}$:

$$\begin{aligned} m_k &= \inf\big\{f(\varphi)\colon \varphi \in [\varphi_{k-1}, \varphi_k]\big\}, \\ M_k &= \sup\big\{f(\varphi)\colon \varphi \in [\varphi_{k-1}, \varphi_k]\big\}, \\ \Delta\varphi_k &= \varphi_k - \varphi_{k-1}. \end{aligned}$$

Sumy całkowe przyjmują postać

$$\underline{S}(f, \pi) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} m_k^2 \Delta\varphi_k,$$

$$\overline{S}(f, \pi) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} M_k^2 \Delta\varphi_k.$$

Mamy
$$\sup_{\pi} \underline{S}(f,\pi) = \inf_{\pi} \overline{S}(f,\pi) = \int_a^b \frac{1}{2}\big(f(\varphi)\big)^2 \,\mathrm{d}\varphi.$$
Zatem obszar D ma dobrze określone pole D i wyraża się ono równością
$$|D| = \frac{1}{2}\int_a^b \big(f(\varphi)\big)^2 \,\mathrm{d}\varphi.$$
$\square$

Przykład 109. Pole koła $K^R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 \leqslant R\}$ o promieniu $R > 0$:
$$\begin{aligned} |K^R| &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} R^2 \,\mathrm{d}\varphi = \frac{1}{2}\big[R^2\varphi\big]_0^{2\pi} = \\ &= \frac{1}{2}R^2 2\pi - \frac{1}{2}R^2 \cdot 0 = \pi R^2. \end{aligned}$$

Rozdział 13

Szeregi liczbowe

13.1 Ciąg sum częściowych i jego granica - szereg

Definicja 13.1.1 (Szereg)**.** Niech $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będzie dowolnym ciągiem liczb rzeczywistych lub zespolonych. Wyrażenie

$$S_n = a_0 + a_1 + \ldots + a_{n-1} + a_n$$

nazywamy n-tą **sumą częściową szeregu**. Szeregiem nazywamy ciąg $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$, a sumą szeregu (jeśli istnieje) granicę

$$\lim_{n\to\infty} S_n.$$

Jeśli powyższa granica nie istnieje, to mówimy, że dany szereg jest **rozbieżny**, w przeciwnym wypadku nazywamy go **zbieżnym**. Sumę szeregu będziemy na ogół oznaczać

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k = \lim_{n\to\infty} S_n.$$

Zwyczajowo tym samym symbolem co sumę: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$, oznacza się też sam *szereg* $\left(\sum\limits_{k=0}^{n} a_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$. W rachunkach towarzyszących zastosowaniom zazwyczaj nie prowadzi to do nieporozumień. Zauważmy, że sumowanie możemy rozpoczynać od dowolnego indeksu, niekoniecznie $k = 0$ albo 1 oraz, że pominięcie skończonej liczby początkowych wyrazów szeregu (czyli wyrazów w każdej sumie częściowej!) nie wpływa na to jaką szereg ma granicę.

Szeregi w ogólnym ujęciu. Ciąg $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ w definicji 13.1.1 nie musi być ciągiem liczb rzeczywistych ani zespolonych. Możemy uogólnić wiele wyników z tego rozdziału na ciągi wyrazów dowolnej przestrzeni Banacha. Przestrzeń banacha jest w szczególności przestrzenią metryczną, w której mamy poprawnie określoną zbieżność ciągu i jest określona nad pewnym ciałem. Możemy więc elementy ciągów dodawać, tworząc ciągi sum częściowych. Aksjomaty tej przestrzeni gwarantują istnienie normy, będącej analogią wartości bezwzględnej liczby rzeczywistej jak i modułu liczby zespolonej. Czytelnik może spróbować, które z twierdzeń i dowodów z tego rozdziału dadzą się uogólnić, korzystając z definicji 5.6.4 i 5.5.1 oraz odpowiednich własności z paragrafu 5.5.

Przykłady szeregów rozbieżnych.

1. Szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 1$ jest oczywiście rozbieżny do nieskończoności, jak podpowiada nam zdrowy rozsądek. Zauważmy też, że formalnie $S_n = \underbrace{1+1+1+\ldots+1}_{n\text{-razy}} = n$. A więc $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} n = +\infty$ - zgodnie z intuicją.

2. Podobnie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n = +\infty$. Mamy:

$$S_n = 1+2+3+\ldots+(n-1)+n = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2+n}{2} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

3. Szeregiem **harmonicznym** nazywamy szereg postaci:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots.$$

Kolejny sumy częściowe $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$ szeregu harmonicznego nazywamy **liczbami harmonicznymi**. Mamy:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\ldots+\left(\underbrace{\frac{1}{2^n+1}+\frac{1}{2^n+2}+\ldots+\frac{1}{2^{n+1}}}_{2^n \text{ składników}}\right)+\ldots$$

oraz następujące oszacowania:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2} \leqslant \frac{1}{2}\\
&\frac{1}{3}+\frac{1}{4} > \frac{1}{4}+\frac{1}{4} = \frac{1}{2}\\
&\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8} > \frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8} = \frac{1}{2}\\
&\vdots
\end{aligned}$$

Ogólnie, dla każdego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi nierówność

$$\frac{1}{2^n+1}+\frac{1}{2^n+2}+\ldots+\frac{1}{2^{n+1}} > \underbrace{\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{1}{2^{n+1}}+\ldots+\frac{1}{2^{n+1}}}_{2^n \text{ składników}} = \frac{1}{2}$$

czyli $H_{2^n} \geqslant 1 + \frac{1}{2}n, n \in \mathbb{N}$. Z własności ciągów, ciąg sum częściowych $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest rozbieżny do nieskończoności.

Przykład 110. Obliczymy sumę szeregu $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$. Zauważmy, że wyrażenie $\frac{1}{n(n+1)}$ ma łatwy rozkład na ułamki proste: $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ (ćwiczenie). Zatem obliczmy:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1.$$

Mamy więc pierwszy przykład szeregu, który ma skończoną wartość.

Przykład 111 (Szereg geometryczny)*.* Szereg

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n, \ x \in \mathbb{R}$$

jest zbieżny gdy $0 \leqslant x < 1$ oraz rozbieżny dla $x \geqslant 1$.

Dowód. Przypomnijmy, że

$$\sum_{k=1}^{n} x^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} x^k = \frac{1-x^n}{1-x}.$$

Dla $0 \leqslant x < 1$ przy $n \to \infty$ mamy $x^n \to 0$ i

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} x^k = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \in \mathbb{R}.$$

□

Przykład 112. Pokażemy ponownie (patrz, przykład 20), że liczba $8,(3)$ jest wymierna. Niech $x = 8,(3)$. Mamy

$$x = 8,3333\ldots = 8 + 3 \cdot \frac{1}{10^1} + 3 \cdot \frac{1}{10^2} + 3 \cdot \frac{1}{10^3} + 3 \cdot \frac{1}{10^4} + \ldots = 8 + 3 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^n$$

Obliczmy sumę szeregu:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^n = \frac{1}{10} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^{n-1} = \frac{1}{1-\frac{1}{10}} = \frac{10}{9}$$

Skorzystaliśmy z wzoru na sumę szeregu geometrycznego - patrz poprzedni przykład (podstaw $x = \frac{1}{10}$. Uwaga: sumowanie rozpoczyna się od $n = 1$ - dlatego wyciągamy $1/10$ przed nawias aby otrzymać właściwy wykładnik - równy $n-1$). Zatem

$$3 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^n = \frac{3}{10} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^{n-1} = \frac{3}{10} \cdot \frac{10}{9} = \frac{1}{3}$$

Ostatecznie $x = 8 + \frac{1}{3} = \frac{25}{3}$ - jest to oczywiście liczba wymierna.

Twierdzenie 13.1.2 (Warunek konieczny zbieżności szeregu)**.** *Jeżeli szereg* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ *jest zbieżny, to*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Dowód. Niech S_n będzie n-tą sumą częściową szeregu i S będzie sumą szeregu:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = S$$

$$\text{Wtedy } \lim_{n\to\infty} S_n = S \text{ ale również } \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S.$$

Zauważmy, że $S_n - S_{n-1} = a_n$. Stąd
$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(S_n - S_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0.$$
□

Uwaga 13.1.3. Twierdzenie nie zachodzi w drugą stronę. Np. $\frac{1}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$ ale szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ jest rozbieżny, jak już wcześniej wykazaliśmy.

Twierdzenie 13.1.4 (Warunek Cauchy'ego dla szeregów)**.**

Szereg $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ *jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego* $\varepsilon > 0$ *istnieje* $N \in \mathbb{Z}$ *takie, że*
$$\left|\sum_{k=n+1}^{m} a_k\right| < \varepsilon, \ \text{dla } m \geqslant n \geqslant N.$$

Dowód. Zauważmy, że dla $m = n$ dostajemy warunek konieczny zbieżności szeregów (poprzednie twierdzenie). Warunek Cauchy'ego zbieżności ciągów zastosowany do sum częściowych szeregu ma postać:
$$\forall_{\varepsilon>0}\exists_{N\in\mathbb{N}}\forall_{m,n\in\mathbb{N},m\geqslant n\geqslant N.}|S_m - S_n| < \varepsilon.$$
Wystarczy zauważyć, że
$$\sum_{k=n+1}^{m} a_k = S_m - S_n.$$
□

Twierdzenie 13.1.5. *Szereg o wyrazach nieujemnych jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy ciąg jego sum częściowych jest ograniczony.*

Dowód. Niech $a_n \geqslant 0$, $n \in \mathbb{N}$. Wówczas ciąg sum częściowych $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest niemalejący, bo
$$S_{n+1} = S_n + a_{n+1} \geqslant S_n, n \in \mathbb{N}.$$
Szereg $\left(\sum\limits_{k=1}^{n} a_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy ciąg sum częściowych $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tego szeregu jest zbieżny w $\mathbb{R}$, a więc wtedy i tylko wtedy, gdy ciąg sum częściowych jest ograniczony. □

Definicja 13.1.6 (Zbieżność bezwzględna)**.**

Mówimy, że szereg $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ jest **bezwzględnie zbieżny**, gdy zbieżny jest szereg $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n|$.

Twierdzenie 13.1.7. *Każdy szereg bezwzględnie zbieżny, jest zbieżny.*

Dowód. Ustalmy szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. Chcemy pokazać, że jeżeli zbieżny jest szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$, to szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny. Ustalmy $\varepsilon > 0$. Ze zbieżności szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ i twierdzenia 13.1.4 istnieje $N \in \mathbb{N}$, takie iż
$$\Big||a_{m+1} + \ldots + |a_n|\Big| < \varepsilon, \ n > m \geqslant N.$$

Czyli z własności wartości bezwzględnej, dla każdego $n \geqslant N$ zachodzi oszacowanie

$$\big|a_{m+1}+\ldots+a_n\big| \leqslant |a_{m+1}|+\ldots+|a_n| \leqslant \Big||a_{m+1}+\ldots+|a_n|\Big| < \varepsilon.$$

Szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny na mocy twierdzenia 13.1.4. $\square$

Z ostatniego oszacowania wyciągamy

Wniosek 13.1.8. Jeżeli szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ jest zbieżny, to zachodzi nierówność

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|.$$

Mówimy też, że szereg *zbieżny*, który *nie* jest zbieżny *bezwzględnie* jest zbieżny *warunkowo.*

Twierdzenie 13.1.9 (Riemanna)**.** *Mając dany szereg zbieżny warunkowo, można przez zamianę porządku jego składników uzyskać szereg rozbieżny lub zbieżny do z góry zadanej granicy (skończonej lub nieskończonej).*

Dowód powyższego twierdzenia pomijamy. Można go znaleźć np. w *Podstawach Analizy Matematycznej* Waltera Rudina. W wypadku szeregu bezwzględnie zbieżnego (w szczególności: szeregu zbieżnego o wyrazach nieujemnych) możemy dowolnie zamieniać kolejność wyrazów nie wypływając na jego granicę (sumę).

Twierdzenie 13.1.10. $e = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n!}$, *gdzie e oznacza oczywiście liczbę Eulera.*

Dowód. Niech $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k!}$ oraz $e_n := \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$. Wiemy, że $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k!}$ (porównaj dowód tw. 4.4.10). Czyli $e_n \leqslant s_n, n \in \mathbb{N}$. Dalej, korzystając z twierdzenia o dwumianie newtona:

$$e_n = 1 + \underbrace{\frac{n!}{(n-1)!1!n}}_{1} + \frac{n!}{(n-2)!2!n^2} + \ldots + \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!n^k} + \ldots + \underbrace{\frac{n!}{(n-n)!n!n^n}}_{\frac{1}{n^n}}$$

$$e_n = 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(\frac{n(n-1)}{n^2}\right) + \frac{1}{3!}\left(\frac{n(n-1)(n-2)}{n^3}\right) + \ldots + \frac{1}{n!}\left(\frac{\overbrace{n(n-1)\cdots(n-k+1)}^{n\text{-wyrazów}}}{n^n}\right)$$

$$e_n = 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) + \ldots + \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)$$

Zauważmy, że $e_n > 1 + 1 + \dfrac{1}{2!}\left(1-\dfrac{1}{n}\right) + \ldots + \dfrac{1}{k!}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\dfrac{k-1}{n}\right)$ dla $k < n$. Korzystając z twierdzenia o zachowaniu nierówności przy przejściu do granicy:

$$\lim_{n\to\infty} e_n \geqslant 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{k!} = s_k,\ k < n.$$

Mamy więc tak naprawdę, że $s_n \leqslant e,\ n \in \mathbb{N}$. Łącząc ten fakt z poprzednim oszacowaniem, mamy iż

$$e_n \leqslant s_n \leqslant e,\ n \in \mathbb{N}.$$

Przy $n \to \infty$ na mocy twierdzenia o trzech ciągach dostajemy, że $s_n \to e$, co było do okazania. □

Ćwiczenie (Twierdzenie Toeplitza). Udowodnić, że jeżeli $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ są takimi ciągami liczb rzeczywistych, że $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$, a $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ma granicę g (skończoną lub nie), to

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k b_k}{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k}\right) = g.$$

13.2 Kryteria zbieżności szeregów

Omówimy teraz wiele przydatnych twierdzeń, w większości określanych jako "kryteria zbieżności szeregów". Dzięki nim będziemy w stanie rozstrzygnąć, czy dany szereg ma skończoną sumę czy też jest rozbieżny. Szczególnie liczne są metody dotyczące szeregów o wyrazach dodatnich lub przynajmniej nieujemnych, a podstawą jest tu porównywanie badanego szeregu z innymi szeregami, o których zbieżności/rozbieżności już wiemy. Jedną ze skuteczniejszych metoda badania szeregów nieujemnych podamy na końcu i będzie ona oparta na porównywaniu szeregu z całką niewłaściwą.

Twierdzenie 13.2.1 (Kryterium Leibniza). *Jeżeli ciąg liczbowy $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ spełnia nast. warunki:*

1. $a_n \geqslant 0,\ n \in \mathbb{N}$,
2. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$,
3. *ciąg a_n jest nierosnący;*

to szereg

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$$

jest zbieżny.

Dowód. Zauważmy, że $S_{2^{n+1}} = S_{2^n} + (a_{2^{n+1}} - a_{2^{n+2}})$ oraz z założenia, że ciąg jest malejący $a_{2^{n+}} - a_{2^{n+2}} \geqslant 0$. Krótko mówiąc: podciąg $(S_{2^n})_{n\in\mathbb{N}}$ jest rosnący. Zauważmy, że jest też ograniczony:

$$S_{2^n} = a_0 - a_1 + a_2 - \ldots + a_{2^n} = a_0 - (\underbrace{(a_1 - a_2)}_{\geqslant 0} + \underbrace{(a_3 - a_4)}_{\geqslant 0} + \ldots + \underbrace{(a_{2^n-1} - a_{2^n})}_{\geqslant 0}) \leqslant a_0.$$

Ciąg $(S_{2^n})_{n\in\mathbb{N}}$ jest zbieżny. Musimy teraz pokazać, że $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2^{n+1}} = \lim\limits_{n\to\infty} S_{2^n}$. Wystarczy zauważyć, że $S_{2^{n+1}} = S_{2^n} + a_{2^{n+1}}$ a $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2^{n+1}} = 0$ z założenia a więc

$$\lim_{n\to\infty} S_{2^{n+1}} = \lim_{n\to\infty}(S_{2^n} + a_{2^{n+1}}) = \lim_{n\to\infty} S_{2^n}.$$

□

Twierdzenie 13.2.2 (Kryterium Dirichleta)**.** *Jeżeli ciąg sum częściowych szeregu* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ *jest ograniczony, a* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *jest ciągiem liczb rzeczywistych, który jest monotoniczny i zbieżny do zera, to szereg* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ *jest zbieżny.*

Dowód. Niech $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będzie ciągiem sum częściowych szeregu $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$. Z założenia istnieje $M > 0$ takie, że

$$|S_n| \leqslant M, n \in \mathbb{N}.$$

Zauważmy, że albo ciąg (b_n) jest nierosnący i $b_n \geqslant 0, n \in \mathbb{N}$, albo jest niemalejący i $b_n \leqslant 0, n \in \mathbb{N}$. Niech np. będzie ciągiem nierosnącym. Niech $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będzie ciągiem sum częściowych szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$. Czyli

$$\sigma_n = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n,\ n \in \mathbb{N}.$$

Ustalmy $\varepsilon > 0$. Dobierzmy $N \in \mathbb{N}$ tak, że

$$b_n < \frac{\varepsilon}{2M},\ \text{dla } n \geqslant N.$$

Takie N istnieje, ponieważ z założenia $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$. Obliczamy

$$\begin{aligned}
&a_{m+1}b_{m+1} + a_{m+2}b_{m+2} + \ldots + a_{n-1}b_{n-1} + a_n b_n + \ldots = \\
&= b_{m+1}\left(S_{m+1} - S_m\right) + b_{m+2}\left(S_{m+2} - S_{m+1}\right) + \ldots + \\
&+ \ldots + b_{n-1}(S + n - 1 - S_{n-2}) + b_n(S_n - S_{n-1}) = \\
&= -b_{m+1}S_m + (b_{m+1} - b_{m+2})S_{m+1} + \ldots + (b_{n-1} - b_{n-1})S_{n-1} + b_n S_n.
\end{aligned}$$

Weźmy $n > m \geqslant N$. Wtedy

$$\begin{aligned}
&|\sigma_n - \sigma_m| = |(-b_{m+1})S_m + (b_{m+1} - b_{m+2}S_{m+1} + \ldots + (b_{n-1} - b_{n-1})S_{n-1} + b_n S_n| \leqslant \\
&\leqslant |-b_{m+1}||S_m| + |b_{m+1} - b_{m+2}||S_{m+1}| + \ldots + |b_{n-1} - b_{n-1}||S_{n-1}| + |b_n||S_n|.
\end{aligned}$$

Ciąg $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest nierosnący, a więc $b_{n+1} \leqslant b_n, n \in \mathbb{N}$. Ostatnia suma ma postać

$$\begin{aligned}
&b_{m+1}|S_m| + (b_{m+1} - b_{m+2})|S_{m+1}| + \ldots + b_n|S_n| \leqslant \\
&\leqslant \left(b_{m+1} + (b_{m+1} - b_{m+2}) + (b_{m+2} - b_{m+3}) + \ldots + (b_{n-1} - b_n)\right) M = 2b_{n+1}M < \varepsilon.
\end{aligned}$$

Czyli $|\sigma_n - \sigma_m| < \varepsilon$ dla $n > m \geqslant N$. Zatem szereg $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n b_n$ jest zbieżny na mocy twierdzenia 13.1.4. □

Zauważmy, że kryterium Leibniza wynika z kryterium Dirichleta. Weźmy $b_n = (-1)^n, n \in \mathbb{N}$. Wówczas ciąg sum częściowych szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ jest ograniczony: $S_n \in \{-1, 0\}, n \in \mathbb{N}$. Z twierdzenia Dirichleta szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ jest zbieżny, gdy ciąg $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest nierosnący i zbieżny do zera.

Wprowadzimy dość prostą ale użyteczną tożsamość dotyczącą sum, w charakterze lematu przed następnym kryterium:

Twierdzenie 13.2.3 (Sumowanie częściowe)**.** *Dla dowolnych ciągów liczb $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ przyjmijmy oznaczenie*

$$B_n = \sum_{k=0}^{n} a_k, \ \ dla\ n \geqslant 0, \quad A_{-1} = 0.$$

Wówczas, jeśli $0 \leqslant M \leqslant N$, to

$$\sum_{k=M}^{N} a_k b_k = \sum_{k=M}^{N-1} A_k(b_k - b_{k+1}) + A_N b_N - A_{M-1} b_M. \tag{13.1}$$

Dowód. Mamy

$$\sum_{k=M}^{N} a_k b_k = \sum_{k=M}^{N} (A_k - A_{k=1}) b_k = \sum_{k=M}^{N} A_k b_k - \sum_{k=M-1}^{N-1} A_k b_{k+1} =$$
$$= \sum_{k=M}^{N-1} A_k(b_k - b_{k+1}) + A_N b_N - A_{M-1} b_M.$$

□

Tożsamość 13.1 bywa nazywana **tożsamością Abela**.

Twierdzenie 13.2.4 (Kryterium Abela)**.** *Niech $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będą ciągami liczb rzeczywistych. Jeżeli szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny a ciąg $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monotoniczny i ograniczony, to szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ jest zbieżny.*

Dowód. Oznaczmy $A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$. Ponieważ ciąg $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest monotoniczny i ograniczony, to jest zbieżny. Zbieżność szeregu $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ oznacza, że zbieżny jest ciąg $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i stąd istnieje $M > 0$ takie, że

$$|A_n| \leqslant M, n \in \mathbb{N}.$$

Poprzez sumowanie częściowe, przyjmując we wzorze (13.1) $M = 0$ i $b_0 = 0$ otrzymujemy

$$\sum_{k=0}^{N} a_k b_k = \sum_{k=0}^{N-1} A_k(b_k - b_{k+1}) + A_N b_N. \tag{13.2}$$

Szacujemy

$$\sum_{k=0}^{N-1} |A_k(b_k - b_{k+1})| = \sum_{k=0}^{N-1} |A_k||b_k - b_{k+1}| \leqslant M \sum_{k=0}^{N-1} |b_k - b_{k+1}| \leqslant M|b_1 - b_N|.$$

$\lim\limits_{n\to\infty} M|b_1 - b_N| = M|b_1 - b| \in \mathbb{R}$, gdzie b jest granicą ciągu $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Zatem szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n(b_n - b_{n+1})$$

jest zbieżny bezwzględnie a ponadto zbieżny jest ciąg $(A_n b_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Stąd już i z równości (13.2) wynika pożądana zbieżność. □

Przykład 113. Załóżmy, że zbieżny jest szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Wówczas zbieżne są szeregi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{n} a_n \text{ oraz } \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) a_n.$$

Szeregi o wyrazach nieujemnych. Podstawowym narzędziem w badaniu zbieżności szeregów o wyrazach nieujemnych jest

Twierdzenie 13.2.5 (Kryterium porównawcze)**.** *Niech $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będą pewnymi ciągami o wyrazach nieujemnych. Załóżmy, że dla pewnego $n_0 \in \mathbb{N}$ zachodzi $a_n \leqslant b_n, n \geqslant n_0$. Wówczas*

- jeżeli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jest zbieżny, to zbieżny jest szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$,

- jeżeli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny, to rozbieżny jest szereg $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Dowód. Załóżmy, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jest zbieżny i $a_n \leqslant b_n$, $n \geqslant n_0$ dla pewnego $n_0 \in \mathbb{N}$. Istnieje $n_1 \in \mathbb{N}$ takie, iż $B_m - B_n < \varepsilon$ dla $m \geqslant n \geqslant n_1$. Niech $N = \max\{n_0, n_1\}$. Wówczas

$$A_m - A_n \leqslant B_m - B_n < \varepsilon \text{ dla } m \geqslant n \geqslant N.$$

Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny na mocy twierdzenia 13.1.4.

W drugą stronę: jeżeli $0 \leqslant a_n \leqslant b_n$, $n \geqslant n_0$ i szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny, to

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} B_n \geqslant \lim_{n\to\infty} A_n = \infty.$$

□

Uwaga 13.2.6. Gdy teza powyższego twierdzenia jest spełniona, to oczywiście na mocy twierdzenia o trzech ciągach

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

W operowaniu powyższym kryterium dużą rolę ma znajomość wielu przykładów szeregów zbieżnych i rozbieżnych. Szczególnie warto zwrócić uwagę na przykład 116.

Przykład 114. Wróćmy jeszcze raz do liczby e. W różnych działach analizy, autorzy dla wygody przyjmują sumę szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ za *definicję* liczby e. Wtedy oczywiście trzeba udowodnić zbieżność tego szeregu. Zauważmy jednak, że

$$\frac{1}{n!} \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}, \text{ dla } n > 4.$$

Wystarczy skorzystać z nierówności $2^{n-1} \leqslant n!$, $n > 4$ - porównaj tw. 3.3.5. Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}}$ jest zbieżny, gdyż jest to szereg geometryczny (porównaj przykład 111) o wyrazie $x = \frac{1}{2}$. Stąd na mocy kryterium porównawczego szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ jest zbieżny. Korzystając z tej zbieżności i wychodząc od tak zdefiniowanej liczby e, można oczywiście w drugą stronę dowodzić, że $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ - czyli że taka granica istnieje. Zasadniczo, jeśli wrócimy do dowodu twierdzenie 4.4.10 to bardziej elegancko, w miejscu, gdzie szukaliśmy ograniczenia ciągu z góry, posłużyć się właśnie oszacowaniem $2^{n-1} \leqslant n!$, $n > 4$ i nawet uzasadnić od razu, że po prawej stronie mamy szereg zbieżny.

Ćwiczenie. Zbadać zbieżność szeregu $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2}$.

