Prueba de Hipótesis

MÉTODOS ESTADÍSTICOS BÁSICOS

alejandra.cerdarz@uanl.edu.mx

MET. Alejandra Cerda

¿QUÉ ES UNA HIPÓTESIS?

Una hipótesis es cualquier enunciado acerca de un parámetro poblacional; al considerar una hipótesis automáticamente aparece su contraparte como la otra opción en caso de que la hipótesis no sea considerada como verdadera

Hipótesis nula	Hipótesis alternativa
Ho	H1 ó Ha

Si una hipótesis estadística especifica completamente la distribución, se conoce como **hipótesis simple**, especificando la forma funcional de la distribución subyacente y los valores de todos los parámetros. De no cumplirse lo anterior, se dice que la hipótesis es **compuesta**.

TIPO DE HIPÓTESIS ALTERNATIVA

De a cuerdo al planteamiento de las hipótesis alternativas una prueba puede ser considerada unilateral o bilateral

Prueba unilateral

$H_0: \theta = \theta^*$ vs $H_1: \theta > \theta^*$

o

$H_0: \theta = \theta^*$ vs $H_1: \theta < \theta^*$

Prueba Bilateral

$H_0: \theta = \theta^*$ vs $H_1: \theta \neq \theta^*$

ESTADÍSTICO DE PRUEBA

Todas las pruebas de hipótesis quedan determinadas por el valor del estadístico de prueba.

La esencia de probar una hipótesis estadística es decidir si la afirmación se encuentra apoyada por la evidencia que se obtiene a partir de la muestra. De tal manera que el **estadístico de prueba** es generado mediante la muestra, con lo que es posible generar un valor numérico, y es a partir de éste que se llega a la decisión de rechazar Ho(en caso de que Ho no es cierta) o no rechazar Ho (en caso de que Ho es verdadera).

Al conjunto de valores del espacio muestra que llevan a la conclusión de rechazar Ho se llama **región de rechazo** y a su complemento se le conoce como región de aceptación.

ERROR INFERENCIAL

PRUEBA DE HIPÓTESIS

ERROR INFERENCIAL

Cuando se toma una decisión, con respecto a Ho, las consecuencias conducen a errores inferenciales. En forma sencilla, existen dos posibles decisiones con respecto a Ho rechazar Ho o equivocarse al rechazar Ho. La siguiente tabla muestra los dos tipos de error inferencial:

Conclusión	Realidad	
	Ho	H1
Ho	✓	Error Tipo II
H1	Error Tipo I	✓

Es necesario tener una cantidad que mida las posibilidades de éstos errores:

P(cometer error tipo I)=P(rechazar Ho|Ho es cierta)= α

P(cometer error tipo II)=P(No rechazar Ho|Ho es falsa)= β

ERROR INFERENCIAL

En la prueba de hipótesis es mucho más grave el error de tipo I que el error de tipo II. Debe notarse que el valor de α no puede hacerse muy pequeño sin que se incremente el valor de β.

En la práctica, lo que se sugiere e ajustar el tamaño del error de tipo I cambiando el valor crítico de la estadística de prueba par alcanzar un balance entre ambos errores.

SIGNIFICANCIA

PRUEBA DE HIPÓTESIS

NIVEL DE SIGNIFICANCIA

La probabilidad α también recibe el nombre de **nivel de significancia** estadística, esto implica que la evidencia muestral es tal que garantiza el rechazo de H0 a un nivel dado de α.

El porcentaje de **confianza** al realizar una prueba con un nivel α de significancia corresponde al $(1-\alpha)*100\%$.

Los valores de α mayormente usados (aunque no los únicos) al realizar una prueba son de 0.01,0.05 y 0.10; generando así pruebas con el 99%, 95% y 90% de confianza, respectivamente.

ESTRATEGIA A SEGUIR

PRUEBA DE HIPÓTESIS

ESTRATEGIA PARA REALIZAR UNA PRUEBA DE HIPÓTESIS:

1. Identificar el parámetro de interés según el contexto del problema.
2. Formular las hipótesis.
3. Identificar la formula para el valor calculado del estadístico de prueba.
4. Establecer la región de rechazo según la prueba y el tipo de hipótesis alternativa.
5. Decidir si Ho debe ser rechazada o no según la evidencia estadística
6. Expresar la conclusión según el contexto del problema indicando el nivel de significancia o confianza empleada.

