Зміст

Узагальнення обертань 3
Обертання навколо осі Z: 3
Обертання навколо осі Y: 3
Обертання навколо осі Z: 3
Перетворення тривимірних координат 4
Матриця перетворення 4
Нерівномірне масштабування 4
Повна зміна масштабу 4
Тривимірний зсув 5
Просторовий перенос 5
Тривимірне віддзеркалення 5
Віддзеркалення відносно площини XY: 5
Віддзеркалення відносно площини XZ: 5
Віддзеркалення відносно площини YZ: 5
Тривимірне обертання 6
Обертання навколо осі OX 6
Обертання навколо осі OУ 6
Обертання навколо осі OZ 6
Афінна та перспективна геометрія 7
Афінне перетворення 7
Перспективне зображення 7
Аксонометричні проекції 7
Ортогональна проекція 8
Діметрична проекція 8
Ізометрична проекція 9
Перспективне перетворення 10
Значення r 10
Паралельні прямі 10
Поновлення тривимірної інформації 11
Знаходження координат перетворення 11
Знаходження початкових координат 11

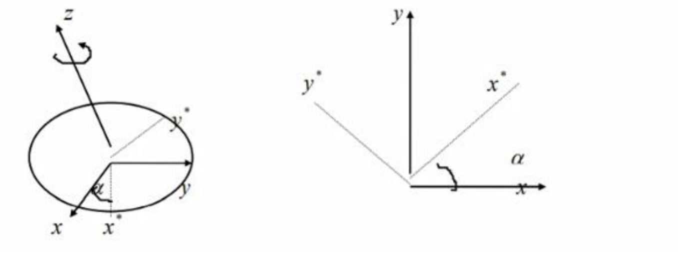
Знаходження елементів матриці перетворень 12
Плоскі криві 13
Непараметричне задання кривої 13
Явний вигляд 13
Неявний вигляд 13
Параметричне задання кривої 13
Способи зображення канонічних кривих 14
Зображення кола 14
Параметричне зображення еліпса 14
Параметричне зображення параболи 14
Параметричне представлення гіперболи 15
Просторові криві 16
Непараметричні просторові криві 16
Явні рівняння просторових кривих 16
Неявні рівняння просторових кривих 16
Методи інтерполяції кривих 16
Кубічні сплайни 16
Побудова кубічного сплайну 17
Задання граничних умов 17
Закріплена гранична умова 18
Слабкі граничні умови 18
Циклічні кінцеві умови 18
Ациклічні кінцеві умови 19
Параболічна інтерполяція 19
Криві Без'є 21
Просторові поверхні 23
Білінійна поверхня 23
Лінійчаті поверхні 24
Лінійні поверхні Кунса 24
Фрагмент бікубічної поверхні 25
Поверхня Без'є 27

Узагальнення обертань

Обертання навколо осі Z:

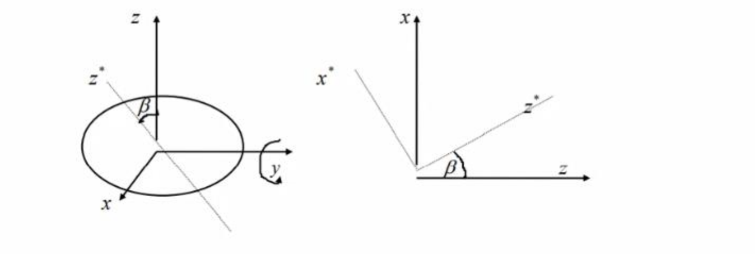
Відносно початку координат в двовимірному випадку.

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



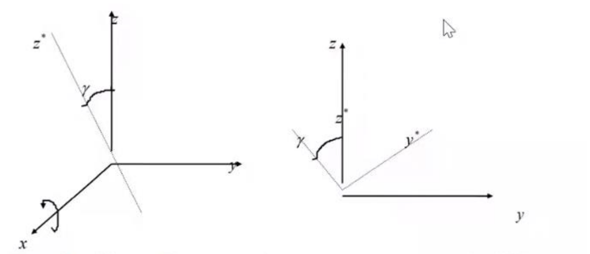
Обертання навколо осі Y:

$$\begin{bmatrix} \cos\beta & 0 & -\sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\beta & 0 & \cos\beta \end{bmatrix}$$



Обертання навколо осі Z:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\gamma & \sin\gamma \\ 0 & -\sin\gamma & \cos\gamma \end{bmatrix}$$



Перетворення тривимірних координат

Для сприйняття форми об'єкту треба мати можливість *аналізувати* його тривимірне представлення операціями **зсуву** чи **переносу**.

[X, Y, Z] — точка в тривимірному просторі.

[X, Y, Z, 1] | [X, Y, Z, H] — точка тривимірного простору в однорідних координатах.

Перетворення координат запишеться співвідношенням:

$$[X, Y, Z, H] = [x, y, z, 1]\, T$$

$$[x^*, y^*, z^*, 1] = [\frac{X}{H}, \frac{Y}{H}, \frac{Z}{H}, 1]$$

T — деяка матриця перетворення.

Матриця перетворення

$$\begin{bmatrix} a & b & c & p \\ d & e & f & q \\ h & i & j & r \\ l & m & n & s \end{bmatrix}$$

Стовпець **4** відповідає за **однорідну координату.**

Білінійні перетворення здійснюються елементами: a,b,c,d,e,f,h,i,j. Змінна масштабу, зсув, обертання.

Переміщення на довільний вектор здійснюється елементами l,m,n.

Проекційне (перспективне) перетворення здійснюється елементами p,q,r.

Гомотетія здійснюється елементом s. Повна зміна масштабу.

