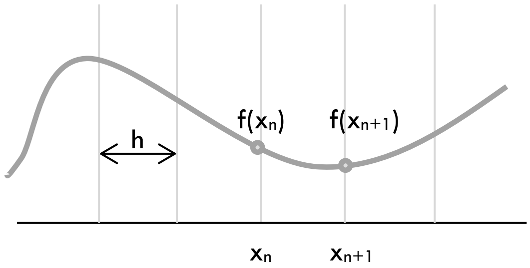
Projet : « à la dérive »

La dérivation numérique permet de trouver une estimation de la dérivée (« *pente d'une fonction* ») en utilisant seulement un ensemble discret de points. Nous allons nous intéresser au calcul d'une fonction f échantillonnée sur **x** points (seules certaines valeurs sont connues)

On utilise une variable discrétisée $\mathbf{x_n}$ définie par $\mathbf{x_n = nh}$ ou h est le pas de discrétisation.

On note $f_n = f(x_n)$



Formules d'Euler

La dérivation d'une fonction f notée f'(x) ou $\frac{df(x)}{dx}$ est définie par :

- $\frac{df(x)}{dx} = \lim_{h \to 0} \left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right)$, limite à droite (1)
- $\frac{df(x)}{dx} = \lim_{h \to 0} \left(\frac{f(x) - f(x-h)}{h} \right)$, limite à gauche (2)
- $\frac{df(x)}{dx} = \lim_{h \to 0} \left(\frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} \right)$, limite symétrique (3)

L'évaluation numérique de la dérivée est réalisée **à partir de la suite numérique fx** (ensemble des évaluations de la fonction f sur l'ensemble discret des points x)

En adaptant les équations précédentes, on obtient par exemple pour l'évaluation à droite, l'évaluation de la dérivée au point x_n : $df_n = \frac{f_{n+1} - f_n}{h}$ avec $f_n = f(x_n)$ et $f_{n+1} = f(x_n+h)$

Les questions à se poser lors de l'évaluation numérique de la dérivée d'une fonction concernent donc :

- le choix de la méthode de dérivation
- la valeur du pas de discrétisation h

Durant ce projet, vous utiliserez les quatre fonctions qui vous serviront d'illustration pour les calculs :

1. $f(x) = \cos(x^3)$
2. $g(x) = e^{x^2}$
3. $h(x) = \ln(|\sin(x)|)$
4. $i(x) = \frac{x}{1+x^4}$

Etape 1 : Calcul

Créer autant de fonctions Octave que nécessaire permettant de calculer les valeurs des fonctions mathématiques (f(x) à g(x)en tout point.

Ecrire ensuite **3 scripts** Octave relatifs aux trois méthodes présentées plus haut permettant de calculer les valeurs de la dérivée d'une fonction entre 2 bornes avec un pas **h** donnés en paramètre.

Etape 2 : Affichage(s)

Pour chacune des fonctions, écrire **un script** permettant de choisir a fonction à afficher (parmi les quatre proposées) ainsi que les bornes entre lesquelles on souhaite l'afficher.

A l'affichage, la **fonction** devra être affichée en **bleu** et sa **dérivée en rouge**.
Pensez aussi à afficher les différents renseignements importants sur le graphique (légende, titre des axes, nom de chaque courbe représentée, etc.).

Etape 3 : Evaluation

Au-delà de l'aspect graphique, il est indispensable de quantifier la qualité des calculs effectués.

La qualité des calculs va s'évaluer quand cela est possible en comparant les résultats numériques obtenus avec **la dérivée formelle** de la fonction étudiée.

On pourra alors estimer en chaque point l'erreur en calculant la différence entre la fonction g_n, dérivée analytique de f et la dérivée numérique f_n évaluée pour ce point. Ainsi, l'**erreur** = $|f_n - g_n|$

Ecrire ainsi un script Octave qui, pour chacune des fonctions :

- **calcule l'erreur moyenne** pour chacune des méthodes sur un intervalle donné **en fonction du pas.**
- **affiche le résultat sous forme de graphique ainsi que sa moyenne et sa variance.**

Les méthodes de dérivation seront évaluées au moyen de trois variables :

- le nombre de valeurs discrètes utilisées,
- l'erreur sur l'intervalle
- et le temps de calcul pour les 4 fonctions proposées.

Les résultats d'évaluation seront présentés quant à eux :

- **sous la forme d'un tableau** par fonction reprenant les éléments calculés ainsi que pour chaque méthode l'erreur obtenue en fonction du nombre de pas utilisés
- et **sous une forme graphique** adaptée à déterminer

Proposez enfin une valeur approximative du pas le plus pertinent pour les calculs et essayer de conclure sur la méthode la plus performante selon vous en argumentant.

Travail à rendre

Vous devrez rendre pour le **vendredi 11 janvier 2019 23h55 dernier délai** par voie électronique (aux adresses : **Philippe.Truillet@irit.fr et Mathieu.Raynal@irit.fr**) :

- Les fichiers **.m** que vous aurez créés. Il vous est conseillé de faire un fichier pour chaque fonction de calcul un fichier pour l'évaluation et la comparaison des méthodes de calcul ;
- Un rapport décrivant les algorithmes que vous aurez programmés en expliquant votre démarche de travail.

Une présentation orale de 10 minutes (avec documents pour la vidéo-projection) aura enfin lieu après la fin du projet vers **mi-janvier 2019 (précisions ultérieures).**