PRUEBAS PARA PARAMETRO DE **UNA** POBLACIÓN

PRUEBAS DE HIPÓTESIS

PRUEBA PARA MEDIA POBLACIONAL

Hipótesis Nula	$H_o: \mu = \mu_o$ población normal con n > 30		
Hipótesis alternativa	$H_a: \mu > \mu_o$ (prueba de cola superior)	$H_a: \mu < \mu_o$ (prueba de cola inferior)	$H_a: \mu \neq \mu_o$ (prueba de dos colas)
Estadístico de prueba	$z = \frac{\bar{x}-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$		
Región de rechazo	$z \geq z_\alpha$	$z \leq -z_\alpha$	$z \geq z_{\alpha/2}$ o $z \leq -z_{\alpha/2}$

Hipótesis Nula	$H_o: \mu = \mu_o$ población normal con n < 30		
Hipótesis alternativa	$H_a: \mu > \mu_o$	$H_a: \mu < \mu_o$	$H_a: \mu \neq \mu_o$
Estadístico de prueba	$t = \frac{\bar{x}-\mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$		
Región de rechazo	$t \geq t_{\alpha,n-1}$	$t \leq -t_{\alpha,n-1}$	$t \geq t_{\alpha/2,n-1}$ o $t \leq -t_{\alpha/2,n-1}$

PRUEBA PARA PROPORCIÓN POBLACIONAL

Hipótesis Nula	$H_0: p = p_0$ con $np_0 \geq 10$ y $n(1- p_0) \geq 10$		
Hipótesis alternativa	$H_a: p > p_0$	$H_a: p < p_0$	$H_a: p \neq p_0$
Estadístico de prueba	$z = \dfrac{\hat{p}-p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)/n}}$		
Región de rechazo	$z \geq z_\alpha$	$z \leq -z_\alpha$	$z \geq z_{\alpha/2}$ o $z \leq -z_{\alpha/2}$

Hipótesis Nula	$H_0: p = p_0$ con $np_0 < 10$ o $n(1- p_0) < 10$		
Hipótesis alternativa	$H_a: p > p_0$	$H_a: p < p_0$	$H_a: p \neq p_0$
Estadístico de prueba	X=número de éxitos obtenidos en n ensayos		
Región de rechazo	$X \geq K_\alpha$	$X \leq K'_\alpha$	$X \geq K_{\alpha/2}$ o $X \leq K'_{\alpha/2}$

Con K_α es el entero más pequeño para el cual $\sum_{y=K_\alpha}^{n} bin(y; n, p_0) \leq \alpha$ y K'_α es el entero más grande para el cual $\sum_{y=0}^{K'_\alpha} bin(y; n, p_0) \leq \alpha$

PRUEBA PARA VARIANZA POBLACIONAL

Hipótesis Nula	$H_o: \sigma^2 = \sigma_o^2$ distribución normal media desconocida		
Hipótesis alternativa	$H_a: \sigma^2 > \sigma_o^2$	$H_a: \sigma^2 < \sigma_o^2$	$H_a: \sigma^2 \neq \sigma_o^2$
Estadístico de prueba	$x^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}$		
Región de rechazo	$x^2 \leq x^2_{\alpha,\ n-1}$	$x^2 \geq x^2_{1-\alpha,\ n-1,}$	$x^2 \leq x^2_{\alpha/2,\ n-1}$ o $x^2 \geq x^2_{1-\alpha/2,\ n-1}$

PRUEBAS PARA CONTRASTE DE **DOS** POBLACIONES

PRUEBAS DE HIPÓTESIS

COMPARACIÓN DE DOS MEDIAS POBLACIONALES

Hipótesis Nula	$H_o: \mu_1 - \mu_2 = \Delta_o$ poblaciones normales con $n_1, n_2 > 30$ y varianzas poblacionales conocidas		
Hipótesis alternativa	$H_a: \mu_1 - \mu_2 > \Delta_o$	$H_a: \mu_1 - \mu_2 < \Delta_o$	$H_a: \mu_1 - \mu_2 \neq \Delta_o$
Estadístico de prueba	$z = \dfrac{\overline{x_1} - \overline{x_2} - \Delta_0}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}}$		
Región de rechazo	$z \geq z_\alpha$	$z \leq -z_\alpha$	$z \geq z_{\alpha/2}$ o $z \leq -z_{\alpha/2}$

Hipótesis Nula	$H_o: \mu_1 - \mu_2 = \Delta_o$ o $H_o: \mu_1 = \mu_2$ si $\Delta_o = 0$ poblaciones normales con $n_1, n_2 < 30$ y varianzas poblacionales desconocidas pero iguales		
Hipótesis alternativa	$H_a: \mu_1 - \mu_2 > \Delta_o$	$H_a: \mu_1 - \mu_2 < \Delta_o$	$H_a: \mu_1 - \mu_2 \neq \Delta_o$
Estadístico de prueba	$t = \dfrac{\overline{x_1} - \overline{x_2} - \Delta_0}{s_p\sqrt{\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}}}$ donde $s_p = \sqrt{\dfrac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}}$		
Región de rechazo	$t \geq t_{\alpha,\ n_1+n_2-2}$	$t \leq -t_{\alpha,\ n_1+n_2-2}$	$t \geq t_{\alpha/2,\ n_1+n_2-2}$ o $t \leq -t_{\alpha/2,\ n_1+n_2-2}$

