

Zbiór przyjaznych zadań z analizy matematycznej

Ziemowit Wójcicki

13 stycznia 2021

1. Rozwiązać w liczbach rzeczywistych

$$x^5 - x^4 - x + 1 = 0$$

2. Podać dziedzinę, przeciwdziedzinę następujących funkcji oraz naszkicować ich wykresy

$$y = \sqrt{2x^2 + 5x - 3}$$

$$y = \sin(\arccos x)$$

3. Czy funkcja f określona na zbiorze liczb rzeczywistych dana wzorem

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x+1}{x-1} & \text{dla } x \neq 1, \\ 0 & \text{dla } x = 1, \end{cases}$$

jest funkcją różnowartościową? Czy jest funkcją na \mathbb{R} ?

4. Zbadać parzystość funkcji $\text{sinc}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (tzw. funkcji Bessela), danej wzorem

$$\text{sinc}(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{dla } x \neq 0, \\ 1 & \text{dla } x = 0. \end{cases}$$

5. Zbadać parzystość funkcji

$$f(x) = \sin x \cdot \frac{4^x + 1}{1 - 4^x}$$

6. Narysować wykres funkcji $x \mapsto |\sin x| + |\cos x|$ i zbadać, czy jest parzysta bądź nieparzysta oraz czy jest okresowa - jeśli tak to wyznaczyć jej okres bazowy.

7. Udowodnić, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzi

$$\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{2n}{2n+1}$$

8. Udowodnić prawdziwość Tożsamości Abela:

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i = \sum_{i=1}^{n-1} \left((a_i - a_{i+1}) \sum_{j=1}^i b_j \right) + a_n \sum_{i=1}^n b_i$$

9. Udowodnić prawdziwość Tożsamości Lagrange'a:

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i b_i\right)^2 = \sum_{i=1}^n a_i^2 \cdot \sum_{i=1}^n b_i^2 - \sum_{1 \leq i < j \leq n} (a_i b_j - a_j b_i)^2.$$

10. Udowodnić prawdziwość Tożsamości Czebyszewa:

$$\sum_{i=1}^n a_i \sum_{i=1}^n b_i = n \cdot \sum_{i=1}^n a_i b_i - \sum_{1 \leq i < j \leq n} (a_i - a_j)(b_i - b_j).$$

11. Obliczyć sumę

$$\sum_{i=1}^{10} \sum_{j=1}^{10} \sum_{k=1}^{10} \min\{i, j, k\}.$$

12. Obliczyć sumę

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \min\{i, j\}.$$

13. Udowodnić, że jeżeli $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją addytywną (tzn. $f(x+y) = f(x) + f(y)$ dla dowol. $x, y \in \mathbb{R}$), to

$$\forall n \in \mathbb{N} \forall x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}. f\left(\sum_{i=1}^n x_i\right) = \sum_{i=1}^n f(x_i)$$

14. Udowodnić, że

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \quad n \in \mathbb{N}$$

15. Udowodnić, że dla każdej liczby naturalnej n spełniona jest nierówność $n! \geq 2^{n-1}$.

16. Udowodnić, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$:

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2n-1)^2 = \frac{n(4n^2-1)}{3}.$$

17. Udowodnić, że

$$\frac{1}{n} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \right) < \frac{1}{n\sqrt{n}}, \quad n \in \mathbb{N}$$

18. Udowodnić, że dla dowolnych liczby rzeczywistych a i b , $a \neq b$ oraz liczby naturalnej n zachodzi

$$a^n + a^{n-1}b + \dots + ab^{n-1} + b^n = \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a - b}$$

19. Udowodnić, że dla dowolnej liczby rzeczywistej $x > -1$ i dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzi następująca *nierówność Bernoulliego*

$$(1+x)^n \geq 1+nx$$

20. Udowodnić, że

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}} = \sqrt{n+1} - 1$$

21. Udowodnić, że $(1 + 2 + \dots + n)^2 = 1^3 + 2^3 + \dots + n^3$.

22. Udowodnić, że zbiór liczb naturalnych i zbiór liczb całkowitych są równoliczne.

23. Udowodnić, że zbiór \mathbb{N} oraz zbiór

$$\left\{ \frac{1}{2n-1} : n \in \mathbb{N} \right\}$$

są równoliczne.

24. Udowodnić, że zbiory $\left\{ \frac{1}{n+1} : n \in \mathbb{N} \right\}$ i $\left\{ \frac{1}{n+2} : n \in \mathbb{N} \right\} \cup \mathbb{N}$ są równoliczne.

25. Udowodnić, że jeżeli A jest zbiorem nieskończonym oraz S jest skończonym podzbiorem zbioru A , to zbiór dopełnienie zbioru S względem zbioru A jest zbiorem nieskończonym.

0.1 Ciągi

1. Pokazać, że następujące twierdzenia są równoważne

Twierdzenie. *Każdy ograniczony z góry podzbiór zbioru liczb rzeczywistych ma kres górny.*

Twierdzenie. *Każdy rosnący i ograniczony z góry ciąg liczb rzeczywistych jest zbieżny.*

2. Wyznaczyć kresy następujących zbiorów:

$$A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 < 2\}$$

$$B = \left\{ 1 + \frac{(-1)^n}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$C = \left\{ \frac{n+1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$D = \left\{ \sqrt{2 - \frac{1}{n^3}} + \sqrt{2 + \frac{1}{n^3}} : n \in \mathbb{N} \right\}$$

3. Obliczyć następujące granice

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4 + 2n^2 + 4}{3n^3 + n^2 + n + 1}$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 + \sqrt{2}n^2}{n^4 + 2}$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^3 + 7n + 4}{\sqrt{5n^3 + n^2 + 3}}$$

$$(4) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{1}{3}\right)^n + 7^n + 13}$$

- (5) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n + 4^n}{5^n + 3^n}$
- (6) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{5 \cdot 2^n + 3 \cdot 7^n}$
- (7) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{3 \cdot 7^n + \sin n}$
- (8) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \sin n!}{n^2 + 1}$
- (9) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)^3(3n+1)^3}{(6n^2+2n+1)^4}$
- (10) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7n^2 - 4n + 3}{\sqrt{n^4 - 2n} + \sqrt[3]{n^2 + 1}}$
- (11) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin n}{n}$
- (12) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin n}{2n^2}$
- (13) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin 7n}{n}$
- (14) $\lim_{n \rightarrow \infty} (n-1) \sin \left(\frac{1}{n-1} \right)$
- (15) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin n}{3n}$
- (16) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin 3n}{4n}$
- (17) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\tan 5n}{n}$

4. Udowodnić, że dla dowolnego ciągu $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$$

5. Obliczyć

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt{n^2 + 1} - \sqrt{n^2 - 1})$$

6. Obliczyć

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{a}{n} \\ \frac{a}{n} & 1 \end{bmatrix}^n$$

gdzie $a \in \mathbb{R}$.

7. Udowodnić, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{n} \right) = e^a$$

8. Obliczyć

$$(a) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{4 - 3n^2}\right)^{9n^2 + 37n}$$

$$(b) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{4 - 3n^2}\right)^{7n+2}$$

$$(c) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2 + n^2}{n^2}\right)^{n^2}$$

$$(d) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2}{n^2 + 1}\right)^n$$

$$(e) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(n \cdot \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right)\right)$$

9. Obliczyć

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$$

10. Obliczyć

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n - \arctan n}{n + \arctan n}\right)^{\ln 2^n}$$

11. Udowodnić, że jeśli ciąg liczb dodatnich jest *podaddytywny*, tzn. taki że $a_{n+m} \leq a_n + a_m$ dla $n, m = 1, 2, 3, \dots$ to ciąg $\frac{a_n}{n}$ jest zbieżny.

Rozwiązanie:

Niech $s = \inf_{m \in \mathbb{N}} \frac{a_m}{m}$. Wykażemy, że $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{a_m}{m} = s$.

Najpierw łatwo indukcyjnie pokazujemy, że dla dowolnych $n, k \in \mathbb{N}$ jest $a_{k \cdot n} \leq k \cdot a_n$.

Ustalmy $\varepsilon > 0$. Oczywiście dla każdego $n \in \mathbb{N}$ mamy $\frac{a_m}{m} \geq s$, zatem pozostaje wykazać, że od pewnego miejsca jest $\frac{a_m}{m} \leq s + \varepsilon$. Weźmy więc $n \in \mathbb{N}$ spełniające nierówność $\frac{a_n}{n} \leq s + \varepsilon$ i niech $A = \max \{a_r : 0 \leq r < n\}$ (przy czym przyjmujemy, że $a_0 = 0$). Dowolne $m \in \mathbb{N}$ możemy przedstawić w postaci $m = k \cdot n + r$, gdzie $k \in \mathbb{N}$ $0 \leq r < n$, a następnie oszacować:

$$\frac{a_m}{m} = \frac{a_{k \cdot n + r}}{k \cdot n + r} \leq \frac{k \cdot a_n + a_r}{k \cdot n} = \frac{a_n}{n} + \frac{a_r}{k \cdot n} \leq s + \varepsilon + \frac{A}{k \cdot n}.$$

Jeśli m jest dostatecznie duże, to składnik $\frac{A}{k \cdot n}$ staje się mniejszy od ε , a wtedy: $\frac{a_m}{m} \leq s + 2\varepsilon$, co kończy dowód.