Нерівномірне масштабування

Всі діагональні елементи, крім останнього, записуються певними коефіцієнтами.

$$\begin{bmatrix} x & y & z & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & j & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax & ey & jz & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^* & y^* & z^* & 1 \end{bmatrix}$$

Повна зміна масштабу

Всі діагональні елементи одиниці, крім останнього, який і визначає коефіцієнт масштабування.

$$\begin{bmatrix} x & y & z & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X & Y & Z & s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{x}{s} & \frac{y}{s} & \frac{z}{s} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^* & y^* & z^* & 1 \end{bmatrix}$$

Тривимірний зсув

Зсув по координаті в залежності від інших координат.

$$\begin{bmatrix} x & y & z & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & b & c & 0 \\ d & 1 & f & 0 \\ h & i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+dy+hz & bx+y+iz & cx+fy+z & 1 \end{bmatrix}$$

Просторовий перенос

Зсув на довільний вектор.

$$\begin{bmatrix} X & Y & Z & H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & z & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ l & m & n & 1 \end{bmatrix} \quad => \begin{cases} x^* = \dfrac{X}{H} = x + l \\ y^* = \dfrac{Y}{H} = y + m \\ z^* = \dfrac{Z}{H} = z + n \end{cases}$$

Тривимірне віддзеркалення

Віддзеркалення відносно площини, визначеної двома осями виконується за рахунок зміни знаку координати третьої осі.

Віддзеркалення відносно площини XY:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Віддзеркалення відносно площини XZ:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Віддзеркалення відносно площини YZ:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Обертання відносно осі міняється не осьова літера: OZ -> y=-y, x=-x.

Тривимірне обертання

Ефект обертання виникає для блоку [a,b,c,d,e,f,h,i,j] в тому випадку, коли **визначник матриці перетворення рівний +1**.

Обертання навколо осі ОХ

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Обертання навколо осі ОУ

$$\begin{bmatrix} \cos\varphi & 0 & -\sin\varphi & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin\varphi & 0 & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Обертання навколо осі OZ

$$\begin{bmatrix} \cos\gamma & \sin\gamma & 0 & 0 \\ -\sin\gamma & \cos\gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Афінна та перспективна геометрія

Основна різниця між афінною (евклідовою) та перспективною геометрією полягає в понятті **паралельності** та **співвідношення між паралельними прямими**.

Афінне перетворення

Афінне перетворення (що зберігає паралельність) — комбінація лінійних перетворень та операцій переносу зображення.

Для цих перетворень **останній стовбець** в узагальненій матриці перетворень 4x4 має бути одиничний вигляду [0, 0, 0, 1].

Афінні перетворення формують підсистему білінійних перетворень координат, оскільки **будь-який** добуток афінних перетворень є афінним.

Перспективне зображення

Для цих перетворень останній стовбець в узагальненій матриці перетворень не є одиничним. [p, q, r, s].

Складніше, ніж афінне(евклідове), тому використовують **рідше**.

Якщо для машинного представлення використовують **однорідні координати**, то однаково легко можуть бути отримані як і афінні перетворення, так і перспективні.

Асоціюються з побудовою проекції на площину з якоїсь точки.

Комбінація перспективного та проекційного перетворення створює **перспективну проекцію** — перетворення зображення з тривимірного простору в двовимірний.

Аксонометричні проекції

Аксонометрична проекція — перспективна проекція, коли центр проектування знаходиться в безмежності.

Точка безмежності — три координати однорідних координат, але остання координата 0.

Використовуються для проектування з тримірного простору в двовимірний.

Точка, вектор якої [-1, 1, 0] лежить на прямій X+Y = const

Точка, ветор якої [a, b, 0] лежить на прямій aX – bY = 0

Для отримання результуючою матриці перетворень використовується матриця 4x4, яка необхідна для проведення афінного перетворення систем точок, і матриця проектування на деяку площину з центру проектування в безмежності.

Ортогональна проекція

Один стовпець заміняємо на 0.

Матриця перетворення здійснює лише обертання, причому, координати осі залишаються ортогональними під час проектування.

Забирає багато інформації, якої ми не бачимо, тому використовують не часто.

$$[X \quad Y \quad Z \quad H] = [x \quad y \quad z \quad 1]\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n & 1 \end{bmatrix} = [x \quad y \quad n \quad 1]$$

Z = [0].

Діметрична проекція

Дві з трьох осей під час проектування однаково перетворені

Для отримання матиці такої проекції, потрібно перемножити матриці обертання відносно осі OX на кут «фі» та OY на кут «тетта».

$$[X \quad Y \quad Z \quad H] = [x \quad y \quad z \quad 1]\begin{bmatrix} \cos\varphi & 0 & -\sin\varphi & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin\varphi & 0 & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[X \quad Y \quad Z \quad H] = [x \quad y \quad z \quad 1]\begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi\sin\theta & -\sin\varphi\cos\theta & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ \sin\varphi & -\cos\varphi\sin\theta & \cos\varphi\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Орта — одиничний вектор.

Для осі X орта = [1, 0, 0, 1], а для осі Y = [0, 1, 0, 1]. При перемноженні цих орт на матрицю отримуємо:

$$\begin{bmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi\sin\theta & -\sin\varphi\cos\theta & 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & \cos\theta & \sin\theta & 1\end{bmatrix}$$

$$\sqrt{\cos^2\varphi + (\sin\varphi\sin\theta)^2} = \sqrt{\cos^2\theta}$$

Для отримання звідси діметричної проекції, потрібно прирівняти довжини проекцій на вісь Z:

$$\sqrt{\cos^2\varphi + (\sin\varphi\sin\theta)^2} = \sqrt{\cos^2\theta}$$

$$\begin{bmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi\sin\theta & \cancel{-\sin\varphi\cos\theta} & 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & \cos\theta & \cancel{\sin\theta} & 1\end{bmatrix}$$

2   2   z = 0

$$\sqrt{\cos^2\varphi + (\sin\varphi\sin\theta)^2} = \sqrt{\cos^2\theta}$$

Вирішивши це рівняння, отримаємо таке співвідношення:

$$\sin^2\varphi = \frac{\sin^2\theta}{1-\sin^2\theta} = tg^2\theta$$

Коли кути задовольнятимуть це співвідношення, тоді матриця буде виконувати діметричну проекцію.

Ізометрична проекція

Всі три осі однаково перетворені.

Для отримання матриці такої проекції, потрібно вибрати кути: 35*26'' та 45*.

Перспективне перетворення

Здійснюється елементами p, q, r.