Przytoczymy jeszcze poprzednie twierdzenie w innej wersji:

Twierdzenie 13.2.7 (Kryterium graniczne)**.** *Niech $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będą pewnymi ciągami tak, że $a_n \geqslant 0$ oraz $b_n > 0$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Jeżeli istnieje granica $G = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$ i $G \in (0, \infty)$, to szeregi $\sum a_n$ i $\sum b_n$ są albo równocześnie zbieżne albo równocześnie rozbieżne.*

Dowód. Załóżmy, że $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = G$ i ustalmy $\varepsilon > 0$. Istnieje takie $N \in \mathbb{N}$, że

$$G - \varepsilon < \frac{a_n}{b_n} < G + \varepsilon, \text{ dla } n \geqslant N.$$

Mamy $a_n < (G+\varepsilon)b_n$ i $G+\varepsilon \in \mathbb{R}$ więc teza wynika z twierdzenia 13.2.5. Z drugiej strony, ponieważ $G < 0$, to możemy dobrać $\varepsilon < G$ i wówczas $G - \varepsilon > 0$. Mamy

$$b_n < \frac{1}{G - \varepsilon} a_n, n \geqslant N.$$

Stąd ponownie teza wynika z poprzedniego twierdzenia. □

Uwaga 13.2.8. Jeżeli $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$, to zbieżność szeregu $\sum b_n$ pociąga zbieżność szeregu $\sum a_n$ a jeżeli $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$, to rozbieżność szeregu $\sum b_n$ pociąga rozbieżność szeregu $\sum a_n$.

Przykład 115. Zbadamy zbieżność szeregu $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \big(\ln(n+1) - \ln n\big)$. Obliczmy granicę:

$$G = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n+1) - \ln n}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln \frac{n+1}{n}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(1 + \frac{1}{n})}{\frac{1}{n}}.$$

Stąd $G = 1$ (w razie wątpliwości: tożsamość (6.4)). Ponieważ $G \in (0, \infty)$ oraz szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ jest rozbieżny, to również nasz wyjściowy szereg jest rozbieżny.

Twierdzenie 13.2.9 (Kryterium kondensacyjne Cauchy'ego)**.** *Załóżmy, że $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest nierosnącym ciągiem liczb rzeczywistych dodatnich. Wówczas*

$$\textit{szereg } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \textit{ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy zbieżny jest szereg } \sum_{n=1} 2^n a_{2^n}.$$

Dowód. Niech $S_n = a_1 + \ldots + a_n$ i $T_n = 2^0 a_{2^0} + \ldots + 2^n a_{2^n}$. Przyjrzyjmy się następującym oszacowaniom:

$$\begin{aligned}
&a_1 \leqslant a_1 = 2^0 a_{2^0}\\
&a_2 + a_3 \leqslant a_2 + a_2 = 2^1 a_{2^1}\\
&a_4 + a_5 + a_6 + a_7 \leqslant a_4 + a_4 + a_4 + a_4 = 2^2 a_{2^2}\\
&a_8 + a_9 + a_{10} + a_{11} + a_{12} + a_{13} + a_{14} + a_{15} \leqslant 8 \cdot a_8 = 2^3 a_{2^3}\\
&\vdots\\
&\underbrace{a_{2^n} + a_{2^n+1} + \ldots + a_{2^{n+1}-1}}_{2^n} \leqslant 2^n a_{2^n}
\end{aligned}$$

Zatem zachodzą następujące nierówności

$$a_1 + \ldots + a_n \leqslant a_1 + \ldots + a_{2^n+1} \leqslant 2^0 a_{2^0} + \ldots + 2^n a_{2^n}$$

a stąd mamy oszacowania

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \leqslant \sum_{k=1}^{2^{n+1}-1} a_k \leqslant \sum_{k=1}^{n} 2^k a_{2^k} = T_n \tag{13.3}$$

Z drugiej strony

$$T_n = a_1 + (a_2 + a_2) + (a_4 + a_4 + a_4 + a_4) + \ldots + (a_{2^n} + \ldots + a_{2^n})$$

i mamy oszacowania kolejnych wyrazów w nawiasach prawej strony powyższej równości:

$$\begin{aligned}
&a_1 + a_2 \leqslant a_1 + a_1 = 2S_1\\
&a_2 + a_4 + a_4 + a_4 \leqslant a_2 + a_2 + a_4 + a_4 = 2(S_4 - S_1)\\
&a_4 + a_8 + a_8 + a_8 + a_8 + a_8 + a_8 + a_8 \leqslant a_5 + a_5 + a_6 + a_6 + a_7 + a_7 + a_8 + a_8 = 2(S_8 - S_4)\\
&\vdots\\
&a_{2^n} + \ldots + a_{2^n} \leqslant 2(S_{2^n} - S_{2^{n-1}})
\end{aligned}$$

Sumując stronami powyższe nierówności, otrzymujemy następujące oszacowanie

$$T_n \leqslant 2(S_{2^n} - S_{2^{n-1}} + S_{2^{n-1}} - \ldots - S_8 + S_8 - S_4 + S_4 - S_1 + S_1) = 2S_{2^n}. \tag{13.4}$$

Łącząc wyniki (13.3) i (13.4) otrzymujemy zależność

$$S_n \leqslant T_n \leqslant 2S_{2^n}. \tag{13.5}$$

Prawdziwość tezy twierdzenia wynika teraz z nierówności (13.5) na mocy kryterium porównawczego. □

Powyższe twierdzenie bywa również nazywane kryterium zagęszczającym, kryterium zagęszczającym Cauchy'ego, etc. Nie mylić z „kryterium Cauchy'ego", które poznamy za chwilę.

Przykład 116. **Szereg harmoniczny rzędu** p, czyli szereg $\sum\limits_{n=0} \frac{1}{n^p}$ jest zbieżny, jeżeli $p > 1$ i rozbieżny, jeżeli $p \leqslant 1$.

Dowód. Jeśli $p \leqslant 0$, to szereg oczywiście jest rozbieżny, bo nie jest spełniony warunek konieczny 13.1.2 zbieżności szeregu. Dla $p > 0$ zastosujmy kryterim kondensacyjne 13.2.9. Przejdźmy do szeregu

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n \frac{1}{2^{np}} = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{(1-p)n}.$$

Teraz: $2^{1-p} < 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy $1 - p < 0$ i wystarczy przyjąć $q = 2^{1-p}$ aby uzyskać zbieżny szereg geometryczny. □

W szczególności z powyższego przykładu wynika rozbieżność szeregu harmonicznego, której dowodziliśmy wcześniej.

Przykład 117. Szereg $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ jest rozbieżny. Otóż widzimy, że szereg

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^n}{2^n \ln 2^n} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln 2^n} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln 2} = \frac{1}{\ln 2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$$

jest rozbieżny - jest to iloczyn stałej $\frac{1}{\ln 2}$ i szeregu rozbieżnego. Ponadto ciąg $(\frac{1}{n \ln n})_{n \in \mathbb{N}}$ jest nierosnący. Rozbieżność wyjściowego szeregu wynika teraz z kryterium kondensacyjnego.

Ćwiczenie. Zbadać zbieżność szeregu $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ w zależności od parametru $p \in \mathbb{R}$.

Twierdzenie 13.2.10 (Kryterum Cauchy'ego)**.** *Niech* $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *będzie ciągiem liczb nieujemnych.*

- *Jeżeli* $\limsup\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$, *to szereg* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *jest zbieżny.*

- *Jeżeli* $\limsup\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{a_n} > 1$, *to szereg* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *jest rozbieżny.*

Dowód. Niech $D = \limsup\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{a_n}$ i rozpatrzymy przypadki.

1. Niech najpierw $D < 1$. Weźmy $\alpha \in \mathbb{R}$ tak, że $D < \alpha < 1$. Istnieje (lemat 4.5.13) $N \in \mathbb{N}$ takie, że $\sqrt[n]{a_n} < \alpha$, $n \geqslant N$. Szereg $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \alpha^n$ jest zbieżny, gdyż $\alpha \in [0, 1)$ i zbieżność szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ wynika z kryterium porównawczego.

2. $D > 1$. Weźmy ciąg $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ l. naturalnych tak, że $\lim\limits_{k \to \infty} \sqrt[n_k]{a_{n_k}} = D$. A więc $a_{n_k} > 1$ dla nieskończenie wielu $k \in \mathbb{N}$. Czyli $\lim\limits_{n \to \infty} a_n \geqslant 1$ i nie może być spełniony warunek konieczny (twierdzenie 13.1.2) zbieżności szeregu.

□

Uwaga 13.2.11. Jeżeli $\limsup\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$ to kryterium 13.2.10 *nie* rozstrzyga zbieżności szeregu!

Uwaga 13.2.12. Oczywiście, jeżeli ciąg $(\sqrt[n]{a_n})_{n\in\mathbb{N}}$ jest zbieżny, to $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$ i możemy w celu posłużenia się kryterium 13.2.10 po prostu obliczyć granicę.

Uwaga 13.2.13. Możemy nawet opuścić warunek nieujemności wyrazów ciągu w twierdzeniu 13.2.10 zastępując wyrażenie $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$ przez $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$. W wypadku ciągu (z_n) liczb zespolonych, biorąc moduł liczby zespolonej z_n badamy granicę górną ciągu $\sqrt[n]{|z_n|}$.

Twierdzenie 13.2.14 (Kryterium d'Alemberta)**.** *Załóżmy, że $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest ciągiem nieujemnym.*

$$\textit{Jeżeli istnieje granica } D = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}, \textit{ to wtedy:}$$

- *gdy $D < 1$, to szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny,*

- *gdy $D > 1$, to szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny.*

Dowód. Załóżmy najpierw, że $D < 1$. Weźmy dow. liczbę rzeczywistą $\alpha \in (D, 1)$ Istnieje $N \in \mathbb{N}$ takie, że $\frac{a_{n+1}}{a_n} < \alpha$ dla $n \geqslant N$. Czyli

$$a_n < a_{n-1}\alpha,\ a_{n+1} < a_n\alpha, \ldots \text{ dla } n \geqslant N.$$

Możliwe do otrzymania nierówności możemy mnożyć stronami przez α ($> 0!$)

$$a_{n+1}\alpha < a_n\alpha^2 < a_{n-1}\alpha^3.$$

$$a_{N+2}\alpha < a_{N+1}\alpha^2 < a_N\alpha^3.$$

$$\vdots$$

$$a_n < a_{n-1}\alpha < a_{n-2}\alpha^2 < \ldots < a_{N-2}\alpha^{n-N+2} < a_{N-1}\alpha^{n-N+1} < a_N\alpha^{n-N},\ n > N.$$

Uzyskaliśmy oszacowanie $a_n < a_N\alpha^{n-N}$, $n > N$ a ponieważ $\alpha \in [0, 1)$, to szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \underbrace{(a_N\alpha^{-N})}_{\text{constans}}\alpha^n$ jest zbieżny (szereg geometryczny) i zbieżność szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ wynika z kryterium porównawczego.

Teraz załóżmy, że $D > 1$. Jeżeli $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, to ciąg $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest od pewnego miejsca niemalejący a ponadto jego wyrazy są nieujemne, zatem warunek 13.1.2 konieczny zbieżności szeregu nie może być spełniony. $\square$

Uwaga 13.2.15. Jeżeli w powyższym twierdzeniu $D = 1$, to tak jak poprzednio kryterium *nie* rozstrzyga zbieżności szeregu.

Kryterium d'Alemberta jest na ogół łatwiejsze w zastosowaniu niż Kryterium Cauchy'ego, ponieważ łatwiej jest obliczyć ułamki niż pierwiastki n-tego stopnia. Jednak Kryterium Cauchy'ego jest "silniejsze" w tym sensie, że w wielu przypadkach kryterium d'Alemberta nie daje żadnego rozstrzygnięcia podczas gdy kryterium Cauchy'ego wskazuje na zbieżność. Z drugiej strony, gdy kryterium Cauchy'ego nie daje rozstrzygnięcia, to również kryterium d'Alemberta nie daje rozstrzygnięcia zbieżności szeregu. Wystarczy przypomnieć oszacowanie (twierdzenie 4.8):

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} \leqslant \liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} \leqslant \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} \leqslant \limsup_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}.$$

Przykład 118. Zbadamy zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$$

Mamy

$$\frac{n+1}{2^{n+1}} \frac{2^n}{n} = \frac{1}{2}\left(\frac{n+1}{n}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{n+1}{n}\right) = \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{n}}{1} = \frac{1}{2} < 1$$

Zatem na mocy kryterium d'Alemberta szereg ten jest zbieżny. Akurat sumę szeregu jesteśmy w tanie w miarę łatwo obliczyć. Rozpiszmy $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \frac{4}{16} + \ldots = S$. Przyjrzyjmy się sumom częściowym S_3 i S_4.

$$S_3 = \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8}$$

$$S_4 = \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \frac{4}{16} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{4} + \frac{2}{8} + \frac{3}{16}$$

Stąd można zauważyć, że $S_4 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{2}S_3$.
Ogólnie:

$$S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2}S_{n-1}.$$

Zauważmy, że

$$2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^n}\right) = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2^{k+1}} = \sum_{k=1}^{n} 2^{k+1} = \sum_{k=0}^{n-1} 2^k.$$

Zatem

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} 2^k - \frac{1}{3}S_{n-1}\right) = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} 2^n - \frac{1}{2}S$$

$$\frac{3}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} 2^n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{2}}\right) = 1.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} = \frac{2}{3}.$$

Widzimy jednak, że musieliśmy „pokombinować” aby uzyskać wynik. Tak jak mówiliśmy, w ogólności szukanie sumy szeregu nie jest łatwym zadaniem. Trochę narzędzi pozwalających się z tego typu problemami mierzyć poznamy, gdy będziemy poznawać szeregi funkcyjne.

Przykład 119. Niech

$$\begin{cases} a_{2n-1} = \frac{2^{n-1}}{3^{n-1}}, \\ a_{2n} = \frac{2^{n-1}}{3^n}. \end{cases}$$

Sprawdzimy, że kryterium d'Alemberta nie pozwoli nam stwierdzić nic na temat zbieżności szeregu, podczas gdy z kryterium Cauchy'ego wynika zbieżność.

Ćwiczenie. Zbadać zbieżność szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot n!}{n^n}$.

Uwaga 13.2.16. Zarówno w twierdzeniu 13.2.10 jak i 13.2.14 możemy opuścić założenie o nieujemności wyrazów szeregu. Wówczas przyjmujemy odpowiednio $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ i $\limsup\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$. Uogólnienie dowodów zostawiamy dla chętnych czytelników.

Twierdzenie 13.2.17 (Kryterium kondensacyjne Schlömilcha)**.** *Ustalmy szereg liczbowy* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *o wyrazach nieujemnych taki, że ciąg jego wyrazów jest nierosnący. Niech dana będzie funkcja* $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *o tej własności, że*

$$\frac{f(n+1)-f(n)}{f(n)-f(n-1)} = \frac{\Delta f(n)}{\Delta f(n-1)} < N,\ n \in \mathbb{N}$$

dla pewnego $N > 0$*. Wówczas szereg* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy zbieżny jest szereg*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Delta f(n) a_{f(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(f(n+1) - f(n)\right) a_{f(n)}.$$

Zauważmy, że przyjmując $f(n) = 2^n$ w powyższym twierdzeniu, otrzymamy kryterium zagęszczające Cauchy'ego.

Ćwiczenie. Korzystając z kryterium Schlömilcha udowodnić, że szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{\sqrt{n}}}$ jest zbieżny. Wskazówka: przyjąć $f(n) = n^2$.

Rozdział 14

Całka niewłaściwa

14.1 Definicja całki po niezwartym zbiorze

Dotychczas określaliśmy całki Riemanna jedynie po podzbiorach przestrzeni $\mathbb{R}$, które są zwarte (czyli domknięte i ograniczone). Teraz określimy sposoby całkowania po zbiorach nie spełniających tego ostatniego warunku.

Definicja 14.1.1. Załóżmy, że funkcja $f\colon [a,b) \to \mathbb{R}$ $[f\colon (a,b] \to \mathbb{R}]$ jest całkowalna w sensie Riemanna na każdym przedziale $[a,c]$ $[[c,b]]$ dla $c \in (a,b)$. Jeżeli $b = +\infty$ $[a = +\infty]$ lub $\lim\limits_{c\to b^-} f(x) = \pm\infty$ $[\lim\limits_{c\to a^+} f(x) = \pm\infty]$, to całkę

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := \lim_{c\to b^-}\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x \quad \left[\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := \lim_{c\to a^+}\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x\right]$$

nazywamy **całką niewłaściwą** z funkcji f na przedziale $[a,b)$ $[(a,b]]$ a punkt b [punkt a] nazywamy **punktem osobliwym**.

Jeżeli granica w powyższej definicji istnieje i jest skończona, to o całce niewłaściwej mówimy, że jest **zbieżna**. W przeciwnym wypadku - **rozbieżna**. Jeżeli $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ oraz f jest całkowalna na każdym przedziale $[\alpha,\beta] \subseteq (a,b)$ oraz a, b są punktami osobliwymi, to

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x,$$

gdzie c jest dowolnym punktem przedziału (a,b).

Definicja 14.1.2 (Zbieżność bezwzględna całki niewłaściwej)**.** Jeżeli dla całki niewłaściwej $\int_a^b f$ mamy, że całka $\int_a^b |f|$ jest zbieżna to $\int_a^b f$ nazywamy **bezwzględnie zbieżną**. W *przeciwnym wypadku*, jeżeli $\int_a^b f$ *jest* zbieżna, to nazywamy ją zbieżną **względnie** lub **warunkowo**.

14.2 Kryteria zbieżności całek niewłaściwych

Twierdzenie 14.2.1. *Załóżmy, że funkcja $f\colon [a,b) \to \mathbb{R}$ jest całkowalna w sensie Riemanna na każdym przedziale $[a,c]$ dla $c \in (a,b)$ oraz b jest punktem osobliwym. Wówczas dla dowolnego ciągu*

$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *spełniającego warunek*

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n < \ldots < b,$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = b,$$

całka $\int_a^b f$ *jest zbieżna wtedy i tylko wtedy, gdy zbieżny jest szereg* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, *gdzie*

$$a_n = \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Dowód. Wystarczy zauważyć, że zachodzą następujące równości:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^{x_n} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

□

Twierdzenie 14.2.2. *Niech* $f, g\colon [a,b) \to \mathbb{R}$ *będą funkcjami całkowalnymi na każdym przedziale* $[a,c)$ *dla każdego* $c \in (a,b)$, b *punktem osobliwym oraz*

$$|f(x)| \leqslant g(x),\ x \in [a,b).$$

Wówczas jeżeli $\int_a^b g$ *jest zbieżna, to* $\int_a^b f$ *jest bezwzględnie zbieżna.*

Dowód. Ustalmy ciąg $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rosnący taki, że $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$. Oznaczmy:

$$a_n := \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)\,\mathrm{d}x,\ b_n := \int_{x_{n-1}}^{x_n} |f(x)|\,\mathrm{d}x,$$

$$c_n := \int_{x_{n-1}}^{x_n} g(x)\,\mathrm{d}x,\ n \in \mathbb{N}.$$

Mamy nierówności $|a_n| \leqslant b_n \leqslant c_n$, $n \in \mathbb{N}$. Stąd, zachodzą poniższe implikacje

$$\begin{array}{ccccc} & & & & \int_a^b |f| \text{ - zbieżna} \\ & & & & \Uparrow \\ \int_a^b g \text{ - zbieżna} & \overset{tw.14.2.1}{\Longrightarrow} & \sum_{n=1}^{\infty} c_n \text{ - zbieżny} & \overset{\text{Kryterium porównawcze}}{\Longrightarrow} & \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ - zbieżny i} \end{array}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \Leftarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ - bezwzgl. zbieżny} \Leftarrow \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \text{ - zbieżny.}$$

$$\Downarrow$$

$$\int_a^b f \text{ - zbieżna}$$

Czyli $\int_a^b f$ jest bezwzględnie zbieżna. □

W powyższym twierdzeniu oczywiście wystarczy aby funkcje f i g były ciągłe.

Twierdzenie 14.2.3. *Niech $f\colon [a,+\infty) \to [0,+\infty)$ będzie funkcją całkowalną na każdym przedziale $[a,c)$, $c \in (a,b)$. Wówczas $\int_a^\infty f$ jest zbieżna wtedy i tylko wtedy, gdy funkcja*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \text{ jest ograniczona.}$$

Dowód. Najpierw implikacja "w lewo".

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t,\ x \in [a,+\infty) \text{ jest rosnąca.}$$

Niech $x < y$. $F(y) - F(x) = \int_a^y f(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int_x^y f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0$ (gdyż $f \geqslant 0$). Jeżeli F jest ograniczona i monotoniczna (rosnąca), to istnieje granica $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$ i jest ona skończona. Mamy $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$, czyli $\int_a^{+\infty} f$ jest skończona. W drugą stronę: jeżeli F jest nieograniczona (i rosnąca), to $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = +\infty$. Stąd $\int_a^\infty f$ jest rozbieżna. □

Twierdzenie 14.2.4. *Niech $b \in \mathbb{R}$ lub $b = +\infty$ oraz niech $f\colon [a,b) \to \mathbb{R}$ będzie funkcją całkowalną w każdym przedziale $[\alpha,\beta] \subseteq [a,b)$. Wówczas całka niewłaściwa $\int\limits_a^b f$ jest zbieżna wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje taka liczba c, że dla dowolnych α, β spełniających nierówności $c < \alpha < \beta < b$ zachodzi*

$$\left| \int_\alpha^\beta f(x)\,\mathrm{d}x \right| < \varepsilon.$$

Twierdzenie 14.2.5 (Kryterium porównawcze dla całek niewłaściwych)**.** *Niech $f, g\colon [a,+\infty) \to [0,\infty)$ będą funkcjami całkowalnymi na każdym przedziale $[a,c)$, $c \in (a,b)$ oraz istnieje takie $A \geqslant a$, że dla każdego $x \in [A,\infty)$ zachodzi $f(x) \leqslant g(x)$. Wówczas*

1. *jeżeli $\int_a^\infty g$ jest zbieżna, to zbieżna jest $\int_a^\infty f$,*
2. *jeżeli $\int_a^\infty f$ jest rozbieżna, to rozbieżna jest $\int_a^\infty g$.*

Dowód.

$$\int_a^A f,\ \int_a^A g \text{ - skończone, jako całkie Riemanna.}$$

1. Zdefiniujmy $G(x) := \int_A^x g(t)\,\mathrm{d}t, x \geqslant A$.

$$\text{Jeśli } \int_a^{+\infty} g \text{ jest zbieżna, to f. } G \text{ jest ograniczona.}$$

$$\text{Ale } 0 \leqslant F(x) = \int_A^x f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant G(x), x \geqslant A.$$

$$F \text{ jest ograniczona na } [A. + \infty).$$

$$\int_A^{+\infty} f \text{ jest zbieżna, stąd } \int_a^{+\infty} f \text{ jest zbieżna.}$$

2. Załóżmy, że $\int\limits_a^{+\infty} f$ jest rozbieżna. Wtedy

$$\int_A^{+\infty} f \text{ jest rozbieżna i stąd } F \text{ jest nieograniczona na } [A, +\infty) \Rightarrow$$

$$G \text{ jest nieogranczona na } [A, +\infty) \Rightarrow \int_A^{+\infty} g \text{ jest rozbieżna} \Rightarrow \int_a^{+\infty} g \text{ jest rozbieżna.} \quad \square$$

Uwaga 14.2.6. Oczywiście, przy założeniach powyższego twierdzenia, gdy teza jest spełniona, to

$$\int_a^b f \leqslant \int_a^b g.$$

14.3 Całka w badaniu zbieżności szeregu

Twierdzenie 14.3.1 (Kryterium całkowe zbieżności szeregów)**.** *Załóżmy, że $f \colon [N, +\infty) \to [0, +\infty)$ jest funkcją całkowalną na każdym przedziale $[N, M]$, $M \in (N, +\infty)$ i nierosnącą. Wówczas*

$$\textit{szereg } \sum_{n=1}^{\infty} f(n) \textit{ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy całka } \int_N^{+\infty} f \textit{ jest zbieżna.}$$

Ponadto

$$\int_N^n f(x)\,\mathrm{d}x + f(n) \leqslant \sum_{k=N}^{n} f(k) \leqslant \int_N^n f(x)\,\mathrm{d}x + f(N), \ n > N.$$

Dowód. Z twierdzenia 11.4.4 dla każdego $k > N$ mamy oszacowanie:

$$f(k) \leqslant \int_{k-1}^{k} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant f(k-1).$$

Sumujemy stronami nierówności dla wszystkich $k > N$:

$$\sum_{k=N+1}^{n} f(k) \leqslant \sum_{k=N+1}^{n} \int_{k-1}^{k} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \underbrace{\sum_{k=N+1}^{n} f(k-1)}_{\substack{\| \\ \sum_{k=N}^{n-1} f(k)}}, \ n > N.$$

$$\sum_{k=N}^{n} f(k) - f(N) \leqslant \int_N^n f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=N}^{n} f(k) - f(n)$$

Zauważmy, że stąd już widać, iż:

$$\sum_{k=N}^{\infty} f(k) \text{ jest zbieżny} \Leftrightarrow \int_N^n f(x)\,\mathrm{d}x \text{ jest zbieżna}$$

Ponadto z poprzedniego oszacowania można łatwo przejść do nierówności:

$$\int_N^n f(x)\,\mathrm{d}x + f(n) \leqslant \sum_{k=N}^{n} f(k) \leqslant \int_N^n f(x)\,\mathrm{d}x + f(N)$$ □

Wniosek 14.3.2. Ponownie, niech $f\colon [N,+\infty) \to [0,+\infty)$ jest funkcją całkowalną na każdym przedziale $[N,M)$, $M \in (N,+\infty)$ i (słabo) malejącą. Wówczas ciąg

$$\left(\sum_{k=N}^{n} f(k) - \int_N^n f(x)\,\mathrm{d}x\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

jest zbieżny do liczby z przedziału $[0, f(N)]$.

Dowód. Przyjmijmy $y_n = \sum\limits_{k=N}^{n} f(k) - \int\limits_N^n f(x)\,\mathrm{d}x,\ n \in \mathbb{N}$.

$$y_n \geqslant 0 \ \ (y_n \geqslant f(n) \geqslant 0)$$

$$y_{n+1} - y_n = \sum_{k=N}^{n+1} f(k) - \int_N^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x - \sum_{k=N}^{n} f(k) + \int_N^n f(x)\,\mathrm{d}x = f(n+1) - \int_n^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 0.$$

Ciąg $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest malejący i ograniczony z dołu, stąd zbieżny. Z drugiej strony

$$y_n \leqslant f(N).$$ □

Przykład 120. Ciąg $\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ jest zbieżny do liczby z przedziału $[0,1]$. Wystarczy przyjąć $x_n = \left(\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \int\limits_1^n \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x\right)$ i z naszego **wniosku** mamy $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \gamma \in [0,1]$. Liczba γ nazywana jest stałą Eulera (nie mylić z **liczbą** e Eulera) albo stałą Mascheroniego (albo stałą Eulera-Mascheroniego) i wynosi około $0,5772156649$. Liczba ta ma wiele zastosowań w różnych gałęziach matematyki, np. teorii równań różniczkowych. Nie wiadomo, czy liczba ta jest wymierna, czy też niewymierna.