12. Udowodnić, że jeżeli $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jest ciągiem *podmultiplikatywnym* (tzn. $\forall m, n \in \mathbb{N}. a_{n+m} \leq a_n \cdot a_m$) oraz $a_n \geq 0, a_n \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$, to ciąg $(\sqrt[n]{a_n})_{n \in \mathbb{N}}$ jest zbieżny oraz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \inf \{ \sqrt[n]{a_n} : n \in \mathbb{N} \}.$$

13. Ustalmy dowolny zbiór $A \subset \mathbb{R}$ i liczbę rzeczywistą G . Udowodnić, że jeżeli dla każdego $a \in A$ zachodzi $a \leq G$ oraz istnieje taki ciąg $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ wyrazów zbioru A , że $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = G$, to $G = \sup A$.

Sformułować i udowodnić analogiczne twierdzenie dla kresu dolnego.

14. Wyznaczyć kresy następujących zbiorów:

$$M = \left\{ \frac{n^2 + 2n - 3}{4n^3} : n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$N = \left\{ \frac{7n^2 + 3n - 12}{2n^2 + 3} : n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$K = \left\{ \frac{1}{x} \sin x : x > 0 \right\}$$

$$S = \{x \sin x : x \geq 0\}$$

$$F = \{ \sqrt[n]{n} : n \in \mathbb{N} \setminus \{1\} \}$$

$$G = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \right\}$$

Rozwiązanie: Zbiory M i N wymagają jedynie umiejętności obliczania prostych granic oraz twierdzenia z poprzedniego zadania. Dla zbioru K podobnie: potrzebujemy dodatkowo wzorów $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 0$ oraz $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, liczymy granice funkcji i uogólniamy wnioski z poprzedniego zadania na funkcje (def. ciągowa Heinego granicy funkcji).

Zbiór F : $\sup\{ \sqrt[n]{n} : n \in \mathbb{N} \setminus \{1\} \} = \sqrt[3]{3}$, $\inf\{ \sqrt[n]{n} : n \in \mathbb{N} \setminus \{1\} \} = 1$.

Wyznamy kresy zbioru G . Najmniejszą liczbą naturalną jest 0 oraz $G \subseteq \mathbb{N}$. Zauważmy, że dla $m = 0$ i $n > 0$ mamy $0 \in G$ zatem $0 = \inf G$.

Dla dowolnych $m, n \in \mathbb{N}$ jeśli $m < n$, to $\frac{m}{n} < 1$. Jedynek jest zatem *ograniczeniem* górnym zbioru A . Ustalamy dowolne $\varepsilon > 0$ i szukamy takich $m, n \in G$, żeby było $\frac{m}{n} > 1 - \varepsilon$. Ponownie możemy wziąć dowolne $n \in \mathbb{N}$ i tak dobrać m , że $m > n \cdot (1 - \varepsilon)$. Starczy przyjąć $m = \lfloor n(1 - \varepsilon) \rfloor + 1$ (jest to oczywiście pewna liczba naturalna, spełniająca porządane własności¹).

15. Obliczyć granicę ciągu $\left(\frac{n^2 + 2}{(3n + 2)^2}, \frac{1}{n} \right)_{n \in \mathbb{N}}$.

16. Obliczyć granice ciągów danych następującymi równaniami rekurencyjnymi

$$(a) \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_1 = 1 \\ x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + x_{n-1}) \text{ dla } n > 1 \end{cases}$$

$$(b) \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_1 = 1 \\ x_{n+1} = \frac{2}{3}x_n + \frac{1}{3}x_{n-1} \text{ dla } n > 1 \end{cases}$$

$$(c) \begin{cases} x_1 = 4 \\ x_{n+1} = \frac{2}{3}x_n + 2 \text{ dla } n > 1 \end{cases}$$

¹W ogólności $\lceil x \rceil - 1 < x < \lfloor x + 1 \rfloor$ dla $x \in \mathbb{R}$ (ćwiczenie)

17. Zbadać zbieżność ciągu zadanego równaniem rekurencyjnym

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = a_n + \frac{1}{2a_n} \end{cases} \quad \text{dla } n > 1$$

18. Jaka jest wartość wyrażenia $\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots}}}$?

19. Obliczyć następujące granice, jeśli istnieją. W przeciwnym wypadku podać granice jednostronne

$$(a) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x+2}{x^3 + 4x^2 + 4x}$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 3x^2 + x - 3}{x - 3}$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}$$

$$(d) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x + 1}$$

$$(e) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{|x + 1|}$$

$$(f) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 3x - 2}{x^2 - x - 2}$$

$$(g) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-3x^2 + x + 2}{1 - x}$$

$$(h) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 - 2x + 7}{2x^3 + 7x^2 - x + 1}$$

$$(i) \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{x^3 + 4x^2} - x)$$

20. Udowodnić następujące

Twierdzenie (Stolza). *Jeżeli $x_n \rightarrow \infty$, $y_n \rightarrow \infty$ oraz istnieje $N \in \mathbb{N}$ tak, że $y_{n+1} > y_n, n > N$, to*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}},$$

o ile granica po prawej stronie istnieje (skończona lub nie).

21. Pokazać, że $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^p + 2^p + \dots + n^p}{n^{p+1}} = \frac{1}{p+1}$, $p \in \mathbb{N}$.

22. Udowodnić, że

$$\text{jeżeli } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = g, \text{ to } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} = g.$$

23. Udowodnić, że

$$\text{jeżeli dla każdego } n \in \mathbb{N}, a_n \geq 0 \text{ oraz } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = g, \text{ to } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n} = g,$$

1 Funkcje jednej zmiennej i funkcje wektorowe

1.1 Ciągłość, ciągłość jednostajna

1. Udowodnić, że każda funkcja spełniająca warunek Lipschitza jest jednostajnie ciągła.
2. Udowodnić, że następujące funkcje są ciągłe

$$(a) w: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; w(x) = x^n + x^{n-1} + \dots + x^2 + x^1 + 1$$

$$(b) \sin: \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$$

3. Czy funkcja Bessela z zadania 4 jest ciągła w zerze?
4. Zbadać ciągłość funkcji $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ określonej następująco

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{\sin^2 x}}{x} & \text{dla } x \neq 0; \\ 1 & \text{dla } x = 0. \end{cases}$$

5. Zbadać ciągłość funkcji danej równaniem $y = \operatorname{sgn} \sin \pi x$.
6. Zbadać, że następujące funkcje mają własność Darboux ale nie są ciągłe

$$(a) f: [-1, 1] \rightarrow [1, 1] \text{ dana wzorem}$$

$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & \text{dla } x \neq 0; \\ 0 & \text{dla } x = 0. \end{cases}$$

$$(b) g: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R} \text{ dana wzorem}$$

$$g(x) = \begin{cases} -x, & \text{dla } x \in [-1, 0], \\ x + 1 & \text{dla } x \in (0, 1]. \end{cases}$$

7. Udowodnić, że równanie $e^x - x^3 = 0$ ma co najmniej jedno rozwiązanie w przedziale $[-1, 1]$
8. Udowodnić, że równanie $e^x \sin x - 2x = 0$ ma co najmniej jedno rozwiązanie w przedziale $[\frac{\pi}{2}, \pi]$
9. Udowodnić, że funkcja dirichleta $\delta: \mathbb{R} \rightarrow \{1, 0\}$ dana wzorem

$$\delta(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x \in \mathbb{Q}; \\ 0 & \text{dla } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

nie jest ciągła w żadnym punkcie swojej dziedziny.

10. Udowodnić, że funkcja $D: \mathbb{R} \rightarrow \{1, 0\}$

$$D(x) = x\delta(x)$$

jest ciągła w zerze i tylko w zerze.

11. Zbadać ciągłość funkcji danej równaniem $f(x) = x^2 - x[x]$.
12. Czy funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ określona następująco

$$f(x) = \frac{x}{1 + |x|}$$

jest jednostajnie ciągła na \mathbb{R} ?

13. Czy istnieje funkcja $f: [a, b] \rightarrow \{a, b\}$ ciągła i taka, że $f(a) = a$ oraz $f(b) = b$.

1.2 Różniczkowanie, ciągłość i różniczkowalność

1. Obliczyć pochodne funkcji danych następującymi wyrażeniami

$$(a) y = \ln x \cdot \tan x$$

$$(b) y = \frac{\sin x}{\ln x}$$

$$(c) y = \frac{\ln x}{\tan x}$$

$$(d) y = \ln(\tan x)$$

$$(e) y = \tan(\ln x)$$

$$(f) y = \tan(x \ln x)$$

$$(g) y = \ln(x \tan x)$$

$$(h) y = \ln(\sin^3 e^x)$$

$$(i) y = x^x$$

$$(j) y = e^x \ln x$$

$$(k) y = \sin e^x$$

$$(l) y = \arcsin(x - x^2)$$

$$(m) y = \frac{x}{x + 3}$$

$$(n) y = \frac{\cos x}{\ln x}$$

$$(o) y = \sqrt[3]{\frac{1 + x^3}{1 - x^3}}$$

$$(p) y = \sin \cos x$$

$$(r) y = \frac{x \ln x}{\cos x}$$

2. Zbadać przebieg zmienności funkcji $x \mapsto \frac{x}{\ln x}$.

3. Niech f będzie funkcją daną wzorem:

$$f(x) = \begin{cases} e^x, & \text{gdy } x \leq 0; \\ 1 + x, & \text{gdy } x > 0. \end{cases}$$

Wyznaczyć dziedzinę i zbiór wartości funkcji f oraz udowodnić, że jest ciągła i różniczkowalna w całej dziedzinie.

