Estimación por Intervalo

MÉTODOS ESTADÍSTICOS BÁSICOS

alejandra.cerdarz@uanl.edu.mx

MET. Alejandra Cerda

Estimación: puntual vs intervalo

Una estimación puntual, por el hecho de ser un solo número no proporciona información sobre la precisión y confiabilidad de la estimación.

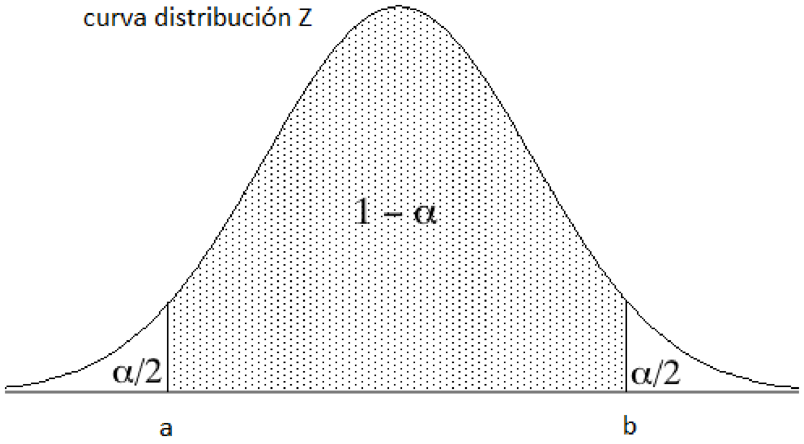
Mientras que un intervalo de confianza (IC) me brinda información de un rango de valores factibles para el parámetro poblacional bajo cierta confianza. Mientras más alto sea el nivel de confianza, más fuerte es la creencia de que el valor del parámetro que se estima queda dentro del intervalo.

En una prueba de hipótesis generalmente sólo se obtiene la información con respecto a la comparación de un valor hipotético con respecto al parámetro poblacional(el valor poblacional es mayor/menor/diferente al valor hipotético); sin embargo, podemos complementar con un intervalo de confianza. Por ejemplo, el valor poblacional es mayor que 20 unidades (resultado de la PH) y dicho valor esta entre 25 y 32 unidades (resultado del IC).

Interpretación de un Intervalo de Confianza

Una interpretación correcta del 100(1-α)% de confianza se basa en la interpretación de probabilidad de frecuencia relativa a largo plazo: decir que un evento A tiene una probabilidad del 100(1-α)% es decir que, si el experimento en el cual se define A se realiza una y otra vez, a la larga ocurrirá el 100(1-α)% del tiempo.

En nuestro caso si obtenemos, por ejemplo 100, muestras aleatorias e independientes de la misma población y el intervalo para el parámetro poblacional es del 90%, quiere decir que el intervalo generado de la información muestral incluirá el valor poblacional en 90 ocasiones.

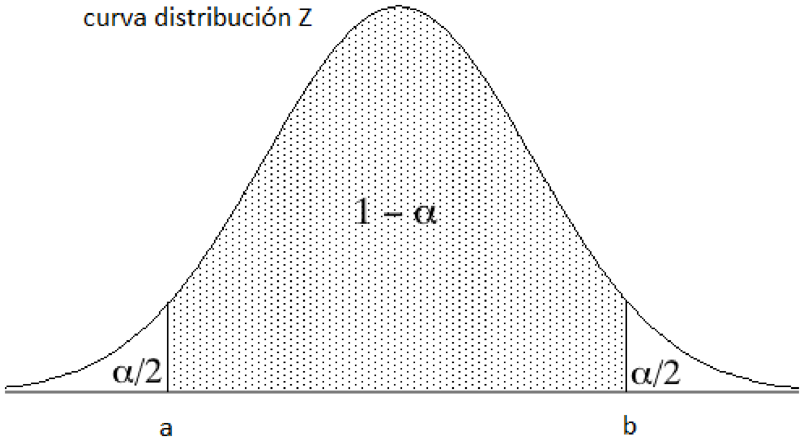


¿Cómo se genera un intervalo de confianza?