Rozdział 15

Aproksymacja funkcji (n+1)-krotnie różniczkowalnych

Przypomnijmy, że n-tą pochodną funkcji f oznaczamy jako $f^{(n)}$ i $f = f^0$. Niech $W(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$. Zauważmy, że

$$W(0) = a_0,\ W^{(1)}(0) = a_1,\ W^{(2)}(0) = 2!a_2, W^{(3)}(0) = 3!a_3, \ldots,\ W^{(n)}(0) = n!a_n.$$

Wnioskiem jest, że wielomian W można przedstawić w postaci:

$$W(x) = W(0) + \frac{W^{(1)}(0)x}{1!} + \frac{W^{(2)}(0)x^2}{2!} + \frac{W^{(3)}(0)x^3}{3!} + \ldots + \frac{W^{(n)}(0)x^n}{n!}.$$

Okazuje się, że dowolną funkcję $(n+1)$-krotnie różniczkowalną daje się przedstawić w ten sposób - jednak przedstawienie będzie obarczone pewnym błędem.

Twierdzenie 15.0.1 (Taylora)**.** *Niech $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ będzie funkcją klasy C^n w przedziale (a,b), $f^{(k)}$ jest ciągła w $[a,b]$, $k = 0, 1, \ldots, n$ i istnieje $f^{(n+1)}$ w przedziale (a,b). Ustalmy też $x_0 \in (a,b)$. Wtedy dla każdego $x \in (a,b)$ zachodzi następujący wzór:*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{(x-x_0)^k}{k!} f^{(k)}(x_0) \right) + R_{n,x_0}(x), \tag{15.1}$$

gdzie funkcja $R_{n,x_0}(x)$ nazywana resztą we wzorze Taylora spełnia warunek

$$\lim_{x \to x_0} \frac{R_{n,x_0}(x)}{(x-x_0)^n} = 0.$$

Wzór 15.1 nosi nazwę **wzoru Taylora**. Mówimy, że funkcję przedstawiliśmy przy pomocy wzoru Taylora albo rozwinęliśmy we wzór Taylora **w otoczeniu punktu** x_0. Często posługujemy się wzorem Taylora dla $x_0 = 0$ - tę szczególną postać nazywamy **wzorem Maclaurina**. Twierdzenie 15.0.1 mówi w istocie, że przy odpowiednich założeniach:

$$f(x) \approx \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-x_0)^k}{k!} f^{(k)}(x_0).$$

Reszta $R_{n,x_0}(x)$ wyraża tutaj błąd tego przybliżenia.

Uwaga 15.0.2. Jeżeli funkcja f spełnia założenia twierdzenia 15.0.1, a $M \geqslant 0$ jest liczbą taką, że

$$|f^{n+1}(x)| \leqslant M, \text{ dla każdego } x \in [a,b],$$

to wówczas

$$|R_n(x)| \leqslant \frac{M}{(n+1)!}|x-x_0|^{n+1}, x \in [a,b].$$

Uwaga 15.0.3. Twierdzenie Taylora można też udowodnić dla funkcji $f\colon [a,b] \to Y$, gdzie $[a,b]$ jest, jak poprzednio, przedziałem rzeczywistym, ale $(Y, \|\cdot\|)$ jest dowolną przestrzenią unormowaną. W poprzedniej uwadze zastępujemy wówczas $|f^{n+1}(x)|$ przez $\|f^{n+1}(x)\|$ i $\|R_n(x)\|$ i pozostaje ona w mocy.

Wcześniej, w rozdziale dotyczących różniczek, wyprowadziliśmy przybliżenie $\sin x \approx x$, dla x „bliskich" zeru. To samo przybliżenie można uzyskać przybliżając funkcję $x \mapsto \sin x$ przy pomocy wzoru Maclaurina.

Niech $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ będzie funkcją spełniającą założenia twierdzenia Taylora. Istnieje wiele znanych jawnych postaci reszty $R_{n,x_0}(x)$, ze wzoru 15.1. Twierdzenie 15.0.1 najłatwiej udowodnić, wychodząc od postaci wzoru 15.1 z resztą wyrażoną jawnym wzorem.

Podamy kilka jawnych postaci reszty $R_{n,x_0}(x)$, jednak przy pierwszym czytaniu czytelnikowi może wystarczyć reszta zformułowana w twierdzeniu 15.0.5.

Twierdzenie 15.0.4 (Reszta w postaci Schlömilcha-Roche'a)**.** *Dla każdego $p > 0$ istnieje takie $\xi \in [\min\{x,x_0\}, \max\{x,x_0\}]$, że*

$$R_{n,x_0}(x) = \frac{(x-x_0)^p(x-\xi)^{n+1-p}}{pn!} f^{n+1}(\xi).$$

Przyjmując w powyższym twierdzeniu $p = n+1$ otrzymujemy **postać Lagrange'a reszty**

Twierdzenie 15.0.5 (Reszta w postaci Lagrange'a)**.** *Istnieje takie $\xi \in [\min\{x,x_0\}, \max\{x,x_0\}]$, że*

$$R_{n,x_0}(x) = \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi). \tag{15.2}$$

Inaczej: istnieje takie $\theta \in [0,1]$, że

$$R_{n,x_0}(x) = \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x-x_0)). \tag{15.3}$$

Ćwiczenie. Mimo swej prostoty, reszta w postaci Lagrange'a w szczególnych przypadkach nie sprawdza się. Przyjmując w twierdzeniu Schlömilcha-Roche'a $p = n$ otrzymuje się tzw. **resztę w postaci Cauchy'ego**. Napisać wzór na resztę tej postaci.

Twierdzenie 15.0.6 (Reszta w postaci całkowej)**.**

$$R_{n,x_0}(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t. \tag{15.4}$$

Chcąc zatem znaleźć przybliżenie w otoczeniu zadanego punktu x_0 funkcji f wzorem Taylora *z zadaną dokładnością* η, musimy znaleźć rozwiązanie n_0 równania $\sup|R_{n,x_0}(x)| \leqslant \eta$ względem n. Oznaczmy raz jeszcze: $T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{(x-x_0)^k}{k!} f^{(k)}(x_0)\right)$ i niech $\Delta(x) := |f(x) - T_{n_0}(x)|$ - czyli błąd przybliżenia. Zakładając, że pochodna n_0-tego rzędu istnieje - wzór 15.1 przy $n = n_0$ przybliża funkcję f z zadaną dokładnością, tzn. $\Delta(x) \leqslant \eta$.

Przykład 121. Niech $f(x) = e^x, x \in \mathbb{R}$. Chcemy przybliżyć funkcję f z dokładnością do $0,001$ wartości liczby e. *TO-DO*

Zauważmy teraz jeszcze, że również z twierdzenia 15.0.1 wynika nierówność $e^x > x + 1$.

Przykład 122. Pokażemy, że $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2}, x \geqslant 0$ i oszacujemy błąd przybliżenia. Niech $f(x) = \sqrt{1+x}, x \geqslant 0$. Skorzystamy ze wzoru Taylora 15.1 przy $n = 1$ i $x_0 = 0$.

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{1+x}, \\ f'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{1+x}}, \\ f''(x) &= -\frac{1}{4\sqrt{(1+x)^3}}. \end{aligned}$$

$$f(x) = (x-0)^0 \frac{\sqrt{1+0}}{1!} + (x-0)^1 \frac{1}{2!} \cdot \frac{1}{2\sqrt{1+0}} + R_2(x) = 1 + \frac{x}{2} + R_2(x).$$

Uprościliśmy też notację błędu, pisząc po prostu $R_2(x)$. Zajmijmy się jego oszacowaniem. Skorzystamy z postaci Lagrange'a (15.2) reszty:

$$R_2(x) = \frac{x^2}{2!} \frac{1}{4\sqrt{(1+\xi)^3}}$$

dla pewnego $\xi \in (0, x)$. Szacujemy:

$$\left|\sqrt{1+x} - 1 - \frac{x}{2}\right| = |R_3(x)| = \left|\frac{x^2}{8} \frac{1}{\sqrt{(1+\xi)^3}}\right| \underset{(\xi \leqslant 0)}{\leqslant} \frac{x^2}{8}$$

Zatem np. dla $x \in [0, 1]$ błąd przybliżenia jest mniejszy lub rowny $\frac{1}{8}$.

Ćwiczenie. Rozwinąć funkcję $f(x) = \sqrt{1+x}$ przy pomocy wzoru Taylora z $n = 2$ i oszacować błąd przybliżenia.

Podstawiając $x = x_0 + h$ we wzorze (15.1) uzyskujemy alternatywną postać:

$$f(x_0 + h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} h^k + R_n(x_0, h).$$

Np. postać Lagrange'a reszty w tym wzorze przyjmuje postać

$$R_n(x_0, h) = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta h)}{(n+1)!} h^{n+1},$$

dla pewnego $\theta \in (0, 1)$.

Jeżeli funkcja $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ jest klasy C^∞ (na (a,b)), to możemy rozważać następujący **szereg Taylora**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) \tag{15.5}$$

Zachodzi następujące

Twierdzenie 15.0.7. *Niech $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ będzie funkcją klasy C^∞ w przedziale (a,b). Wówczas*

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) \tag{15.6}$$

wtedy i tylko wtedy, gdy ciąg reszt $\left(R_{n,x_0}(x)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ we wzorze 15.1 jest zbieżny do zera:

$$\lim_{n\to\infty} R_{n,x_0}(x) = 0. \tag{15.7}$$

*Mówimy wtedy, że funkcja f jest **analityczna**.*

Uwaga 15.0.8. Warunek (15.7) jest w szczególności spełniony, gdy wszystkie pochodne funkcji f są wspólnie ograniczone w przedziale (a,b), tzn. istnieje taka stała $M > 0$, że dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi nierówność:

$$\left|f^{(n)}(x)\right| < M, \text{ dla każdego } x \in (a,b).$$

Twierdzenie 15.0.9. *Dla dowolnej liczby $x \in \mathbb{R}$:*

$$e^x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n!}. \tag{15.8}$$

Dowód. Wystarczy rozwinąć funkcję $x \mapsto e^x$ w szereg Maclaurina (ćwiczenie). □

Bywa, że liczbę e *definiuje* się jako sumę szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$. Korzystając z powyższego twierdzenia możemy udowodnić ważne

Twierdzenie 15.0.10. *Liczba e jest liczbą niewymierną.*

Dowód. Załóżmy nie wprost, że $e = \frac{p}{q}$ przy czym $p, q \in \mathbb{Z}$. Wiemy też, że $2 < \frac{p}{q} < 3$ oraz, że $\frac{p}{q} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$. Pomnóżmy tę równość obustronnie przez $q!$. Mamy

$$p(q-1)! = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q!}{n!} = \sum_{n=0}^{q} \frac{q!}{n!} + \sum_{n=q+1}^{\infty} \frac{q!}{n!}$$

$$= q! + \frac{q!}{1!} + \frac{q!}{2!} + \frac{q!}{3!} + \ldots + \frac{q!}{q!} + \left(\frac{1}{(q+1)} + \frac{1}{(q+1)(q+2)} + \frac{1}{(q+1)(q+2)(q+3)} + \ldots\right).$$

Zatem pierwsza część sumy ($\sum_{n=0}^{q} \frac{q!}{n!}$) jest oczywiście liczbą naturalną. Oszacujmy z góry drugą część sumy ($\sum_{n=q+1}^{\infty} \frac{q!}{n!}$):

$$\sum_{n=q+1}^{\infty} \frac{q!}{n!} = \frac{1}{(q+1)} + \frac{1}{(q+1)(q+2)} + \frac{1}{(q+1)(q+2)(q+3)} + \ldots = \sum_{n=q+1}^{\infty} \frac{1}{(q+1)^n} = \frac{1}{q} \leqslant 1.$$

Ale $p(q-1)!$ jest liczbą naturalną a z powyższego wynika, że liczba po prawej stronie równania nie może być naturalna. □

Niech $\exp(x) := \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n!}$. Czyli $\exp x = e^x$ - funkcja *exponent* (ang. wykładnik) - funkcja wykładnicza. Korzystając z rozwinięcia funkcji $x \mapsto e^x$ w szereg łatwo udowodnić

Twierdzenie 15.0.11. *Funkcja* $\exp\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *jest*

1. *ciągła i różniczkowalna w każdym punkcie swojej dziedziny,*
2. *ściśle rosnąca,*
3. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \exp(x) = \exp(x)$*,*
4. $\exp(0) = 1$*,* $\exp(x) \neq 0, x \in \mathbb{R}$*,*
5. $\exp(z + w) = \exp(x)\exp(y)$*,* $x, y \in \mathbb{R}$*,*
6. $(\exp(x))^n = \exp(xn), n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}$*,*
7. $\lim\limits_{x\to\infty} \exp(x) = \infty$ *i* $\lim\limits_{x\to-\infty} \exp(x) = 0$*,*
8. $\lim\limits_{x\to\infty} x^n \exp(-x) = 0$*.*

Ćwiczenie. Sprawdzić wzory

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \; x \in \mathbb{R} \tag{15.9}$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}, \; x \in \mathbb{R} \tag{15.10}$$

$$\ln(1 + x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n, \; -1 < x \leqslant 1 \tag{15.11}$$

$$(1 + x)^m = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{m(m-1)\dots(m-k+1)}{k!} x^k. \tag{15.12}$$

Przykład 123 (Zadanie teoretyczne). Niech $a \in \mathbb{R}$ i niech f będzie dwukrotnie różniczkowalną funkcją rzeczywistą określoną na $(a, +\infty)$. Oznaczmy

$$\begin{aligned} M_0 &= \inf_{x\in(a,+\infty)} |f(x)|, \\ M_1 &= \inf_{x\in(a,+\infty)} |f'(x)|, \\ M_2 &= \inf_{x\in(a,+\infty)} |f(x)|. \end{aligned}$$

Udowodnić, że

$$M_1^2 \leqslant 4M_0M_2.$$

Plan rozwiązania: Jeżeli $h > 0$, to z twierdzenia Taylora wynika, że dla pewnego $\xi \in (x, x + 2h)$ zachodzi

$$f'(x) = \frac{1}{2h} (f(x + 2h) - f(x)) - hf''(\xi).$$

Zatem

$$f'(x) \leqslant hM_2 + \frac{M_0}{h}.$$

Aby pokazać, że równość $M_1^2 = 4M_0M_2$ może być spełniona, można położyć $a = -1$ i określić funkcję f wzorem

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 1, & \text{dla } -1 < x < 0; \\ \frac{x^2-1}{x^2+1}, & \text{dla } 0 \leqslant x < \infty. \end{cases}$$

a następnie pokazać, że wówczas $M_0 = 1, M_1 = 4, M_2 = 4$.

Rozdział 16

Ciągi i szeregi funkcyjne

16.1 Ciągi funkcyjne

Definicja 16.1.1. Niech X będzie dowolnym zbiorem, (Y, σ) przestrzenią metryczną oraz $f_n\colon X \to Y, n \in \mathbb{N}$, $f\colon X \to Y$ dowolnymi funkcjami.
Mówimy, że ciąg $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest **zbieżny punktowo** do f, jeżeli dla każdego $x \in X$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x).$$

Piszemy wtedy

$$\lim_{n\to\infty} f_n = f, \;\; f_n \xrightarrow{n\to\infty} f \text{ lub } f_n \to f.$$

Definicja 16.1.2. Niech X będzie dowolnym zbiorem, (Y, σ) przestrzenią metrycznyną oraz $f_n\colon X \to Y, n \in \mathbb{N}$, $f\colon X \to Y$ dowolnymi funkcjami.
Mówimy, że ciąg $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest **zbieżny jednostajnie** do f, jeżeli

$$\forall_{\varepsilon>0}\exists_{N\in\mathbb{N}}\forall_{n\geqslant N}\forall_{x\in X}.\ \sigma(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$$

Piszemy wtedy $f_n \overset{X}{\rightrightarrows} f$.

Definicja 16.1.3. Niech (X, ρ) (Y, σ) będą przestrzeniami metrycznynymi oraz $f_n\colon X \to Y, n \in \mathbb{N}$, $f\colon X \to Y$ dowolnymi funkcjami.
Mówimy, że ciąg $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest **prawie (lub niemal) zbieżny jednostajnie** do f, jeżeli dla dowolnego zbioru zwartego $K \subseteq A$:

$$f_n\big|_K \overset{K}{\rightrightarrows} f\big|_K$$

Zauważmy, że jeżeli zapiszemy definicję zbieżności punktowej zachodzącej na całym zbioreze X symbolicznie, za pomocą kwantyfikatorów:

$$\forall_{x\in X}\forall_{\varepsilon>0}\exists_{N\in\mathbb{N}}\forall_{n\geqslant N}.\ \sigma(f_n(x), f(x)) < \varepsilon,$$

to wystarczy przestawić pierwszy kwantyfikator w odpowiednie miejsce by uzyskać definicję zbieżności jednostajnej.

Twierdzenie 16.1.4. *Niech X będzie pewnym zbiorem niepustym, (Y, σ) przestrzenią metryczną, $f_n, f\colon X \to Y, n \in \mathbb{N}$.*
Ciąg $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest zbieżny jednostajnie do f wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in X} \sigma\left(f_n(x), f(x)\right) = 0. \tag{16.1}$$

Przykład 124. Niech $D \subseteq \mathbb{R}$ i $f_n\colon D \to \mathbb{R}$ będą dane wzorem

$$f_n(x) = \frac{x}{n},\ x \in D, n \in \mathbb{N}.$$

Oczywiście dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$ zachodzi $\frac{x}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$ zatem $f_n \to 0$, gdzie 0 rozumiemy jako *funkcję* stałą $x \mapsto 0$.
Jeżeli zatem $f_n \overset{D}{\rightrightarrows} f$ dla pewnej funkcji f, to musi być $f = 0$.
Rozważmy $D = \mathbb{R}$:

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n - 0| = \sup_{x\in\mathbb{R}} \left|\frac{x}{n}\right| = \infty$$

zatem nie może zachodzić równość

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n - 0| = 0.$$

Czyli $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nie jest zbieżny jednostajnie do 0 na całym zb. $\mathbb{R}$.
Ćwiczenie. Udowodnić, że ciąg $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest zbieżny jednostajnie, gdy $f_n\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ dane są wzorem $f_n(x) = \sqrt{x+n+1} - \sqrt{x+n}$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$.
Ćwiczenie. Udowodnić, że ciąg $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest zbieżny jednostajnie, gdy $f_n\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dane są wzorem

$$f_n(x, y) = \frac{1}{|x| + |y| + 1} \sin \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{n},\ n \in \mathbb{N}.$$

Twierdzenie 16.1.5. *Ciąg $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $f_n\colon X \to Y$ zbieżny jednostajnie spełnia następujący warunek Cauchy'ego:*

$$\forall_{\varepsilon>0} \exists_{N\in\mathbb{N}} \forall_{x\in X.}\ \sigma(f_n(x), f(x)) < \varepsilon.$$

Dowód. Oznaczmy przez f granicę ciągu $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Ustalmy $\varepsilon > 0$. Istnieje $n_0 \in \mathbb{N}$ takie, że dla $n \geqslant N$ mamy $\sigma\left(f_n(x), f(x)\right) < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Dla dowolnych $n, m \geqslant N$ mamy następujące oszacowanie:

$$\sigma(f_n(x), f_m(x)) \leqslant \sigma(f_n(x), f(x)) + \sigma(f(x), f_m(x)) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

□

Twierdzenie 16.1.6. *Niech (Y, σ) będzie przestrzenią metryczną zupełną. Wówczas $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $f_n\colon X \to Y$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia warunek Cauchy'ego.*

Dowód. Załóżmy, że $\forall_{\varepsilon>0} \exists_{N\in\mathbb{N}} \forall_{x\in X.}\ \sigma(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$. Wówczas $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x), x \in X$. Pokażemy, że zbieżność jest jednostajna. Weźmy dowolne $\varepsilon > 0$. Wówczas istnieje $N \in \mathbb{N}$ tak, że

$$\forall_{n,m\geqslant N.}\ \sigma(f_n(x), f_m(x)) < \varepsilon, x \in X.$$

Ustalmy $n \in \mathbb{N}$. Mamy $\lim\limits_{m\to\infty} \sigma(f_n(x), f_m(x)) = \sigma(f_n(x), f(x)) \leqslant \varepsilon, x \in X$. Czyli ciąg $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest zbieżny jednostajnie z dowolności wyboru ε i n. Z poprzedniego twierdzenia dowód wynika w drugą stronę. □

Twierdzenie 16.1.7. *Niech (X,ρ), (Y,σ) będą przestrzeniami metrycznymi, $\varnothing \neq A \subseteq X$, $f_n, f\colon A \to Y, n \in \mathbb{N}$.*
Jeżeli $f_n \overset{A}{\rightrightarrows} f$ oraz f_n, $n \in \mathbb{N}$ są funkcjami ciągłymi, to f jest funkcją ciągłą.

Dowód. Niech $x_0 \in A$. Ustalmy $\varepsilon > 0$. Istnieje $n_0 \in \mathbb{N}$ takie, że dla każdego $n \geqslant n_0$

$$\sigma(f_n(x), f(x)) < \frac{\varepsilon}{3}, x \in X.$$

W szczególności

$$\sigma(f_{n_0}(x), f(x)) < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{$*$}$$

Funkcja f_{n_0} jest ciągła zatem istnieje $\delta > 0$ taka, że

$$\forall_{x\in A} \rho(x, x_0) < \delta \Rightarrow \sigma(f_{n_0}(x), f_{n_0}(x_0)) < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{$**$}$$

Ustalmy $x \in A$ i załóżmy, że $\rho(x, x_0) < \delta$. Obliczamy:

$$\sigma(f(x), f(x_0)) \leqslant \sigma(f(x), f_{n_0}(x)) + \sigma(f_{n_0}(x), f_{n_0}(x_0)) + \sigma(f_{n_0}(x_0), f(x_0)) <$$
$$< \frac{\varepsilon}{3} + \underset{(z\ (*))}{\frac{\varepsilon}{3}} + \underset{(z\ (**))}{\frac{\varepsilon}{3}} = \varepsilon.$$

□

Twierdzenie 16.1.8. *Niech (X,ρ), (Y,σ) będą przestrzeniami metrycznymi, $\varnothing \neq A \subseteq X$, $f_n, f\colon A \to Y, n \in \mathbb{N}$.*
Jeżeli $f_n, n \in \mathbb{N}$ są ciągłe oraz ciąg $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest prawie jednostajnie zbieżny do f, to f jest ciągła.

Zatem, jeżeli znajdziemy granicę punktową ciągu funkcji ciągłych, nim podejmiemy się sprawdzania jego zbieżności jednostajnej, warto zwrócić uwagę, czy sama granica jest funkcją ciągłą. Jeśli nie, to ciąg nie jest zbieżny jednostajnie i sprawa jest rozstrzygnięta. Jednakże uwaga: twierdznie *nie* zachodzi w drugą stronę.

Przykład 125. Niech $f_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ dane będą wzorem $f_n(x) = x^n, n \in \mathbb{N}$. Wówczas $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$, gdzie

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{dla } 0 \leqslant x < 1, \\ 0, & \text{dla } x = 1. \end{cases}$$

f jest oczywiście nieciągła w $x = 1$, mimo że funkcje f_n są ciągłe jako funkcje wielomianowe.

Poniższe twierdzenie może być w oczywisty sposób użyteczne, do określania zbieżności jednostajnej niektórych ciągów funkcyjncyh, ale jest też wykorzystywany dla przeniesienia niektórych twierdzeń dotyczących całkowania ciągów funkcyjnych (do których zaraz przejdziemy) na całki niewłaściwe.

Twierdzenie 16.1.9 (Diniego)**.** *Niech E jest zwartym podzbiorem pewnej przestrzeni metrycznej. Ponadto niech $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będzie ciągiem funkcyjnym takim, że*

- $\left(f_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *jest niemalejący lub nierosnący,*

- *f_n są ciągłe dla każdego n,*

- $\lim\limits_{n\to\infty} = f$.

Wówczas $f_n \overset{E}{\rightrightarrows} f$.