Перспективна проекція отримується шляхом перспективного перетворення та проектування на деяку двовимірну площину спостереження.

$$\begin{bmatrix} X & Y & Z & H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & z & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & 0 & rz+1 \end{bmatrix}$$

$$x^* = \frac{X}{H} = \frac{x}{rz+1} \quad y^* = \frac{Y}{H} = \frac{y}{rz+1} \quad z^* = 0$$

Значення r

Цей елемент визначає на скільки спостерігач віддалений по осі z на -1/r.

Місце спостерігача, з якого ми проектуємо, яке знаходиться у від'ємному напрямку по осі OZ з довжиною 1/r.

Паралельні прямі

Усі паралельні прямі до осі Z будуть перетинатись з цією віссю у точці P*(0, 0, 1/r) — точка **збігу зображення**.

Паралельність прямих порушується.

Кількість **точок збігу** визначається кількістю ненульових елементів в матриці перетворень серед елементів p, q, r.

1 точка збігу — **одноточкова** перспективна проекція (**паралельна** перспектива).

2 точки збігу — **двоточкова** перспективна проекція (**кутова**).

3 точки збігу — **триточкова** перспективна проекція (**коса**).

Безкінечна півлощина переходить в полосу, яка обмежена (0, 0, 0) та (0, 0, 1/r, r) зверху і знизу.

Поновлення тривимірної інформації

Потреба виникає при роботі з кресленнями, де постановка задачі полягає у поновлені тривимірної інформації по **двох** або **більше ортогональних аксонометричних** проекціях.

$$\left(T_{11}-T_{14}x^{*}\right)x+\left(T_{21}-T_{24}x^{*}\right)y+\left(T_{31}-T_{34}x^{*}\right)z+\left(T_{41}-T_{44}x^{*}\right)=0$$
$$\left(T_{12}-T_{14}y^{*}\right)x+\left(T_{22}-T_{24}y^{*}\right)y+\left(T_{32}-T_{34}y^{*}\right)z+\left(T_{42}-T_{44}y^{*}\right)=0$$

T — елемент відповідного рядка чи стовпчика у матриці.
X, Y, Z — початкові координати точки.
x*, y* — координати перетворення.
Цю систему можна розглядати в таких контекстах:

Знаходження координат перетворення

Коли T — відомі, а також відомі початкові координати.
Тоді необхідно знайти **координати перетворення**.
В такому випадку цю систему достатньо розв'язати, як систему розміром 2x2.

Знаходження початкових координат

Коли T — відомі, а також відомі координати перетворення.
Тоді необхідно знайти початкові координати, що і є **проблемою поновлення тривимірних координат**.

В такому випадку система є системою з **двох** рівнянь з **трьома** невідомими.

Коли у наявності є дві проекції, то ця система може бути записана наступним чином:

$$\left(T_{11}^{(i)}-T_{14}^{(i)}x^{*(i)}\right)x+\left(T_{21}^{(i)}-T_{24}^{(i)}x^{*(i)}\right)y+\left(T_{31}^{(i)}-T_{34}^{(i)}x^{*(i)}\right)z+\left(T_{41}^{(i)}-T_{44}^{(i)}x^{*(i)}\right)=0$$
$$\left(T_{12}^{(i)}-T_{14}^{(i)}y^{*(i)}\right)x+\left(T_{22}^{(i)}-T_{24}^{(i)}y^{*(i)}\right)y+\left(T_{32}^{(i)}-T_{34}^{(i)}y^{*(i)}\right)z+\left(T_{42}^{(i)}-T_{44}^{(i)}y^{*(i)}\right)=0$$

I — значення точки на 2-ох проекціях.
Що стає системою **чотирьох** рівнянь з **трьома** невідомими.

Мінімально що потрібно мати, щоб поновити тривимірні координати — це **дві** проекції.

Або у матричній формі:

$AX = B$, де A — матриця 4x3, B — матриця 4x1.

Знаходження елементів матриці перетворень

Коли початкові координати та координати перетворення відомі.

$$T_{11}x + T_{21}y + T_{31}z + T_{41} - T_{14}xx^* - T_{24}yx^* - T_{34}zx^* - T_{44}x^* = 0$$
$$T_{12}x + T_{22}y + T_{32}z + T_{42} - T_{14}xy^* - T_{24}yy^* - T_{34}zy^* - T_{44}y^* = 0$$

Це система рівнянь з **пятьма** відомими та **12-тьма** невідомими. Тому для створення повної системи потрібно знати 6 різних точок на тілі та координати їх образів.

$A'T = 0$ однорідна, тому вона має безліч розв'язків.

Для отримання **однозначного розв'язку** достатньо задати одну **компоненту цієї матриці 1** (зазвичай s=1 T44). Тоді ця система зведеться до системи звичайних алгебраїчних рівнянь.

Плоскі криві

Графік функції зображується **математичним описом**, а не набором близько розташованих точок, оскільки:

1. Математичний опис точний, та він дозволяє отримувати характеристики кривої.
2. Зберігання в машині у компактному вигляді.
3. Крива, що математично описана, легко відображається на екрану.
4. При аналітичному визначені кривої відпадає необхідність в інтерполяційних схемах.
5. При аналітичному запису кривої, легше створити криву, що відрізняються від попередньої на деякі геометричні параметри.

Існує два способи представлення кривих — **параметричній** формі та **непараметричній** формі.

Непараметричне задання кривої

Явний вигляд

У явному вигляді крива задаватиметься:

$$y = f(x)$$

Що передбачає лише **однозначні** функції — для кожного значення x існує лише одне значення y.

Неявний вигляд

У неявному вигляді крива задаватиметься:

$$f(x, y) = 0$$

Що передбачає розширення на **многозначні** та **замкнуті** криві. Розв'язок такого представлення вимагає громіздких обчислень.

Обидва способи залежать від **виду** описуючих їх координат. Тобто простота опису кривих і обчислення їх характеристик залежать від **вибору системи координат**.

Параметричне задання кривої

Не залежить від системи координат.

Кожна координата точки на кривій — функція від одного чи більше параметрів.

Для плоских кривих запис буде:

$x = f(t); y = g(t)$ — **явно задане**.

$F(t, x) = 0; G(t, y) = 0$ — **неявно задане**.