Supongamos que le parámetro de interés es μ, que la distribución poblacional es normal y que el valor de la desviación estándar poblacional σ es conocido. Así tenemos que $\frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ se distribuye de forma normal estándar, Si buscamos un intervalo de (1-α)% tenemos que:

$$P(a < Z < b) = P\left(a < \frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} < b\right) = 1 - \alpha$$

Si el valor Z debe estar entre los valores a y b ¿entre qué valores debe estar μ (que es el valor poblacional que deseamos estimar mediante el uso de un intervalo)?



¿Cómo se genera un intervalo de confianza?

De la ecuación P $\left(a < \frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} < b\right) = 1 - \alpha$

Consideremos $a < \frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} < \mathrm{b}$ (multiplicando por $\sigma/\sqrt{n}$)

$$a\left(\sigma/\sqrt{n}\right) < \bar{x} - \mu < \mathrm{b}\left(\sigma/\sqrt{n}\right)$$ (restando $\bar{x}$)

$$a\left(\sigma/\sqrt{n}\right) - \bar{x} < -\mu < \mathrm{b}\left(\sigma/\sqrt{n}\right) - \bar{x}$$ (multiplicando por -1)

$$-a\left(\sigma/\sqrt{n}\right) + \bar{x} > \mu > -\mathrm{b}\left(\sigma/\sqrt{n}\right) + \bar{x}$$ (reescribiendo)

$$\bar{x} - b\left(\sigma/\sqrt{n}\right) < \mu < \bar{x} - a\left(\sigma/\sqrt{n}\right)$$

Resultando en el IC para el parametro poblacional

Así ala ecuación

$$P\left(a < \frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} < b\right) = 1 - \alpha \text{ equivale a}$$

$$P\left(\bar{x} - b\left(\sigma/\sqrt{n}\right) < \mu < \bar{x} - a\left(\sigma/\sqrt{n}\right)\right) = 1 - \alpha$$

Donde a y b son valores para los cuales se tiene una probabilidad de α/2 a la izquierda y derecha, respectivamente; es decir, son valores $Z_{\alpha/2}$, de hecho, el mismo valor pero uno positivo (b) y uno negativo (a) debido a la simetría de la distribución, de tal modo que el IC del 100(1- α)% para n>30 queda como sigue:

$$\bar{x} - Z_{\alpha/2}\left(\sigma/\sqrt{n}\right) < \mu < \bar{x} + Z_{\alpha/2}\left(\sigma/\sqrt{n}\right)$$

ESTIMACIÓN PARA PARAMETRO DE **UNA** POBLACIÓN

INTERVALOS DE CONFIANZA

Intervalos de confianza para una muestra

Referente a media

características	intervalo
población normal con n > 30	$\bar{x} - Z_{\alpha/2}\left(\sigma/\sqrt{n}\right) < \mu < \bar{x} + Z_{\alpha/2}\left(\sigma/\sqrt{n}\right)$
población normal con n < 30	$\bar{x} - t_{\alpha/2,n-1}\left(s/\sqrt{n}\right) < \mu < \bar{x} + t_{\alpha/2,n-1}\left(s/\sqrt{n}\right)$

Referente a proporción

características	intervalo
$np_o \geq 10$ y $n(1-p_o) \geq 10$	$\hat{p} - Z_{\alpha/2}\left(\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})/n}\right) < p < \hat{p} + Z_{\alpha/2}\left(\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})/n}\right)$

Referente a varianza

características	intervalo
población normal	$\frac{(n-1)s^2}{X^2_{\alpha/2,n-1}} < \sigma^2 < \frac{(n-1)s^2}{X^2_{1-\alpha/2,n-1}}$

Ejemplo

La longitud de los cráneos de 10 esqueletos fósiles de una especie extinta de pájaros tiene una media de 5.68 cm y una desviación de 0.29 cm. Suponga que las mediciones están distribuidas normalmente el intervalo de confianza del 95% para la media de la longitud de los cráneos de esta especie de pájaro.