Dowód. Załóżmy, że $f_n \geqslant f_{n+1},\ n \in \mathbb{N}$. Ustalmy $\varepsilon > 0$. Przyjmijmy $g_n = f_n - f$ a wówczas g jest funkcją ciągłą dla dowolnego n oraz $g_n \geqslant g_{n+1}, n \in \mathbb{N}$. Oznaczmy

$$E_n = \big\{x \in E\colon g_n(x) \geqslant \varepsilon\big\}.$$

Z ciągłości g_n wynika, że E_n jest zbiorem domkniętym dla dowolnego n, gdyż

$$E_n = g_n^{-1}\Big[\overbrace{[\varepsilon,\infty)}^{\text{zbiór domkn.}}\Big] \subseteq E.$$

Ponieważ $\lim\limits_{n\to\infty} g_n(x) = 0$, więc istnieje $N \in \mathbb{N}$ takie, że $g_n(x) < \varepsilon$ dla $n \geqslant N$, czyli $\bigcap\limits_{n=0}^{N} E_n = \varnothing$. Dowolny skończony przekrój rodziny $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ będzie pusty, więc ze zwartości zbioru E i twierdzenia 5.6.20 wynika, że $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} E_n = \varnothing$, czyli dla dowolnego $x \in E$ mamy, że:

$$\text{dla każdego } n \in \mathbb{N} \text{ zachodzi } g_n(x) < \varepsilon.$$

A więc ciąg $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest zbieżny jednostajnie. Rozważając ciąg $\big(-f_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ otrzymamy twierdzenie dla ciągu nierosnącego. □

Przestrzeń funkcji ciągłych: Niech (X,d) będzie przestrzenią metryczną **zwartą**. Oznaczamy przez $\mathcal{C}(X)$ zbiór wszystkich funkcji ciągłych określonych na przestrzeni X o wartościach rzeczywistych:

$$\mathcal{C}(X) = \big\{f \in \mathbb{R}^X :\ f \text{ jest funkcją ciągłą.}\big\}.$$

Definicja 16.1.10. Niech $f \in \mathcal{C}(X)$. **Supremum normą** nazywamy wartość

$$\|f\|_\infty := \sup_{x\in X} |f(x)|.$$

Wówczas funkcja $\rho\colon \mathcal{C}(X) \times \mathcal{C}(X) \to \mathbb{R}$ dana wzorem $\rho(f,g) := \|f-g\|_\infty,\ f,g \in \mathcal{C}(X)$ jest metryką:

Twierdzenie 16.1.11. *Przestrzeń $(\mathcal{C}(X),\rho)$ jest przestrzenią metryczną zupełną.*

Możemy teraz sformułować twierdzenie 16.1.4 w alternatywny sposób (po prawdzie w szczególnym przypadku):

Twierdzenie. *Ciąg $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ($f_n\colon X \to \mathbb{R}$) jest zbieżny do $f\colon X \to \mathbb{R}$ w sensie metryki $\rho\colon \mathcal{C}(X)^2 \to \mathbb{R}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $f_n \overset{X}{\rightrightarrows} f$.*

16.1.1 Całkowanie i różniczkowanie ciągów funkcyjnych

Twierdzenie 16.1.12. *Niech $f_n\colon [a,b] \to \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$. Załóżmy, że*

- *f_n są różniczkowalne dla $n \in \mathbb{N}$,*

- *istnieje takie $\bar{x}$, że ciąg $(f_n(\bar{x}))_{n\in\mathbb{N}}$ jest zbieżny do pewnej funkcji $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$,*

- *ciąg $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ pochodnych jest jednostajnie zbieżny do pewnej funkcji $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$.*

Wówczas

(i) Ciąg $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest jednostajnie zbieżny do $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$,

(ii) funkcja f jest różniczkowalna,

(iii) $f' = g$.

Dowód. Ustalmy $\varepsilon > 0$. Istnieje takie $N \in \mathbb{N}$, że

$$|f_m(\bar{x}) - f_n(\bar{x})| < \frac{\varepsilon}{2},\ m,n \geqslant N$$

i równocześnie

$$\forall_{\substack{n,m\in\mathbb{N}\\ m,n\geqslant N}} |f_m'(x) - f_n'(x)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)},\ x \in (a,b).$$

Funkcja $f_n - f_m$ spełnia założenia twierdzenia Lagrange'a i stąd istnieje $\xi \in (\bar{x}, x)$ $(\bar{x}, x \in (a,b))$ takie, że

$$\frac{(f_n(x) - f_m(x)) - (f_n(\bar{x}) - f_m(\bar{x}))}{x - \bar{x}} = f_n'(\xi) - f_m'(\xi).$$

Ustalmy $n, m \geqslant n_0$, $x \in (a,b)$.

$$f_n(x) - f_m(x) = (f_n'(\xi) - f_m'(\xi))\,(x - \bar{x}) + f_n(\bar{x}) - f_m(\bar{x}).$$

$$\begin{aligned}|f_n(x) - f_m(x)| &\leqslant |f_n(\bar{x}) - f_m(\bar{x})| + \underbrace{|x - \bar{x}|}_{<(b-a)} |f_n'(\xi) - f_m'(\xi)| \leqslant \\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{2} + (b-a)\frac{\varepsilon}{2(b-a)} = \varepsilon.\end{aligned}$$

Mamy, że ciąg $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest jednostajnie zbieżny.

Ustalmy $x_0 \in (a,b)$. Zdefinujmy funkcję $\varphi_n\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ następująco:

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} \frac{f_n(x) - f_n(x_0)}{x - x_0}, & x \neq x_0 \\ f'(x_0), & x = x_0. \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}, x \in (a,b).$$

Oraz funkcję $\varphi\colon (a,b) \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$, $\varphi(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

$$\varphi_n \text{ - ciągłe, } n \in \mathbb{N}.$$

Sprawdzimy, że $\varphi_n \rightrightarrows \varphi$. Ustalmy $\varepsilon > 0$. Wówczas, korzystając ponownie z tw. Lagrange'a, dla pewnego ξ mamy

$$|\varphi_n(x) - \varphi_m(x)| = \left| \frac{f_n(x) - f_n(x_0) - f_m(x) + f_m(x_0)}{x - x_0} \right| = |f_n'(\xi) - f_m'(\xi)|.$$

$(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ jest jednostajnie zbieżny. Istnieje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, że

$$\forall_{\substack{n,m\in\mathbb{N}\\ n,m\geqslant n_0}} |f_n'(x) - f_n'(x)| < \varepsilon,\ x \in (a,b).$$

Ustalmy $n, m \geqslant n_0,\ x \in (a,b)$. Mamy

$$|\varphi_n(x) - \varphi_m(x)| = |f_n'(\xi) - f_m'(\xi)| < \varepsilon.$$

Zatem ciąg $(\varphi)_{n\in\mathbb{N}}$ jest jednostajnie zbieżny.
Pokażemy, że f jest różniczkowalna w x_0.

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \varphi(x) = \lim_{x\to x_0} \Big(\lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) \Big) =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \left(\lim_{x\to x_0} \varphi_n(x) \right) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x_0) = \varphi(x_0) = g.$$

Czyli $\Big(\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)\Big)' = (f(x))' = g(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n'(x) = f(x)$. □

Twierdzenie 16.1.13. *Załóżmy, że* $f_n \colon [a,b] \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ *są funkcjami całkowalnymi w sensie Riemanna. Jeżeli* $f_n \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} f$, $f \colon [a,b] \to \mathbb{R}$, *to*

(i) *f jest całkowalna w sensie Riemanna,*

(ii) *zachodzi wzór*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

Dowód. Przyjmijmy $\varepsilon_n := \sup\limits_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)|$. Wówczas

$$f_n(x) - \varepsilon_n \leqslant f(x) \leqslant f_n(x) + \varepsilon_n,\ n \in \mathbb{N}.$$

Z definicji całki górnej i dolnej:

$$\underline{\int_a^b} (f_n(x) - \varepsilon_n)\,\mathrm{d}x \leqslant \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \overline{\int_a^b} (f_n(x) + \varepsilon_n)\,\mathrm{d}x. \tag{16.2}$$

Stąd otrzymamy, że

$$0 \leqslant \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x - \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 2\varepsilon_n(b-a).$$

Ponieważ $f_n \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} f$, to na mocy twierdzenia 16.1.4 $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$ a więc z twierdzenia o trzech ciągach całka górna i dolna funkcji są sobie równe. Korzystając z tej wiedzy, tym razem z równania 16.2 dostaniemy, że

$$\left| \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x \right| \leqslant \varepsilon_n(b-a).$$

Stąd już przy $n \to \infty$ dostajemy, że $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x$. □

16.2 Szeregi funkcyjne

W tej części będziemy zakładać, że $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

Definicja 16.2.1. Niech $X \neq \varnothing$ będzie dowolnym zbiorem, $f_n \colon X \to \mathbb{K}$, $n \in \mathbb{N}$.
Ciąg sum częściowych (S_n) zdefiniujemy jako

$$S_n(x) := f_0(x) + f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_{n-1}(x) + f_n(x).$$

Ciąg $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nazywamy **szeregiem funkcyjnym** i oznaczamy

$$\left(\sum_{k=0}^{n} f_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

zaś sumę $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ tego szeregu:

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n$$

przy czym podobnie jak w przypadku szeregów najczęściej utożsamiamy symbol sumy szeregu z oznaczeniem samego szeregu.

Mówimy, że szereg funkcyjny jest

- zbieżny punktowo, gdy odpowiedni ciąg $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest zbieżny punktowo;
- zbieżny jednostajnie, gdy ciąg $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest jednostajnie zbieżny;
- prawie (niemal) jednostajnie zbieżny, gdy ciąg $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest niemal jednostajnie zbieżny;

i nazywamy odpowiednio **szeregiem zbieżnym punktowo**, **szeregiem zbieżnym jednostajnie**, **szeregiem prawie (niemal) jednostajnie zbieżnym**.

Twierdzenie 16.2.2. *Jeżeli szereg funkcyjny jest jednostajnie zbieżny, to jest zbieżny punktowo. Jeżeli (X, ρ) jest przestrzenią metryczną to każdy szereg jednostajnie zbieżny jest prawie jednostajnie zbieżny a każdy szereg prawie jednostajnie zbieżny jest zbieżny punktowo.*

Twierdzenie 16.2.3. *Jeżeli (X, ρ) jest przestrzenią metryczną, $f_n \colon X \to \mathbb{K}, n \in \mathbb{N}$ są funkcjami ciągłymi a szereg $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ jest (prawie) jednostajnie zbieżny, to jego suma jest funkcją ciągłą.*

Dowód. (ćwiczenie) □

Z twierdzenia o całkowaniu ciągów funkcyjnych, wynika że jeżeli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ jest zbieżny jednostajnie do funkcji $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ na odp. przedziale, to

$$\int_a^b f = \int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n.$$

16.2.1 Kryteria zbieżności szeregów funkcyjnych

Twierdzenie 16.2.4 (Kryterium jednostajne Cauchy'ego dla szeregów funkcyjnych)**.** *Niech* $X \neq \varnothing$*,* $f_n\colon X \to \mathbb{K}$*,* $n \in \mathbb{N}$*.*
Wówczas szereg $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *jest zbieżny jednostajnie wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\forall_{\varepsilon>0}\exists_{N\in\mathbb{N}}\forall_{n,m\geqslant N}\forall_{x\in X} \left|\sum_{k=n+1}^{m} f_k(x)\right| < \varepsilon.$$

Dowód.

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n \text{ jednostajnie zbieżny.} \Leftrightarrow (S_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ jedn. zbieżny.} \Leftrightarrow$$

$$\forall_{\varepsilon>0}\exists_{N\in\mathbb{N}}\forall_{n,m\geqslant N}\forall_{x\in X} |S_m(x) - S_n(x)| < \varepsilon \Leftrightarrow$$

$$\forall_{\varepsilon>0}\exists_{N\in\mathbb{N}}\forall_{n,m\geqslant N}\forall_{x\in X} \left|\sum_{k=n+1}^{m} f_k(x)\right| < \varepsilon$$

□

Twierdzenie 16.2.5 (Kryterium Weierstrassa)**.** *Niech* $X \neq \varnothing$*,* $f_n\colon X \to \mathbb{K}$*,* $n \in \mathbb{N}$*. Jeżeli istnieje taki ciąg liczbowy* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *o wartościach dodatnich, że*

$$\forall_{x\in X}\forall_{n\in\mathbb{N}}|f_n(x)| \leqslant a_n;$$

oraz $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *jest zbieżny, to szereg funkcyjny* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *jest jednostajnie zbieżny.*

Dowód.

Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, zatem dla ustalonego $\varepsilon > 0$ istnieje taki n_0, że dla każdych $n, m \geqslant n_0$ oraz $m > n$ zachodzi

$$\sum_{k=n+1}^{m} a_n < \varepsilon.$$

Wykorzystamy kryterium jednostajne Cauchy'ego. Ustalmy $n, m \geqslant n_0$, $m > n$ oraz $x \in X$. Mamy

$$\left|\sum_{k=n+1}^{m} f_k(x)\right| \leqslant \sum_{k=n+1}^{m} |f_k(x)| \leqslant \sum_{k=n+1}^{m} a_n < \varepsilon.$$

□

Twierdzenie odwrotne nie jest prawdziwe.

Przykład 126. Niech $f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będą dane wzorem $f_n(x) = \frac{\sin nx}{n}^2$, $x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$. Ponieważ $|f_n(x)| \leqslant \frac{1}{n^2}$, $x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$ a zbieżny jest szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2},$$

to szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$$

jest zbieżny jednostajnie w $\mathbb{R}$.

Twierdzenie 16.2.6 (Kryterium Abela)**.** *Niech $X \neq \varnothing$, $A \subseteq X$ oraz $f_n\colon X \to \mathbb{K}, n \in \mathbb{N}$, $g_n\colon X \to \mathbb{K}, n \in \mathbb{N}$. Jeżeli szereg*

$$\sum_{n=1}^{\infty} g_n$$

jest zbieżny jednostajnie na zbiorze A, dla każdego $x \in A$ ciąg $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ jest monotoniczny oraz istnieje taka liczba M, że dla prawie wszystkich n zachodzi

$$\forall_{x\in A}\, |f_n(x)| \leqslant M,$$

to szereg funkcyjny

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n \cdot g_n$$

jest zbieżny na zbiorze A.

Zastosowanie szeregów funkcyjnych - przykład:

Twierdzenie 16.2.7. *Istnieje funkcja $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ciągła na $\mathbb{R}$ ale nie różniczkowalna w żadnym punkcie.*

Dowód. Zdefiniujmy funkcję $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ następująco:

$$g(x) = \begin{cases} |x|, & x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \\ g(x+1), & \text{w pozost. przypadkach.} \end{cases}$$

Definiujemy ciąg $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$g_1(x)\colon = \frac{g(2x)}{2}, x \in \mathbb{R},$$

Wówczas: $|g_n(x)| \leqslant \frac{1}{2^n}, x \in \mathbb{R}$. Każda funkcja g_n jest ciągłą i okresowa - o okresie $\dfrac{1}{2^n}$. Zdeiniujmy funkcję f w następujący sposób:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g(2^n x)}{2^n}, x \in \mathbb{R}.$$

Z twierdzenia16.2.5 szereg $\sum\limits_{n=0}^{\infty} g_n$ jest jednostajnie zbieżny, gdyż zbieżny jest szereg $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}}$. Z twierdzenie 16.2.3 funkcja f jest ciągła. Teraz chcemy uzasadnić, że funkcja f nie może być różniczkowalna w żadnym punkcie prz. $\mathbb{R}$. Weźmy dowolne $x \in \mathbb{R}$. Wówczas istnieje ciąg $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $\lim\limits_{n\to\infty} h_n = 0$, że

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{f(x+h_n)-f(x)}{h_n} \right| = +\infty,$$

czyli funkcja f nie jest różniczkowalna w x. □

16.2.2 Szeregi potęgowe

Definicja 16.2.8. Niech $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będzie ciągiem liczb zespolonych. Szereg funkcyjny

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$$

nazywamy szeregiem potęgowym o środku w punkcie x_0.

Najczęściej rozważamy szereg o środku w zerze - $x_0 = 0$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$.

Dla uproszczenia wykładu w dalszej części przyjmujemy, że $0^0 = 1$.

Definicja 16.2.9. Wartość

$$R = \sup\left\{ x \geqslant 0\colon \text{ szereg } \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|(x-x_0)^n \text{ jest zbieżny.} \right\}$$

nazywamy **promieniem zbieżności** szeregu potęgowego $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

Zatem jeśli R jest promieniem zbieżności szeregu potęgowego $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, to szereg ten jest zbieżny dla $|x| < R$, a dla $|x| > R$ jest rozbieżny. Np. dla szeregu geometrycznego $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$ mamy oczywiście $R = 1$ i zwróćmy uwagę, że dla $x = 1$ albo $x = -1$ szereg geometryczny jest rozbieżny. Zbieżność w krańcach przedziału zbieżności, tj. zbieżność dla punktów $x = R$, $x = -R$ musimy sprawdzać oddzielnie (podstawić R, $-R$ pod x i zbadać uzyskany szereg).

Twierdzenie 16.2.10. *Jeżeli szereg* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ *jest zbieżny w pewnym punkcie* $x_0 \neq x_1 \in \mathbb{C}$, *to jest zbieżny prawie jednostajnie i bezwzględnie w kole*

$$K(x_0, |x_0 - x_1|) = \{x \in \mathbb{C}\colon |x - x_0| < |x_0 - x_1|\}.$$

Jeżeli szereg ten jest rozbieżny w pewnym punkcie x_2, *to jest on rozbieżny w zbiore* $\mathbb{C}\backslash\overline{K}(x_0, |x-x_0|)$.

Pokażemy, że jeżeli szereg $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ jest zbieżny w pewnym punkcie $x_0 \neq x_1 \in \mathbb{C}$, to jest zbieżny jednostajnie i bezwzględnie w kole $K(0, x_1) = \{x \in \mathbb{C}\colon |x| < x_1\}$. Z warunku koniecznego zbieżności szeregu wynika, że $a_n x^n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Ciąg ten jest zatem ograniczony, np. przez $M > 0$. Niech $x \in K(0, x_1)$, to

$$|a_n x^n| < |a_n| x_1^n = |a_n x^n| \cdot \frac{x_1^n}{|x|^n} \leqslant M \left(\frac{x_1}{|x|}\right)^n.$$

Przyjmując $q := x_1/|x|$ otrzymujemy szereg $\sum\limits_{n=0}^{\infty} Mq^n$ geometryczny, zbieżny, którego wyraz ogólny ograniczająca szereg $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ i na mocy kryterium Weierstrassa zbieżności szeregów funkcyjnych, szereg ten również jest zbieżny.

Twierdzenie 16.2.11 (Cauchy'ego-Hadamarda)**.** *Niech $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będzie ciągiem liczb zespolonych oraz niech*

$$\lambda = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Wówczas promień zbieżności szeregu $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ *wynosi:*

- 0, *jeżeli* $\lambda = +\infty$,
- $+\infty$, *jeżeli* $\lambda = 0$,
- $\frac{1}{\lambda}$, *jeżeli* $\lambda \in (0, \infty)$.

Dowód. Zastosujemy kryterium Cauchy'ego zbieżności szeregów. Zgodnie z oznaczeniami w tezie twierdzenia

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n(x-x_0)^n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|(x-x_0)^n| \cdot |a_n|} = |x - x_0| \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = |x - x_0|\lambda.$$

Rozważmy trzy przypadki

1. $\lambda = 0$.
   W tym wypadku szereg jest zbieżny, dla każdego $x \in \mathbb{R}$. Rzeczywiście, dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$ mamy wówczas
   $$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n(x-x_0)^n|} = |x - x_0|\lambda = 0 < 1.$$
   Na mocy kryterium Cauchy'ego szereg $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ jest *bezwzględnie* rozbieżny.
2. $\lambda = +\infty$.
   W tym wypadku oczywiście szereg jest zbieżny tylko dla $x = x_0$. Jeśli $x \neq x_0$, to
   $$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n(x-x_0)^n|} = |x - x_0|\lambda = \infty.$$
   Na mocy kryterium Cauchy'ego szereg $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ jest rozbieżny.
3. $\lambda \in (0, +\infty)$.
   Mamy wówczas
   $$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n(x-x_0)^n|} = |x - x_0|\lambda < \infty.$$
   Na mocy kryterium Cauchy'ego wnioskujemy, że

- szereg $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ jest *bezwzględnie* zbieżny, jeżeli $|x-x_0|\lambda < 1$, czyli kiedy

$$|x-x_0| < \frac{1}{\lambda}$$

- szereg $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ jest rozbieżny, jeżeli $|x-x_0|\lambda > 1$, czyli kiedy

$$|x-x_0| > \frac{1}{\lambda}$$

Czyli mamy, że szereg jest zbieżny, dla $x \in \left(x_0 - \frac{1}{\lambda}, x_0 + \frac{1}{\lambda}\right)$, natomiast *nie* wiemy jak szereg zachowuje się w krańcach przedziału (punktach $x = x_0 - \frac{1}{\lambda}$ i $x = x_0 + \frac{1}{\lambda}$)

□

Uwaga 16.2.12. Oczywiście, możemy w powyższym twierdzeniu zastąpić λ również granicą $\lambda = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$. Porównaj twierdzenie 13.2.14 i wzór 4.8.

Przykład 127. Rozważmy szereg $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^{2n} = 1 + x^2 + x^4 + \ldots$. Możemy określić ciąg $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ następująco:

$$a_n = \begin{cases} 1, & \text{gdy } n \text{ jest parzyste;} \\ 0, & \text{gdy } n \text{ jest nieparzyste.} \end{cases}$$

Wtedy

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Dalej, badamy podciągi ciągu $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[2k]{|a_{2k}|} = 1,$$

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[2k-1]{|a_{2k-1}|} = 0.$$

Zatem $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$, więc szereg jest zbieżny dla $|x| < 1$. $R = 1$. Można też było oczywiście zauważyć, że nasz szereg jest szeregiem geometrycznym o ilorazie równym x^2.

Twierdzenie 16.2.13. *Jeśli* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *jest szeregiem potęgowym o dodatnim promieniu zbieżności, to funkcja*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

jest ciągła w przedziale $(-R, R)$*.*

Różniczkowanie i całkowanie szeregów potęgowych.

Twierdzenie 16.2.14. *Niech $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będzie ciągiem rzeczywistym, oraz niech szereg*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, x \in \mathbb{R}$$

ma dodatni promień zbieżności R. Wówczas szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n$$

ma również promień zbieżności R, funkcja $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^{n-1}, x \in (-R, R)$ jest różniczkowalna oraz

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}.$$

Dowód. $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|na_n|} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} \limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = R$ - pr. zb. szeregu $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.
Z twierdzenia o różniczkowaniu ciągów funkcyjnych

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ jest prawie jednostajnie zbieżny.

(2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ jest zbieżny przynajmniej w jednym punkcie.

Z (1) i (2) f jest różniczkowalna i $\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)' = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (a_n x^n)'$. □

Przykład 128. Możemy obliczyć sumę szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n n x^n$. Oznaczamy:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n x^n, |x| < 1;$$

Mamy $f(x) = x\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n x^{n-1} = x\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n (x^n)' = x\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-x)^n\right)' = x\left(\dfrac{-x}{1+x}\right)' =$

$$= x\frac{-1-x+x}{(1+x)^2} = \frac{-x}{(1+x)^2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n x^n = \frac{-x}{(1+x)^2} \tag{16.3}$$

Szereg Taylora a szereg potęgowy.

Niech $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, oraz $f(0) = a_0$. Zbadajmy kolejne pochodne funkcji f:

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}, f'(0) = a_1,$$

$$f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}, f''(0) = 2a_2,$$

$$f'''(x) = \sum_{n=3}^{\infty} n(n-1)(n-2) a_n x^{n-3}, f'''(0) = 6a_3$$

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) a_n x^{n-k}, f^{(k)}(0) = k! a_k$$

Zauważmy, że $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$. Ponadto widzimy, że f jest klasy C^{∞}. I oczywiście można uogólnić i pokazać, że również:

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n.}$$

Widzimy, że powyższe wyrażenie, to znany nam szereg Taylora.

Twierdzenie 16.2.15 (O całkowaniu funkcji analitycznej)**.** *Funkcje analityczne posiadają funkcje pierwotne wewnątrz swojego obszaru zbieżności. W szczególności dla funkcji f:*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

funkcja

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$$

ma ten sam promień zbieżności co f.

Wywód jest tu trochę zbędny w świetle już udowodnionych twierdzeń. Jednak, rozpiszmy

Dowód. Ponieważ funkcje f_n i f są ciągłe w swoim obszarze zbieżności, to odpowiednie całki istnieją. Całkując dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ wyrażenie

$$f(x) = f_1(x) + \ldots + f_n(x) + R_{n+1}(x),$$

otrzymujemy

$$\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x a_0\,\mathrm{d}t + \int_0^x a_1 t\,\mathrm{d}t + \ldots + \int_0^x a_n t^n\,\mathrm{d}t + \int_0^x R_{n+1}(t)\,\mathrm{d}t =$$

$$= a_0 t + \frac{a_1}{2} t^2 + \ldots + \frac{a_n}{n+1} t^{n+1} + \int_0^x R(t)_{n+1}\, \mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1} t^{k+1} + \int_0^x R(t)_{n+1}\, \mathrm{d}t.$$

Musimy wykazać, że

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^x R_{n+1}(t)\, \mathrm{d}t = 0. \tag{16.4}$$

Ustalmy $\varepsilon > 0$. Ze zbieżności jednostajnej szeregu wynika, że dla $n > N$ zachodzi nierówność

$$|R_{n+1}(x)| < \varepsilon,$$

dla wszystkich x leżących w przedziale zbieżności tego szeregu. Wówczas dla $n > N$ zachodzi oszacowanie

$$\left| \int_0^x R_{n+1}(t)\, \mathrm{d}t \right| \leqslant \int_0^x |R_{n+1}(t)|\, \mathrm{d}t \leqslant x \cdot \varepsilon,$$

co dowodzi, że zachodzi równość (16.4). □

Przykład 129. Ponownie obliczymy sumę szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$. Tym razem rozważając szereg potęgowy $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$.