4. Obliczyć pochodne (dla argumentów, dla których istnieją) dla następujących funkcji oraz wyznaczyć ich dziedziny i narysować ich wykresy

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = |x|$$

$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = |\sin x|$$

5. Obliczyć pochodną funkcji $x \mapsto |\log x|$

6. Korzystając z reguły de l'Hospitala obliczyć następujące granice

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arctan x}{x^3}$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - 12x + 12}{x - 2}$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^4 + 3x^2 - 4}{x + 1}$$

$$(d) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4}{e^{x^2}}$$

$$(e) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{x}$$

$$(f) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$$

7. (a) Udowodnić, że dla dowolnych ciągów $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$:
jeśli $a_n \rightarrow 0$, $b_n \rightarrow \infty$, to

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$$

(b) Czy do granicy $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\ln x}$ trzeba (i można?) zastosować regułę de l'Hospitala?

8. Narysować wykresy funkcji

$$w(x) = x^3 - 9x^2 + 27x + 3$$

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{(x + 1)^2}$$

$$g(x) = x^3 \ln(x)$$

$$h(x) = \frac{2x}{x + 1} + x^2$$

9. Zbadać wszystkie asymptoty funkcji $f(x) = xe^{\frac{x}{x+1}}$

10. Zbadać przebieg zmienności i naszkicować wykresy następujących funkcji

$$f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$$

$$g(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

$$h(x) = \frac{x}{\sqrt[3]{x^2 - 1}}$$

$$k(x) = \frac{2x^2}{x - 3}$$

$$p(x) = x\sqrt{4x - x^2}$$

$$s(x) = \sin^2 x$$

$$t(x) = \frac{x^4}{2 - x^3}$$

11. Obliczyć

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{d}{dx} (\sin x \cdot \ln x)$$

12. Obliczyć

$$\frac{d}{dx} x^{x^x}$$

13. Zbadać ciągłość funkcji w punkcie $x = 1$ dla funkcji zdefiniowanej w następujący sposób

$$f(x) = \begin{cases} -(x-1)^2 & \text{dla } x \in (-\infty, 1] \\ \sqrt{-x^2 + 6x - 8} & \text{dla } x \in [2, 4] \end{cases}$$

14. Wykazać, że każde ciągle odwzorowanie f przedziału $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ w siebie ma co najmniej jeden punkt stały, tj. punkt $x \in [a, b]$ taki, że $f(x) = x$.

15. Udowodnić następujące

Twierdzenie (Rolle'a). *Niech funkcja $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą w przedziale $[a, b]$, różniczkowalną w przedziale (a, b) . Jeżeli $f(a) = f(b)$, to istnieje taki punkt $\xi \in (a, b)$, że $f(\xi) = 0$.*

16. Zastosować twierdzenie Rolle'a do funkcji $f(x) = 2x^2 - 8x + 12$.

17. Wykazać, że równanie $x^5 + 10x + 3 = 0$ ma dokładnie jeden pierwiastek rzeczywisty.

18. Znaleźć

$$\sup_{x \in [1, 4]} \{x^3 - 6x^2 + 11x - 6 : x \in \mathbb{R}\}$$

19. Jakiej wielkości kwadraty trzeba wyciąć z prostokątnego arkusza kartonu o wymiarach 30×24 , aby pojemność otrzymanego po sklejeniu pudełka była największa?

20. Udowodnić, że

$$\frac{b-a}{b} \leq \ln \frac{b}{a} \leq \frac{b-a}{a}$$

21. Udowodnić, że

$$\frac{x}{1+x} \leq \ln(1+x) \leq x$$

22. Równanie $e^x = x + 1$ ma oczywiste rozwiązanie $x = 0$. Wykazać, że jest to jedyne rozwiązanie.

23. Udowodnić, że jeżeli $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ są ciągłe na przedziale $[a, b]$, różniczkowalne we wnętrzu tego przedziału oraz $f(a) = f(g)$, $f(b) = g(a)$, to istnieje taki punkt $c \in (a, b)$, że $f'(c) = -g'(c)$.

24. Sprawdzić, korzystając z twierdzenia Darboux, czy równanie $x \ln x = 2$ ma rozwiązanie.

25. Dla jakich wartości parametru a funkcja f dana wzorem

$$f(x) = \begin{cases} \left(\sin \frac{1}{x}\right) \cdot (\sqrt{x^2 + 1} - 1)^a, & \text{dla } x \neq 0, \\ 0, & \text{dla } x = 0. \end{cases}$$

jest różniczkowalna? A ogólniej: klasy C^n ?

1.3 Zadania różne I

1. Niech $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą, okresową i różną od stałej a $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funkcją ciągłą. Wykazać, że istnieje $x_0 \in \mathbb{R}$ takie, że $f(g(x_0)) = f(x_0)$.
2. Udowodnić, że jeżeli funkcja f jest ciągła na półprostej $[a, \infty)$ i ma skończoną granicę $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ to funkcja ta jest ograniczona na $[a, \infty)$.
3. Udowodnić, że jeżeli $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją różniczkowalną, to f spełnia warunek Lipschitza ze stałą Lipschitza L wtedy i tylko wtedy, gdy jej pochodna jest ograniczona przez L .
4. Udowodnić, że jeżeli $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła i ma skończoną granicę $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$, to jest jednostajnie ciągła.

Rozwiązanie: Przyjmijmy, że $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = g \in \mathbb{R}$. Ustalmy dowolny $\varepsilon > 0$. Istnieje $A > 0$ takie, że

$$x \geq A \Rightarrow |f(x) - g| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad x \in [0, +\infty).$$

Funkcja f jest ciągła w $[0, +\infty)$. więc istnieje $\lambda_1 > 0$ takie, że

$$\forall_{x \in [0, +\infty)}. |x - A| < \lambda_1 \Rightarrow |f(x) - f(A)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Dla $x, y \in [0, A]$ funkcja $f_{[0, A]}$ jest jednostajnie ciągła, jako f ciągła określona na zbiorze zwartym. Zatem istnieje takie $\lambda_2 > 0$, że

$$\forall_{0 \leq x, y \leq A}. |x - y| < \lambda_2 \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Przyjmijmy $\delta = \min\{\lambda_1, \lambda_2\}$. Wtedy jeżeli $|x - y| < \delta$, to:

- i) dla $x, y \leq A$: $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$ (gdyż $|x - y| < \delta \leq \lambda_2$).
- ii) dla $x, y \geq A$: $|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - g| + |g - f(y)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.
- iii) dla $x < A$ i $y \geq A$: mamy następujące oszacowania: $|x - A| < |x - y|$ oraz $|y - A| < |x - y|$ stąd $|x - A| < \delta \leq \lambda_1$ i podobnie $|y - A| < \lambda_1$. Z określenia λ_1 oraz z nierówności trójkąta szacujemy: $|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f(A)| + |f(A) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

Pokazaliśmy, że $\forall_{\varepsilon > 0} \exists_{\delta > 0} \forall_{x, y \in [0, +\infty)}. |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$, czyli f jest jednostajnie ciągła.

5. Udowodnić, że jeżeli funkcja f jest monotoniczna na przedziale (a, b) i ma w nim własność Darboux, to jest ciągła na (a, b) .
6. Funkcję $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ nazywamy *wypukłą*, gdy dla dowolnych $x, y \in (a, b)$ i $\lambda \in (0, 1)$ zachodzi $f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$. Uzasadnić, że każda funkcja wypukła jest ciągła.
7. Metodą kolejnych przybliżeń rozwiązać równania:

(a) $2x + \sin x = 1$,

(b) $x^3 + 5x^2 - 15x - 7 = 0$ dla $2,5 < x < 4$.

8. Niech $f(x) = \frac{\pi}{2} + x - \arctan x$, $x \in \mathbb{R}$. Pokazać, że dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}$ istnieje stała $\lambda < 1$, że $|f(x) - f(y)| \leq \lambda|x - y|$ ale odwzorowanie f nie ma punktu stałego na prostej \mathbb{R} .

9. Pokazać, że dla dowol. $m \in \mathbb{N}$ równanie

$$x^m - (1 + m)(1 - x) = 0$$

ma w przedziale $(0, 1)$ dokładnie jedno rozwiązanie.

