10 Модели описания поверхностей

Рассмотрим, как можно представлять форму трехмерных объектов в системах КГ. Для описания формы поверхностей могут использоваться разнообразные модели. Сделаем обзор некоторых из них.

10.1 Аналитическая модель

Аналитической моделью будем называть описание поверхности математическими формулами. В КГ можно использовать много разновидностей такого описания. Например:

- в виде функции двух аргументов z = f(x, y)
- в неявном виде - уравнение F (x, y, z) = 0.
- параметрическая форма описания поверхности. Запишем формулы для трехмерной декартовой системы координат (x, y, z):

$$x = F_x(s,t),$$
$$y = F_y(s,t),$$
$$z = F_z(s,t).$$

где s и t— параметры, которые изменяются в определенном диапазоне, а функции F_x, F_y и F_z будут определять форму поверхности.

<u>*Преимущества*</u> параметрического описания — легко описывать поверхности, которые отвечают неоднозначным функциям, замкнутые поверхности. Описание можно сделать таким образом, что формула не будет существенно изменяться при поворотах поверхности, масштабировании.

В качестве примера рассмотрим аналитическое описание поверхности шара.

Сначала как функцию двух аргументов: $z = \pm\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$

Затем в виде уравнения: $x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0.$

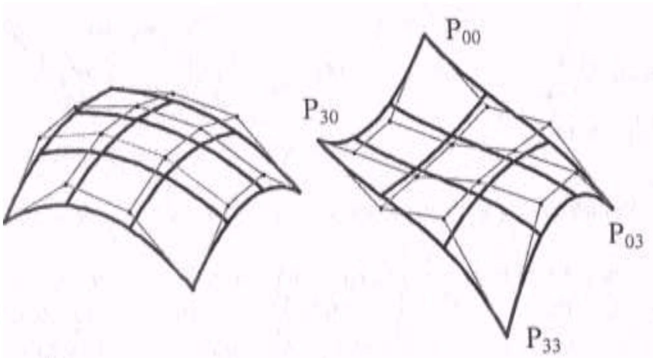
А также в параметрической форме:

$$x = R\ \sin s\ \ \cos t,$$
$$y = R\ \sin s\ \ \sin t,$$
$$z = R\ \ \cos s.$$

Для описания сложных поверхностей часто используют сплайны. ***Сплайн*** - это специальная функция, более всего пригодная для аппроксимации отдельных фрагментов поверхности. Несколько сплайнов образовывают модель сложной поверхности. Другими словами, сплайн — эта тоже поверхность, но такая, для которой можно достаточно просто вычислять координаты ее точек Обычно используют кубические сплайны. Сплайны часто задают параметрически. Запишем формулу для компоненты *x(s,t)* кубического сплайна в виде многочлена третьей степени параметров *s* и *t*:

$$
\begin{aligned}
x(s,t) = {} & a_{11} s^3 t^3 + a_{12} s^3 t^2 + a_{13} s^3 t + a_{14} s^3 + \\
& + a_{21} s^2 t^3 + a_{22} s^2 t^2 + a_{23} s^2 t + a_{24} s^2 + \\
& + a_{31} s t^3 + a_{32} s t^2 + a_{33} s t + a_{34} s + \\
& + a_{41} t^3 + a_{42} t^2 + a_{43} t + a_{44}.
\end{aligned}
$$

В математической литературе можно ознакомиться со способами определения коэффициентов a_{ij}, для сплайнов, которые имеют заданные свойства.



С позиций КГ можно указать следующие *положительные черты аналитической модели*:

- достаточно легкая процедура расчета координат каждой точки поверхности, нормали;
- небольшой объем информации для описания достаточно сложных форм.

К *недостаткам* относятся следующее:

- сложные формулы описания с использованием функций, которые медленно вычисляются на компьютере, снижают скорость выполнения операций отображения;
- невозможность в большинстве случаев применения данной формы описания непосредственно для построения изображения поверхности. В таких случаях поверхность отображают как многогранник, используя формулы аналитического описания для расчета координат вершин граней в процессе отображения, что уменьшает скорости сравнительно с полигональной моделью описания.

Характеризуя аналитическую модель в целом, можно сказать, что эта модель наиболее пригодна для многих операций анализа поверхностей.

10.2 Векторная полигональная модель

Для описания пространственных объектов в данной модели используются такие элементы: *вершины*; отрезки прямых (*векторы*); *полилинии*, *полигоны*; *полигональные поверхности* (рис. 10.1).