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, \ |x| < 1$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = \left(\frac{1}{1-x} \right)' = \frac{1}{(1-x)^2}, \ |x| < 1$$

$$\text{Zatem} \quad \sum_{n=1}^{\infty} n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} n x^n = \frac{x}{(1-x)^2}, \ \text{dla } |x| < 1$$

Podstawmy $x = \frac{1}{2}$. $|x| < 1$ i wtedy z powyższej równości mamy

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{1}{2} \right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} = \frac{\frac{1}{2}}{(1 - \frac{1}{2})^2} = 2.$$

Przykład 130. Znajdziemy rozwinięcie funkcji $f(x) = \ln(1+x)$ w szereg potęgowy. Zauważmy, że $\ln(1+x) = \int \frac{1}{1+x}\, \mathrm{d}x$ (całka elementarna). Korzystając z wzoru na sumę szeregu geometrycznego obliczamy

$$\ln(1+x) = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t} = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1-(-t)} = \int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} (-t)^{n-1}\, \mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x (-1)^{n-1} t^{n-1}\, \mathrm{d}t =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} \quad \text{i jak widzimy, jest to szereg potęgowy.}$$

Przykład 131. Podobnie jak powyżej, korzystając z sumy $\sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$, $|x| < 1$ otrzymać możemy też, że:

$$\ln \frac{1}{1-x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}, \quad \text{dla } |x| < 1.$$

Sumując wzory z poprzednich dwóch przykładów dostajemy kolejny wzór:

$$\frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}, \quad \text{dla } |x| < 1.$$

Twierdzenie 16.2.16 (Abela)**.** *Załóżmy, że $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest ciągiem rzeczywistym. Jeżeli szereg potęgowy $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $x \in \mathbb{R}$ o dodatnim promieniu zbieżności R jest zbieżny w jednym z końców przedziału zbieżności, to suma szeregu jest w tym punkcie ciągła.*

Dowód. Pokażemy, że funkcja f jest ciągła w R, czyli $\lim_{R-} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$. Mamy przypadki

1. $R = 1$: Ustalmy $\varepsilon > 0$. Chcemy pokazać, że istnieje $\delta > 0$ takie iż

$$\left| f(x) - \sum_{n=0}^{\infty} a_n \right| < \varepsilon, \quad \text{dla } x > 1 - \delta.$$

Obliczamy

$$\sum_{k=0}^{n} a_k x^k = \sum_{k=0}^{n} (S_k - S_{k-1}) x^k = \sum_{k=0}^{n} S_k x^k - \sum_{k=0}^{n} S_{k-1} x^k =$$
$$= \sum_{k=0}^{n-1} S_k x^k - S_n x^n - \sum_{k=0}^{n-1} S_k x^{k+1} = \sum_{k=0}^{n-1} S_k (x^k - x^{k+1}) + S_n x^n =$$
$$= (1-x) \sum_{k=0}^{n-1} S_k x^x + S_n x^n.$$

Przy $n \to \infty$ dla $|x| < 1$ mamy $S_n x^n \to 0$ a stąd $x^n \to 0$, bo $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest ciągiem niemalejącym, ograniczonym. Mamy

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} S_n x^n.$$

$S = \lim_{n\to\infty} S_n$ czyli istnieje $n_0 \in \mathbb{N}$ takie, że

$$(*) \qquad |S_n - S| < \frac{\varepsilon}{2}, \ n \geqslant n_0$$

Przeprowadzamy obliczenia dla $x \in [0,1)$:

$$|f(x) - S| = |\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - S| \overset{(?)}{=} \left|(1-x)\sum_{n=0}^{\infty} S_n x^n - (1-x)\sum_{n=0}^{\infty} S x^n\right| \leqslant$$

$$\leqslant (1-x)\sum_{n=0}^{\infty} |S_n - S| x^n = (1-x)\sum_{n=0}^{n_0-1} |S_n - S| x^n + \underbrace{(1-x)\sum_{n=n_0}^{\infty} \overbrace{|S_n - S|}^{<\frac{\varepsilon}{2} \text{ z } (*)} x^n}_{\leqslant (1-x)\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1} <$$

$$< \underbrace{(1-x)\sum_{n=0}^{n_0-1} |S_n - S| x^n}_{\substack{\text{Funkcja ograniczona} \\ \text{na } [0,1]}} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Zatem istnieje takie $\delta > 0$, że dla dowolnego x, jeżeli $1 - x < \delta$, to

$$(1-x)\sum_{n=0}^{n_0-1} |S_n - S| x^n < \frac{\varepsilon}{2}.$$

2. $R \neq 1$: Rozważmy funkcję $g\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ daną wzorem $g(t) = f(Rt), t \in [0,1]$.

$$g(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n t^n.$$

Oznaczmy $\lambda_f = \limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ i $\lambda_g = \limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n R^n|}$. Wówczas

$$\lambda_g = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n R^n|} = R \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = R \cdot \lambda_f = 1.$$

Promieniem zbieżności szeregu $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n R^n t^n$ jest 1 oraz g jest ciągła w 1. Ale $f(x) = g\left(\frac{x}{R}\right)$, $x \in (-R, R]$, czyli f jest ciągła w R.

□

Przykład 132. Wykażemy, że szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n! x^n$ jest zbieżny tylko dla $x = 0$.

Fakt, że szereg jest zbieżny dla $x = 0$ jest oczywisty. Niech $x \neq 0$. Wówczas na podstawie obliczeń:

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{(n+1)! x^{n+1}}{n! x^n}\right| = \lim_{n\to\infty} |(n+1)x| = +\infty > 1$$

rozbieżność szeregu wynika z kryterium d'Alemberta.

Przykład 133. Zbadamy obszar zbieżności szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n! x^n}$. Szereg jest określony dla $x \neq 0$. Korzystamy z kryterium d'Alemberta:

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{n! x^n}{(n+1)! x^{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(n+1)|x|} = 0 < 1.$$

Szereg jest zbieżny niezależnie od wyboru $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Przykład 134. Wyznaczymy obszar zbieżności szeregu $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n10^{n-1}}$.

Ćwiczenie. Wykazać, że szereg $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ jest zbieżny dla każdego $x \in \mathbb{R}$.

Ćwiczenie. Wyznaczyć obszar zbieżności szeregu $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.

Ćwiczenie. Zbadać promień zbieżności szeregów $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 2^n x^n$ i $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 3^n (x-2)^n$.

Ćwiczenie. Zbadać promień zbieżności szeregu $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin \frac{x}{3^n}$.

Przykład 135. Szereg $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n2^n}$.

Dodatek A

Aproksymacja funkcji ciągiem wielomianów

Definicja A.0.1. Niech $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$. **Wielomianem Bernsteina** stopnia n funkcji f nazywamy funkcję daną wzorem

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) B_k^n(x),\ n \in \mathbb{N}, x \in [0,1],$$

gdzie $B_k^n(x)$ to tak zwany *wielomian bazowy Bernsteina* dany wzorem

$$B_k^n(x) = \begin{cases} x^k(1-x)^{n-k} & \text{dla } k \in \{0,1,\ldots,n\}, \\ 0 & \text{dla } k < 0 \text{ lub } k > n. \end{cases}$$

Same wielomiany bazowe Bernsteina znajdują zastosowanie w grafice komputerowej i modelowaniu różnych powierzchni. Możemy się przyjżeć kilku pierwszym wielomianom bazowym:

$$\begin{aligned} B_0^0(x) &= 1 \\ B_0^1(x) &= 1-x \\ B_1^1(x) &= x \\ B_0^2(x) &= (1-x)^2 \\ B_1^2(x) &= 2(1-x)x \\ B_2^2(x) &= x^2 \\ B_0^3(x) &= (1-x)^3 \\ B_1^3(x) &= 3(1-x)^2x \\ B_2^3(x) &= 3(1-x)x^2 \\ B_3^3(x) &= x^3 \end{aligned}$$

Zauważmy ponadto, że $B_k^n(x) \geqslant 0, x \in [0,1]$ i $B_k^n(x) = B_{n-k}^k(1-x)$.

Będziemy dla funkcji f jej wielomiany bernsteina stopnia n oznaczać w tym rozdziale przez f_n.

Zapamiętajmy:

$$\boxed{f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k}}$$

Lemat A.0.2. *Dla dowolnych $n \in \mathbb{N}$, $x \in [0,1]$:*

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = 1$

2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = nx$

3. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = n(n-1)x^2 + nx$

4. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (k-nx)^2\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = nx(1-x).$

Dowód. 1. Mamy $1 = 1^n = (x + (1-x))^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$. Dla dowodu wzoru 2. Podstawmy w 1. $n-1$ za n. Wówczas

$$\sum_{k=0}^{n-1} n\binom{n-1}{k} x^k (1-x)^{n-1-k} = 1.$$

Mnożymy powyższą równość obustronnie przez nx i mamy:

$$\sum_{k=0}^{n} n\binom{n-1}{k} x^{k+1} (1-x)^{n-1-k} = \sum_{k=0}^{n} n\binom{n-1}{k-1} x^k (1-x)^{n-k} = nx.$$

Ponadto $n\binom{n-1}{k-1} = n\dfrac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = k\dfrac{n!}{k!(n-k)!} = k\binom{n}{k}$. Podstawiając ten wynik do poprzedniego wzoru dowód równości 2. jest zakończony. Teraz podstawmy $n-1$ za n we wzorze 2.. Wówczas mamy

$$\sum_{k=0}^{n-1} k\binom{n-1}{k} x^k (1-x)^{n-1-k} = (n-1)x.$$

Po przemnożeniu stronami przez nx:

$$\sum_{k=0}^{n-1} kn\binom{n-1}{k} x^{k+1} (1-x)^{n-k-1} = n(n-1)x^2$$

$$\sum_{k=1}^{n} (k-1)n\binom{n-1}{k-1} x^k (1-x)^{n-k} = n(n-1)x^2$$

$$\sum_{k=1}^{n} (k-1)k\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = n(n-1)x^2$$

Do ostatniej równości dodajemy stronami równość 2.: $\sum\limits_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} = nx$.

$$\sum_{k=1}^{n}\left((k-1)k\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} + k\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\right) = n(n-1)x^2 + nx.$$

$$\sum_{k=1}^{n}\left(k^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} - \left(k\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\right) + k\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\right) = n(n-1)x^2 + nx.$$

Mamy 3.:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} = n(n-1)x^2 + nx.$$

Postostało do udowodnienia już tylko 4.:

$$\sum_{k=0}^{n}(k-nx)^2 B_k^n(x) = \sum_{k=0} k^2 B_k^n(x) - \sum_{k=0}^{n} 2knx B_k^n(x) + \sum_{k=0}^{n} n^2x^2 B_k^n(x) =$$
$$= n(n-1)x^2 + nx - 2nx\cdot nx + n^2x^2\cdot 1 = -nx^2 + nx = nx(1-x).$$

□

Twierdzenie A.0.3 (Stone'a-Weierstrassa)**.** *Dowolną funkcję ciągłą, określoną na przedziale zwartym można aproksymować ciągiem wielomianów, zbieżnym jednostajnie do tej funkcji.*

Dowód. Ustalmy $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$. Chcemy sprawdzić, że $f_n \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} f$. Rozpatrzmy najpierw szczególny przypadek, gdy $a=0, b=1$. Funkcja ciągła na przedziale $[a,b]$ jest jednostajnie ciągła (twierdzenie 7.2.13). Ustalmy $\varepsilon > 0$. Istnieje $\delta > 0$ takie, że

$$\forall_{x,y\in[0,1].}\ \left(|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}\right).$$

Funkcja f jest ograniczona, gdyż jest ciągła na $[0,1]$. Istnieje $M > 0$ takie, ż

$$|f(x) \leqslant M,\ x \in [0,1].$$

Gdy

1. $\left|x - \dfrac{k}{n}\right| < \delta$, to $|f(x)-f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$;

2. $\left|x - \dfrac{k}{n}\right| \geqslant \delta$, to $\left(\dfrac{nx-k}{n}\right)^2 \geqslant \delta^2 \Leftrightarrow \left(\dfrac{nx-k}{n\delta}\right)^2 \geqslant 1$. Stąd

$$\left|f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| \leqslant |f(x)| + \left|f\left(\frac{k}{n}\right)\right| \leqslant 2M \leqslant 2M\left(\frac{nx-k}{n\delta}\right)^2.$$

Czyli w każdym przypadku $\left|f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| < \frac{\varepsilon}{2} + 2M\left(\frac{nx-k}{n\delta}\right)^2$. Korzystając z lematu A.0.2 uzyskujemy oszacowanie:

$$|f(x) - f_n(x)| = \left|\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f(x)x^k(1-x)^{n-k} - \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{n}{k}\right)x^k(1-x)^{n-k}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=0}^{n}\left|f(x) - f\left(\frac{n}{k}\right)\right| x^k(1-x)^{n-k} < \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{\varepsilon}{2} + 2M\left(\frac{nx-k}{n\delta}\right)^2\right)x^k(1-x)^{n-k} =$$

$$= \frac{\varepsilon}{2} \underbrace{\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}}_{\text{równe 1 na mocy lematu A.0.2 (1.)}} \underbrace{+ 2M\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{(nx-k)^2}{(n\delta)^2}x^k(1-x)^{n-k}}_{\text{lemat A.0.2 (2.)}} =$$

$$= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2M}{(n\delta)^2}nx(1-x) = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2M}{n\delta^2}x(1-x).$$

$\frac{2M}{n\delta^2} \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ a wartości ciągłego odwzorowania $x \mapsto x(1-x)$ zawężonego do przedziału $[0,1]$ są ograniczone. Stąd $\frac{2M}{n\delta^2}x(1-x) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Istnieje zatem n_0 takie, że

$$\frac{2M}{n\delta^2}x(1-x) < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ dla } n \geqslant n_0.$$

Aby udowodnić twierdzenie dla funkcji $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ dowolnej (pozbyć się założenia, że $a = 0$, $b = 1$), wystarczy zdefiniować funkcję $g(x) = (b-a)f(x) + a$. Funkcja g jest ciągłą funkcją określoną na przedziale $[0,1]$ i jak już udowodniliśmy istnieje ciąg wielomianów $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $g_n \stackrel{[1,0]}{\rightrightarrows} g$. Ale $f(x) = \frac{g(x)-a}{b-a}$, $x \in [a,b]$ jest wtedy funkcją jednostajnie ciągłą i ciąg wielomianów dany wzorem $f_n(x) = \frac{g_n(x) - a}{b-a}$, $x \in [a,b]$ jest zbieżny jednostajnie do f. □

Dodatek B

Struktury algebraiczne, ciała uporządkowane

B.1 Zbiory z działaniami

Niech $\mathbb{K}$ będzie dowolnym zbiorem.

Definicja B.1.1. Działaniem wewnętrznym w zbiorze $\mathbb{K}$ nazywamy każdą funkcję $f\colon \mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K}$.

Operacją jest np. dodawanie: $+\colon \mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ ale oczywiście przyjmujemy, że $a + b$ oznacza $+(a, b)$ dla $a, b \in \mathbb{K}$. Chodzi nam o to, by zdefiniować ściśle różnego rodzaju operacje na dwóch argumentach zbioru, takie jak suma, iloczyn ale także np. składanie funkcji w określonym zbiorze funkcji. Działania na zbiorze oznaczamy często np. $+, -, \circ, \bullet, \star, *$ i piszemy np. $a - b, f \circ g, \bar{v} \bullet \bar{u}, \alpha \star \beta, x * y$ dla różnych elementów zbiorów, na których działania są określone.

B.1.1 Przykład: grupy

B.2 Ciała i ciała uporządkowane

Definicja B.2.1. Uporządkowaną piątkę $(\mathbb{K}, \oplus, \bullet, \theta, \eta)$, gdzie $\oplus\colon \mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K}$, $\bullet\colon \mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ nazywamy **ciałem**, gdy

1. spełnia aksjomaty dodawania:

   (C.1.a) *przemienność* dodawania: $a \oplus b = b \oplus a,\ \ a, b \in \mathbb{K}$,

   (C.1.b) *łączność* dodawania: $(a \oplus b) \oplus c = b \oplus (a \oplus c),\ \ a, b, c \in \mathbb{K}$,

   (C.1.c) θ jest *elementem neutralnym* dodawania: $a \oplus \theta = a,\ \ a \in \mathbb{K}$,

   (C.1.d) dla każdego $a \in \mathbb{K}$ istnieje *element przeciwny* czyli $b \in \mathbb{K}$ takie, że $a + b = \theta$. (i przyjmujemy oznacznie $b = -a$)

2. spełnia aksjomaty mnożenia:

   (C.2.a) *przemienność* mnożenia: $a \bullet b = b \bullet a,\ \ a, b \in \mathbb{K}$, (C.2.b) *łączność* mnożenia: $(a \bullet b) \bullet c = b \bullet (a \bullet c)$, $a, b, c \in \mathbb{K}$,

(C.2.c) η jest *elementem neutralnym* mnożenia: $a \bullet \eta = a$, $a \in \mathbb{K}$,

(C.2.d) dla każdego $a \in \mathbb{K} \setminus \{\theta\}$ istnieje *element odwrotny* czyli $b \in \mathbb{K}$ takie, że $a \bullet b = \eta$. (i przyjmujemy oznaczenie $b = a^{-1}$)

3. aksjomat **rozdzielności mnożenia względem dodawania**:

(C.3) $$a \bullet (b \oplus c) = a \bullet b \oplus a \bullet c, \ a, b, c \in \mathbb{K}$$

Działanie $\bullet$ nazywamy **multiplikatywnym** (mnożeniem) a $\oplus$ **addytywnym** (dodawaniem) w ciele $\mathbb{K}$. Liczbę η nazywamy **jedynką *w ciele*** $\mathbb{K}$ a θ **zerem *w ciele*** $\mathbb{K}$. Oznaczmy $\mathbb{K}^* := \mathbb{K} \setminus \{\theta\}$. Wówczas $(\mathbb{K}, +, \theta)$ i $(\mathbb{K}^*, \bullet, \eta)$ stanowią grupy - nazywamy je odpowiednio grupą addytywną i grupą multiplikatywną ciała $(\mathbb{K}, \oplus, \bullet, \theta, \eta)$.

Zbiór $\mathbb{K}$ nazywamy **ciałem uporządkowanym** gdy jest ciałem, które dodatkowo spełnia warunki

1.1. $a + b < a + c$, dla dowolnych $a, b, c \in \mathbb{K}$ takich, że $b < c$,

1.2. $a \bullet b > \theta$, jeżeli $a > \theta$ i $b > \theta$,

Jeżeli $a > \theta$, to $a \in \mathbb{K}$ nazywamy **elementem dodatnim**, jeżeli $a < \theta$ to a nazywamy **elementem ujemnym**.

***Struktura ilorazowa.**

Niech dane będą przestrzenie X, X^* oraz określone na nich relacje równoważności $R \subseteq X$, $R^* \subseteq X^*$.

Definicja B.2.2. Mówimy, że odwzorowanie $F \colon X \to X^*$ jest **zgodne z relacjami** R i R^*, gdy $xRy \Leftrightarrow F(x)R^*F(y)$, tj.
$$(x, y) \in R \Leftrightarrow (F(x), F(y)) \in R^*.$$

Gdy $F \colon X \to X^*$ jest zgodne z relacjami R i R^*, to istnieje takie odwzorowanie $G \colon X/R \to X/R^*$ przestrzeni ilorazowych, że
$$H \circ \varphi = \varphi \circ F,$$
gdzie $\varphi \colon X \to X/R$, $\varphi \colon X^* \to X/R^*$ są odwozorawniami kanonicznym między odpowiednimi przestrzeniami, co ilustruje następny diagram[1].

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{F} & X^* \\ \downarrow{\scriptstyle \varphi} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi^*} \\ X/R & \xrightarrow{G} & X^*/R^* \end{array}$$

[1]diagramy *skierowane*, w których wybierając dowolną drogę skierowaną między dwoma wierzchołkami, otrzymamy ten sam wynik względem składania morfizmów nazywamy *diagramami przemiennymi*.

B.2.1 Ciało liczb rzeczywistych

Konstrukcja Dedekinda

Konstrukcja poprzez ciągi Cauchy'ego

Dowody własności specyficznych dla l. rzeczywistych

Aksjomat (Archimedesa)**.** *Każdy odcinek jest krótszy od pewnej wielokrotności długości dowolnego innego odcinka.*

Często posługujemy się arytmetyczną formą tego starożytnego „aksjomatu", jednak we współczesnej matematyce jest to twierdzenie:

Twierdzenie B.2.3. *Jeżeli $x, y > 0$, to istnieje taka liczba naturalna n, że $n \cdot x < y$.*

Dowód. Załóżmy nie wprost, że $nx \leqslant y$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Oznaczmy

$$A = \{nx \colon n \in \mathbb{N}\}.$$

Zbiór $A \subseteq \mathbb{R}$ jest ograniczony z góry przez y zatem istnieje jego kres górny - oznaczmy $\alpha = \sup A$. Liczba $\alpha - x$ (bo $x > 0$) jest ściśle mniejsza od α więc nie może być ograniczeniem górnym zbioru A (z definicji α jest najmniejszym z ograniczeń górnych zbioru A). Istnieje zatem $mx \in A$ (dla pewnego $m \in \mathbb{N}$) takie, że $\alpha - x < mx$. Ale wówczas

$$\alpha < (m+1)x \leqslant \alpha \text{ (gdyż } (m+1)x \in A).$$

Taka nierówność stanowi oczywistą sprzeczność. Koniec dowodu. □

Mówi się, że liczby rzeczywsite spełniają **własność** lub **aksjomat Archimedesa** a także, że liczby rzeczywiste są **archimedesowskie**.

B.2.2 Ciało liczb zespolonych

Liczby zespolone stanowią rozszerzenie liczb rzeczywistych. Ciało liczb rzeczywistych jest podciałem ciała $(\mathbb{C}, 0, 1, +, \cdot)$ liczb zespolonych. Nim w ogóle zdefiniujemy ciało $\mathbb{C}$, nauczymy się podstaw rachunkowych i intuicji oraz zastosowań liczb zespolonych, które potem wyprowadzimy z definicji algebraicznej ciała.

Definicja B.2.4. Jednostką urojoną nazywamy pewien element $i \in \mathbb{C}$ taki, że

$$\boxed{i^2 = 1.}$$

$$0 \cdot i = i \cdot 0 = 0, \text{ gdzie } 0 \in \mathbb{R} \text{ jest el. neutralnym dodawania w ciele } \mathbb{R}.$$

Liczbą zespoloną nazywamy:

- każdą liczbę rzeczywistą, ($\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$.)
- liczbę i,
- ogólnie: liczbę postaci $z = x + yi,\ x, y \in \mathbb{R}$. Gdy $y = 0$, to $z = x \in \mathbb{R}$. Wówczas x nazywamy częścią rzeczywistą liczby z a y jej częścią urojoną. Oznaczamy

$$\mathfrak{Re}\, z = x, \quad \mathfrak{Im}\, z = y.$$

Przykład 136. Rachunki na liczbach zespolonych wykonujemy identycznie jak na liczbach rzeczywistych, pamiętając że $i^2 = -1$ a tym samym $\sqrt{-1} = i$ *lub*(!) $\sqrt{-1} = -i$ (gdyż $(-i)^2 = (-1)^2 \cdot i^2 = 1 \cdot i^2 = 1 \cdot (-1) = -1$). Szybko się z tym oswoimy:

- $(2 + 7i)3i = 6i + 21i^2 = 6i - 21$,
- $2 \cdot (4 - 5i) = 4 - 10i$,
- $4i \cdot 12i = 48i^2 = -48$. W tym wypadku można napisać, że $\mathfrak{Im}\, 48i^2 = 0$.

Ogólnie, można powiedzieć, że jeżeli $z \in \mathbb{C} \cap \mathbb{R}$, to $\mathfrak{Im}\, z = 0$. Gdy $\mathfrak{Im}\, z \neq 0$, to $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

Przykład 137. Niech $x, y, a, b \in \mathbb{R}$. Obliczymy iloczyn liczb $z, w \in \mathbb{C}$ określonych jako $z = x + iy$ i $w = a+ib$. Mamy $(x+iy)(a+ib) = xa+ibx+iya+iyib = xa+i(bx+ya)+i^2yb = xa+i(bx+ya)-yb = xa - yb + i(bx + ya)$. Zatem $z \cdot w = xa - yb + i(bx + ya)$. Możemy napisać, że

$$\mathfrak{Re}\, z = x, \quad \mathfrak{Im}\, z = y.$$

$$\mathfrak{Re}\, w = a, \quad \mathfrak{Im}\, w = b.$$

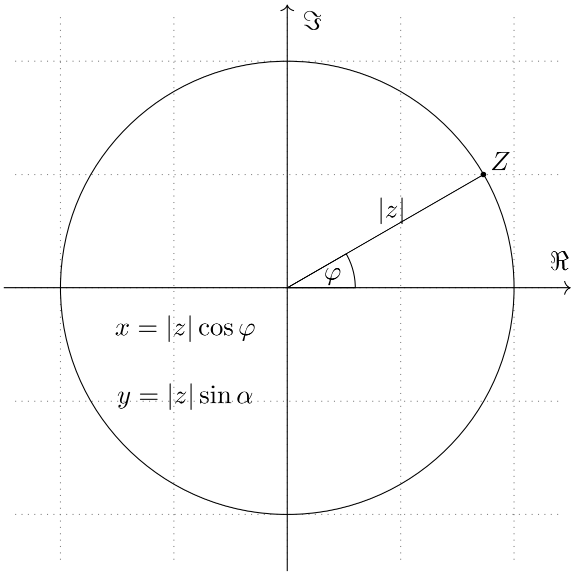
$$\mathfrak{Re}\,(z \cdot w) = xa - yb, \text{ oraz } \mathfrak{Im}\,(z \cdot w) = bx + ya.$$

Przykład 138.

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-ix} + \frac{1}{1+ix}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1+ix+1-ix}{(1-ix)(1+ix)}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{1^2 - (ix)^2} =$$
$$= \frac{1}{1-i^2x^2} = \frac{1}{1-(-1)x^2} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Postać trygonometryczna liczby zespolonej.

Każdą liczbę zespoloną $z = x + iy$ możemy utożsamiać z *punktem na płaszczyźnie* o współrzędnych (x, y). Moglibyśmy pisać $z = x + yi = (x, y)$ ale dla wygody będziemy pisać $Z = (x, y)$. Punkt Z można opisać podając długość odcinka $\overline{OZ}$ łączącego punkt $(0, 0)$ z punktem Z i kąta φ nachylenia odcinka $\overline{OZ}$ do osi OX (porównaj - współrzędne biegunowe 12.3). Będziemy mówić o *płaszczyźnie zespolonej* a pierwszą oś oznaczać przez $\Re$ i nazywać osią rzeczywistą. Drugą - pionową - oś oznaczymy przez $\Im$ i będziemy nazywać osią zespoloną.



Rysunek B.1: Współrzędne punktu $Z = (x, y)$ związane są z kątem φ i promieniem $|z|$.

Modułem liczby zespolonej z nazywamy liczbę $|z| := \sqrt{x^2 + y^2}$. Niech φ będzie takim kątem, że

$$\cos\varphi = \frac{x}{|z|}, \ \sin\varphi = \frac{y}{|z|}.$$

Kąt φ nazywamy **argumentem liczby zespolonej** z. Kąt ten jest oczywiście miarą kąta skierowanego, którego pierwszym ramieniem jest dodatnia półoś rzeczywista, a drugie ramię wyznaczone jest przez wektor $\overrightarrow{OZ}$, $Z = (x, y)$. Jeżeli $\varphi \in [0, 2\pi)$, to φ określamy **argumentem głównym liczby** z i oznaczamy $\varphi = \operatorname{Arg} z$.