Де, t — параметр

P(t) = [f(t) g(t)] — вектор положення точки.
P'(t) = [f'(t) g'(t)] — дотична в деякій точці до кривої.

Довжина кривої визначається **діапазоном** зміни параметра t.

Швидкість виконання параметричного більша, ніж непараметричного, особливо, коли не використовуються sqrt(), sin(), cos(), tg() і т.д.

Способи зображення канонічних кривих

Зображення кола

$$\begin{cases} x = r\cos Q \\ y = r\sin Q \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_n = r\cos Q_n \\ y_n = r\sin Q_n \end{cases}$$ — громіздка, вимагає обчислень.

Коли центр кола розташовано в точці (h, k), то координати будь-якої точки кола записують співвідношенням:

$$x_{n+1} = h + (x_n - h)\cos dQ - (y_n - k)\sin dQ$$
$$y_{n+1} = k + (x_n - h)\sin dQ + (y_n - k)\cos dQ$$

Параметричне зображення еліпса

$$\begin{cases} x = a\cos Q \\ y = b\sin Q \end{cases}$$

Рекурентна формула:

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n \cos dQ - \dfrac{a}{b} y_n \sin dQ \\ y_{n+1} = \dfrac{b}{a} x_n \sin dQ + y_n \cos dQ \end{cases}$$

Параметричне зображення параболи

Непараметричне має вигляд $y^2 = 4ax$

Це вимагає обчислення квадратного кореню, тому є **незручним**. Це саме стосується **параметричного** представлення параболи через рівняння:

$$\begin{cases} x = tg^2 Q \\ y = \pm 2\sqrt{a} \cdot tgQ \qquad 0 \le Q \le \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

І більш ефективним є запис:

$$\begin{cases} x = a \cdot Q^2 \\ y = 2a \cdot Q \qquad 0 \le Q \le \infty \end{cases}$$

$$Q_{n+1} = Q_n + dQ$$

dQ — приріст.

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + y_n * d\theta + d\theta^2 \\ y_{n+1} = y_n + 2a * d\theta \end{cases}$$

Параметричне представлення гіперболи

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

перетворимо у

$$\begin{cases} x = a \cdot chQ \\ y = b \cdot shQ \end{cases} \qquad chQ = \frac{e^Q + e^{-Q}}{2}$$

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n \cdot chdQ + \dfrac{a}{b} y_n \cdot shdQ \\ y_{n+1} = \dfrac{b}{a} x_n \cdot shdQ + y_n \cdot chdQ \end{cases}$$

Просторові криві

Непараметричні просторові криві

Явні рівняння просторових кривих

$$\begin{cases} \acute{o} = f(x) \\ z = g(x) \end{cases} \quad \text{чи} \quad \begin{cases} x = f^{(1)}(z) \\ y = g^{(1)}(z) \end{cases} \quad \text{чи} \quad \begin{cases} x = f^{(2)}(y) \\ z = g^{(2)}(y) \end{cases}$$

Неявні рівняння просторових кривих

$$\begin{cases} f(x, y, z) = 0 \\ g(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

Цей метод опису кривої має силу, коли виконується умови однозначності по x, y чи z.

Такі умови по відношенню до z мають вигляд:

$$\det\begin{vmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} & \dfrac{\partial f}{\partial y} \\ \dfrac{\partial g}{\partial x} & \dfrac{\partial g}{\partial y} \end{vmatrix} \neq 0$$

Якщо аналітичне представлення кривої невідоме, можна використати **інтерполяційну схему**, щоб провести криву через задані просторові точки.

Методи інтерполяції кривих

Кубічні сплайни

Кубічний сплайн — кусковий поліном степені k з неперервними в місцях з'єднання похідними порядку k-1.

Отже, кубічний сплайн **повинен зберігати неперервність** похідних 1-го та 2-го порядків.

Рівняння параметричного кубічного сплайну, що з'єднує дві точки має вигляд

$$P(t) = \sum_{i=0}^{4} B_j t^{i-1}$$

Де P(t) = [x(t), y(t), z(t)] — **вектор положення** довільної т. на сплайні.

Коефіцієнти B — вектори розмірності 1x3 та визначаються з допомогою 4 граничних умов для сплайну сегмента.

$$P(0) = B_1 = P_1$$

$$\left.\frac{dP}{dt}\right|_{t=0} = B_2 = P_1'$$

$$B_3 = \frac{3(P_2 - P_1)}{t_2^2} - \frac{2P_1'}{t_2^2} - \frac{P_2'}{t_2^2}$$
$$B_4 = \frac{2(P_1 - P_2)}{t_2^3} + \frac{P_1'}{t_2^2} + \frac{P_2'}{t_2^2}$$

$$P(t) = P_1 + P_1' \cdot t + \left[\frac{3(P_2 - P_1)}{t_2^2} - \frac{2P_1'}{t_2^2} - \frac{P_2'}{t_2^2}\right] \cdot t^2 + \left[\frac{2(P_1 - P_2)}{t_2^3} + \frac{P_1'}{t_2^2} + \frac{P_2'}{t_2^2}\right] \cdot t^3$$

Для задання **плавності переходу** між двома сегментами потрібно прирівняти значення других похідних сегментів.

Побудова кубічного сплайну

1. Знайти поліноми на кожному сегменті.
2. З'єднати сегменти

$$\begin{bmatrix} t_3 \cdot 2(t_2 + t_3) & t_2 & 0 & & \cdots \\ 0 & t_4 & 2(t_3 + t_4) & t_3 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1' \\ P_2' \\ \vdots \\ \vdots \\ P_n' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{t_2 t_3}[t_2^2(P_3 - P_2) + t_3^2(P_2 - P_1) \quad \cdots \\ \cdots\cdots\cdots \\ \frac{3}{t_{n-1} t_n}[t_{n-1}^2(P_n - P_{n-1}) + t_n^2(P_{n-1} - P_{n-2}) \end{bmatrix}$$

3. Розв'язати цю матрицю **(n-2)xn**
4. Записати коефіцієнти для кожного сплайну.
5. Побудувати інтерполяційні кубічні сплайни.