Aquí el IC correspondiente es $\bar{x} - t_{\alpha/2, n-1}\left(s/\sqrt{n}\right) < \mu < \bar{x} + t_{\alpha/2, n-1}\left(s/\sqrt{n}\right)$

Así, tenemos que $5.68 - t_{0.05/2, 10-1}\left(0.29/\sqrt{10}\right) < \mu < 5.68 + t_{0.05/2, 10-1}\left(0.29/\sqrt{10}\right)$

Con esto, el IC del 95% es: $5.4725 < \mu < 5.8874$

El investigador cree que el promedio de la longitud de los cráneos es de 6cm ¿Qué se podría concluir considerando el IC generado? Si el valor poblacional esta entre 5.47 y 5.88 (es decir, que el IC no contiene el valor a comparar) no hay evidencia para decir que el investigador tenga la razón, esto con 95% de confianza.

ESTIMACIÓN PARA CONTRASTE DE **DOS** POBLACIONES

INTERVALOS DE CONFIANZA

Intervalos de confianza para dos muestras

Referente a comparación de medias

características	intervalo
poblaciones normales con $n_1>30$ y $n_2>30$, varianzas poblacionales conocidas	$(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-Z\alpha/_2\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}<\mu_1-\mu_2<(\bar{x}_1-\bar{x}_2)+Z\alpha/_2\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}$
poblaciones normales con $n_1<30$ y/o $n_2<30$, varianzas poblacionales desconocidas pero iguales	$(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-t\alpha/_{2,n1+n2-2}\mathrm{s_p}\sqrt{\frac{1}{\mathrm{n_1}}+\frac{1}{\mathrm{n_2}}}<\mu_1-\mu_2<(\bar{x}_1-\bar{x}_2)+t\alpha/_{2,n1+n2-2}\mathrm{s_p}\sqrt{\frac{1}{\mathrm{n_1}}+\frac{1}{\mathrm{n_2}}}$
poblaciones normales $n_1<30$ y/o $n_2<30$, varianzas poblacionales desconocidas pero diferentes	$(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-t\alpha/_{2,v}\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1}+\frac{s_2^2}{n_2}}<\mu_1-\mu_2<(\bar{x}_1-\bar{x}_2)+t\alpha/_{2,v}\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1}+\frac{s_2^2}{n_2}}$

$$con \quad S_P=\frac{(n_1-1)s_1^2+(n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2}$$

$$v=\frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{\left(S_1^2/n_1\right)^2}{n_1-1}+\frac{\left(S_2^2/n_2\right)^2}{n_2-1}}$$

características	intervalo
población normal, se cuenta con dos observaciones por ítems (antes vs después)	$\bar{d}-t\alpha/_{2,n-1}\left(s_d/\sqrt{n}\right)<d<\bar{d}+t\alpha/_{2,n-1}\left(s_d/\sqrt{n}\right)$

Intervalos de confianza para dos muestras

Referente a proporción

características	intervalo
Poblaciones normales con $n_1>30$ y $n_2 > 30$	$(\widehat{p_1}-\widehat{p_2}) - Z_{\alpha/2}\left(\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})\left(\frac{1}{n1}+\frac{1}{n2}\right)}\right) < p_1-p_2 < (\widehat{p_1}-\widehat{p_2}) + Z_{\alpha/2}\left(\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})\left(\frac{1}{n1}+\frac{1}{n2}\right)}\right)$ Con $\hat{p} = \frac{n_1}{n_1+n_2}\hat{p}_1 + \frac{n_2}{n_1+n_2}\hat{p}_2$

Referente a varianza

características	intervalo
poblaciones normales	$\frac{s_1^2}{s_2^2 f_{\alpha/2,n1-1,n2-1}} < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < \frac{s_1^2 f_{\alpha/2,n2-1,n1-1}}{s_2^2}$

Ejemplo

En comparación de dos clases de pintura, un servicio de pruebas para el consumidor encuentra que 4 latas de un galón de una marca cubren en promedio 546 pies cuadrados con una desviación estándar de 31 pies cuadrados, mientras que cuatro latas de 1 galón de otra marca cubren en promedio 492 pies cuadrados con una desviación estándar de 26 pies cuadrados. Suponiendo que las dos poblaciones muestreadas son normales y tienen varianzas iguales calcule el intervalo de confianza del 95% para revisar si en promedio la primera marca tiene mejor desempeño de cobertura.