Liczbę zespoloną $z = x + iy$, gdzie $\varphi = \operatorname{Arg} z$ możemy teraz zapisać w **postaci trygonometrycznej**:

$$z = x + iy = |z| \cos\varphi + i|z| \sin\varphi = |z| (\cos\varphi + i \sin\varphi).$$

Definicja B.2.5. Oznaczmy $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$. **Ciałem $\mathbb{C}$ liczb zespolonych** nazywamy uporządkowaną czwórkę

$$\big(\mathbb{C}, \cdot, +, (0, 0), (1, 0)\big),$$

gdzie działania $\cdot$ i $+$ zdefiniowane są następująco:

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d), \ a, b, c, d \in \mathbb{R}$$

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc), \ a, b, c, d \in \mathbb{R}$$

Jeżeli przyjmiemy *oznaczenie* $(a, b) = a + bi$, to zauważmy, że definicja mnożenia dwóch liczb $(a, b), (x, y) \in \mathbb{C}$ odpowiada temu jak mnożyliśmy liczby zapisywane jako $a+bi$ i $x+yi$ w poprzednim przykładzie.

Własności liczb zespolonych i najważniejsze pojęcia z nimi związane.

Sprzężeniem liczby $z = x + yi$ nazywamy liczbę $\overline{z} := x - yi$.

Twierdzenie B.2.6. *Ustalmy dowolne $z, w \in \mathbb{C}$. Wówczas*

1. $|z|^2 = z\overline{z}$,
2. $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$,
3. $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$,
4. $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$,
5. $|\overline{z}| = |z|$.

Ćwiczenie. Sprawdzić, że dla dowolnego $z \in \mathbb{C}$:

1. $z + \overline{z} = 2\mathfrak{Re}\, z$,
2. $\mathfrak{Re}\, z \leqslant |z|$.

Twierdzenie B.2.7 (Nierówność trójkąta w $\mathbb{C}$)**.** *Dla dowolnych $z, w \in \mathbb{C}$, zachodzi*

$$|z + w| \leqslant |z| + |w|.$$

Dowód.

$$\begin{aligned}
0 &\leqslant |z + w|^2 = (z + w)\overline{(z + w)} = z\overline{z} + z\overline{w} + \overline{z}w + w\overline{w} = \\
&= |z|^2 + \big(z\overline{w} + \overline{z\overline{w}}\big) + |w|^2 = |z|^2 + 2\mathfrak{Re}\, z\overline{w} + |w|^2 \leqslant \\
&\leqslant |z|^2 + 2|z\overline{w}| + |w|^2 = |z|^2 + 2|z||\overline{w}| + |w|^2 = (|z| + |w|)^2.
\end{aligned}$$

Pierwiastkujemy obustronnie nierówność (zwracamy uwagę, że lewa strona jest nieujemna) i otrzymujemy tezę. □

Twierdzenie B.2.8 (Nierówność Cauchy'ego-Buniakowskiego-Schwarza)**.** *Jeżeli $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{C}$, to zachodzi nierówność*

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k \overline{b}_k\right|^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^2\right). \tag{B.1}$$

Dowód. Niech $A = \sum\limits_{k=1}^{n} |a_k|^2$, $B = A = \sum\limits_{k=1}^{n} |b_k|^2$ oraz $A = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k\overline{b}_k$. Jeżeli $B = 0$, to $b_1 = \ldots = b_n = 0$ i natychmiastowo otrzymujemy, że teza jest prawdziwa. Załóżmy więc, że $B > 0$. Korzystając z własności liczb zespolonych (twierdzenie B.2.6 i następujące po nim ćwiczenia):

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n} |Ba_k - Cb_k|^2 = \sum_{k=1}^{n} (Ba_k - Cb_k)(B\overline{a}_k - \overline{C} \cdot \overline{b}_k) = \\
&= B^2 \sum_{k=1}^{n} - B\overline{C} \sum_{k=1}^{n} a_k\overline{b}_k - BC \sum_{k=1}^{n} \overline{a}_k b_k + |C|^2 \sum_{k=1}^{n} |b_k|^2 = \\
&= B^2 A - B|C|^2 = B\big(AB - |C|^2\big).
\end{aligned}$$

Ponieważ pierwsza suma po lewej jest nieujemna, więc wnioskujemy, że $B(AB-|C|^2) \geqslant 0$. Ponieważ $B > 0$, więc wnioskujemy stąd, że

$$\left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^2\right) - \left|\sum_{k=1}^{n} a_k \overline{b}_k\right|^2 = AB - |C|^2 \geqslant 0.$$

□

Skoro zbiór $\mathbb{C}$ stanowi ciało, to istnieje w nim element odwrotny dla każdego elementu tego ciała. Zauważmy, że jeżeli $z = a + bi \neq 0$ jest liczbą zespoloną, to odwrotność (to znaczy liczba z^{-1} taka, ze: $z^{-1}z = 1$) tej liczby ma postać

$$z^{-1} = \frac{a}{|z|^2} + \frac{-b}{|z|^2} i = \frac{\overline{z}}{|z|^2}.$$

W takim razie wykonalne jest dzielenie liczb, o ile dzielnik jest różny od zera. Rozważmy dwie liczby $z = x + yi$ i $w = a + bi \neq 0$. Wówczas

$$\frac{x + yi}{a + bi} = \frac{(x + yi)(a - bi)}{(a + bi)(a - bi)} = \frac{xa + yb}{a^2 + b^2} + \frac{ya - xb}{a^2 + b^2} i.$$

Mnożenie liczb zespolonych w postaci trygonometrycznej. Zauważmy, że

$$\begin{aligned}
&|z|\big(\cos\varphi + i\sin\varphi\big) \cdot |w|\big(\cos\psi + i\sin\psi\big) = \\
&= |z| \cdot |w|\big((\cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi) + i(\cos\varphi\sin\psi + \sin\varphi\cos\psi)\big) = \\
&= |zw|\big(\cos(\varphi + \psi) + i\sin(\varphi + \psi)\big).
\end{aligned}$$

Możemy stąd własność $|zw| = |z||w|$ zinterpretować/uzasadnić geometrycznie oraz wyciągnąć

Wniosek B.2.9. Dla dowolnych liczb zespolonych $z, w \in \mathbb{C}$:

1. $\operatorname{Arg}(z \cdot w) = \operatorname{Arg} z + \operatorname{Arg} w$,
2. $\operatorname{Arg}\left(\dfrac{z}{w}\right) = \operatorname{Arg} z - \operatorname{Arg} w$,
3. $\operatorname{Arg} z^n = n \operatorname{Arg} z$.

Ważnym wnioskiem z tej zależności jest:

Twierdzenie B.2.10 (Wzór de Moivre'a)**.**

$$(\cos\phi + i\sin\phi)^n = \cos(n\phi) + i\sin(n\phi)\,. \tag{B.2}$$

Wzór B.2 pozwala na efektywne wykonywanie operacji potęgowania liczb zespolonych. Niech $z = |z|\,(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, to wówczas

$$z^n = |z|^n\,(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)^n\,.$$

Definicja B.2.11. Pierwiastkiem stopnia $n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$ **z liczby zespolonej** z nazywamy każdą liczbę z_p taką, że $(z_p)^n = z$.

Twierdzenie B.2.12. *Jeżeli $z \neq 0$ jest liczbą zespoloną i $z = |z|(\cos\phi + i\sin\phi)$, to istnieje dokładnie n różnych pierwiastków $z_0, z_2, \ldots, z_{n-1}$ z liczby z i wyrażają się one wzorem*

$$z_k = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\phi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\phi + 2k\pi}{n}\right), \text{ gdzie } k = 0, 1, 2, \ldots, n-1.$$

Ćwiczenie. Zinterpretować powyższe twierdzenie graficznie - sporządzić rysunek i dokonać objaśnień.

Lemat B.2.13. *Dla dowolnego $x \neq 2K\pi, K \in \mathbb{Z}$ zachodzi równość*

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{N}\cos(kx) = \frac{\sin\left(N + \frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}.$$

Twierdzenie B.2.14. *Dla dowolnego $x \neq 2K\pi, K \in \mathbb{Z}$ zachodzi równość*

$$\sum_{k=0}^{N}\sin(kx) = \frac{\sin\left(\frac{Nx}{2}\right)\sin\left(\frac{(N+1)x}{2}\right)}{\sin\frac{x}{2}}.$$

Twierdzenie B.2.15. *Dla każdego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi równość*

$$\begin{aligned}\sin((2n+1)x) &= \binom{2n+1}{1}\cos^{2n}x\sin x - \binom{2n+1}{3}\cos^{2(n-1)}x\sin^3 x + \\ &+ \binom{2n+1}{5}\cos^{2(n-2)}x\sin^5 x - \ldots + (-1)^n\sin^{2n+1}x = \\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{2k+1}(-1)^k\cos^{2(n-k)}(x)\sin^{2k+1}(x).\end{aligned}$$

Ćwiczenie. Zbadać własności relacj $R \subseteq \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ zadanej następująco:

$$(x, y) \in R \iff \mathfrak{Re}\, x = \mathfrak{Im}\, y$$

Więcej o geometrii liczb zespolonych.

Odwzorowanie $z \mapsto uz + v$ dla pewnych $u, v \in \mathbb{C}$, $u \neq 0$ jest przekształceniem geometrycznym[2] - złożniem:

- obrotu o kąt $\operatorname{Arg} u$,
- jednokładności wzgledem środka układu współrzędnych o skali $|u|$,
- przesunięcia o v.

Przykład 139. Przez $\mu(\mathbb{C}_n)$ oznaczamy zbiór wszystkich pierwiastków n-tego stopnia z liczby 1 w ciele liczb zespolonych:

$$\mu(\mathbb{C}_n) := \{z \in \mathbb{C} \colon z^n = 1\}$$

Łatwo zauważyć, że $\left(\mu(\mathbb{C}_n), \cdot\right)$ jest grupą. Pierwiastki z_k, $k = 0, 1, 2, 3, 4, \ldots, n-1$ z jedynki są postaci $z_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}$. Zinterpretujmy zbiór $\mu(\mathbb{C}_n)$ geometrycznie:

TO-DO

[2] afinicznym

Przykład 140. Funkcją homograficzną albo homografią nazywamy funkcję $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ zadaną wzorem

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}, z \in \mathbb{C}$$

gdzie $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ spełniają warunek $ad - bc \neq 0$.

Twierdzenie (Zasadnicze twierdzenie algebry)**.** *Każdy wielomian zespolony stopnia $n > 0$ ma dokładnie n pierwiastków zespolonych $z_1, z_2, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$ a co za tym idzie daje się przedstawić w postaci $a(z - z_1) \cdot \cdots \cdot (z - z_n)$ dla pewn. $a \in \mathbb{C}$.*

Wzory Eulera

Przypomnijmy, że dla dowolnej liczby rzeczywistej $x \in \mathbb{R}$:

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!},$$
$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!},$$
$$\exp x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Przy czym $\exp(x) := e^x$. Pokażemy, że tożsamości te pozwalają rozszerzyć definicje funkcji sin, cos i exp na zbiór $\mathbb{C}$.

Określimy funkcje S, C i E wzorami:

$$S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!},\ z \in \mathbb{C}$$
$$C(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!},\ z \in \mathbb{C}$$
$$E(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!},\ z \in \mathbb{C}.$$

Szeregi po prawych stronach równości są zbieżne, więc funkcje te są poprawnie zdefiniowane i oczywiście $S\big|_{\mathbb{R}} = \sin$, $C\big|_{\mathbb{R}} = \cos$ i $E\big|_{\mathbb{R}} = \exp$. Możemy *przyjąć*, że

$$\sin z := S(z),\ z \in \mathbb{C};$$
$$\cos z := C(z),\ z \in \mathbb{C};$$
$$\exp z := E(z),\ z \in \mathbb{C}.$$

Twierdzenie B.2.16 (Eulera)**.** *Dla dowolnej liczby zespolonej z zachodzi tożsamość*

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z \tag{B.3}$$

Dowód. Korzystamy z naszych nowo przyjętych definicji funkcji sin, cos i exp jako zespolone szeregi potęgowe:

$$e^{iz} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(iz)^n}{n!} = 1 + iz + \frac{(iz)^2}{2} + \frac{(iz)^3}{3!} + \frac{(iz)^4}{4!} + \frac{(iz)^5}{5!} + \frac{(iz)^6}{6!} + \ldots =$$

$$= 1 + iz - \frac{z^2}{2} - \frac{iz^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{iz^5}{5!} - \frac{z^6}{6!} + \frac{iz^7}{7!} + \ldots =$$
$$= \left(\frac{z^0}{0!} - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \ldots\right) + \left(i\frac{z^1}{1!} - i\frac{z^3}{3!} + i\frac{z^5}{5!} + i\frac{z^7}{7!} - \ldots\right) =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} i\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + i\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right) =$$
$$= \cos x + i \sin x.$$

□

Historycznie wzór B.3 po raz pierwszy pojawił się w rozważaniach geometrycznych przez Rogera Cotesa ok. 1714 roku pod postacią:

$$ix = \ln(\cos x + i \sin x).$$

Dla $x = \pi$ otrzymujemy tożsamość $e^{i\pi}+1 = 0$, często nazywaną w popularnej kulturze matematycznej „najpiękniejszym równaniem matematyki", gdyż zawiera w sobie wyłącznie: dwie najważniejsze stałe matematyczne e i π, element neutralny 0 dodawania, element neutralny 1 mnożenia, jednostkę urojoną, działanie potęgowania oraz działania grupowe: mnożenie $(i \cdot \pi)$ i dodawanie - czyli w pewnym sensie najbardziej „podstawowe" działania oraz szczególne liczby i stałe.

Za pomocą naszego wzoru możemy wyprowadzić dwie ważne tożsamości trygonometryczne:

Twierdzenie B.2.17. *Dla dowolnej liczby zespolonej z zachodzą wzory*

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \qquad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}. \tag{B.4}$$

Dowód. Odejmijmy stronami równości $e^{i(-z)} = \cos(-z) + i\sin(z)$ i $e^{iz} = \cos z + i \sin z$ i wówczas korzystając z tego, że $\sin(-z) = -\sin z$ i $\cos z = \cos(-z)$ otrzymamy pierwszy wzór. Drugi otrzymujemy podobnie, dodając równości stronami. □

W wzór B.3 i wzory B.4 nazywamy **wzorami Eulera**. Przypmnijmy, że funkcja sinh jest zdefiniowana wzorem $\sin x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{1}{2}(\exp(x) - \exp(-x))$. Nic nie stoi na przeszkodzie, by teraz rozszerzyć jej definicję na liczby zespolone, teraz gdy uczyniliśmy to dla funkcji exp. Podstawmy $z = ix$. Mamy

$$\sinh z = \sinh(ix) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2} = i \sin(x).$$

Podobnie dostajemy, że

$$\cosh z = \cosh(ix) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = \cos x.$$

Otrzymaliśmy więc prosty związek między funkcjami trygonometrycznymi i hiperbolicznymi. Zauważmy, że $\cos^2 x + \sin^2 x = \cos^2 x - i^2 \sin^2 x = \cosh^2(ix) - \sinh^2(ix) = 1$.

Postać wykładnicza liczby zespolonej. Każda liczba $z \in \mathbb{C}$ różna od zera ma następujące przedstawienia:

$$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi) = |z|e^{i\varphi}.$$

Dowolny punkt o współrzędnych *biegunowych* (r, φ) możnemy utożsamić z liczbą zespoloną $re^{i\varphi}$:

$$z = x + iy = r\cos\varphi + ir\sin\varphi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = re^{i\varphi}.$$

Z drugiej strony, niech $z = x + yi$. Wóczas

$$e^z = e^{x+yi} = e^x e^{yi} = e^x(\cos y + i\sin y).$$

Przykład 141. Łatwo pokazaać, że $|e^{ix}| = 1$. Otóż

$$|e^{ix}| = |\cos x + i\sin x| = \sqrt{\cos^2 x + \sin^2 x} = 1.$$

Zastosowania liczb zespolonych i wzorów Eulera.

Pokażemy różne zastosowania liczb zespolonych, ich związków z funkcjami trygonometrycznymi i współrzędnymi biegunowymi. W szczególności pokażemy jak postać trygonometryczna liczby zespolonej oraz wzoróy Eulera upraszczają niektóre rachunki oraz pozwalają łatwo wyprowadzić pewne podstawowe tożsamości trygonometryczne.

Przykład 142. Obliczymy całkę $\displaystyle\int \cos(3x)\sin(5x)\,\mathrm{d}x$. Moglibyśmy np. skorzystać z tożsamości

$$\sin(ax)\cos(bx) = \frac{1}{2}\left(\sin\left((a+b)x\right) + \sin\left((a-b)x\right)\right).$$

Jednak aby swobodnie rozwiązywać całki funkcji typu $\sin(ax)\sin(bx)$, $\cos(ax)\cos(bx)$ itd. musielibyśmy nauczyć się kolejnych wzorów. Metoda którą pokażemy wymaga jedynie pamiętania wzorów Eulera. Mamy

$$\begin{aligned}
\cos(3x)\sin(5x) &= \frac{(e^{i3x} + e^{-i3x})(e^{i5x} - e^{-i5x})}{2\cdot 2i} = \\
&= \frac{e^{3ix}e^{i5x} - e^{i3x}e^{-i5x} + e^{-i3x}e^{i5x} - e^{-i3x}e^{-i5x}}{2\cdot 2i} = \frac{e^{i8x} - e^{-i8x} + e^{i2x} - e^{-i2x}}{2\cdot 2i} = \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{e^{i(8x)} - e^{-i(8x)}}{2_i} + \frac{e^{i(2x)} - e^{-i(2x)}}{2i}\right) = \frac{1}{2}\big(\sin(8x) + \sin(2x)\big).
\end{aligned}$$

Stąd już

$$\int \cos(3x)\sin(5x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int (\sin(8x) + \sin(2x))\,\mathrm{d}x = -\left(\frac{1}{16}\cos(8x) + \frac{1}{4}\cos(2x)\right) + C.$$

Przykład 143. Wyznaczymy ogólną postać rozwiązania całki

$$\int e^{ax}\sin(bx)\,\mathrm{d}x.$$

Ze wzorów Eulera mamy

$$\begin{aligned}
\int e^{ax}\sin(bx)\,\mathrm{d}x &= \Im\mathfrak{m}\left(\int e^{ax}e^{ibx}\,\mathrm{d}x\right) = \\
&= \Im\mathfrak{m}\left(\int e^{ax+ibx}\,\mathrm{d}x\right) = \\
&= \Im\mathfrak{m}\left(\int e^{(a+ib)x}\,\mathrm{d}x\right) = \\
&= \Im\mathfrak{m}\left(\frac{1}{a+ib}e^{(a+ib)x}\right) + C = \\
&= \Im\mathfrak{m}\left(\frac{1}{a+ib}\left(\frac{a-ib}{a-ib}\right)e^{(a+ib)x}\right) + C = \\
&= \Im\mathfrak{m}\left(\frac{a-bi}{a^2+b^2}e^{(a+ib)x}\right) + C = \\
&= \Im\mathfrak{m}\left(\frac{a-bi}{a^2+b^2}e^{ax}(\cos(bx)+i\sin(bx))\right) + C =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \Im\mathfrak{m}\left(\frac{a}{a^2+b^2}e^{ax}(\cos(bx)+i\sin(bx)) - \frac{bi}{a^2+b^2}e^{ax}(\cos(bx)+i\sin(bx))\right) + C = \\
&= \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}\Im\mathfrak{m}\Big(a\cos(bx)+b\sin(bx)+i(-b\cos(bx)+\sin(bx))\Big) + C = \\
&= \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}\Big(a\sin(bx)-b\cos(bx)\Big) + C
\end{aligned}$$

Bez wzorów Eulera z całkami tej postaci radzimy sobie oczywiście całkując przez części.

Ćwiczenie. Analogicznie do poprzedniego przykładu wyznaczyć ogólną postać rozwiązania całki

$$\int e^{ax}\cos(bx)\,\mathrm{d}x.$$

Ćwiczenie. Obliczyć $\displaystyle\int \sin^3(x)\,\mathrm{d}x$ korzystając z wzorów Eulera.

Ciągi i szeregi liczb zespolonych

Szeregi liczb zespolonych.

Definicja B.2.18. Szereg $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ nazywamy **zbieżnym bezwzględenie**, gdy zbieżny jest szereg $\sum_{n=0}^{\infty} |z_n|$ a **zbieżnym względnie** lub **warunkowo**, gdy jest zbieżny ale nie bezwzględnie zbieżny.

Krótko przytoczymy fakty na temat zbieżności szeregów liczb rzeczywistych, które pozostają w mocy w przypadku szeregu liczb zespolonych:

- Jeżeli szereg $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z_n$ jest zbieżny, to $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = 0$.

- Szereg bezwzględnie zbieżny pozostaje zbieżny do tej samej sumy przy dowolnej zmianie kolejności sumowania wyrazów.
- Szereg $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z_n$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall_{\varepsilon>0}\exists_{n_0\in\mathbb{N}}\forall_{\substack{n,m\in\mathbb{N}\\ m>n\geqslant n_0}}.\left|\sum_{k=n+1}^{m}\right| < \varepsilon.$$

Twierdzenie B.2.19. *Szereg* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z_n$ *jest zbieżny do sumy* s *wtedy i tylko wtedy, gdy zbieżne są szeregi* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \mathfrak{Im}\, z_n$ *i* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \mathfrak{Re}\, z_n$ *odpowiednio do* $\mathfrak{Im}\, s$ *i* $\mathfrak{Re}\, s$*. Wówczas*

$$\sum_{n=0}^{\infty} z_n = \sum_{n=0}^{\infty} \mathfrak{Re}\, z_n + i \sum_{n=0}^{\infty} \mathfrak{Im}\, z_n.$$

Do szeregów zespolonych stosują się kryterium porównawcze oraz kryteria Cauchy'ego i d'Alemberta.

Przykład 144. Zbadamy zbieżność szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n(2+i)^n}{2^n}$.

Dodatek C

Elementy topologii

C.1 przestrzenie topologiczne

Greckie słowo *tópos* oznacza miejsce, położenie, zaś *lógos* przetłumaczyć można jako słowo lub naukę. Topologia jest to zatem „nauka o położeniu".

Definicja C.1.1. Niech X będzie dowolnym niepustym zbiorem. Rodzinę $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$ nazywamy **topologią na** X, gdy

(T1) $X, \varnothing \in \mathcal{T}$,

(T2) jeżeli $A, B \in \mathcal{T}$, to $A \cap B \in \mathcal{T}$,

(T3) jeżeli $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{T}$, to $\bigcup \mathcal{R} \in \mathcal{T}$.

Parę $(X, \mathcal{T})$ nazywamy **przestrzenią topologiczną**.

Wprost z definicji widzimy, że topologia jest zbiorem niepustym. W przestrzeni w której nie mamy określonej metryki, ale mamy wprowadzoną topologię, dwa punkty leżą w pewnym sensie „blisko siebie", gdy należą do jednego zbioru otwartego (mimo, że bez metryki nie mamy pojęcia odległości między punktami). Najprostszą topologią na zbiorze $X \neq \varnothing$ jest rodzina $\{\varnothing, X\}$ - nazywamy ją **topologią trywialną**. Innym oczywistym przykładem topologii, którą można wprowadzić na dowolnym niepustym zbiorze X jest jej zbiór potęgowy $\mathcal{P}(X) = 2^X$.

Dla wielu zastosowań, tak ogólne przestrzenie topologiczne wymagają jeszcze dodatkowej własności. Felix Hausdorff wprowadził dodatkowy aksjomat:

Definicja C.1.2. Mówimy, że przestrzeń topologiczna $(X, \mathcal{T})$ jest **przestrzenią Hausdorffa**, gdy spełnia następujący **aksjomat Hausdorffa**:

(TH) Dla dowolnych dwóch punktów $x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2,$ istnieją zbiory otwarte $U, V \in \mathcal{T}$, takie, że $x_1 \in U$ a $x_2 \in V,$ oraz $U \cap V = \varnothing$.

Przykład 145. Niech $a \neq b$. Rodzina $\tau = \big\{\{a, b\}, \{b\}, \varnothing\big\}$ jest topologią na zbiorze $X = \{a, b\}$. Przestrzeń (X, τ) nazywamy **przestrzenią dwupunktową Aleksandrowa** albo **dwukropkiem Aleksandrowa**.

Przykład 146. Jeżeli X jest zbiorem z określoną na nim relacją liniowego częściowego porządku $\preceq$, to przedziałem otwartym możemy nazwać każdy zbiór postaci

$$(a,b)_{\preceq} = \{x \in X \colon a \preceq x \preceq b \text{ i } a \neq x \neq b\}$$

lub

$$(a,\to)_{\preceq} = \{x \in X \colon a \preceq x \text{ i } x \neq a\},\ (\leftarrow,a)_{\preceq} = \{x \in X \colon x \preceq a \text{ i } x \neq a\}.$$

Rodzinę wszystkich przedziałów otwartych na X oznaczymy przez $\mathrm{Intv}_{\preceq}(X)$. **Topologią porządkową** na X nazywamy rodzinę

$$\mathcal{T}_{\preceq} = \Big\{U \subseteq X \colon \forall_{x\in U} \exists_{D\in \mathrm{Intv}_{\preceq}(X)} . x \in D \subseteq U\Big\}.$$

Definicja C.1.3. Niech $(X,\mathcal{T})$ będzie przestrzenią topologiczną i $Y \subseteq X$. Rodzina

$$\mathcal{T}_Y := \{U \cap Y \colon U \in \mathcal{T}\}$$

jest topologią na zbiorze Y. Mówimy, że $\mathcal{T}_Y$ jest **topologią dziedziczoną** (z przestrzeni $(X,\mathcal{T})$), albo **indukowaną** w Y. Przestrzeń $(Y,\mathcal{T}_Y)$ nazywamy **podprzestrzenią przestrzeni** $(X,\mathcal{T})$.

Definicja C.1.4. Przestrzenią ośrodkową nazywamy przestrzeń metryczną X zawierającą przeliczalny podzbiór $O \subseteq X$, gęsty w X. Zbiór O nazywamy **ośrodkiem** przestrzeni X.

Definicja C.1.5. Przestrzeń ośrodkową metryczną zupełną nazywamy **przestrzenią polską**.

Definicja C.1.6. Zbiorem doskonałym nazywamy domknięty podzbiór D przestrzeni metrycznej, taki że każdy punkt $x \in D$ jest zarazem jego punktem skupienia: $x \in D^d$.