Задання граничних умов

Пункт 2 можна подати у матричному вигляді:
M*P=B,

M — прямокутна матриця (n-2)x(n),
P — стовпець nx1
B — стовпець (n-2)x1

Для знаходження вектору невідомих P, необхідно отримати квадратну матрицю, за допомогою додавання **граничних умов**, які характеризують весь сплайн.

Закріплена гранична умова

Формування фіксованого сплайну.

На початку та в кінці сплайну також задаються похідні.

В такому випадку прямокутна матриця M стане квадратною:

$$M' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \ldots\ldots & 0 \\ & M & \\ 0 & 0 \ldots\ldots & 1 \end{pmatrix} \quad B' = \begin{pmatrix} P_1 \\ B \\ P_n \end{pmatrix}$$

M’ — тридіагональна матриця, розв’язок якої можна отримати у вигляді рекурентних **співвідношень**.

Слабкі граничні умови

Друга похідна в граничних точок рівна 0.

$$\frac{d^2P}{dt^2} = 0$$

Задає, що у першій та останній точці є **згин**.

$$M' = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}5 & \ldots\ldots & 0 & 4 \\ & & M & & \\ 0 & 0 & \ldots\ldots & 2 & 4 \end{pmatrix}; \quad B' = \begin{pmatrix} \dfrac{\frac{3}{2}(P_2 - P_1}{t_2} \\ B \\ \dfrac{6}{t_n}(P_n - P_{n-1}) \end{pmatrix}$$

Матриця стає квадратною тридіагональною матрицею.

Циклічні кінцеві умови

Задаються для опису замкнутою чи періодичної кривої. Вони характеризуються співвідношенням:

$$P_1'(0) = P_n'(t_n)$$
$$P_1''(0) = P_n''(t_n)$$

Перші похідні — кривизна рівна.
Другі похідні — зберігається опуклість.
Звідки кривизна та нахил на початку і в кінці кривої рівні.

$$M' = \begin{bmatrix} 2\left(1 + \dfrac{t_n}{t_2}\right) & \dfrac{t_n}{t_2} & 0 & \ldots\ldots & 1 \\ & M & & & \end{bmatrix}; \quad B' = \begin{bmatrix} 3(P_2 - P_1)\dfrac{t_n}{t_2^2} - \\ -3(P_{n-1} - P_n)\dfrac{1}{t_n} \\ B \\ \\ \end{bmatrix}$$

профільна матриця (n-1)x(n-1)

Ациклічні кінцеві умови

Похідні на початку і в кінці задаються із протилежним знаком

$$P_1'(0) = -P_n'(t_n)$$
$$P_1''(0) = -P_n''(t_n)$$

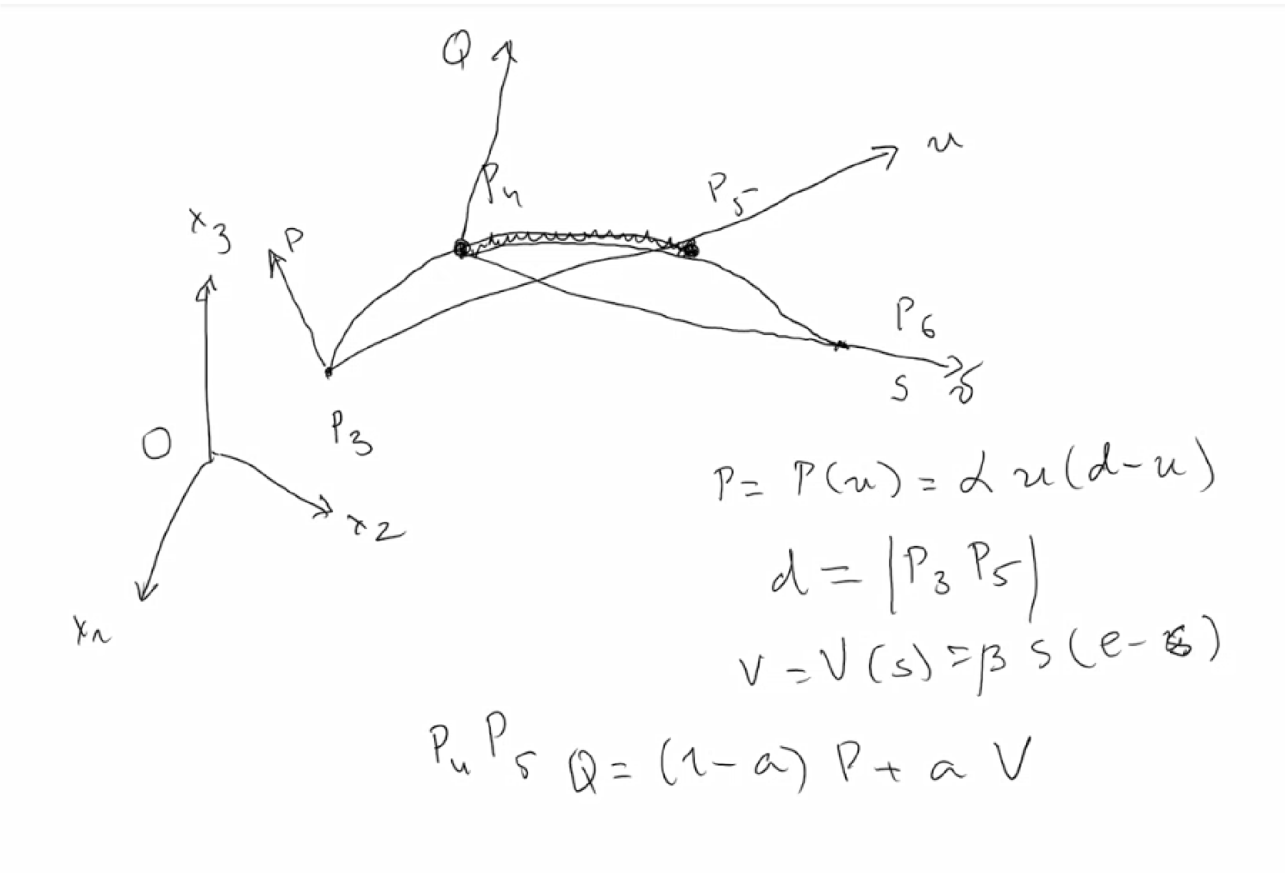
$$2\left(1+\frac{t_n}{t_2}\right)P_1' + P_2'\frac{t_n}{t_2} - P_{n-1}' = 3(P_2 - P_1)\frac{t_n}{t_2^2} + 3(P_{n-1} - P_n)\frac{1}{t_n}$$

Додаємо відповідні рядки до матриці, та отримуємо матрицю розмірності (n-1)x(n-1).