10. Obliczyć

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2 + 1} + \frac{1}{n^2 + 2} + \cdots + \frac{1}{n^2 + n} \right)$$

11. Funkcja f spełnia warunek

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + f'(x)) = 0.$$

Wykazać, że

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$$

12. Niech $\lambda > 0$ będzie ustaloną liczbą rzeczywistą i $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jest takim ciągiem liczb, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} nx_n = \lambda. \text{ Udowodnić, że wówczas } \lim_{n \rightarrow \infty} \binom{n}{k} x_n^k (1 - x_n)^{n-k} = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}.$$

1.4 Całki i ich zastosowania

1. Obliczyć następujące antypochodne/całki (dowolnym sposobem)

(1) $\int x e^x \, dx$

(2) $\int x^3 e^x \, dx$

(3) $\int x^2 \sin x \, dx$

(4) $\int \sin x \cos x \, dx$

(5) $\int \operatorname{tg} x \, dx$

(6) $\int (e^{4x} + \sqrt{e^x}) \, dx$

(7) $\int \ln x \, dx$

(8) $\int \log_a x \, dx, a \in \mathbb{R}$

(9) $\int e^{ax} \, dx, a \in \mathbb{R}$

(10) $\int \frac{2}{x^2} \, dx$

(11) $\int \frac{1+x}{x} \, dx$

$$(12) \int x^5 e^{-x} dx$$

$$(13) \int \frac{1}{x(1 + \ln x)} dx$$

$$(14) \int \frac{\cos x}{1 + \sin x} dx$$

2. Udowodnić, że

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)| + C$$

3. Udowodnić, że

$$\int \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}} dx = \sqrt{f(x)} + C$$

4. Udowodnić, że

$$\int f'(x)f(x) dx = \frac{1}{2}f^2(x) + C$$

5. Niech $g = f^{-1}$. Udowodnić, że

$$\int f(x) dx = xf(x) - F(f(x)) + C_1, \text{ gdzie}$$

$$F(x) = \int g(x) dx + C_2.$$

6. Obliczyć następujące całki funkcji wymiernych

$$(1) \int \frac{2x}{(1+x)^2} dx$$

$$(2) \int \frac{3}{4x^2 - 4x + 3} dx$$

$$(3) \int \frac{2x+1}{x^2 - 7x + 6} dx$$

$$(4) \int \frac{16x^3 + 6x^2 - 6x + 5}{4x^4 + 2x^3 - 3x^2 + 5x - 2} dx$$

$$(5) \int \frac{6x^2 - 4x + 5}{x^3 - 2x^2 + x - 2} dx$$

$$(6) \int \frac{2x^2 + 3}{(x+4)(x-3)} dx$$

$$(7) \int \frac{2x^3 + 3x - 5}{x^2 + x - 6} dx$$

$$(8) \int \frac{1}{(x+2)^3(x-3)(x^2+1)} dx$$

$$(9) \int \frac{x^2 + 2}{(x-1)(x+4)(x^2+3x+3)} dx$$

7. Wykazać, że

$$(a) \int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C, \text{ podstawiając } x = a \operatorname{tg} t;$$

$$(b) \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C, \text{ podstawiając } x = a \sin t;$$

$$(c) \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + k}} = \ln |x + \sqrt{x^2 + k}| + C, \text{ podstawiając } \sqrt{x^2 + k} = t - x;$$

$$(d) \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x - a}{x + a} \right| + C, \text{ stosując rozwinięcie}$$

$$\frac{1}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \cdot \frac{x + x + a - x}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \left(\frac{1}{x - a} - \frac{1}{x + a} \right).$$

8. Obliczyć następujące całki

$$(a) \int \frac{dx}{x^2 - 9}$$

$$(b) \int \frac{dx}{x^2 + 49}$$

$$(c) \int \sqrt{a^2 - x^2} \, dx$$

$$(d) \int \sqrt{1 + x^2} \, dx$$

$$(e) \int x \sqrt{x^2 + x + 1} \, dx$$

$$(f) \int \frac{x^2 \, dx}{x^2 + 1}$$

$$(g) \int \frac{x \, dx}{\sqrt{5 - x^2}}$$

$$(h) \int \frac{dx}{(1 - x^2)\sqrt{1 + x^2}}$$

$$(i) \int \frac{x \, dx}{\sqrt{3 - x^4}}$$

9. Obliczyć całki

$$(1) \int \frac{\ln^2 x + 3 \ln x}{4x} \, dx$$

$$(2) \int e^x \sin x \, dx$$

$$(3) \int e^x \sin e^x \, dx$$

$$(4) \int \frac{dx}{x \ln x}$$

$$(5) \int \frac{\sin \ln x}{x} \, dx$$

$$(6) \int (x^2 + 3x^5) \sin x \, dx$$

- (7) $\int \sin^3 \varphi \, d\varphi$
- (8) $\int x^4 \ln x \, dx$
- (9) $\int \frac{dx}{\sin x}$
- (10) $\int \frac{x^2 + 2}{(x-1)^2(x+2)(x^2+x+2)} \, dx$
- (11) $\int \frac{2x+3}{x^3+2x^2+2x-5} \, dx$
- (12) $\int \frac{y^2-3}{y^3+3y^2-4} \, dy$
- (13) $\int \frac{5x^3+2}{x^3-5x^2+4x} \, dx$
- (14) $\int \frac{x^3-2x+10}{(x-2)^2(2+4)(x^2+x+2)} \, dx$
- (15) $\int \frac{x^2+4-x}{x^4-3x^3+2x^2-4x+8} \, dx$
- (16) $\int \left(3 \sin^2 x + 2^{\sin x}\right) \cos x \, dx$
- (17) $\int x\sqrt{1+x^2} \, dx$
- (18) $\int \sin^3 x \cos^4 x \, dx$
- (19) $\int \sin(3x) \cos(5x) \, dx$
- (20) $\int \frac{2 \sin x}{\sqrt{4-\cos^2 x}} \, dx$
- (21) $\int \frac{2e^x \, dx}{3e^x+1}$
- (22) $\int \frac{x^4+1}{x^3-x^2+x-1} \, dx$
- (23) $\int \frac{x^2-1}{x^3+x^2+2x+2} \, dx$
- (24) $\int x e^{-x^2} \, dx$
- (25) $\int 2^y \sin y \, dy$
- (26) $\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{\arcsin x} \, dx$
- (27) $\int \frac{3x^2+x}{2x^3+x^2+2} \, dx$
- (28) $\int \frac{\cos x \, dx}{1+\sin^2 x}$

- (29) $\int \frac{dx}{\operatorname{tg} x \cos^2 x}$
- (30) $\int \frac{\sin(2x)}{1 - \sin^2 x} dx$
- (31) $\int \frac{x dx}{1 + x^4}$
- (32) $\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2} \arcsin x}$
- (33) $\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2 + 2x + 3}}$
- (34) $\int \frac{2 \ln(x) \sin(\ln^2 x)}{x \cos(\ln^2 x)} dx$
- (35) $\int \operatorname{ctg} x \cdot \ln(\sin x) dx$
- (36) $\int \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x + 3}} dx$
- (37) $\int \frac{2x}{1 + x^2} dx$
- (38) $\int \sqrt{3x + 1} dx$
- (39) $\int \frac{6x^2 - 2x dx}{2\sqrt{x^3 - x^2 + 3}}$
- (40) $\int \frac{\sqrt{1 + x^2} dx}{2 + x^2}$
- (41) $\int \frac{\ln(\arctan x)}{1 + x^2} dx$
- (42) $\int \frac{dx}{x\sqrt{1 - \ln^2 x}} dx$
- (43) $\int \arcsin x dx$
- (44) $\int \frac{x^2 + 2x + 1}{\sqrt{x}} dx$
- (45) $\int \frac{3x + 3}{\sqrt{3x^2 + 6x + 1}} dx$
- (46) $\int \frac{\sin x}{1 + \cos^2 x}$
- (47) $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x}}$
- (48) $\int \frac{dx}{(\arcsin^2 x + 1)\sqrt{1 - x^2}} dx$
- (49) $\int e^x a^{e^x} dx, a \in \mathbb{R}$

10. Obliczyć całki

$$(a) \int_0^3 [x] \, dx$$

$$(b) \int_0^2 \max \{x, 1\} \, dx$$

$$(c) \int_0^2 |x - 1| \, dx$$

11. Udowodnić, że jeżeli funkcja $f: [-a, a] \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją nieparzystą, to

$$\int_{-a}^a f(x) \, dx = 0.$$

12. Udowodnić, że jeżeli funkcja $f: [-a, a] \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją parzystą, to

$$\int_{-a}^a f(x) \, dx = 2 \int_0^a f(x) \, dx.$$

13. Obliczyć pole powierzchni ograniczonej osią Ox i krzywą
 $y = x^3 - 12x^2 + 44x - 48$.

14. Obliczyć pole powierzchni ograniczonej krzywą $y = 2x^2 - 16x + 30$ oraz prostą $y = x - 4$.

15. Obliczyć całkę

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t) \, dt$$

funkcji $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ gdzie $f(t) = (2t^2, \sin t, t)$

16. Obliczyć całkę

$$\int_1^2 f(x) \, dx$$

gdzie $f: [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{C}$, $f(x) = 2x^2 - i\frac{1}{x}$

17. Oblicz pole powierzchni ograniczonej krzywymi $y = \ln x$ oraz $y = \ln^2 x$.

18. Obliczyć pole obszaru ograniczonego krzywymi:

$$(x - 1)^2 + y^2 = 1$$

$$x^2 + (y - 1)^2 = 1$$

19. Obliczyć długość krzywej $x^2 + y^2 = a^2$.

20. Obliczyć długość krzywej $y = \sqrt{x}$, $0 \leq x \leq 1$.

21. Obliczyć długość łuku $y^2 = x^3$ odciętego linią $x = \frac{2}{3}$.

22. Obliczyć pole ograniczone krzywą $r = 2 \sin(\varphi)$ dla $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

23. Obliczyć długość krzywej $y = 1 - \ln \cos x$, $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$.

24. Obliczyć długość krzywej K zadanej parametrycznie $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$, $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

25. Obliczyć pole powierzchni ograniczonej krzywymi: $y = x^2 - x - 6$ i $y = -x^2 + 5x + 14$.

26. Obliczyć pole i objętość bryły obrotowej powstałej przez obrót krzywej funkcji $y = -x^2 + 2x$, gdzie $x \in [1, 4]$ dookoła osi Ox .