El IC correspondiente es $(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - t_{\alpha/2, n1+n2-2} s_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} < \mu_1 - \mu_2 < (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) + t_{\alpha/2, n1+n2-2} s_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}$

Así, tenemos que $(546 - 492) - t_{0.025,6} 28.609 \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} < \mu_1 - \mu_2 < (546 - 492) + t_{0.025,6} 28.609 \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}}$

Con esto, el IC del 95% es: $52.2697 < \mu_1 - \mu_2 < 55.7302$

Y dado que el intervalo no contiene $\mu_1 - \mu_2$=0, las medias no son iguales; por otro lado, dado que el intervalo esta conformado por completo por valores positivos, podemos decir que $\mu_1 > \mu_2$ con 95% de confianza, lo cual confirma que, en promedio, la primera clase de pintura muestra mayor cobertura por galón.

Ejemplo

Al comparar la variabilidad de la resistencia a la tracción de dos clases de acero estructural, un experimento dio los siguientes resultados: n_1=13, $s_1^2 = 19.2$, n_2=16 y s_2^2=3.5, donde las unidades de medición son 1000 libras por pulgada cuadrada. Suponga que las mediciones son m.a. independientes de distribuciones normales de las cuales se desea saber si las varianzas poblacionales son iguales al nivel 0.01 de significancia mediante el uso del IC correspondiente.

Aquí el IC correspondiente es $\dfrac{s_1^2}{s_2^2 f_{\alpha/2, n1-1, n2-1}} < \dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < \dfrac{s_1^2 f_{\alpha/2, n2-1, n1-1}}{s_2^2}$

Así, tenemos que $\dfrac{19.2}{3.5 f_{0.01/2, 13-1, 16-1}} < \dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < \dfrac{19.2 f_{0.01/2, 16-1, 13-1}}{3.5}$

Con esto, el IC del 99% es: $1.2908 < \dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < 25.899$

Y dado que el intervalo no contiene $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$=1, las varianzas no son iguales; por otro lado, dado que el intervalo esta conformado por completo por valores mayores a 1, podemos decir que $\sigma_1^2 > \sigma_2^2$ con 99% de confianza.

Algunas consideraciones

- Las estimaciones de los intervalos siempre se realizan para los valores poblacionales.
- Al afrontar una hipótesis, lo ideal sería realizar la prueba de hipótesis pertinente y complementar con un intervalo de confianza. Por ahora sólo nos limitaremos a realizar los Intervalos de confianza para la estimación del valor del parámetro poblacional.
- Note que si el intervalo es para una diferencia de parámetros poblacionales y se desea comparar si dichos parámetros son iguales entonces el IC debe contener el 0 en caso de que se cumpla dicha igualdad; sin embargo, para el intervalo concerniente al cociente de parámetros poblacionales se revisaría la igualdad con la contención del 1 en el intervalo.
- Note que si el intervalo es para una diferencia de parámetros poblacionales y se desea comparar si dichos parámetros son uno mayor que otro entonces los límites (ambos) en el intervalo serán positivos(o negativos) cuando el primer parámetro sea mayor (menor) que el segundo parámetro.
- Note que si el intervalo es para un cociente de parámetros poblacionales y se desea comparar si dichos parámetros son uno mayor que otro entonces los límites (ambos) en el intervalo serán menores(o mayores) a 1 cuando el parámetro del denominador de dicho cociente sea mayor (menor) que el parámetro del numerador.

R

t.test()$conf.int

- x: vector numérico con los datos (puede ser referente a muestra 1 ó a la muestra única)
- y: vector numérico con la información de muestra 2.
- paired=FALSE: indica que el IC se realiza para muestras independientes, en el caso de muestras pareadas el argumento será paired=TRUE.
- var.equal=FALSE: indica que las varianzas son desconocidas y diferentes, si las varianzas se pueden considerar iguales el argumento será var.equal=TRUE.
- conf.level: nivel de confianza a usar, 0.95 en automático.

var.test()$conf.int

- x: vector numérico con los datos (puede ser referente a muestra 1 ó a la muestra única)
- y: vector numérico con la información de muestra 2
- conf.level: nivel de confianza a usar, 0.95 en automático.