Параболічна інтерполяція

Передбачає наявність 4-ох послідовних точок.

Ідея: побудова параболи відбувається шляхом об’єднання двох парабол, одна з яких міститиме 3 перші точки, а друга — три останні. 1 – [1, 2, 3], 2 – [2, 3, 4]



a — суміжна відстань. P4P5

Наступне завдання: знайти залежність між u|s та t — уніфікувати параметри.

Алгоритм побудови:

1. Обчислити значення ξ, η

$$\xi = \frac{(P_4 - P_3)(P_5 - P_3)}{(P_5 - P_3)^2} = \frac{(P_4 - P_3)(P_5 - P_3)}{q^2}$$

2. Обчислити r, s

$$r = \xi d + t \cdot (P_5 - P_4)\frac{(P_5 - P_3)}{t_0 d}$$

$$s = t \cdot \cos Q = \frac{t(P_5 - P_4)(P_6 - P_4)}{t_0 \cdot e}$$

3. Обчислити точки на параболах P(r), Q(s)

e – відстань між P_4 та P_6,

$$Q(s) = P_4 - \frac{s}{e}(P_6 - P_4) + \beta \cdot s(e - s)[(P_5 - P_4) - \eta(P_6 - P_4)]$$

$$P(r) = P_3 + \frac{r}{d}(P_5 - P_3) + \alpha \cdot r(d - r)[(P_4 - P_3) - \xi(P_5 - P_3)]$$

4. Усереднити значення P(r(t)), Q((s(t))

$$C(t) = [1 - (\frac{t}{t_0})] \cdot P(r) + \frac{t}{t_0} Q(s)$$

де t_0– відстань між точками P_4, P_5.

У випадку **n** точок даний алгоритм використовується для побудови **(n-3)** кубічних поліномів.

Отримана інтерполяція є **неперервною**.

Точки з'єднання — **кубічний** сплайн.
Інші точки — **гіперболічний** сплайн.

Криві Без'є

Крива Без'є — крива, яка малюється на основі сегменту кубічного сплайну, де початкова та кінцева точки цього сегменту належать кривій, а дві інші — визначають поведінку кривої.

Рівняння кривої Без'є:

r = r(U) = $a_0 + Ua_1 + U^2a_3 + U^3a_4$ — вектори.

Початкова точка — U = 0
Кінцева точка — U = 1

$$\begin{cases} a_0 = r(0) \\ a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = r(1) \\ a_1 = r'(0) \\ a_1 + 2a_2 + 3a_3 = r'(1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} G_0 = r(0) \\ G_1 = r'(0) \\ G_2 = 3[r(1) - r(0)] - 2r'(0) - r'(1) \\ G_3 = 2[r(0) - r(1)] + r'(0) + r'(1) \end{cases}$$

$G \to a$

Рівняння Фергюсона.

$$r = r(U) = r(0)(1 - 3U^2 + 2U^3) + r(1)(3U^2 - 2U^3) + r'(0)(U - 2U^2 + U^3) + r'(1)(-U + U^5)$$

Рівняння Без'є

$$r = r(U) = (1-U)^3 r_0 + 3U(1-U)^2 r_1 + 3U^2(1-U) r_2 + U^3 r_3$$

$$\begin{aligned} a_0 &= r_0 \\ a_1 &= 3(r_1 - r_0) \\ a_2 &= 3(r_2 - 2r_1 + r_0) \\ a_3 &= r_3 - 3r_2 + 3r_1 - r_0 \end{aligned}$$

Краєві умови, зміст поліному Без'є:

$$\begin{aligned} r(0) &= r_0 \\ r(1) &= r_3 \\ r'(0) &= 3(r_1 - r_0) \\ r'(1) &= 3(r_3 - r_2) \end{aligned}$$

Це означає, що крива проходить через першу та останню точки. Інші визначають напрям кривої.

Загальний вигляд кривої

$$r = r(U) = \sum_{i=0}^{n} \frac{n!}{(n-i)!i!} U^i (1-U)^{n-i} r_i$$

$$r(0) = r_0$$
$$r'(0) = n(r_1 - r_0)$$
$$r(1) = r_n$$
$$r'(1) = n(r_n - r_{n-1})$$

Похідні в перших і останніх точках сегмента:

$$r^{(k)}(0) = \frac{n!}{(n-k)!} \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} C_k^i P_i$$
$$r^{k}(1) = \frac{n!}{(n-k)!} \sum_{i=0}^{k} (-1)^{i} C_k^i P_{n-i}$$

Перші похідні характеризуються співвідношенням:

$$r'(0) = n(P_1 - P_0)$$
$$r'(1) = n(P_n - P_{n-1})$$

Другі похідні характеризуються співвідношенням:

$$\begin{cases} r''(0) = n(n-1)(P_0 - 2P_1 + P_2) \\ r''(1) = n(n-1)(P_n - 2P_{n-1} + P_{n-2}) \end{cases}$$

Якщо криві Без'є визначеного (n+1) точкою P, об'єднаються з (m+1) точками Q, то попередні граничні умови запишуться, як система:

$$Q_0 = P_n$$
$$P'(1) = Q'(0)$$
$$P''(1) = Q''(0)$$

Умова гладкого і плавного з'єднання сегментів кривої

$$\begin{cases} Q_0 = P_n \\ Q_1 - Q_0 = (\frac{n}{m})(P_n - P_{n-1}) \\ m(m-1)(Q_0 - 2Q_1 + Q_2) = n(n-1)(P_{n-2} - 2P_{n-1} + P_n) \end{cases}$$

Просторові поверхні

Одяг, що ми нанизуємо на множину точок.

