INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS

MARIA LUIZA CARVALHO PEREIRA
WOLLNER NASCIMENTO DA SILVA

TRABALHO DE INTRODUÇÃO A COMPUTAÇÃO EM FÍSICA

Belo Horizonte, Minas Gerais.

2022.

1. INTRODUÇÃO

A dinâmica dos corpos celestiais foi, e ainda é, muito estudada na astronomia. No estudo da mecânica celestial, a modelagem da influência de três ou mais astros em um sistema ainda é um desafio, chamado de "*Problema de N-corpos*". Essas dinâmicas não possuem um modelo ideal analítico que representa o movimento de cada um dos corpos, e, portanto, o estudo do movimento e interações entre eles é pautado em métodos de integração numérica. Entretanto, Isaac Newton foi capaz de descrever e modelar com certa precisão as interações entre dois corpos, e a partir do modelo Newtoniano é possível estudar outros movimentos, embora de forma simplificada, considerando a dinâmica inicial entre dois corpos e a solução analítica de Newton(ROY, 1988).

Além de fornecer um bom modelo para a dinâmica de dois corpos, Newton também demonstrou que esses corpos sempre orbitam um mesmo plano, definidos por um vetor constante. Embora a solução analítica falhe em prever o movimento para três ou mais corpos, existe um caso particular do problema de três corpos cuja solução foi proposta por Lagrange sobre condições específicas: Considerando que as três massas orbitam um mesmo plano descrito por uma elipse, parábola ou hipérbole (órbitas de Kepler), com mesmo foco e mesma excentricidade, então o movimento dos corpos podem ser descritos analiticamente a partir do modelo de Newton (KLIONER, 2013); e sendo fixas as posições de duas das massas, então há cinco pontos possíveis para que a terceira massa possa ocupar de forma que o sistema continue em equilíbrio, ou seja, de forma que todas as derivadas da posição em função do tempo sejam zero. Esses pontos são chamados de "Pontos de Lagrange" ou "Soluções de Lagrange" e podem ser ilustrados pela figura 1 abaixo:

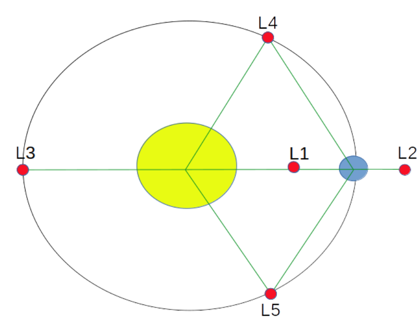

Figura 1: Soluções de Lagrange para o problema de três corpos. Os Pontos L1, L2 e L3 são colineares; os pontos L4 e L5 formam triângulos equiláteros e equidistantes entre si. Fonte da imagem: Autoria própria.

Com sua solução, Lagrange reforçou os resultados obtidos previamente por Euler para os pontos colineares, além de demonstrar que os pontos L4 e L5 sempre formam triângulos equiláteros. As soluções de Lagrange se mantêm mesmo quando o problema é alterado de modo que uma das massas possa ser negligenciável em relação às outras, ou ao considerar órbitas circulares. De fato, diversas alterações podem ser feitas ao modelo, desde que as condições para a solução de Lagrange sejam mantidas.

É importante ressaltar também que os pontos de Lagrange não são puramente teóricos, e sua descoberta e flexibilidade são de extrema importância para o aperfeiçoamento dos instrumentos de observação e estudo do sistema solar e do universo, atualmente.

2. OBJETIVOS

Considerando a importância dos pontos de Lagrange para a dinâmica celestial e resolução do problema de três corpos, os objetivos deste trabalho são:

A. Desenvolver um programa que tenha como *output* os pontos de Lagrange a partir do *input* das massas de 2 corpos celestes, utilizando a linguagem *Python;*
B. Plotar um gráfico da situação com as proporções corretas para os valores encontrados.

3. METODOLOGIA

Os cálculos serão realizados a partir da situação particular do problema de três corpos em que:

A. As duas massas maiores descrevem uma órbita circular em torno do centro de massa do sistema, e a terceira massa é negligenciável;
B. Os corpos ocupam o mesmo plano e o sistema se move em conjunto de modo que a distância relativa entre eles se mantenha constante;

Além disso, assume-se também que a origem do sistema é fixada no centro de massa, e utilizando coordenadas adimensionais é possível generalizar a situação.

Finalmente, defini-se então uma razão entre a massa menor(neste caso, m_2) e a massa total do sistema: $\mu = \frac{m_2}{m_1+m_2}$;

Essa relação aparece na solução de Lagrange, e, para os pontos colineares, seus valores adimensionais podem ser dados por, conforme proposto por Rubinsztejn(2018):

$$0 = x - \frac{(1-\mu)(x+\mu)}{(x+\mu)^3} - \frac{\mu(x-1+\mu)}{(x-1+\mu)^3}$$

A solução da equação de terceiro grau acima pode ser aproximada numericamente pelo o método de Newton-Raphson com o intuito de determinar o zero da função, ou seja, as soluções não triviais para as quais Y = 0. Portanto, para cada valor de μ na função $f(x, \mu)$, obtêm-se 3 diferentes raízes para x, um para cada ponto colinear de Lagrange.

Já os pontos L4 e L5 podem ser determinados pelos vetores abaixo, conforme demonstrado por Comish(1998):

$$v_{L4} = \left(\frac{R}{2}\left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right), \frac{\sqrt{3}}{2}R\right)$$

$$v_{L5} = \left(\frac{R}{2}\left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right), -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

.