Widać, że zbiór A jest doskonały wtedy i tylko wtedy, gdy $A = A^d$. Niech (X,ρ) będzie przestrzenią metryczną. Wówczas, wprost z twierdzeń 5.4.9 i 5.4.11 zbiór $A \subseteq X$ jest doskonały wtedy i tylko wtedy, gdy

1. jeżeli $x \in A$, to $x = \lim_{n\to\infty} x_n$ dla pewnego ciągu $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ takiego, że
   (a) $x_n \in A,\ n \in \mathbb{N}$,
   (b) $x_n \neq x,\ n \in \mathbb{N}$;
2. jeżeli $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest zbieżnym ciągiem, $x_n \in A, n \in \mathbb{N}$, to $\lim_{n\to\infty} x_n \in A$.

Twierdzenie C.1.7. *Niech $D \subseteq \mathbb{R}^n$ będzie niepustym zbiorem doskonałym. Wówczas D jest nieprzeliczalny.*

Twierdzenie C.1.8 (Cantora-Bendixsona)**.** *Niech X będzie przestrzenią polską. Wówczas X można jednoznacznie przedstawić w postaci $X = D \cup C$, gdzie D jest zbiorem doskonałym, a C zbiorem przeliczalnym i otwartym.*

C.1.1 Przestrzenie metryzowalne

Niech (X, ρ) będzie przestrzenią metryczną.

Definicja C.1.9. Definiuemy rodzinę $\mathcal{T}_\rho$ wzorem:

$$\mathcal{T}_\rho := \Big\{U \subseteq X : \forall_{x \in U} \exists_{\varepsilon > 0} : K(x, \varepsilon) \subseteq U\Big\}.$$

Twierdzenie C.1.10. *Rodzina $\mathcal{T}_\rho$ jest topologią na zbiorze X. Jej bazą jest rodzina $\mathcal{B}_\rho = \{K(x, \varepsilon) : x \in X \text{ i } \varepsilon > 0\}$.*

Stąd rodzinę $\mathcal{T}_\rho$ nazywamy **topologią wyznaczoną przez metrykę** ρ, albo **indukowaną** przez metryką ρ.

Definicja C.1.11. Mówimy, że topologia $\mathcal{T}$ na zbiorze X jest **metryzowalna**, gdy istnieje taka metryka ρ na zbiorze X, że $\mathcal{T} = \mathcal{T}_\rho$.

Czytelnik zauważy, że wiele twierdzeń i definicji dotyczących przestrzeni metrycznych, sformułowanych w odpowiednim rozdziale, jest sformułowanych i dowodzonych w oparciu o pojęcie i własności zbioru otwartego, nie odwołując się do pojęcia metryki ani kuli otwartej. Tego typu pojęcia i wnioski bez zmian przenoszą się na przestrzenie topologiczne, które nie są metryzowalne. W szczególności definicja 5.2.13 wnętrza i definicja 5.2.16 domknięcia zbioru oraz ich własności, sformułowane między innymi w twierdzeniach 5.2.15 i 5.2.19. *Nie* przenosi się natomiast w ogólności twierdzenie 5.2.8. Jest ono jednak prawdziwe dla przestrzeni Hausdorffa.

Twierdzenie C.1.12. *Przestrzenie metryzowalne są przestrzeniami Hausdorffa.*

Tak naprawdę fakt ten wprowadziliśmy już ukradkiem pod nazwą „Lematu Hausdorffa” omawiając przestrzenie metryczne w toku głównego wykładu – Lemat 5.2.7.

C.2 Baza, podbaza i układ otoczeń topologii

Definicja C.2.1. **Bazą** przestrzeni topologicznej $(X, \mathcal{T})$ nazywamy taką rodzinę $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$, że każdy zbiór otwarty $U \in \mathcal{T}$ jest sumą pewnych zbiorów z rodziny $\mathcal{B}$. Rodzinę $\mathscr{P} \subseteq \mathcal{T}$ nazywamy **podbazą** przestrzeni X, gdy rodzina wszystkich skończonych przekrojów zbiorów rodziny $\mathscr{P}$, tj. rodzina

$$\Big\{U_1 \cap U_2 \cap \ldots \cap U_n : \quad n \in \mathbb{N},\ U_1, \ldots, U_n \in \mathscr{P}\Big\}$$

jest bazą przestrzeni X.

Zatem $\mathcal{B}$ jest bazą przestrzeni $(X, \mathcal{T})$, gdy

$$\forall_{G \in \mathcal{T}} \exists_{\mathscr{B} \subseteq \mathcal{B}}. G = \bigcup \mathscr{B}.$$

Łatwo sprawdzić, że równoważnie

$$\forall_{G \in \mathcal{T}}. \left(x \in G \Rightarrow \exists_{U \in \mathcal{B}}. x \in U \subseteq G\right).$$

Podamy jeszcze jedną charakteryzację bazy:

Twierdzenie C.2.2. *$\mathcal{B}$ jest bazą przestrzeni $(X, \mathcal{T})$ wtedy i tylko wtedy, gdy*

1. $\forall_{x\in X}\exists_{U\in\mathcal{B}}.x \in U$,
2. $\forall_{U_1,U_2\in\mathcal{B}}\exists_{x\in U_1\cap U_2}\exists_{U\in\mathcal{B}}.x \in U \subseteq U_1 \cap U_2$.

Powyższe warunkie przyjmuje się czasem za aksjomaty bazy. Własność 1 wynika z otwartości zbioru X. Aksjomat 2 wynika z tego, że zbiór $U_1 \cap U_2$ jest otwarty. Pełny dowód równoważności definicji z powyższymi warunkami pominiemy.

Mamy też wygodną charakteryzację podbazy:

Twierdzenie C.2.3. *$\mathscr{P}$ jest podbazą przestrzeni $(X, \mathcal{T})$ wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\forall_{x\in X}\exists_{U\in\mathscr{P}}.x \in U.$$

C.2.1 Pełny układ otoczeń punktu

Definicja C.2.4. Niech $(X, \mathcal{T}$ będzie przestrzenią topologiczną i niech $x \in X$. Rodzinę $\mathcal{B}(x)$ *wszystkich* otoczeń punktu x, mającą tę własność, że dla każdego zbioru $U \in \mathcal{T}$ zawierającego x istnieje zbiór $V \in \mathcal{B}(x)$ zawierający U; czyli wówczas

$$x \in U \subseteq V \in \mathcal{B}(x),$$

nazywamy **bazą w punkcie** x, **bazą otoczeń punktu** x lub **układem otoczeń punktu** x (topologii $\mathcal{T}$ albo przestrzeni X).

Rodzinę $\{\mathcal{B}(x)\}_{x\in X}$ nazywamy **pełnym**(albo **fundamentalnym**) **układem otoczeń** przestrzeni $(X, \mathcal{T})$ (lub topologii $\mathcal{T}$).

Widzimy, że z powyższej definicji każdy zbiór $G \in \mathcal{T}$ jest sumą pewnej podrodziny rodziny $\{U \in \mathcal{B}(x) \colon x \in X\}$ (mówimy: generowanej przez $\{\mathcal{B}(x)\}_{x\in X}$).

Twierdzenie C.2.5. *Bazę punktu $x \in X$ charakteryzują następujące własności (które można zatem przyjąć jako aksjomaty bazy otoczeń punktu x):*

1. $\forall_{x\in X.}\, \mathcal{B}(x) \neq \varnothing$ *i* $\forall_{U\in\mathcal{B}(x).}\, x \in U$,
2. $y \in U \in \mathcal{B}(x) \Rightarrow \exists_{V\in\mathcal{B}(y)} \colon V \subseteq U$,
3. $\forall_{U_1,U_2\in\mathcal{B}(x)}\exists_{U\in\mathcal{B}(x)} \colon U \subseteq U_1 \cap U_2$.

Przykład 147. W wypadku przestrzeni metrycznej (X, ρ) najprostszym przykładem układu otoczeń, dla dowolnego punktu $x \in X$ jest rodzina kul otwartych

$$\mathcal{B}(x) = \{K(x,\varepsilon) : \varepsilon > 0\}.$$

Albo nawet rodzina kul domkniętych

$$\mathcal{B}(x) = \left\{\overline{K}(x,\varepsilon) : \varepsilon > 0\right\},$$

gdyż zawsze $x \in K(x, \varepsilon) \subseteq \overleftarrow{K}(x, \varepsilon)$ dla $\varepsilon > 0$.

C.3 Metody wprowadzania topologii na zbiorze

Załóżmy, że mamy dany niepusty zbiór X. Wprowadzić topologię $\mathcal{T}$ na zbiorze X możemy na różne sposoby.

- Możemy zdefiniować pewien podzbiór $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$ spełniający aksjomay (T1)-(T3).
- Możemy też określić pewną rodzinę $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ spełniającą aksjomaty bazy podane w twierdzeniu C.2.2 i wówczas rodzina
$$\mathcal{T} := \left\{ \bigcup \mathscr{B} \colon \mathscr{B} \subseteq \mathcal{B} \right\}$$
jest topologią na X.
- Możemy określić rodzinę $\mathscr{P} \subseteq \mathcal{P}(X)$ spełniającą aksjomat bazy podany w twierdzeniu C.2.3 i wówczas rodzina $\mathcal{B}$ wszystkich skończonych przekrojów zbiorów z rodziny $\mathscr{P}$ będzie bazą topologii $\mathcal{T}$, której postać będzie znowu, jak wyżej.
- Możemy wreszcie zdefiniować rodzinę $\{\mathcal{B}(x)\}_{x \in X}$ indeksowaną elementami ze zbioru X, spełniającą aksjomaty z twierdzenia C.2.5 i wówczas topologią jest rodzina
$$\mathcal{T} := \left\{ U \in \mathcal{P}(X) \colon U = \bigcup_{x \in A} \mathcal{B}(x) \text{ dla pewn. } A \subseteq X \right\}.$$

Istnieją jeszcze inne sposoby wprowadzania topolgii. Nie wspominaliśmy tu np. o twierdzeniu Kuratowskiego o operacji wnętrza, która pozwala wprowadzić operację wnętrza $\operatorname{int} \colon \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ w sposób abstrakcyjny, jako funkcję spełniającą odpowiednie aksjomaty. Wówczas topologię możemy określić jako te zbiory $A \subseteq X$, dla których $\operatorname{int} A = A$. Komplementarne twierdzenie zachodzi dla operacji domknięcia. Tego typu metody i techniki znajdzie czytelnik w podręcznikach do topologii.

C.4 Homeomorfizmy przestrzeni topologicznych

Homeomorfizm jest też nazywany izomorfizmem topologicznym i stanowi, analogicznie do izomorfizmów w algebrze, taki rodzaj przekształcenia między topologiami, że zachowuje wzajemnie ich topologiczne właściwości.

Definicja C.4.1. Niech $(X, \mathcal{T}_X)$ i $(Y, \mathcal{T}_Y)$ będą przestrzeniami topologicznymi. Mówimy, że funkcja $f \colon X \to Y$, jest **ciągła** w punkcie $x_0 \in X$, gdy dla każdego otoczenia $U_{f(x_0)} \in \mathcal{T}_Y$ punktu $f(x_0)$ istnieje takie otoczenie $V_{x_0} \in \mathcal{T}_X$ puntku x_0, że $f[V_{x_0}] \subseteq U_{f(x_0)}$.

Twierdzenie C.4.2. *Niech X i Y będą przestrzeniami topologicznymi, a $f \colon X \to Y$ funkcją. Wówczas nastepujące warunki są równoważne:*

1. *funkcja f jest ciągła;*
2. *przeciwobraz dowolnego zbioru otwartego przez funkcję f jest otwarty;*
3. *przeciwobraz dowolnego zbioru domkniętego przez funkcję f jest domknięty;*
4. *istnieje podbaza przestrzeni Y, dla której przeciwobrazy jej elementów są otwarte;*

5. $f\big[\operatorname{cl} A\big] \subseteq \operatorname{cl} f[A]$ *dla każdego zbioru* $A \subseteq X$*;*

6. $\operatorname{cl} f^{-1}[A] \subseteq f^{-1}\big[\operatorname{cl} b\big]$ *dla każdego zbioru* $B \subseteq Y$*;*

7. $f^{-1}\big[\operatorname{int} B\big] \subseteq \operatorname{int} f^{-1}[B]$ *dla każdego zbioru* $B \subseteq Y$*.*

Definicja C.4.3. Niech $(X, \mathcal{T}_X)$ i $(Y, \mathcal{T}_Y)$ będą przestrzeniami topologicznymi. Funckję $f\colon X \to Y$ nazywamy **homeomorfizmem** między przestrzeniami X i Y, gdy

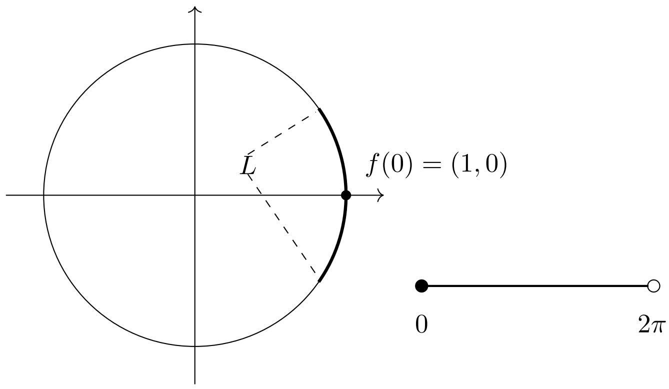
1. funkcja f jest bijekcją,
2. funkcja f jest ciągła,
3. funkcja f^{-1} odwrotna do f jest ciągła.

Jeżeli funkcja f nie jest na Y ale jest homeomorfizmem między X a $f[X]$, to mówimy że f jest **zanurzeniem** przestrzeni X w przestrzeń Y.

W powyższej definicji homeomorfizmu może budzić wątpliwość, czy w ogóle może istnieć funkcja spełniająca dwa pierwsze warunki ale nie spełniająca trzeciego? Zbadamy następujący

Przykład 148. Niech S^1 będzie okręgiem jednostkowym z topologią dziedziczoną z przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^2$ a funkcja $f\colon [0, 2\pi) \to S^1$ będzie dana wzorem

$$f(t) = (\cos t, \sin t),\ t \in [0, 2\pi).$$



Rysunek C.1: Geometrycznie mówiąc: funkcja „zawija” odcinek o długości 2π w okrąg o pormieniu 1 i długości 2π.

Funkcja f jest ciągła i bijektywna. Jej funkcja odwrotna f^{-1} nie jest jednak ciągła w punkcie $t = (1, 0)$: $f^{-1}(1, 0) = 0$. Rozważmy dowolny otwarty łuk $L \subseteq S^1$, otaczający punkt $(1, 0)$ i $|L| < 2\pi$. Wówczas istnieje $x \in (0, 2\pi)$ takie, że $f^{-1}[L] \subseteq [0, x) \cup (x, 2\pi)$.

Inaczej: obraz zbioru zwartego przez funkcję ciągłą musi być zwarty (patrz twierdzenie 7.2.26). f^{-1} nie może być więc funkcją ciągłą, bo $[0, 2\pi) = f^{-1}[S^1]$ a zbiór $S^1 \subseteq \mathbb{R}^2$ jest zwarty i $[0, 2\pi)$ nie stanowi przestrzeni zwartej w $\mathbb{R}$.

Ćwiczenie. Definiujemy funkcję $g\colon [0,1] \cup (2,3] \to [0,2]$ wzorem

$$g(x) = \begin{cases} x, & \text{dla } 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ x-1, & \text{dla } 2 < x \leqslant 3, \end{cases}$$

Funkcja odwrotna jest postaci

$$g^{-1}(y) = \begin{cases} y, & \text{dla } 0 \leqslant y \leqslant 1, \\ y+1, & \text{dla } 1 < y \leqslant 2, \end{cases}$$

Sprawdzić, że funkcja g jest ciągła, ale g^{-1} nie jest ciągła w punkcie $y = 1$.

C.4.1 Izometria przestrzeni metrycznych

W przypadku przestrzeni metrycznej - której podstawową cechą jest istnienie dobrze określonego pojęcia odległości - chcielibyśmy mieć odpowiedni rodzaj topologicznego izomorfizmu, który dodatkowo zachowuje „geometryczny kształt" przekształcanych zbiorów. Przekształcenie, które zachowuje stosunki odległości między punktami przekształcanych zbiorów w geometrii nazywa się izometriami. Przystawanie figur w geometrii można wyrazić, jako fakt że istnieje między nimi izometria.

Definicja C.4.4. Mówimy, że odwzorowanie $f\colon X \to Y$ jest **izometrią** przestrzeni metrycznych (X, ρ), (Y, σ), gdy

$$\sigma\left(f(x_1), f(x_2)\right) = \rho\left(x_1, x_2\right), \quad x_1, x_2 \in X.$$

Prostymi przykładami izometrii będą np. przesunięcie (nazywane też translacją), obrót wokół punktu albo symetria środkowa w przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^2$.

Twierdzenie C.4.5. *Izometria surjektywna między przestrzeniami metrycznymi (X, ρ), (Y, σ), jest homeomorfizmem przestrzeni topologicznych $(X, \mathcal{T}_\rho)$ i $(Y, \mathcal{T}_\sigma)$.*

Gdy taka izometria istnieje, to mówimy, że przestrzenie X i Y są **izometryczne** lub **izometrycznie homeomorficzne**.

Uwaga C.4.6. Zbiór izometrii przestrzeni metrycznej w siebie wraz z operacją składania przekształceń jest grupą, którą nazywamy po prostu grupą izometrii. Jest to podgrupa wszystkich bijekcji danej przestrzeni metrycznej w siebie.

C.5 Zbiory gęste, brzegowe i nigdziegęste oraz twierdzenie Baire'a

Ustalmy przestrzeń $(X, \mathcal{T})$. Przypomnijmy, że zbiór $E \subseteq X$ nazywamy

- gęstym, gdy $\operatorname{cl} E = X$;
- brzegowym, gdy $\operatorname{int} E = \varnothing$;
- niegdziegęstym, gdy $\operatorname{int} \operatorname{cl} E = \varnothing$.

Definicja C.5.1. Zbiór $A \subseteq X$ nazywamy **zbiorem pierwszej kategorii (Baire'a)**, gdy jest sumą przeliczalnej ilości zbiorów nigdziegęstych. **Zbiorem drugiej kategorii (Baire'a)** nazywamy po prostu zbiór $A \subseteq X$ nie będący zbiorem pierwszej kategorii. Zbiór $A \subseteq X$ nazywamy **rezydualnym**, gdy jego dopełnienie $X \setminus A$ jest zbiorem pierszej kategorii.

Warto zauważyć, że gęstość zbioru $E \subseteq X$ oznacza, że z każdym niepustym zbiorem otwartym w X ma on co najmniej jeden punkt wspólny. Jeśli $X = \operatorname{cl} G$, to implikacja wynika z charakteryzacji domknięcia (uwagi 5.2.17). W drugą stronę, załóżmy nie wprost, że

$$\forall_{\varnothing \neq U \in \mathcal{T}}.\ U \cap G \neq \varnothing$$

ale

$$X \setminus \operatorname{cl} G \neq \varnothing.$$

$U := X \setminus \operatorname{cl} G$ jest zbiorem otwartym, więc z założenia istnieje $x \in U \cap G$. Jednak jeżeli $x \in U$, to $x \notin \operatorname{cl} G$ a więc i $x \notin G$. Nie może więc być $U \cap G \neq \varnothing$. Mamy $X \setminus \operatorname{cl} G = \varnothing$ i oczywiście $\operatorname{cl} G \subseteq X$, czyli $X = \operatorname{cl} G$.

Czasem w ten sposób definiuje się gęstość, jednak nie korzystamy z tego faktu w tym wykładzie. Podamy za to z dowodami dwa dodatkowe twierdzenia, charakteryzujące pojęcia zbioru brzegowego i nigdziegęstości - przy pomocy zbiorów otwartych.

Twierdzenie C.5.2. *Zbiór $E \subseteq X$ jest brzegowy wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego niepustego zbioru otwartego U zachodzi nierówność*

$$U \cap (X \setminus E) \neq \varnothing.$$

Dowód. Jeżeli $\operatorname{int} E = \varnothing$, to znaczy że żaden niepusty zbiór otwarty U nie może zawierać się w E, czyli zbiór $U \cap (X \setminus E)$ jest niepusty. W drugą stronę, niech E spełnia nierówność z tezy dla dowolnego zbioru otwartego U. Weźmy $U = \operatorname{int} E$ i załóżmy nie wprost, że $U \neq \varnothing$. Ale $U \subseteq E$ więc nie może zachodzić nierówność $U \cap (X \setminus E) \neq \varnothing$ i mamy sprzeczność. □

Twierdzenie C.5.3. *Zbiór $E \subseteq X$ jest nigdziegęsty wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego niepustego zbioru otwartego U istnieje taki niepusty zbiór otwarty $V \subseteq U$, że $V \cap E = \varnothing$.*

Dowód. Załóżmy najpierw, że zbiór E jest spełnia warunek z tezy. Przypuśćmy nie wprost, że $\operatorname{int} \overline{E} \neq \varnothing$. Niech $U := \operatorname{int} \overline{E}$. Zbiór U jest otwarty i niepusty, zatem z założenia istnieje taki otwarty i niepusty zbiór V, że $V \subseteq U \subseteq \overline{E}$ i $V \cap E = \varnothing$. Jednak, z definicji domknięcia, zachodzi nierówność $V \cap E \neq \varnothing$. Sprzeczność.

W drugą stronę, niech E będzie zbiorem nigdziegęstym. Załóżmy, nie wprost, że istnieje otwarty zbiór $U \neq \varnothing$ taki, że dla każdego otwartego zbioru V:

$$V \nsubseteq U \quad \text{lub} \quad V \cap E \neq \varnothing.$$

Weźmy $V := U \setminus \overline{E}$. Wówczas zbiór $V \neq \varnothing$ jest otwarty i $V \subseteq U$, więc wobec założenia musi zachodzić nierówność $V \cap E \neq \varnothing$. Weźmy więc $x \in V \cap E$. Z definicji V oznacza to, że $x \notin \overline{E}$. Istnieje zatem takie otoczenie otwarte B punktu x, że $B \cap E = \varnothing$. Ale $x \in E$ - sprzeczność. □

Twierdzenie C.5.4 (Cantora). *Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną. Przestrzeń X jest zupełna wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego ciągu $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zstępującego niepustych, domkniętych podzbiorów X i takich, że $\lim\limits_{n \to \infty} \operatorname{diam} F_n = 0$, zbiór $\bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} F_n$ jest jednopunktowy.*

Twierdzenie C.5.5 (Baire'a o kategoriach)**.** *Niech X będzie przestrzenią metryczną zupełną, a $E \subseteq X$ dowolnym zbiorem pierwszej kategorii. Wówczas E jest brzegowy w X a co za tym idzie $X \neq E$.*

Dowód. Ustalmy dowolny zbiór otwarty $U \subseteq X$. Ponieważ Z_1 jest nigdziegęsty, to istnieje taka kula K_1 otwarta w X, że $K_1 \subseteq U$ i $K_1 \cap Z_1 = \varnothing$. Definujemy ciąg kul $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rekurencyjnie: K_1 jak wyżej i dla każdej liczby naturalnej $n > 2$, z gęstości Z_n wynika istnienie takiej kuli otwartej $K_n \subseteq K_{n-1}$, że $K_n \cap Z_n = \varnothing$. Niech r_n oznacza promień kuli K_n. Dla każdej kuli K_n bierzemy kulę K'_n o promieniu $\delta_n = \frac{1}{2^{n+1}} r_n$ i przyjmujemy $F_n := \operatorname{cl} K'_n$. Mamy ciąg zbiorów domkniętych $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ oraz zachodzą zawierania

$$F_n \subseteq K_n \subseteq X \setminus Z_n, \quad n \in \mathbb{N} \tag{C.1}$$

$$F_n \subseteq F_{n+1} \subseteq U, \quad n \in \mathbb{N} \tag{C.2}$$

a ponadto, ponieważ ciąg $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest ograniczony przez r_1, to mamy równość

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam} F_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} r_n = 0 \tag{C.3}$$

Z zupełności przestrzeni X oraz zależności (C.2) i (C.3) na mocy twierdzenia Cantora przekrój rodziny $\{F_n\}$ jest jednoelementowy. Istnieje $x \in X$ taki, że

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} X \setminus Z_n = X \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} Z_n = X \setminus Z = \{x\} \subseteq U.$$

Czyli $U \cap (X \setminus Z) \neq \varnothing$ i stąd zbiór Z jest brzegowy (na mocy twierdzenia C.5.2) □

Twierdzenia Baire'a ma liczne zastosowania w Analize Funkcjonalnej, która jest współczesnym rozwinięciem klasycznej analizy, którą się w większości zajmujemy w tej publikacji. Z twierdzenia Baire'a korzysta się na przykład w dowodach twierdzenia Banacha-Steinhouse'a czy twierdzenia o wykresie domkniętym.

Dodatek D

Wprowadzenie do równań różniczkowych zwyczajnych

Rozważmy równanie:

$$f''(x) + f(x) = 0, x \in \mathbb{R}$$

Niewiadomą w tym równaniu jest funkcja f. Szukamy funkcji $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dwukrotnie różniczkowalnej i takiej, że spełniona jest powyższa zależność. Niech $y = \sin x$. Wówczas $y' = \cos x$, $y'' = -\sin x$. Wówczas mamy $y'' + y = -\sin x + \sin x = 0$. Przyjmujemy $y = f(x)$ - znaleźliśmy rozwiązanie naszego pierwszego równania różniczkowego.

Równania różniczkowe nie sposób omawiać, nie zwróciwszy uwagi na ich liczne zastosoania. Pobieżnie omówimy kilka bardzo różnych problemów, prowadzących do sformułowania różnych równań różniczkowych.