Опис поверхні задається у **векторному параметричному** вигляді, оскільки:

1. Опис поверхні не залежить від осей.
2. Єдине задання для багатозначних поверхонь чи функцій.
3. Спрощує представлення просторових кривих в однорідних координатах.
4. Допускає використання тривимірних перетворень однорідних координат.

Поверхні є **кусково-неперервні** — складаються з окремих фрагментів, які складуться по границі.

Векторна функція:
Для плоскої кривої: P(t) = [x(t), y(t)].
Для просторової кривої: P(t) = [x(t), y(t), z(t)].

Тепер поверхня в просторі буде задаватись векторною функцією змінних: P(u, w) = [x(u, w), y(u, w), z(u, w)].
Два параметри говорять про **криволінійну** систему координат.

Криву на поверхні можна задати за допомогою

- фіксації одного із параметрів $P(u_i, w)$ чи $P(u, w_i)$
- вказуючи залежність між ними $f(u, w) = 0$.

Точку на поверхні можна задати за допомогою

- фіксацією двох параметрів $P(u_i, w_i)$
- як точку перетину двох кривих на поверхні $f(u, w) = 0 \quad g(u, w) = 0$

Білінійна поверхня

Оскільки функція, яка задає цю поверхню є лінійною відносно двох параметрів.

Поверхня, яка задана 4-ма точками в просторі з краєвою умовою, що на кожному куті поверхня закріплена.

Параметр u, w змінюється від 0 до 1.

Нехай задані точки визначаються: P(0, 0), P(0, 1), P(1, 0), P(1, 1).
Тоді функція поверхні виглядатиме так:

$$Q(u, w) = P(0,0)(1-u)(1-w) + P(0,1)(1-u)w + P(1,0)u(1-w) + P(1,1)uw$$

Або у матричній формі: $Q(u, w) = [(1-u) \quad u]\begin{bmatrix} P(0,0) & P(0,1) \\ P(1,0) & P(1,1) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1-w \\ w \end{bmatrix}$

В загальному випадку поверхня є **квадратичною** та обмеженою **прямолінійними** границями.

Для переходу в параметричну систему координат (u, w) чи з неї у систему координат (x, y, z), потрібно ввести залежність, наприклад

$$x=u(1-w)$$
$$y=w,\ z=u$$

Лінійчаті поверхні

Фіксування двох кривих на двох бічних границях.

Позначимо криві P(u, 0) та P(u, 1), які є протилежними. Тоді поверхня отримується за допомогою **лінійних інтерполяцій** між тими кривими.

Схема інтерполяції визначається відношенням:

$$Q(u, w) = P(u, 0)(1 - w) + P(u, 1)w$$

Що задовольняє граничні умови:

$$Q(u, 0)=P(u, 0), \quad Q(u, 1)=P(u, 1).$$

Якщо ми виберемо інші протилежні криві, то інтерполяційна формула виглядатиме так:

$$Q(u, w) = P(0, w)*(1 - u) + P(1, w)u\ ,$$

Лінійні поверхні Кунса

Лінійчаті поверхні, коли відомі усі 4 обмежуючі криві.
Ці криві задаватимуться: P(u, 0), P(u, 1), P(0, w), P(1, w).

Тоді співвідношення лінійчатих кривих можна об'єднати і отримати:

$$Q(u, w) = P(u, 0)(1 - w) + P(u, 1)w + P(0, w)(1 - u) + P(1, w)u$$

Краєві умови не виконуються, оскільки кожна кутова точка **враховується двічі**.

Для виконання цих умов виділимо ці кутові точки, отримуючи вираз:

$$Q(u, w) = P(u, 0)(1 - w) + P(u, 1)w + P(0, w)(1 - u) + P(1, w)u$$
$$- P(0, 0)(1 - u)(1 - w) - P(0, 1)(1 - u)w - P(1, 0)u(1 - w) - P(1, 1)uw$$

Це є сегментом лінійної поверхні Кунса.

В матричній формі:

$$Q(u,w)=\begin{bmatrix}(1-u) & u\end{bmatrix}\begin{bmatrix}P(0,w)\\ P(1,w)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}P(u,0) & P(u,1)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1-w\\ w\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1-u & u\end{bmatrix}*$$
$$*\begin{bmatrix}P(0,0) & P(0,1)\\ P(1,0) & P(1,1)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1-w\\ w\end{bmatrix}$$

Компактна форма:

$$Q(u,w)=\begin{bmatrix}1-u & u & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-P(0,0) & -P(0,1) & P(0,w)\\ -P(1,0) & -P(1,1) & P(1,w)\\ P(u,0) & P(u,1) & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1-w\\ w\\ 1\end{bmatrix}$$

Фрагмент бікубічної поверхні

Виходить із поверхні Кунса, але граничні криві задаватимуться у вигляді **кубічного сплайну**.

Многочлен третього порядку має вигляд:

$P(t)=B_1+B_2t+B_3t^2+B_4t^3$, де P(t) — функція від x, y, z.

Для визначення невідомих використовується система рівнянь

$$\begin{cases}P(0)=B_1\\ P(1)=B_1+B_2+B_3+B_4\\ P'(0)=B_2\\ P'(1)=B_2+2B_3+3B_4\end{cases}$$

Або у матричній формі $P=MB$

$P^T=[P(0)\quad P(1)\quad P'(0)\quad P'(1)]$, $B^T=(B_4\quad B_3\quad B_2\quad B_1)$,