COMPARACIÓN DE DOS MEDIAS POBLACIONALES

Hipótesis Nula	$H_0: \mu_1 - \mu_2 = \Delta_0$ poblaciones normales con $n_1, n_2 < 30$ y varianzas poblacionales desconocidas pero diferentes		
Hipótesis alternativa	$H_a: \mu_1 - \mu_2 > \Delta_0$	$H_a: \mu_1 - \mu_2 < \Delta_0$	$H_a: \mu_1 - \mu_2 \neq \Delta_0$
Estadístico de prueba	$t = \frac{\overline{x_1} - \overline{x_2} - \Delta_0}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}}$		$v = \frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{\left(S_1^2/n_1\right)^2}{n_1 - 1} + \frac{\left(S_2^2/n_2\right)^2}{n_2 - 1}}$
Región de rechazo	$t \geq t_{\alpha, v}$	$t \leq -t_{\alpha, v}$	$t \geq t_{\alpha/2, v}$ o $t \leq -t_{\alpha/2, v}$

Hipótesis Nula	$H_0: d = d_0$		
Hipótesis alternativa	$H_a: d > d_0$	$H_a: d < d_0$	$H_a: d \neq d_0$
Estadístico de prueba	$t = \frac{\bar{d}}{\frac{s_d}{\sqrt{n}}}$		
Región de rechazo	$t \geq t_{\alpha,n-1}$	$t \leq -t_{\alpha,n-1}$	$t \geq t_{\alpha/2,n-1}$ o $t \leq -t_{\alpha/2,n-1}$

COMPARACIÓN DE DOS PROPORCIONES POBLACIONALES

Hipótesis Nula	$H_0: p_1 - p_2 = 0$ poblaciones normales con $n_1, n_2 > 30$		
Hipótesis alternativa	$H_a: p_1 - p_2 > 0$	$H_a: p_1 - p_2 < 0$	$H_a: p_1 - p_2 \neq 0$
Estadístico de prueba	$z = \frac{\widehat{p_1} - \widehat{p_2}}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}}$ $donde\ \hat{p} = \frac{n_1}{n_1+n_2}\widehat{p_1} + \frac{n_2}{n_1+n_2}\widehat{p_2}$		
Región de rechazo	$z \geq z_{\alpha}$	$z \leq -z_{\alpha}$	$z \geq z_{\alpha/2}$ o $z \leq -z_{\alpha/2}$

COMPARACIÓN DE DOS VARIANZAS POBLACIONALES

Hipótesis Nula	$H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$		
Hipótesis alternativa	$H_a: \sigma_1^2 > \sigma_2^2$	$H_a: \sigma_1^2 < \sigma_2^2$	$H_a: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$
Estadístico de prueba	$f = \frac{s_1^2}{s_2^2}$		
Región de rechazo	$f \geq F_{\alpha,\ n_1-1, n_2-1}$	$f \leq F_{1-\alpha,\ n_1-1, n_2-1}$	$f \geq F_{\alpha/2,\ n_1-1, n_2-1}$ o $f \leq F_{1-\alpha/2,\ n_1-1, n_2-1}$

CRITERIO DEL P VALOR AL CONCLUIR UNA PRUEBA

PRUEBAS DE HIPÓTESIS

¿Para que utilizar el p valor?

Cuando se realiza una prueba de hipótesis se debe comparar el estadístico de prueba con un valor de tabla, lo que en ocasiones resulta complicado ya que debes revisar bajo diferentes funciones de distribución o tablas.

Generalmente los paquetes estadísticos más usados generan un p valor correspondiente a la prueba, el cual sólo basta ser comparado con un valor de alfa determinado para concluir. Incluso el criterio de decisión es el mismo para cualquier hipótesis alternativa.

Cabe aclarar que el calculo del p valor difiere para las alternativas; más no la comparación con respecto a alfa.

¿Qué es el p valor?

- El p valor (o valor p) es el menor nivel de significancia, que corresponde a un valor observado del estadístico de prueba, en el cual la hipótesis nula podría haberse rechazado.

- El p valor es la probabilidad, calculada suponiendo que la hipótesis nula es cierta, de obtener un valor del estadístico de prueba por lo menos tan contradictorio para la hipótesis nula como el valor calculado a partir de la muestra disponible.

- El p valor es el nivel de significancia α más pequeño para el cual la hipótesis nula puede ser rechazada.