27. Obliczyć pole obszaru ograniczonego krzywą K określoną parametrycznie:

$$\begin{cases} x = 3t^2, \\ y = 3t - t^3, \quad t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

28. Obliczyć pole obszaru ograniczonego *Lemniskatą Gerona*, wyrażoną jako wykres równania $x^4 - x^2 + y^2 = 0$.

29. Obliczyć pole obszaru ograniczonego lemniskatą o równaniu $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$.

30. Obliczyć pole obszaru ograniczonego prostą $x = 0$ i łukiem cykloidy o równaniu:

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(t - \cos t), \quad t \in [0, 2\pi] \end{cases}$$

31. Obliczyć całkę

$$\int_{-3}^3 x^2 \sin x \cos x \, dx$$

32. Zbadać całkowalność funkcji Dirichleta

33. Udowodnić, że następująca funkcja $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ jest niemalejącą, nieciągłą w całej dziedzinie funkcję całkowalną w sensie Riemanna

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q}; \\ \frac{1}{q} & \text{dla } x = \frac{p}{q}, p, q \in \mathbb{N}, \text{NWD}(p, q) = 1; \\ 1 & \text{dla } x = 0. \end{cases}$$

34. Udowodnić, że

$$\int_1^3 \frac{\ln x}{x} \, dx \leq \frac{2}{e}$$

Rozwiązanie: Przyjmujemy $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ i korzystając z pochodnej f' sprawdzamy, że f osiąga maximum w punkcie $x = e \in [1, 3]$.

$$\int_1^3 \frac{\ln x}{x} \, dx \leq (3 - 1) \cdot \sup_{x \in [1, 3]} \frac{\ln x}{x} = 2 \cdot \frac{\ln e}{e} = \frac{2}{e}.$$

35. Wykazać, że dla pewnego $y \in (0, \frac{\pi}{2})$ zachodzi

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x \, dx = e^y$$

36. Znaleźć wszystkie funkcje f ciągłe i różniczkowalne takie, że

$$\int_a^b f(x) \, dx = (b - a)f\left(\frac{a + b}{2}\right) \quad \text{dla } a, b \in \mathbb{R}.$$

37. Niech $a > 0$ i $f: [0, a] \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą i ściśle rosnącą oraz $f(0) = 0$. Wykazać, że

$$\int_0^a f(x) \, dx + \int_0^{f(a)} f^{-1}(y) \, dy = af(a)$$

Rozwiązanie: Korzystając z twierdzenia o całkowaniu przez części otrzymujemy

$$\int_0^a f(x) dx = xf(x)|_0^a - \int_0^a xf'(x) dx = af(a) - \int_0^a f^{-1}(f(x))f'(x) dx.$$

Podstawmy $y = f(x)$. Wtedy $dy = f'(x) dx$. Ponadto, gdy $x = 0$, to $y = f(0) = 0$ a gdy $x = a$, to $y = f(a)$. Stąd

$$\int_0^a f^{-1}(f(x))f'(x) dx = \int_0^{f(a)} f^{-1}(y) dy$$

i twierdzenie jest udowodnione.

38. Niech $f: [0, \delta] \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą i ściśle rosnącą w przedziale $[0, \delta]$, $f(0) = 0$ oraz $a \in [0, \delta]$, $b \in [0, f(\delta)]$ będą dane. Udowodnić, że wówczas prawdziwa jest *nierówność Younga*:

$$\int_0^a f(x) dx + \int_0^b f^{-1}(x) dx \geq ab.$$

39. Obliczyć granicę

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x \frac{f(t)}{x} dt$$

wiedząc, że całka $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ jest zbieżna.

40. Niech f będzie funkcją ciągłą na przedziale $[1, \infty)$ oraz $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 2$. Wyznaczyć granicę

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \int_1^x f(t) dt.$$

41. Udowodnić, że jeżeli $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest ciągłą funkcją taką, że dla każdego $x \in \mathbb{R}$

$$\int_0^1 f(xt) dt = 0,$$

to $f = 0$, tzn. $f(x) = 0$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$.

Rozwiązanie: Podstawmy $u = xt$, to wówczas $\frac{du}{dt} = x$, czyli mamy

$$dt = \frac{du}{x}.$$

Ponadto $t = 0$, to $u = 0$ a gdy $t = 1$, to $u = x$. Zatem

$$\int_0^1 f(xt) dt = \int_0^x f(u) \frac{du}{x} = \frac{1}{x} \int_0^x f(u) du = 0, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

$$F(x) := \int_0^x f(u) du = 0 \cdot x = 0, \quad \text{dla } x \neq 0.$$

Z ciągłości funkcji f i twierdzenia Newtona-Leibniza: $F'(x) = f(x)$, $x \in (0, 1]$. Mamy więc, że $f(x) = F'(x) = 0$, $x \in (0, 1]$. Zatem $f(x) = 0$ dla $x \in [0, 1]$, czyli $f = 0$.

42. Niech f będzie ciągłą funkcją rzeczywistą, określoną na przedziale $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$, taką że

$$\int_a^b f(x)x^n dx = 0 \text{ dla } n \in \{0, 1, \dots\}.$$

Pokazać, że $f(x) = 0$, $x \in [a, b]$.

43. Obliczyć

$$\int_1^n x^m \ln x dx, \quad m, n \in \mathbb{N}.$$

44. Niech $f: [0, 1] \rightarrow [0, \infty)$ jest ciągłą funkcją taką, że

$$f^2(t) \leq 1 + 2 \int_0^t f(x) dx, \quad t \in [0, 1].$$

Udowodnić, że $f(t) \leq 1 + t$ dla każdego $t \in [0, 1]$.

Rozwiązanie: Zdefiniujemy funkcję pomocniczą wzorem $g(t) = 1 + 2 \int_0^t f(x) dx, t \in [0, 1]$. Z ciągłości funkcji i Zasadniczego Twierdzenia Rachunku Całkowego mamy, że $g'(t) = \left(1 + 2 \int_0^t f(x) dx\right)' = 2f(t)$. Mamy

$$g'(t) = 2f(t) \leq 2\sqrt{1 + 2 \int_0^t f(x) dx} = 2\sqrt{g(t)}.$$

Stąd zanotujemy dwie nierówności:

- (a) $f(t) \leq \sqrt{g(t)}, t \in [0, 1],$
- (b) $\frac{g'(t)}{2\sqrt{g(t)}} \leq 1, \quad t \in [0, 1].$

Całkujemy nierówność (44b) obustronnie w granicach od 0 do $t, t \in [0, 1]$:

$$\int_0^t \frac{g'(u)}{2\sqrt{g(u)}} du = \sqrt{g(t)} - \sqrt{g(0)} \leq \int_0^t du = u|_0^t = t.$$

(Porównaj zadanie 3.) Zauważmy też, że $g(0) = 1 + \int_0^0 f(x) dx = 1 + 0 = 1$. Zatem dla $t \in [0, 1]$:

$$\sqrt{g(t)} - \sqrt{g(0)} = \sqrt{g(t)} - 1 \leq t.$$

Czyli $\sqrt{g(t)} \leq t + 1, t \in [0, 1]$, ale z (44a) oznacza to, że

$$f(t) \leq 1 + t, t \in [0, 1]. \quad \text{c.b.d.o.}$$

45. Obliczyć całkę

$$\int_{-1}^0 (x+1)e^{-x} dx$$

46. Wykazać, że równanie funkcyjne $2f(t) - 2 = \int_0^1 \exp(t-s)f(s) dx, t \in [0, 1]$ ma dokładnie jedno rozwiązanie w przedziale $[0, 1]$.

47. Niech $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie ciągła i okresowa o okresie $T > 0$. Udowodnić, że:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(nx) \, dx = \frac{b-a}{T} \int_0^T f(x) \, dx, \text{ dla dowolnych } a < b.$$

48. Udowodnić, że dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi równość

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2 \sin x)^{2n} \, dx = \binom{2n}{n}.$$

49. Ustalmy $a > 0$ i niech $f: [0, a] \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją klasy C^1 . Udowodnić, że

$$\int_0^a [t] \, dt = [a]f(a) - \sum_{k=1}^{[a]} f(k).$$

50. Obliczyć całkę

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\ln x}{x-1} \, dx$$

51. Obliczyć całkę

$$\int \frac{\ln(x+1)}{x^2+1} \, dx$$

1.5 Szeregi i całki niewłaściwe

1. Wyznaczyć sumę szeregu

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

$$(b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{2(\sqrt{n} + \frac{1}{2})(\sqrt{n+1} + \frac{1}{2})}$$

$$(c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(n+1)(n+2)(n+1+\sqrt{n(n+2)})}}$$

$$(d) \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(\frac{n}{n+1} \right)$$

$$(e) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$$

$$(f) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a}{(2n+3)(2n+5)} \text{ gdzie } a \in \mathbb{R}.$$

2. Zbadać zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\binom{n}{2}} \left(\frac{n^{100}}{2^n} \right)$$

3. Zbadać zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^3}$$

4. Zbadać zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} (x_n y_n)^{-2}$$

wiedząc, że $y_n, x_n \geq 0$, $x_{n+1} \leq x_n$, $n \in \mathbb{N}$ oraz $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$.