*esta función sólo aplica en dos muestras

prop.test()$conf.int

- x: vector con el conteo de éxitos (ya sea de una o dos muestras)
- n: vector con el número de ensayos (ya sea de una o dos muestras)
- conf.level: nivel de confianza a usar, 0.95 en automático.

Ejercicios varios

1. ¿Cuál es la temperatura corporal normal para personas sanas? Una muestra aleatoria de 130 temperaturas corporales en personas sanas proporcionadas por un consultorio dio 36.8° y desviación estándar de 0.75°. Determine el IC del 99% correspondiente a la temperatura corporal promedio de personas sanas, ¿contiene el valor de 37°, que es el promedio aceptado de temperatura citado por médicos y otros?

2. Para una comparación de los porcentajes de piezas defectuosas producidas por dos líneas de montaje, de cada línea se seleccionaron muestras aleatorias independientes de 100 piezas. La línea A produjo 18 piezas defectuosas en la muestra y la línea B contenía 12 piezas defectuosas. Encuentre el IC del 98% para la verdadera diferencia en proporciones de piezas defectuosas de las dos líneas ¿Hay evidencia aquí que sugiera que una línea produce una proporción más alta de piezas defectuosas que la otra? En caso de ser así, ¿Sería factible suponer que la diferencia verdadera es superior al 2% ?

Ejercicios varios

3. ¿Está menguando el romance de los estudiantes con el cine? En una encuesta de 800 adultos seleccionados al aleatoriamente , 45% indicaron que el cine estaba mejorando. Encuentre el IC del 95% para la proporción total de adultos que dicen que el cine esta mejorando. Según la evidencia ¿Piensa usted que una *mayoría* de adultos dice que el cine esta mejorando?

4. Las edades de una muestra aleatoria de cinco profesores universitarios de la carrera X son 49,54,50,47 y 49; mientras que una muestra de seis profesores universitarios de la carrera Y son 55,25,75,36,46 y 35.Construya el IC del 99% para el cociente de varianzas poblacionales de las edades de los profesores de la universidad, suponiendo que dichas edades están distribuidas normalmente. ¿Podría suponer que alguna de estas dos carreras cuenta con profesores cuyas edades muestran mayor variación?

Ejercicios varios

5. El cobre sólido, producido por sinterización de un polvo en condiciones ambientales especificas, se mide para ver su porosidad en un laboratorio. Una muestra de 4 mediciones independientes de porosidad tiene el siguiente registro: 0.2196, 0.2188, 0.2202 y 0.2198. Un segundo laboratorio repite el proceso con 5 mediciones independientes de porosidad con el siguiente registro: 0.1682,0.1696,0.1703, 0.1664 y 0.1681. Calcule la diferencia real entre las medias poblacionales para estos dos laboratorios, con una confianza de 95%.

6. Los administradores de un hospital deseaban estimar el número promedio de días necesarios para el tratamiento de enfermos internados con edades entre 25 y 34 años. Una muestra de 500 pacientes entre estas edades produjo una media y desviación estándar igual a 5.4 y 3.10 días, respectivamente. Construya el IC del 90% para la duración media de permanencia de la población de pacientes de la cual se extrajo la muestra.

Ejercicios varios

7. Se desea analizar la efectividad de una dieta implementada en un grupo de personas que practican atletismo, el peso de los deportistas antes y después y de la dieta se registro con los siguientes resultados: 78 y 75, 89 y 90, 100 y 100, 95 y 94, 120 y 115, 93 y 90. El IC del 90% muestra evidencia sobre la efectividad de la dieta para bajar de peso.

8. Se analiza el conjunto "iris" y si el promedio de la longitud del pétalo se puede considerar sea el mismo para las poblaciones de las flores de especie setosa y versicolor. Construya el IC del 98% y comente sobre posible evidencia sobre la igualdad en la media de la longitud del pétalo en ambas especies.