A utilização das coordenadas adimensionais tem o intuito de obter soluções puramente numéricas para o problema em questão, que envolve grandezas físicas. Ao remover a dimensão dessas grandezas e substituí-las por constantes é possível simplificar o modelo e, consequentemente, realizar diversas manipulações numéricas com o sistema(ILLINOIS F. OF MATH, 2012).

E, finalmente, a partir dos valores obtidos utilizando os métodos numéricos, será possível plotar um gráfico descrevendo a posição de cada um dos cinco pontos, bem como a posição das massas. Em conclusão, O resumo da metodologia está descrito na figura 2 a seguir:

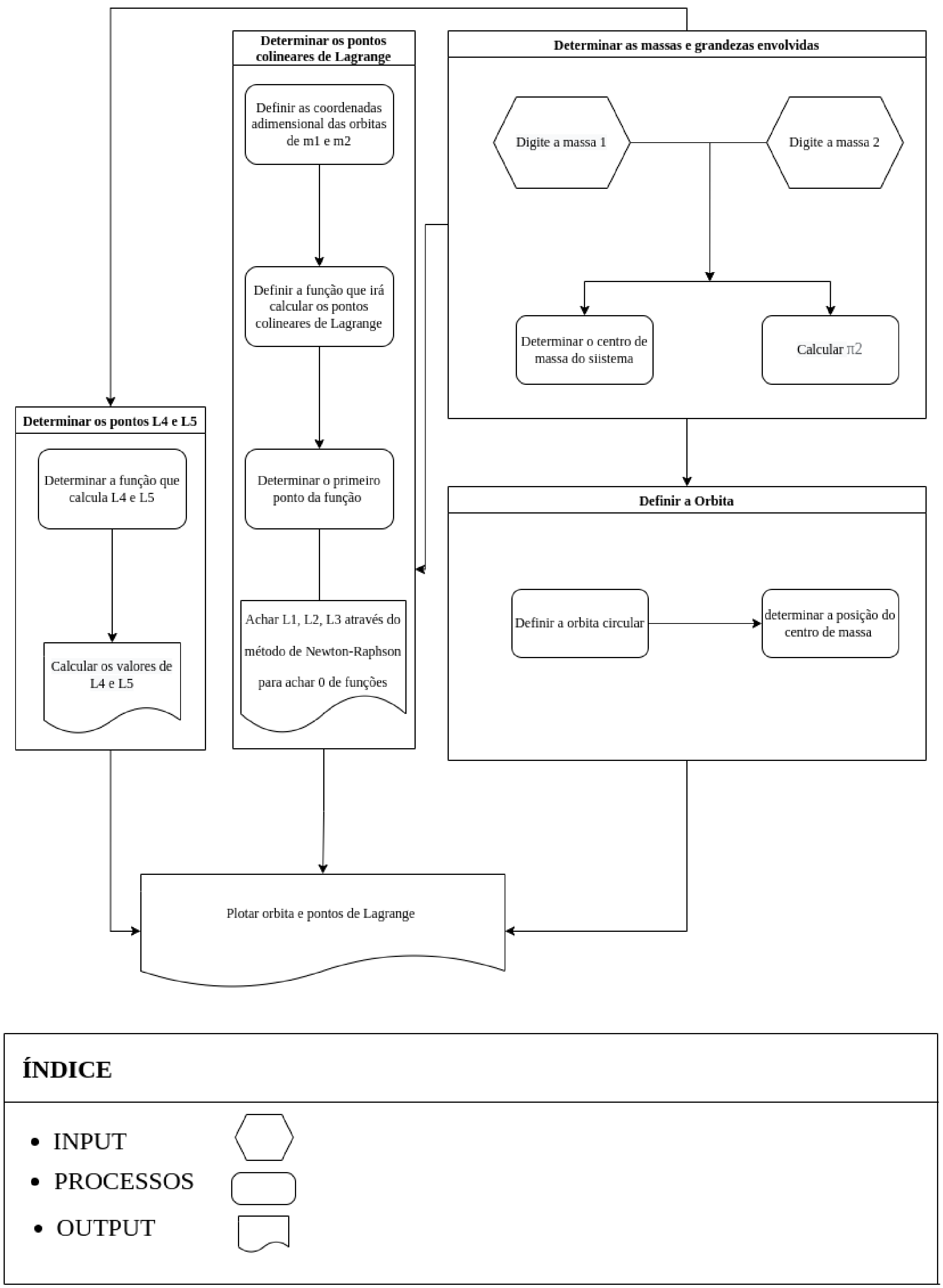

Figura 2: Fluxograma do processo utilizado para desenvolver o programa: Autoria própria.

4. REFERÊNCIAS

COMISH, Neil J. **The Lagrange Points**. 1998. Disponível em: <https://map.gsfc.nasa.gov/ContentMedia/lagrange.pdf >. Acesso em: 12 de out de 2022.

ILLINOIS FACULTY OF MATH. **Nondimensionalization, Scaling and Units**. 2012. Disponível em: <https://faculty.math.illinois.edu/~rdeville/teaching/558/nondimensionalization.pdf>. Acesso em: 12 de out de 2022.

KLIONER, Sergei. Celestial mechanics of the N-body problem. *In*: ALTENA, William F. V.. **Astrometry for Astrophysics**. Cambridge: Cambridge University Press, 2013. p.(69-92).

ROY, Archie Edmiston. **Orbital Motion**. Bristol: IOP Publishing, 1988.

RUBINSZTEJN, A. An Introduction to Lagrange Points - The 3-Body Problem. Gereshes. 2018. Disponível em: <https://gereshes.com/2018/12/03/an-introduction-to-lagrange-points-the-3-body-problem/>. Acesso em: 13 de out de 2022.