Rozpad promieniotwórczy. Niech $m(t)$ oznacza masę pierwiastka promieniotwórczego w chwili t. Przyjmijmy, że masa pierwiastka, która ulega rozpadowi w umownie „małym" przedziale czasowym $[t, t + \Delta t]$ jest proporcjonalna do iloczynu $m(t)$ i Δt. Mamy zatem równanie w postaci:

$$\Delta m = -\lambda m(t)\Delta t. \tag{D.1}$$

Dzieląc obie strony równania przez Δt otrzymujemy, że $\dfrac{\Delta m}{\Delta t} = -\lambda m(t)$. Przechodząc do granicy z $\Delta t \to 0$ otrzymujemy, że $\dfrac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = -\lambda m(t)$. Jest to nasze pierwsze równanie różniczkowe:

$$m'(t) = -\lambda m(t).$$

Łatwo zauważyć, że funkcja $m(t) = e^{-\lambda t}$ jest rozwiązaniem równania D.1:

$$m'(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(e^{-\lambda t}\right) = -\lambda e^{-\lambda t} = -\lambda m(t).$$

Zauważmy jednak, że również $m(t) = Ce^{-\lambda t}$ jest rozwiązaniem równania D.1 dla *dowolnej* stałej $C \in \mathbb{R}$. $m(t) = e^{-\lambda t}$ jest *rozwiązaniem szczególnym* (albo inaczej *całką szczególną*) naszego równania. Jest to nasza pierwsza ważna lekcja: rozwiązania równania różniczkowego może stanowić nieskończona rodzina funkcji. Najczęściej spotkamy się z równaniami, które spełnia więcej niż jedna funkcja. **Rozwiązaniem ogólnym** równania będziemy nazywać rodzinę funkcji, zależnych od określonej liczby parametrów.

Spadek z małej wysokości. Na spadający punkt materialny działa siła ciężkości proporcjonalna do przyspieszenia ziemskiego oraz siła oporu powietrza proporcjonalna do ciężkości punktu. Jeżeli $y(t)$ oznacza odległość punktu od Ziemi, to funkcja y spełnia równanie

$$y''(t) = -g - Dy'(x),$$

gdzie $g \approx 9,80$ jest przyspieszeniem ziemskim, a D współczynnikiem oporu powietrza.

Rozwój populacji. Model Malthusa rozwoju populacji (1798). Thomas Malthus zakładał, że przyrost ludności jest proporcjonalny do liczby ludzi. Takie założenie wyraża się równaniem

$$P'(t) = \lambda P(t),$$

gdzie $P(t)$ oznacza liczbę osobników populacji w chwili t a $\lambda > 0$ jest współczynnikiem proporcjonalności. Warto zauważyć, że ten naiwny model ten jest wysoce *nie*realistyczny, jeśli chcemy go odnosić - tak jak historycznie czynił to Malthus - do ludzkości. Założenie o proporcjonalności przyrostu do populacji nie uwzględnia szeregu czynników, które wpływają na złożone, rzeczywiste zjawiska populacyjne.

Koszt produkcji. Dla kosztu $K(x)$ wyprodukowania $x > 0$ jednostek towaru zachodzi zależność:

$$K'(x) = \lambda \frac{K(x)}{x}, \ K(x) > 0$$

gdzie λ jest współczynnikiem proporcjonalności, który może wynikać z teoretycznej analizy modelu produkcji lub obserwacji empirycznych.

Przyjmujemy $y = K(x)$. Równanie można przepisać w postaci

(D.2) $$y' = \lambda \frac{y}{x}.$$

Jest to tzw. równanie o zmiennych rozdzielonych.

Definicja D.0.1. Równaniem różniczkowym zwyczajnym rzędu n nazywamy równanie postaci

(D.3) $$F(t, y(t), y'(t), y''(t), \ldots, y^{(n)}(t)) = 0,$$

gdzie $F\colon D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^{n+2}$, dla pewnego $n \in \mathbb{N}$.

O równaniu D.3 mówimy, że jest w postaci uwikłanej. Gdy równanie różniczkowe jest postaci

$$y^{(n)}(t) = f\left(t, y(t), y'(t), \ldots, y^{(n-1)}(t)\right),$$

to mówimy, że jest w **postaci normalnej**.

Definicja D.0.2. Funkcję y nazywamy **rozwiązaniem** (**szczególnym**) w przedziale $I \subseteq D \subseteq \mathbb{R}$ równania różniczkowego D.3, gdy

- y jest n-krotnie różniczkowalna;
- $(t, y(t), y'(t), y''(t), \ldots, y^{(n)}(t)) \in D$ dla każdego $t \in I$;
- $F(t, y(t), y'(t), y''(t), \ldots, y^{(n)}(t)) = 0$ dla każdego $t \in I$.

Definicja D.0.3. Rodzinę funkcji $y(t, C_1, C_2, \ldots, C_n)$, gdzie $(C_1, C_2, \ldots, C_n) \in \mathbb{R}^n$ (tj. funkcji zależących od n parametrów) nazywamy **rozwiązaniem ogólnym** albo **całką ogólną**, gdy dla każdego doboru parametrów funkcja $y(t, C_1, \ldots, C_n)$ jest rozwiązaniem równiania D.3.

Uwaga D.0.4 (Interpretacja geometryczna)**.** Niech $f\colon D \to \mathbb{R}$, , $D \subseteq \mathbb{R}$ oraz niech dane jest równanie różniczkowe postaci

$$y'(x) = f(x, y(x)).$$

Z każdym punktem $(x, y(x)) \in D$ możemy powiązać trójkę $(x, y(x), a)$, gdzie $a = f(x, y(x))$ określa tangens nachylenia (współczynnik kierunkowy) prostej przechodzącej przez punkt $(x, y(x))$ do osi OX. Każdą taką prostą nazywamy **kierunkiem** równania w punkcie $(x, y(x))$.
Polem kierunków równania D.3 nazywamy zbiór wszystkich kierunków równania dla $(x, y(x)) \in D$.

Jeśli y jest rozwiązaniem w I, to zbiór $\{(x, y(x), y'(x)) \in \mathbb{R}^3 \colon x \in I\}$ zawiera się w zbiorze $\big\{(x, y(x), a) \in \mathbb{R}^3 \colon a = f(x, y(x)), (x, y(x)) \in D\big\}$

Definicja D.0.5. Rozważmy rodzinę krzywych $\mathcal{K}$, będących wykresami funkcji postaci $f(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$ gdzie $C_1, \ldots, C_n$ są pewnymi stałymi. Równanie różniczkowe F, którego rozwiązaniem są funkcje $f(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$ zależne od n parametrów $C_1, \ldots, C_n$ nazywamy **równaniem różniczkowym rodziny krzywych** $\mathcal{K}$. W starszej literaturze polskojęzycznej bardzo często rodzinę $\mathcal{K}$ nazywa się rodziną linii a równanie F oczywiście równaniem różniczkowym rodziny linii.

D.1 Najprostsze typy równań

Definicja D.1.1. Zagadnieniem Cauchy'ego albo **zagadnieniem początkowym** nazywamy układ równań

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

dla pewnego danego y_0.

Równania zależne tylko od zmiennej niezależnej. Rozwiążemy równanie $y'(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$.

$$y'(t) = \frac{2t}{t^2+1} \;/ \int_0^x \mathrm{d}t$$

$$\int_0^x y'(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{2t}{t^2+1}\,\mathrm{d}t$$

Podstawmy $t^2 + 1 = s$ i wówczas

$$2t\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}s.$$

Gdy $t = 0$, to $s = 1$ a gdy $t = x$ to $s = x^2 + 1$. Mamy więc do policzenia całkę

$$\int_1^{x^2+1} \frac{\mathrm{d}s}{s} = [\ln|s|]_1^{x^2+1} = \ln(x^2+1) - \ln 1 = \ln(x^2+1).$$

Ostatecznie $y(x) - y(0) = \ln(x^2+1)$. Gdybyśmy mieli do czynienia np. z Zagadnieniem Cauchy'ego

$$\begin{cases} y'(x) = \frac{2x}{x^2+1}, \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

to rozwiązaniem byłaby funkcja y dana wzorem $y(x) = \ln(x^2+1) - 1$.

Równania o zmiennych rozdzielonych: równanie postaci

$$g(y)y'(x) = f(x), \tag{D.4}$$

gdzie f i g są znanymi funkcjami określonymi i ciągłymi w pewnym przedziale.

Przykład 149. Przypomnijmy równanie D.2:

$$y' = \lambda \frac{y}{x}. \text{ (y jest funkcją zmiennej x)}$$

Przerzucamy się na inny zapis pochodnej i przekształcamy:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \lambda \frac{x}{y}$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{y} = \lambda x \,\mathrm{d}x$$

Całkujemy obustronnie:

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = \lambda \int x \,\mathrm{d}x$$

$$\ln y + C_1 = \frac{\lambda}{2} x^2 + C_2.$$

Możemy przyjąć $C_0 = C_2 - C_1$ i mamy

$$\ln y = \frac{\lambda}{2} x^2 + C_0.$$

$$e^{\ln y} = y = \exp\left(\frac{\lambda}{2} x^2 + C_0\right).$$

Przykład 150. Rozwiążemy równanie $y'(x) = y(x)\big(1 - y(x)\big)$.

Równania różniczkowe jednorodne:

D.2 Równania liniowe wyższych rzędów

D.2.1 Równania liniowe jednorodne

D.2.2 Równania liniowe niejednorodne

D.3 Równanie różniczkowe Bernoulliego

D.4 Równanie różniczkowe Clairauta

D.5 Układy równań liniowych

Przykład 151.

$$\begin{cases} x'(t) = -x(t) \\ y'(t) = x(t) + y(t) \end{cases}$$

Przykład 152. Rozwiązać układ równań:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 3x + 1, \ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = x + y$$

Metoda d'Alemberta:

D.5.1 Metoda Eulera rozwiązywania jednorodnych układów równań różniczkowych

D.6 Twierdzenia o istnieniu rozwiązania równania różniczkowego.

Lemat D.6.1 (Gronwalla)**.** *Niech $u, g\colon [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ będą funkcjami ciągłymi, spełniającymi nierówność*

$$u(t) \leqslant \delta + \int_a^t g(s)u(s)\,\mathrm{d}s, t \in [a, +\infty),$$

gdzie δ jest nieujemną stałą. Wtedy

$$u(t) \leqslant \delta \exp\left(\int_a^t g(s)\,\mathrm{d}s\right), t \in [a, +\infty).$$

Twierdzenie D.6.2 (Picarda-Lindelöfa)**.** *Rozważmy zagadnienie początkowe*

$$(*) \begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), \\ y(t_0) = s_0 \end{cases}$$

gdzie $t_0, y_0 \in \mathbb{R}$, $f\colon D \to \mathbb{R}, D \subseteq \mathbb{R}^2$, $(t_0, s_0) \in \mathbb{R}^2$.
Niech $\mathbf{P} = [t_0 - b, t_0 + b] \times [y_0 - b, y_0 + b]$, $a, b \in (0, +\infty)$. Załóżmy, że $f\big|_{\mathbf{P}}$ jest ciągła oraz spełnia

warunek Lipschitza ze stałą L względem drugiej zmiennej.
Oznaczmy $M = \max\{|f(t,s)|\colon (t,s) \in \mathbf{P}\}$. Niech

$$0 < \delta < \min\left\{a, \frac{b}{M}, \frac{1}{L}\right\},$$

przy czym jeśli $M = 0$, to przyjmujemy, że $\frac{b}{M} = \infty$.
Wówczas istnieje dokładnie jedna funkcja $y\colon [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \to \mathbb{R}$, będąca rozwiązaniem zagadnienia początkowego $(*)$.

Twierdzenie D.6.3 (Peana)**.** *Niech $f\colon [a,b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Jeżeli istnieje kula $K(y_0, x_0) \subseteq \mathbb{R}$ taka, że $f\big|_{[a,b]\times K(y_0,x_0)}$ jest ciągła, to istnieje $\delta > 0$, że zagadnienie Cauchy'ego*

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

ma przynajmniej jedno rozwiązanie w przedziale $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

Twierdzenie D.6.4 (Peana)**.** *Jeżeli funkcje $x, y\colon [0,T] \to \mathbb{R}$ są różniczkowalne i spełniają dla $0 \leqslant t \leqslant T$ warunki:*

$$x'(t) = f(t, x(t)),$$

$$y'(t) < f(t, y(t)),$$

$$y(0) \leqslant x(0),$$

to $y(t) \leqslant x(t)$ dla $0 \leqslant t \leqslant T$.

Dodatek E

Całka Riemanna-Stieltjesa

Definicja E.0.1. Niech $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ bedzie funkcją ograniczoną a $\mu\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ funkcją niemalejącą. Jeżeli dla dowolnego ciagu normalnego $(\pi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ przedziału $[a,b]$ oraz dowolnego ciągu punktów pośrednich $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i \in \{1,\dots,n_k\}$ istnieje granica

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{n_k} f(\xi_i)\Delta\mu_i, \text{ gdzie } \Delta\mu_i := \mu(x_i) - \mu(x_{i-1}),$$

to granicę tę oznaczamy

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\mu(x)$$

i nazywamy całką ozaczoną Riemanna-Stieltjesa dla funkcji f w przedziale $[a,b]$.
Całka bywa też oznaczana

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}\mu \text{ lub } \int_a^b f(x)\mu(\mathrm{d}x)$$

przy czym drugiego oznaczenia autor nie stosuje. Będziemy też pisać, że funkcja f jest „całkowalna w sensie R-S" względem funkcji μ.

Całka Riemanna-Stieltjesa ma bardzo silny związek z całkowaniem całki Riemmana przez podstawienie.

Twierdzenie E.0.2. *Niech $\mu\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ będzie niemalejąca i różniczkowalna w $[a,b$ oraz $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ograniczoną. f jest całkowalna w sensie Riemanna-Stieltjesa na $[a,b]$ względem μ wtedy i tylko wtedy, gdy funkcja $f\mu'$ jest całkowalna w sensie Riemanna na przedziale $[a,b]$. Wtedy*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\mu(x) = \int_a^b f(x)\mu'(x)\,\mathrm{d}x.$$

Dowód. Wystarczy spojrzeć na postać sum całkowych i zastosować twierdzenie Lagrange'a o wartości średniej do funkcji μ'. □

Ciekawą postać przyjmie uogólnienie twierdzenia o zamianie zmiennych:

Twierdzenie E.0.3 (Zamiana zmiennych w całce Riemanna-Stieltjesa)**.** *Niech* $\varphi\colon [A,B] \stackrel{na}{\to} [a,b]$ *będzie funkcją rosnącą,* $\mu\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *funkcją niemalejącą i* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *całkowalną w sensie R-S wzgl. funkcji* μ *na przedziale* $[a,b]$*. Określimy funkcje* $g, \nu\colon [A,B] \to \mathbb{R}$ *wzorami*

$$\nu(y) = \mu\left(\varphi(y)\right), \; g(y) = f\left(\varphi(y)\right).$$

Wówczas g *jest całokwalna w sensie R-S względem funkcji* ν *i*

$$\int_a^b f \, \mathrm{d}\mu = \int_A^B g \, \mathrm{d}\nu$$

Czyli

$$\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}\mu(x) = \int\limits_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} g(t) \, \mathrm{d}\nu(t).$$

Całka Riemanna-Stieltjesa spełnia analogiczne do całki Riemanna własności:

Twierdzenie E.0.4. *Jeżeli* f, g *są funkcjami całkowalnymi w przedziale* $[a,b]$ *względem f.* μ *oraz* $f \leqslant g$*, to*

$$\int_a^b f \, \mathrm{d}\mu \leqslant \int_a^b g \, \mathrm{d}\mu.$$

Twierdzenie E.0.5. *Jeżeli* f, g *są funkcjami całkowalnymi w przedziale* $[a,b]$ *względem f.* μ *a* $u, v \in \mathbb{R}$ *dowolnymi stałymi, to*

$$\int_a^b (u \cdot f + v \cdot g)(x) \, \mathrm{d}\mu(x) = u \int_a^b f(x) \, \mathrm{d}\mu(x) + v \int_a^b g(x) \, \mathrm{d}\mu(x).$$

Twierdzenie E.0.6. *Jeżeli* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *jest funkcją całkowalną na* $[a,b]$ *w sensie Riemanna-Stieltjesa względem funkcji niemalejącej* $\mu\colon [a,b] \to \mathbb{R}$*, to*

$$\left| \int_a^b f(x) \, \mathrm{d}\mu(x) \right| \leqslant \int_a^b |f(x)| \, \mathrm{d}\mu(x)$$

Twierdzenie E.0.7. *Jeżeli* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *jest funkcją całkowalną na* $[a,b]$ *w sensie Riemanna-Stieltjesa względem funkcji niemalejącej* $\mu\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *oraz* $|f(x)| \leqslant M, x \in [a,b]$*, to*

$$\left| \int_a^b f(x) \, \mathrm{d}\mu(x) \right| \leqslant M\left(\mu(b) - \mu(a)\right)$$

Dowód. Będzie w przyszłości... □

Możemy łatwo określić dwie szerokie klasy funkcji całkowalnych w sensie R-S.

Twierdzenie E.0.8. *Jeżeli* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *jest funkcją monotoniczną a* $\mu\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *funkcją niemalejącą i ciągłą, to* f *jest całkowalna w sensie Riemanna-Stieltjesa względem funkcji* μ*.*

Twierdzenie E.0.9. *Jeżeli* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *jest funkcją ciągłą na* $[a,b]$ *to jest całkowalna w sensie Riemanna-Stieltjesa względem dowolnej funkcji niemalejącej* $\mu\colon [a,b] \to \mathbb{R}$*.*

Przykłady.

Przykład 153. Niech $E = \{y_1, \dots, y_k\}$ oraz funkcja $\mu\colon \mathbb{R} \to E$ będzie dla pewnych ustalonych $a_1, \dots, a_k \in [0, 1]$ dana wzorem

$$\mu(x) = \begin{cases} y_i, & \text{dla } x = a_i, i \in \{1, \dots, k\}; \\ 0, & \text{dla } x \notin \{a_1, \dots, a_k\}. \end{cases}$$

Wówczas funkcja μ jest oczywiście niemalejąca i mamy:

$$\int_0^1 x^2 \,\mathrm{d}\mu(x) = \sum_{i=1}^{k} a_i^2 y_i^2.$$

Powyższy przykład ma zgrabną interpretację fizyczną. Moment bezwładności prostego drugu o jednostkowej długości dany jest względem osi przechodzącej przez koniec drutu i prostopadłej do niego dany jest wzorem $\int_0^1 x^2 \,\mathrm{d}m$, gdzie $m(x)$ oznacza masę odcinka $[0, x]$. Jeżeli gęstość masy odcinka $[0, x]$ jest dana funkcją ciągła ϱ - to oznacza: $m'(x) = \varrho(x)$ - to moment bezwładności jest dany jako całka:

$$\int_0^1 x^2 \varrho(x) \,\mathrm{d}x.$$

Jeżeli drut składa się z mas m_i skoncentrowanych w punktach a_i, to powyższa całka przyjmuje postać:

$$\int_0^1 x^2 \varrho(x) \,\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{k} a_i^2 m_i.$$

Wahanie funkcji.

Definicja E.0.10 (Wahanie funkcji)**.** Niech $D \subseteq \mathbb{R}$ i $f\colon D \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ograniczoną na przedziale $[a, b] \subseteq D$. Ustalmy $m \geqslant 2$ elementowy podział π przedziału $[a, b]$. **Wahaniem funkcji** $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ **względem podziału** π nazywamy liczbę

$$V_a^b(f, \pi) := \sum_{k=1}^{m} |f(x_k) - f(x_{k-1})|.$$

Gdy wiadomo, że funkcja jest określona na $[a, b]$ (albo wcześniej powiedziane, że rozważamy jej zacieśnienie do tego przedziału) to oczywiście możemy pomijać w zapisie indeksy: $V_a^b(f, \pi) = V(f, \pi)$.

Wahaniem funkcji f na przedziale $[a, b]$ nazywamy wielkość

$$V_a^b(f) := \sup_{P \in \mathcal{P}[a,b]} V_a^b(f, \pi).$$

Z definicji wahanie jest liczbą nieujemną. Jeżeli $V_a^b(f) < \infty$, to mówimy, że funkcja $f\big|_{[a,b]}$ jest **funkcją o wahaniu ograniczonym** albo, że **ma wahanie skończone w przedziale** $[a, b]$.

Twierdzenie E.0.11. *Niech $f, g\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ będą funkcjami o wahaniu ograniczonym. Wówczas*

1. *funkcja $f + g$ jest funkcją o wahaniu skończonym oraz*

$$V_a^b(f + g) \leqslant V_a^b(f) + V_a^b(g);$$

2. *dla dow.* $\lambda \in \mathbb{R}$ *funkcja* λf *jest funkcją o wahaniu skończonym oraz*

$$V_a^b(\lambda f) = |\lambda| V_a^b(f);$$

3. *dla dow.* $x, y \in [a, b]$, $x < y$ *zachodzi*

$$|f(y) - f(x)| \leqslant V_x^y(f);$$

4. *dla dowolnej liczby* $\xi \in \mathbb{R}$, $a < \xi < b$*:*

$$V_a^b(f) = V_a^\xi(f) + V_\xi^b(f);$$

5. *funkcja* fg *jest funkcją o wahaniu ograniczonym.*

Twierdzenie E.0.12. *Dowolna funkcja* $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ *monotoniczna jest funkcją o wahaniu ograniczonym oraz*

$$V_a^b(f) = |f(b) - f(a)|.$$

Twierdzenie E.0.13 (Jordana o rozkładzie)**.** *Każda funkcja* $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ *ma wahanie skończone w* $[a, b]$ *wtedy i tylko wtedy, gdy daje się przedstawić w postaci różnicy dwóch funkcji niemalejących na przedziale* $[a, b]$*.*

Twierdzenie E.0.14. *Każda funkcja o wahaniu skończonym ma przeliczalnie wiele punktów nieciągłości.*

Twierdzenie E.0.15. *Dla dow. funkcji* $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$*:*

$$V_a^b(f) = \int_a^b \mathrm{d}f(x).$$

Dodatek F

Iloczyny nieskończone

Twierdzenie F.0.1. *Jeżeli iloczyn nieskończony* $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ *jest zbieżny, to* $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$.

Twierdzenie F.0.2. *Jeżeli* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *jest ciągiem liczb rzeczywistych z przedziału* $(0,1)$, *to następujące warunki są równoważne:*

1. *szereg* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *jest zbieżny,*
2. *iloczyn* $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ *jest zbieżny,*
3. *iloczyn* $\prod_{n=1}^{\infty}(1-a_n)$ *jest zbieżny.*

Twierdzenie F.0.3 (Wzór Wallisa)**.**

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{2n-1} \cdot \frac{2n}{2n+1} = \frac{\pi}{2}.$$

Dodatek G

Dowód niewymierności liczby π

Twierdzenie. *Liczba π jest niewymierna.*

Dowód. Załóżmy, nie wprost, że $\pi = \frac{a}{b}$ dla pewnych $a, b \in \mathbb{Z}$. Definiujemy wielomiany

$$f(x) = \frac{x^n (a - bx)^n}{n!},$$

$$F(x) = f(x) - f^{(2)}(x) + f^{(4)}(x) - \ldots + (-1)^n f^{(2n)}(x),$$

dla pewnej liczby n. Łatwo widzimy, że $x \mapsto n! f(x)$ jest całkowala oraz, że $f^{(k)}(0)$ istnieje. Podobnie $f^{(k)}\left(\frac{a}{b}\right)$, gdyż $f(x) = f\left(\frac{a}{b} - x\right)$. Obliczamy

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(F'(x)\sin x - F(x)\cos x\right) = F''(x)\sin x + F(x)\sin x = f(x)\sin x,$$

$$\int_0^\pi f(x)\sin x \,\mathrm{d}x = \left[F'(x)\sin x - F(x)\cos x\right]_0^\pi = F(\pi) + F(0). \tag{G.1}$$

$F(\pi) + F(0)$ jest liczbą całkowitą, gdyż $f^{(k)}(\pi)$ i $f^{(k)}(0)$ są liczbami całkowitymi. Ale dla $0 < x < \pi$ mamy:

$$0 < f(x)\sin x < \frac{\pi^n a^n}{n!},$$

więc całka G.1 jest dodatnia, chociaż dowolnie mała - wystarczy dobrać odpowiednio duże n. Stąd G.1 jest sprzeczne - π nie może być liczbą wymierną. $\square$

Bibliografia i literatura

Bibliografia

[1] Walter Rudin, *Podstawy analizy matematycznej*, Wydawnictwo Naukowe PWN (2020).

[2] Witold Kołodziej, *Analiza matematyczna*, Wydawnictwo Naukowe PWN.

[3] Kazimierz Kuratowski, *Rachunek różniczkowy i całkowy*, Wydawnictwo Naukowe PWN.

[4] Marek Kordos, *Wykłady z historii matematyki.*

[5] Ryszard Rudnicki, *Wykłady z analizy matematycznej*, Wydawnictwo Naukowe PWN (2012).

[6] G.M. Fichtenholz, *Rachunek rózniczkowy i całkowy Tom 1*, Wydawnictwo Naukowe PWN.

[7] G.M. Fichtenholz, *Rachunek rózniczkowy i całkowy Tom 2*, Wydawnictwo Naukowe PWN.

[8] Krzysztof Maurin, *Analiza Część 1 Elementy*, Wydawnictwo Naukowe PWN.

[9] Aleksander Błaszczyk, Sławomir Turek, *Teoria Mnogości*, Wydawnictwo Naukowe PWN.

[10] Andrzej Białynicki-Birula, *Algebra*, Wydawnictwo Naukowe PWN.

[11] I.N. Bronsztejn, H. Muhlig, G. Musiol, K.A. Siemiendiajew, *Nowoczesne kompendium matematyki*, Wydawnictwo Naukowe PWN.

[12] Ryszard Rudnicki, *Dynamika populacyjna.*

[13] William Moebs, Samuel J. Ling, Jeff Sanny, *Fizyka dla szkół wyższych. Tom 1.*

[14] Andrzej Ostrowski, *Matematyka z przykladami zastosowa w naukach ekonomicznych.*

[15] Chiang A., *Podstawy ekonomii matematycznej.*

[16] E. H. Lockwood *A Book of Curves*, Cambridge University Press (1961).

[17] Andreescu T. *Problems in Real Analysis - Advanced Calculus on the Real Axis*, Springer (2009).

[18] Bernard R. Gelbaum, John M. H. Olmsted, *Counterexamples in Analysis.*

[19] L. Olsen, *A new proof of Darboux's theorem*, Amer. Math. Monthly 111 (2004).

[20] J. A. Oguntuase, *On an inequality of Gronwall*, J. Inequal. Pure and App. Math. 2 (2001).

[21] Ivan Niven, *A simple proof that π is irrational.*

[22] https://mathworld.wolfram.com/BernsteinPolynomial.html

[23] https://mathworld.wolfram.com/EulerFormula.html