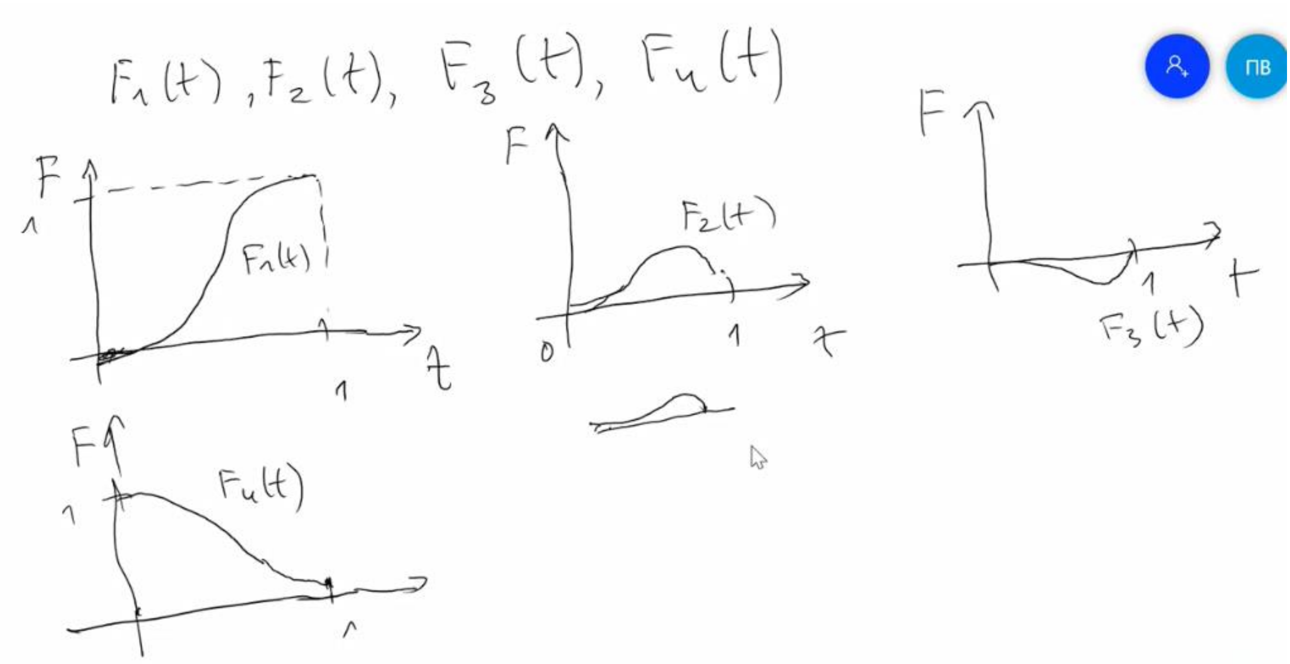
$$B=M^{-1}P$$

$$M=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 3 & 2 & 1 & 0\end{bmatrix}.\quad M^{-1}=\begin{bmatrix}2 & -2 & 1 & 1\\ -3 & 3 & -2 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

$$P(u)=F_1(u)P(0)+F_2(u)P(1)+F_3(u)P'(0)+F_4(u)P'(1)$$

$$
\begin{bmatrix} F_1(t) & F_2(t) & F_3(t) & F_4(t) \end{bmatrix} =
$$
$$
= \begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}
$$

Це функції однієї змінної, який має певний фізичний зміст і характеризуються наближеними графіками.



Щоб побудувати поверню, потрібно побудувати протилежні граничні криві попарно, їх додамо та віднімемо ті точки, які повторюються 2 рази.

Поверхня, що задовільняє граничним умовам на краях **u=const**:

$$
Q(u, w) = P(0, w)\left(1 - 3u^2 + 2u^3\right) + P(1, w)\left(3u^2 - 2u^3\right) -
$$
$$
- P^{1,0}(0, w)\left(u - 2u^2 + u^3\right) + P^{1,0}(1, w)\left(-u^2 + u^3\right)
$$

Поверхня, що задовільняє граничним умовам на краях **w=const**:

$$
Q(u, w) = P(u, 0)\left(1 - 3w^2 + 2w^3\right) + P(w, 1)\left(3w^2 - 2w^3\right) +
$$
$$
+ P^{0,1}(u, 0)\left(w - 2w^2 + w^3\right) + P^{0,1}(u, 1)\left(-w^2 + w^3\right)
$$

Рівняння бікубічної поверхні.

$$Q(u,w)=\begin{bmatrix}F_1(u) & F_2(u) & F_3(u) & F_4(u)\end{bmatrix}*$$
$$*\begin{bmatrix} P(0,0) & P(0,1) & P^{0,1}(0,0) & P^{0,1}(0,1) \\ P(1,0) & P(1,1) & P^{0,1}(1,0) & P^{0,1}(1,1) \\ P^{1,0}(0,0) & P^{1,0}(0,1) & P^{1,1}(0,0) & P^{1,1}(0,1) \\ P^{1,0}(1,0) & P^{1,0}(1,1) & P^{1,1}(1,0) & P^{1,1}(1,1) \end{bmatrix}\begin{bmatrix}F_1(w)\\F_2(w)\\F_3(w)\\F_4(w)\end{bmatrix}$$

Компактний вигляд рівняння для бікубічної поверхні:

$$Q=\begin{bmatrix}u^3 & u^2 & u & 1\end{bmatrix} NPN^T \begin{bmatrix}w^3 & w^2 & w & 1\end{bmatrix}$$

N - квадратна матриця M^{-1}, P - квадратна матриця

$$P=\begin{bmatrix} \textit{кутові координати} & w\textit{ - дотичні вектори} \\ u\textit{ - дотичні вектори} & \textit{вектори кривизни} \end{bmatrix}.$$

Поверхня Без'є

Попередні методи передбачали наявність інформації про поверхню:

1. вектори положень
2. дотичні вектори
3. вектори кривизни
4. вагові функції

Підготовка цієї інформації може бути трудомісткою роботою.

Для опису поверхні Без'є використовується вигляд рівняння бікубічної поверхні у вигляді:

$$P(u,w)=\begin{bmatrix}(1-u)^3 & 3u(1-u)^2 & 3u^2(1-u) & u^3\end{bmatrix} * B \begin{bmatrix}(1-w)^3 \\ 3(1-w)^2 w \\ 3(1-w)w^2 \\ w^3\end{bmatrix}$$
, де 1

$$B=\begin{bmatrix} B_{1,1} & B_{1,2} & B_{1,3} & B_{1,4} \\ B_{2,1} & B_{2,2} & B_{2,3} & B_{2,4} \\ B_{3,1} & B_{3,2} & B_{3,3} & B_{3,4} \\ B_{4,1} & B_{4,2} & B_{4,3} & B_{4,4} \end{bmatrix}$$

Для задання поверхні Без'є, потрібно задати 16 точок, які і відображатимуться у матриці B.