5. Wykazać, że jeżeli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ jest zbieżny, to zbieżny bezwzględnie jest szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$$

6. Uzasadnić, że jeżeli $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła i istnieje $M \in \mathbb{N}$ takie, że $|f(x)| \leq M$ dla każdego $x \geq 1$, to ze zbieżności szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ wynika zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot f(n).$$

7. Zbadać zbieżność szeregów

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^n + 3^n}{6^n}$$

$$(b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n+1)}{n}$$

$$(c) \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)$$

$$(d) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)$$

$$(e) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{1}{n}$$

$$(f) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n}$$

$$(g) \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(\frac{n}{n+1} \right)$$

$$(h) \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n} \right)^n$$

$$(i) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n^3}}$$

$$(j) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n^3}}$$

$$(k) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$$

$$(l) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+e^n}$$

$$(m) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6^n + 3^n}{9^n}$$

$$(n) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin n|}{n\sqrt{n}}$$

$$(o) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan n}{n^2 + 1}$$

$$(p) \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n} \operatorname{tg} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

8. Zbadać zbieżność szeregu

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+e^{-n}}$$

9. Zbadać zbieżność całek niewłaściwych, w miarę możliwości - obliczyć

$$(a) \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$$

$$(b) \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$$

$$(c) \int_{-2}^1 \frac{1}{x^2} dx$$

$$(d) \int_0^2 \sqrt{x-x^2} dx$$

$$(e) \int_a^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx, \text{ gdzie } a > 0$$

$$(f) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$$

$$(g) \int_0^1 \ln x dx$$

$$(h) \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^3} dx$$

$$(i) \int_0^2 \frac{1}{\ln(x+1)} dx$$

$$(j) \int_0^{+\infty} \frac{e^x}{(1+e^x)^2} dx$$

$$(k) \int_{-\infty}^1 e^x dx$$

$$(l) \int_{-\infty}^0 x e^x dx$$

$$(m) \int_0^{+\infty} \frac{1}{e^x + x} dx$$

10. Obliczyć całkę

$$\int_1^{+\infty} \frac{x-1}{(1+x^2)(x+x^2)} dx$$

11. Zbadać zbieżność w zależności od p całki

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx.$$

12. Pokazać, że

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^n} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2(n-1)} x dx$$

13. Uzasadnić, że jeżeli całka niewłaściwa

$$\int_1^{+\infty} f(x) dx$$

jest zbieżna oraz funkcja $g: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła i ograniczona, to całka niewłaściwa

$$\int_1^{+\infty} f(x)g(x) dx$$

również jest zbieżna.

1.6 Ciągi i szeregi funkcyjne

1. Zbadać zbieżność ciągów funkcyjnych $f_n: X \rightarrow \mathbb{R}$, gdzie

$$(a) f_n(x) = \frac{1}{n+x}$$

$$(b) f_n(x) = \frac{n}{n+x}$$

$$(c) f_n(x) = \frac{nx}{n+x}$$

2. Zbadać zbieżność ciągów funkcyjnych $f_n, g_n: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$

$$f_n(x) = x^n - x^{n+1}$$

$$g_n(x) = x^n(1-x)^n$$

3. Zbadać dziedzinę i zbieżność w swojej dziedzinie ciągu funkcyjnego $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, gdzie f_n dane jest wzorem:

$$(a) f_n(x) = \frac{1}{nx}$$

$$(b) f_n(x) = \frac{nx}{1 + n^2x}$$

$$(c) f_n(x) = \frac{nx}{1 + n^2x^2}$$

$$(d) f_n(x) = \frac{nx}{1 + nx^2}$$

$$(e) f_n(x) = x \sin\left(\frac{x}{n}\right)$$

$$(f) f_n(x) = \frac{\sin x}{x}$$

$$(g) f_n(x) = \cos\left(\frac{x}{n}\right)$$

$$(h) f_n(x) = \frac{nx}{n^2 + x^2}$$

$$(i) f_n(x) = nxe^{-nx}$$

$$(j) f_n(x) = \frac{\ln(2^n + x^n)}{n}$$

$$(k) f_n(x) = \sqrt{1 + x^n}$$

$$(l) f_n(x) = \sqrt[n]{x}$$

$$(m) f_n(x) = \frac{nx^2}{nx + 1}$$

$$(n) f_n(x) = \frac{2nx}{1 + n^2x^2}$$

4. Zbadać zbieżność ciągu funkcyjnego $f_n: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ danego wzorem:

$$f_n(x) = \frac{x^n}{1 + x^n}$$

5. Zbadać zbieżność szeregu funkcyjnego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n^3}} \exp\left(\lambda \sin\left(\sqrt[3]{\frac{x^2 - 1}{x}}\right)\right), \lambda \in (0, 1)$$

6. Zbadać zbieżność następujących szeregów funkcyjnych

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} x^n(1 - x), x \in [0, 1]$$

$$(b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}, x \in [-1, 1]$$

$$(c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n + 1}{1 + nx^2}$$

$$\begin{aligned}
(d) \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1+n^2x^2} \\
(e) \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1+n^4x^2} \\
(f) \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{1+n^5x^2} \\
(g) \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x} \\
(h) \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{\cos x!}{n^3}} \\
(i) \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{\sqrt{n^4+x^2}} \\
(j) \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{2n\pi}{3}}{\sqrt{n^2+x^2}} \\
(k) \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x^{2n}+1} \\
(l) \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x+2^n} \text{ dla } x \in (-2, +\infty) \\
(m) \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2} \\
(n) \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n!x)}{n^3} \\
(o) \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2 x^n}{(2n)!} \\
(p) \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{e^{nx}}, \text{ dla } x \in [0, +\infty) \\
(r) \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!x^n}
\end{aligned}$$

7. Wyznaczyć promień zbieżności następujących szeregów potęgowych i zbadać zbieżność na krańcach ich przedziałów zbieżności

$$\begin{aligned}
(a) \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2n} \\
(b) \quad & \sum_{n=1}^{\infty} 2^n x^n \\
(c) \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^n}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(d) & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \\
(e) & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n} \\
(f) & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{3^n \cdot n^3} \\
(h) & \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^n \\
(i) & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n \\
(j) & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n} (x+1)^n \\
(k) & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}
\end{aligned}$$

8. Wyznaczyć sumy następujących szeregów

$$\begin{aligned}
(a) & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n7^n} \\
(b) & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} \\
(c) & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{5^n} \\
(d) & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{3^n} \\
(e) & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{4^n} \\
(f) & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} \\
(g) & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n3^n} \\
(h) & \sum_{n=1}^{\infty} \sin^n x \\
(i) & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} \\
(j) & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n}{4^n}
\end{aligned}$$

9. Rozwinać w szereg Taylora wokół punktu $x_0 = 0$ funkcję f daną wzorem $f(x) = xe^x$ dwoma sposobami:

- wyznaczając wzór na n -tą pochodną i podstawiając do wzoru,
- korzystając z rozwinięcia w szereg potęgowy funkcji $x \mapsto e^x$.

10. Rozwinać w szereg Taylora wokół $x_0 = 0$ funkcję daną wzorem

$$f(x) = \int \frac{\sin x}{x} dx.$$

11. Udowodnić, że dla każdego $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$:

$$\sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} k \binom{n}{k} = 0.$$

1.7 Zadania różne II

1. Obliczyć

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + n^2 + n^3 + \dots + n^n}{1^n + 2^n + 3^n + \dots + n^n}$$

2. Udowodnić, że jeżeli równanie

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x = 0$$

ma dodatnie rozwiązanie $x = x_0$, to równanie

$$na_0 x^{n-1} + (n-1)a_1 x^{n-2} + \dots + a_{n-1} = 0$$

ma również dodatnie rozwiązanie $x = x_1 < x_0$.

3. Udowodnić, że każde równanie postaci $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0 = 0$, gdzie n jest nieparzyste, ma przynajmniej jeden pierwiastek rzeczywisty.

4. Udowodnić, że jeżeli $C_0 + \frac{C_1}{2} + \frac{C_2}{3} + \dots + \frac{C_{n-1}}{n} + \frac{C_n}{n+1} = 0$, gdzie C_0, \dots, C_n są stałymi, to równanie $C_0 + C_1x + \dots + C_{n-1}x^{n-1} + C_nx^n = 0$ ma co najmniej jeden pierwiastek rzeczywisty zawarty między 0 a 1.

5. Udowodnić, że

$$(a) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^4 + 2^4 + \dots + n^4}{n^5} = \frac{1}{5},$$

$$(b) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1} + \sqrt{2} + \dots + \sqrt{n}}{n\sqrt{n}} = \frac{2}{3},$$

$$(c) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^p + 2^p + \dots + n^p}{n^{p+1}} = \frac{1}{p+1}, \quad p > 0,$$

$$(d) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{e^1} + \sqrt[n]{e^2} + \dots + \sqrt[n]{e^n}}{n} = e - 1,$$

$$(e) \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{1}{1^2 + n^2} + \frac{1}{2^2 + n^2} + \dots + \frac{1}{n^2 + n^2} \right) = \frac{\pi}{4},$$

$$(f) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a}{n} \left(\sin \frac{a}{n} + \sin \frac{2a}{n} + \dots + \sin \frac{na}{n} \right) = \cos a - 1,$$

6. Obliczyć granice

$$(a) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{3n} \right),$$

$$(b) \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{n}{k^2 + n^2},$$

$$(c) \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{n 2^{\frac{k}{n}}}{n + \frac{k}{n}}.$$

7. Dla liczby $n \in \mathbb{N}$ niech x_n oznacza pierwiastek równania $e^{-x} = nx$. Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (n(nx_n - 1)).$$

8. Funkcja f jest ciągła i ma okres $T = 1$. Pokazać, że istnieje liczba x_0 , dla której zachodzi równość $f(x_0 + \pi) = f(x_0)$.