Regla de decisión

Se selecciona un nivel de significancia α y se procede como sigue:

- Se rechaza Ho si el p valor es $\leq \alpha$
- No se rechaza Ho si el p valor es $> \alpha$

Note que al usar el p valor es fácil modificar el nivel de significancia a "conveniencia". Por ejemplo, si el p valor es de 0.915 que es mayor tanto para $\alpha=0.10$, $\alpha=0.05$, $\alpha=0.01$, $\alpha=0.001$, si la decisión respecto al rechazo de Ho es la misma (no rechazar Ho) para cualquiera de éstos valores de α, es posible elegir un mayor porcentaje de confianza (en este caso 99.99%).

R

t.test()

- x: vector numérico con los datos (puede ser referente a muestra 1 ó a la muestra única)
- y: vector numérico con la información de muestra 2.
- paired=FALSE: indica que el IC se realiza para muestras independientes, en el caso de muestras pareadas el argumento será paired=TRUE.
- var.equal=FALSE: indica que las varianzas son desconocidas y diferentes, si las varianzas se pueden considerar iguales el argumento será var.equal=TRUE.
- conf.level: nivel de confianza a usar, 0.95 en automático.
- alternative: indica el tipo de prueba, en automático es dos colas, a especificar cola inferior “less” o cola superior “greater”
- mu: el valor de la media a comparar, o diferencia entre medias

var.test()

- x: vector numérico con los datos (puede ser referente a muestra 1 ó a la muestra única)
- y: vector numérico con la información de muestra 2
- conf.level: nivel de confianza a usar, 0.95 en automático.
- proporción: la relación hipotética de las varianzas de la población de x e y.
- alternative: indica el tipo de prueba, en automático es dos colas, a especificar cola inferior “less” o cola superior “greater”

prop.test()

- x: vector con el conteo de éxitos (ya sea de una o dos muestras)
- n: vector con el número de ensayos (ya sea de una o dos muestras)
- conf.level: nivel de confianza a usar, 0.95 en automático.
- alternative: indica el tipo de prueba, en automático es dos colas, a especificar cola inferior “less” o cola superior “greater”
- p: el valor de proporción a comparar, o diferencia entre proporciones

Ejercicios varios

1. 100 neumáticos que cierto fabricante produce duraron en promedio 21,819 millas con una desviación estándar de 1,295 millas. Pruebe si en promedio la duración de los neumáticos es menor a 22,000 millas en el nivel 0.05 de significancia.

2. Las siguientes son las pérdidas semanales promedio de horas de trabajo a causa de accidentes en 10 plantas industriales antes y después de poner en operación cierto programa de seguridad: 45 y 36, 73 y 60, 46 y 44, 124 y 119, 33 y 35, 57 y 51, 83 y 77, 34 y 29, 26 y 24, 17 y 11. Realice la prueba estadística en el nivel 0.05 de significancia para probar si el programa de seguridad es eficaz.

Ejercicios varios

3. Los tiempos de avería de ciertos componentes electrónicos son 15,28,3,12,42,19,20,2,25,30,62,12,18,16,44,65,33,51,4 y 28minutos. Si consideramos estos datos como una m.a. para probar si el promedio de los tiempos difiere de 15 minutos al nivel 0.05 de significancia. ¿Se puede especificar si el tiempo es mayor o menor a 15 minutos?, ¿La diferencia supera los 5 minutos?

4. En una muestra aleatoria, 74 de 250 personas que vieron cierto programa de televisión en blanco y negro y 92 de 250 personas que vieron el mismo programa en color recordaron 2 horas más tarde qué productos se anunciaron. Realice la prueba estadística en el nivel 0.01 de significancia para revisar si existe diferencia en las proporciones poblacionales. ¿Se podría especificar , en base a la evidencia estadística, si alguna proporción es mayor?

Ejercicios varios

5. Estos son los tiempos de secado (minutos) de hojas cubiertas de poliuretano bajo dos condiciones ambientales diferentes. Use la prueba estadística apropiada para probar si hay una diferencia significativa entre las medias de los tiempos de secado, provenientes de poblaciones normales, bajo las condiciones ambientales usando una significancia del 0.05 de significancia.

condición 1	55.6	56.1	61.8	55.9	51.4	59.9	54.3
	62.8	58.5	55.8	58.3	60.2		
condición 2	54.2	50.1	57.1	57.5	63.6	59.3	60.9
	61.8	55.1	43.5	51.2	46.2	56.7	52.5

6. Las siguientes son calificaciones de un examen, se desea probar si la proporción de alumnos con calificación aprobatoria (mínimo 70) es mayor al 70%, realice la prueba del 99% de confianza.

79	80	97	90	83	60	91	100	86
90	78	62	97	55	94	72	90	86
79	100	67	50	81	74	74	94	57
61	53	78	94	84	62	76	72	89