9. Zbadać, czy istnieją funkcje wypukłe f i g takie, że $f(x) - g(x) = \sin x$, $x \in \mathbb{R}$.

10. Funkcja f spełnia warunek $|f(x) - f(y)| \leq |x - y|^3$ dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}$. Uzasadnić, że jest stała na \mathbb{R} .

11. (a) Udowodnić, że $\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg}^2 \frac{\beta}{2} + \operatorname{tg}^2 \frac{\gamma}{2} \geq 1$, jeżeli α, β, γ są kątami pewnego trójkąta. Dla jakiego trójkąta zachodzi równość?

(b) Udowodnić, że $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma \geq \frac{3}{4}$, jeżeli α, β, γ są kątami pewnego trójkąta. Dla jakiego trójkąta zachodzi równość?

12. Niech $f: [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(1) = 1$ oraz

$$f'(x) = \frac{1}{x^2 + f^2(x)}.$$

Udowodnić, że $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ istnieje oraz $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) < 1 + \frac{\pi}{4}$.

2 Funkcje wielu zmiennych, funkcje skalarne

1. Unormować wektor \vec{u} i obliczyć w jego kierunku pochodną kierunkową w punkcie a , dla

$$(a) f(x, y) = e^y x^{x+y}, \quad \vec{u} = [-1, 3], a = (1, 1)$$

$$(b) f(x, y) = x^2 + xy - y^2, \quad \vec{u} = [4, 3], a = (1, -1)$$

$$(c) f(x, y, z) = \sqrt[3]{x + y + z}, \quad \vec{u} = [-1, 3, 2], a = (1, 2, 1)$$

2. Naskicować dziedzinę funkcji $f(x, y) = \arcsin(x^2 + y^2 - 2) + \sqrt{x - y}$

3. Obliczyć następującą granicę f. dwóch zmiennych: $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\cos(xy)}{x}$

4. Udowodnić, że

$$-\frac{1}{2} \leq \frac{xy}{x^2 + y^2} \leq \frac{1}{2}$$

5. Zbadać istnienie granic:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy}{x^2 + y^2}, \quad \text{oraz} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2x^2 + y^2}{x^2 + y^2}$$

6. Zbadać ciągłość funkcji $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ takiej, że

$$f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}, \quad \text{dla } (x, y) \neq (0, 0) \text{ oraz } f(0, 0) = 0.$$

7. Obliczyć

$$(a) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - 1}$$

$$(b) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sin(x^3 + y^3)}{x + y}$$

8. Niech $F(x, y) = (x \cdot y) \sin(\frac{x}{y})$. Obliczyć $\frac{\partial F}{\partial x}$ oraz $\frac{\partial F}{\partial y}$.

9. Niech $F(x, y) = (x \cdot y)^{x + \ln y}$. Obliczyć $\frac{\partial F}{\partial x}$ oraz $\frac{\partial F}{\partial y}$.

10. Wyznaczyć macierz różniczki odwzorowania odwrotnego do $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ danego równaniem $\varphi(x, y) = (2xy, x^2 - y)$.

11. Znaleźć ekstrema lokalne funkcji $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ danej równaniem $f(x, y) = x^2 - xy + y^2$.

12. Zbadać istnienie ekstremów i kresów funkcji $f: E \rightarrow \mathbb{R}$, gdzie

$$(a) f(x_1, \dots, x_n) = x_1 x_2 \cdots x_{n-1} x_n,$$

$$E = \{(x_1, \dots, x_n): x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1} + x_n \leq 1, x_1, \dots, x_n \geq 0\}$$

$$(b) f(x_1, \dots, x_n) = x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1} + x_n,$$

$$E = \{(x_1, \dots, x_n): x_1 x_2 x_3 \cdots x_{n-1} x_n \geq 1, x_1, \dots, x_n > 0\}$$

$$(c) f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 x_2 x_3 x_4,$$

$$E = \{(x_1, x_2, x_3, x_4): x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = c, x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0\},$$

gdzie $c > 0$ jest dane.

Wskazówka: w (c) zastosować metodę mnożników Lagrange'a.

13. Wyrazić w jawnej postaci funkcje określone w sposób uwikłany za pomocą równania

$$(x^3 - 1)y + e^x y^2 + \cos x - 1 = 0$$

14. Wyznaczyć ekstrema lokalne funkcji zmiennej x uwikłanej, zadanej równaniem:

$$(a) x^2 - 4x + y^2 = 5$$

$$(b) x^2 = xy - 1$$

$$(c) x^3 + y^3 = 3xy$$

$$(d) x^{2y} + y^2 = 1$$

15. Czy do krzywej o równaniu $x^4 - x^2 + y^2 = 0$ (*Lemniskaty Gerona*) stosuje się twierdzenie o funkcji uwikłanej. W jakich punktach?
16. Czy do krzywej o równaniu $x2^y + y^2 = 1$ stosuje się twierdzenie o funkcji uwikłanej? W jakich punktach?
17. Wyznaczyć x , dla którego równanie $y - \ln(x + y) = 0$ określa y jako funkcję zmiennej x . Obliczyć $\frac{dy}{dx}$
18. Niech

$$F(x, y) = x^3 y^2 - y \ln x - 2e^{2x-2} + y.$$

Wykazać, że istnieją funkcje rzeczywiste g, h klasy C^1 określone w pewnym otoczeniu U punktu $x = 1$ takie, że $F(x, g(x)) = 0 = f(x, h(x))$ oraz $g(x) < h(x)$ dla $x \in U$. Znaleźć $g(1), h(1), g'(1), h'(1)$.

19. Sprawdzić z definicji, czy funkcja dana wzorem $f(x, y) = 5 - (x^6 + y^4)$ ma w punkcie $(x_0, y_0) = (0, 0)$ ekstremum lokalne.
20. Obliczyć i zinterpretować geometrycznie całkę

$$\iint_{[-1,1] \times [0,2]} (5 - \sqrt{|xy|}) \, dx \, dy$$

21. Obliczyć

$$\iint_D \max\{x, y\} \, dx \, dy,$$

gdzie $D = [0, 1] \times [1, 2]$.

22. Obliczyć całkę podwójną

$$\iint_D \frac{x}{y} \, dx \, dy$$

gdzie obszar D jest obszarem ograniczonym parabolami $y = x^2$, $x = y^2$, $y > 0$.

23. Obliczyć

$$\iint_D (x + y) \, dx \, dy,$$

gdzie D jest obszarem ograniczonym prostymi o równaniach $x = 0$, $y = 0$ i $x + y = 3$.

24. Obliczyć

$$\iint_D 2x^2 y \, dx \, dy,$$

gdzie D jest obszarem ograniczonym osiami współrzędnych i krzywą o równaniu $\sqrt{y} + \sqrt{x} = 1$.

25. Obliczyć całkę podwójną

$$\iint_D \frac{x^2}{y^2} dx dy,$$

gdzie obszar D jest ograniczony prostymi $x = 4$, $y = x$ i hiperbolą $y = \frac{1}{x}$.

26. Obliczyć

$$\iint_D xy dx dy,$$

gdzie D jest obszarem ograniczonym krzywymi o równaniach $xy = 1$ oraz $|x - y| = 1$.

27. Obliczyć

$$\iint_D y^2 \sqrt{R^2 - x^2} dx dy,$$

gdzie $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq R^2\}$.

28. Obliczyć

$$\int_0^1 \int_0^1 e^{\max\{x, y\}} dx dy.$$

29. Obliczyć

$$\iint_A \frac{x}{1 + x^2 + y^2} dx dy,$$

gdzie $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x - y| \leq 2 \text{ oraz } x \in [-2, 2]\}$.

30. Obliczyć

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{1 + x^2 + y^2 + x^2 y^2} dx dy.$$

31. Wyprowadzić wzór na objętość kuli w przestrzeni \mathbb{R}^3 o promieniu równym R .

3 Analiza w przestrzeniach metrycznych. Przestrzenie Unormowane. Przestrzenie Banacha.

1. Sprawdzić, że dowolny zbiór X z metryką dyskretną d jest przestrzenią metryczną zupełną.
2. Sprawdzić, czy funkcja $\rho: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dana wzorem $\rho(x, y) = \frac{|x-y|}{\sqrt{1+x^2}\sqrt{2+y^2}}$ jest metryką na \mathbb{R} .
3. Udowodnić, że jeżeli $\rho: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ jest metryką na \mathbb{R} , to funkcja $x \mapsto \frac{\rho(x, y)}{1+\rho(x, y)}$ również jest metryką na \mathbb{R} .
4. W przestrzeni \mathbb{R}^2 wyznaczyć średnicę zbioru $[0, 1] \times [0, 1]$, kolejno w metryce euklidesowej, maksimum i taksówkowej.

5. Wyznaczyć punkty domknięcia i punkty skupienia zbioru

$$A = \left\{ n + \frac{1}{k} : n, k \in \mathbb{N} \right\}$$

w przestrzeni metrycznej \mathbb{N} .

6. W przestrzeni \mathbb{R} wyznaczyć pochodną zbioru

$$A = \left\{ (-1)^n m + \frac{1}{n} : m, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

7. W przestrzeni \mathbb{R} wyznaczyć A^d oraz brzeg zbioru A , gdzie

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} : \sin \frac{1}{x} = 0 \right\}.$$

8. W przestrzeni $C([a, b])$ funkcji ciągłych postaci $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, metryka dana jest wzorem

$$\rho(f, g) = \max_{a \leq x \leq b} |f(x) - g(x)|.$$

Sprawdzić, że $(C([a, b]), \rho)$ jest przestrzenią metryczną zupełną.

9. Załóżmy, że $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jest ciągiem zbiorów otwartych oraz $[a, b] \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$. Udowodnić, że $[a, b]$ zawiera się w skończonej ilości zbiorów U_n .

10. Niech f będzie ciągłą funkcją rzeczywistą określoną na przestrzeni metrycznej X . Niech $Z(f)$ będzie zbiorem tych wszystkich $p \in X$, dla których $f(p) = 0$. Pokazać, że zbiór $Z(f)$ jest domknięty.

Rozwiązanie: Przyjmijmy $\bar{Z}(f) = X \setminus Z(f) = \{x \in X : f(x) \neq 0\}$. Wykażemy, że $\bar{Z}(f)$ jest zb. otwartym. Niech $x \in \bar{Z}(f)$. Szukamy otoczenia $V_x \subseteq \bar{Z}(f)$ otwartego punktu x . Ustalmy $\varepsilon > 0$. Istnieje $\delta > 0$ takie, iż $y \in K(x, \delta) \Rightarrow f(y) \in K(f(x), \varepsilon)$. Jeżeli $0 \notin K(f(x), \varepsilon)$, to przyjmujemy $V_x = K(x, \delta > 0)$. Załóżmy, że $0 \in K(f(x), \varepsilon)$. Niech $d = \inf \{\rho(x, y) : f(y) = 0\}$. d istnieje i $d \geq 0$ z własności zbioru liczb rzeczywistych, bo $\{\rho(x, y) : f(y) = 0\} \subseteq [0, +\infty)$. Zauważmy, że $d > 0$. Gdyby bowiem było $d = 0$, to $\rho(x, x) = 0 \geq d$ a to pociąga, że $f(x) = 0$ wbrew założeniu, że $x \in \bar{Z}(f)$. Zatem $V_x = K(x, \frac{d}{2})$, $d > 0$ jest szukanym otoczeniem. Zbiór $\bar{Z}(f)$ jest otwarty a zatem $Z(f)$ jest domknięty.

11. Udowodnić, że funkcja f określonej na prz. X jest ciągła wtedy i tylko wtedy, gdy wykres $\{(x, f(x)) : x \in X\}$ tej funkcji jest zbiorem zwartym.
12. Pokazać, że ciągłe i otwarte odwzorowanie $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest monotoniczne.

Przestrzeń funkcji ciągłych między przestrzeniami unormowanymi. Niech X, Y będą przestrzeniami unormowanymi. Gdy nie prowadzi to do nieporozumień oznaczamy normy obydwu przestrzeni poprzez $\|\cdot\|$, np. $y \in Y$ ma normę $\|y\|$. W innym wypadku przez $\|\cdot\|_X$ oznaczamy normę przestrzeni X i analogicznie przez $\|\cdot\|_Y$ normę przestrzeni Y . Przez $\mathcal{L}(X, Y)$ oznaczamy rodzinę wszystkich funkcji ciągłych z przestrzeni X w przestrzeń Y .

13. Niech $\|f\| := \sup\{\|f(x)\|_Y : \|x\|_X \leq 1.\}$, $f \in \mathcal{L}(X, Y)$. Udowodnić, że przestrzeń $(\mathcal{L}(X, Y), \|\cdot\|)$ z tak określoną normą jest przestrzenią Banacha.
14. Udowodnić, że $\|f\| := \inf\{M > 0 : \|f(x)\|_Y \leq M\|x\|_X.\}$, $f \in \mathcal{L}(X, Y)$.

Całka oznaczona z funkcji ciągłej określonej na przedziale rzeczywistym w przestrzeni Banacha. Niech $f: D \rightarrow Y$, gdzie Y jest przestrzenią Banacha (z normą oznaczaną przez $\|\cdot\|$) a $D \subseteq \mathbb{R}$ przedziałem. Możemy łatwo rozszerzyć pojęcia analityczne funkcji $D \rightarrow \mathbb{R}$ na funkcje $D \rightarrow Y$:

- Mówimy, że funkcja f ma granicę $y \in Y$ w punkcie $x_0 \in \text{int } X$ w, gdy

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in X. 0 < |x - x_0| < \delta \implies \|f(x) - y\| < \varepsilon.$$

- Funkcja f jest różniczkowalna w punkcie $x_0 \in D$, gdy
 - pewne otoczenie punktu x_0 w D jest przedziałem niezdegenerowanym (tzn. nie jest punktem);
 - istnieje pochodna funkcji f w punkcie czyli granica oznaczana przez $f'(x_0)$ i zdefiniowana następująco:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

- Jeżeli $a, b \in D$, bo całkę oznaczoną z funkcji f w granicach od a do b możemy zdefiniować jako element $\int_a^b f$ przestrzeni Y zadany równością

$$\int_a^b f = F(b) - F(a),$$

gdzie F jest dowolną funkcją pierwotną funkcji f .

Całkę taką oczywiście również możemy oznaczać klasycznie - $\int_a^b f(x) dx$.

15. Sformułować definicję ciągłości funkcji $f: D \rightarrow Y$, gdzie Y i D są dane tak jak poprzednio.
16. Niech $f: D \rightarrow Y$, $g: D \rightarrow (0, +\infty)$ - funkcje ciągłe, Y - prz. Banacha, $D \subseteq \mathbb{R}$ - przedział. Udowodnić, że jeżeli $\|f\| \leq g$, $a, b \in D$, to

$$\left\| \int_a^b f(x) dx \right\| \leq \left| \int_a^b g(x) dx \right|.$$

Wynioskować stąd, że dla funkcji ciągłej f (założenia jak poprzednio) zachodzi

$$\left\| \int_a^b f(x) dx \right\| \leq \left| \int_a^b \|f(x)\| dx \right|.$$

17. Udowodnić, że jeżeli $f: D \rightarrow Y$ jest funkcją ciągłą (D - przedział rzeczyw., Y - prz. Banacha), a $M \geq 0$ liczbą taką, że $\|f\| \leq M$, to dla dowolnych $a, b \in D$

$$\left\| \int_a^b f(x) dx \right\| \leq M|b - a|.$$

18. Niech $X = C[a, b]$, tzn. X jest przestrzenią liniową wszystkich funkcji ciągłych $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Udowodnić, że funkcja

$$f \mapsto \int_a^b |f(x)| dx,$$

jest normą przestrzeni X oraz, że przestrzeń X z tak określoną normą jest przestrzenią Banacha.

4 Zadania różne III

1. Niech f będzie jednostajnie ciągła na odcinku (a, b) . Uzasadnić, że funkcję f można przedłużyć jednoznacznie do funkcji ciągłej (jednostajnie) na odcinku domkniętym $[a, b]$, tzn. istnieje ciągła funkcja $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ taka, że $f(x) = g(x)$ dla $x \in (a, b)$.
2. Pokazać, że odwzorowanie $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dane wzorem $f(x, y) = (\frac{1}{2}(1 + y), \frac{1}{3}(3 - x))$ jest kontrakcją przy metryce euklidesowej.
3. Pokazać, że $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dane wzorem

$$f(x, y) = \left(1 - \frac{1}{3}x, 1 + \frac{1}{3}y, 2 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}y\right)$$

jest kontrakcją.

4. Pokazać, że odwzorowanie $g: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ dane wzorem

$$g(x) = \frac{1}{x+1}$$

nie jest kontrakcją mimo, że $d(g(x), g(y)) \leq d(x, y)$, $x, y \leq 0$, $x \neq y$.

5. Korzystając z Zasady Banacha pokazać, że układ równań

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} \sin x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{3} \\ y = \frac{1}{3} \cos y + \frac{1}{3}x \end{cases}$$

ma dokładnie jedno rozwiązanie.

6. Metodą kolejnych przybliżeń rozwiązać zagadnienie Cauchy'ego

$$\begin{cases} y'(x) = y(x), x > 0, \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

7. Funkcja f spełnia warunek $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$ oraz jest ciągła na przedziale $[1, \infty)$. Wyznaczyć granicę

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_1^x f(t) dt.$$

8. Wykazać, że równanie funkcyjne

$$\frac{1}{2}f(t) - \frac{1}{2}t^3 = \int_0^1 t^2 s^2 f(s) ds$$

ma rozwiązanie w przedziale $[0, 1]$. Wyznaczyć to rozwiązanie z dokładnością do $\frac{8}{9}$.

9. Pokazać, że dla n i m całkowitych zachodzi

$$\int_0^{2\pi} e^{inx} e^{-imx} dx = \begin{cases} 0 & \text{jeżeli } m \neq n, \\ 2\pi & \text{jeżeli } m = n. \end{cases}$$

Wskazówka: skorzystać z tożsamości $e^{ix} = \cos x + i \sin x$.