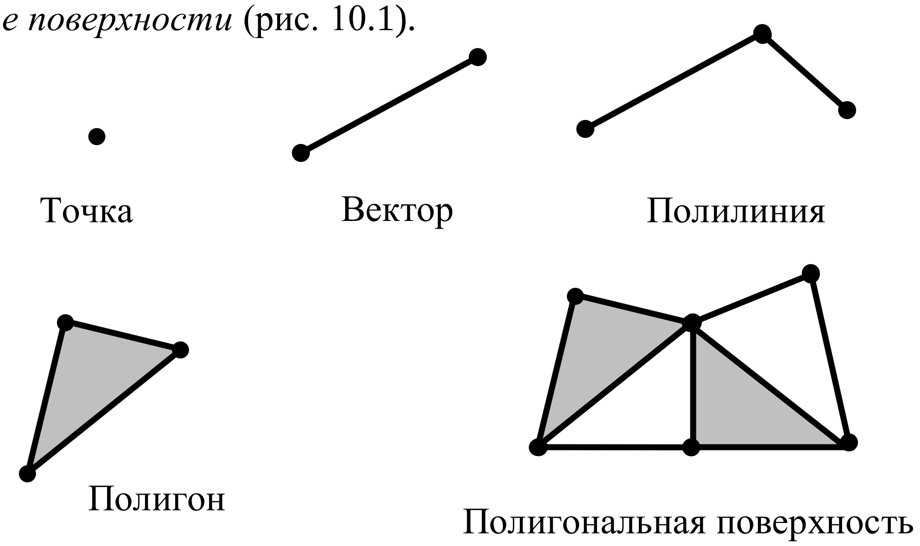


Рис. 10.1 - Базовые элементы векторно-полигональной модели

Элемент "вершина" (vertex) — главный элемент описания, все другие являются производными. При использовании трехмерной декартовой системы координаты вершин определяются как (x_i, y_i, z_i). Каждый объект однозначно определяется координатами собственных вершин.

Вершина может моделировать отдельный точечный объект, размер которого не имеет значения, а также может использоваться в качестве конечных точек для линейных объектов и полигонов. Двумя вершинами задается вектор. Несколько векторов составляют полилинию. Полилиния может моделировать отдельный линейный объект, толщина которого не учитывается, а также может представлять контур полигона. Полигон моделирует площадный объект.

Один полигон может описывать плоскую грань объемного объекта. Несколько граней составляют объемный объект в виде полигональной поверхности — многогранник или незамкнутую поверхность (в литературе часто употребляется название "полигональная сетка").

Векторную полигональную модель можно считать наиболее распространенной в современных системах трехмерной КГ. Ее используют в системах автоматизированного проектирования, в компьютерных играх и тренажерах в САПР, геоинформационных системах и т.п.

10.2.1 Структуры данных для представления векторной полигональной модели

Обсудим структуры данных, которые используются в векторной полигональной модели. В качестве примера объекта будет *куб*. Рассмотрим, как можно организовать описание такого объекта в структурах данных.

Первый способ. Сохраняем все грани в отдельности (рис. 10.2).

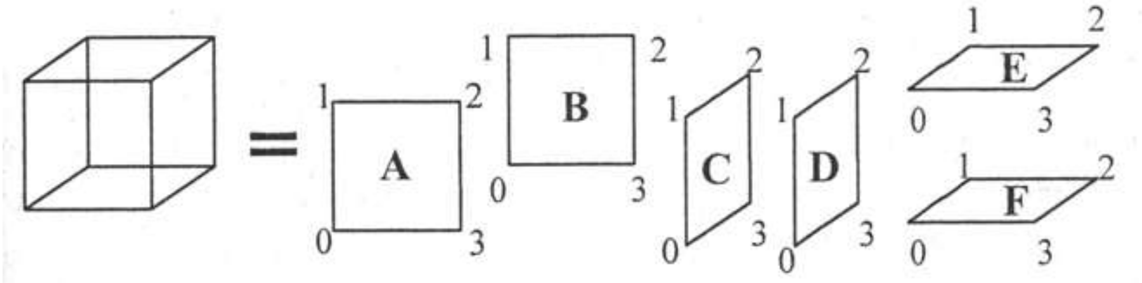


Рис. 10.2 - Первый способ описания куба

$$\text{Грань } A = \{(x_{A0}, y_{A0}, z_{A0}), (x_{A1}, y_{A1}, z_{A1}), (x_{A2}, y_{A2}, z_{A2}), (x_{A3}, y_{A3}, z_{A3})\}.$$
$$\text{Грань } B = \{(x_{B0}, y_{B0}, z_{B0}), (x_{B1}, y_{B1}, z_{B1}), (x_{B2}, y_{B2}, z_{B2}), (x_{B3}, y_{B3}, z_{B3})\}.$$
$$\text{Грань } C = \{(x_{C0}, y_{C0}, z_{C0}), (x_{C1}, y_{C1}, z_{C1}), (x_{C2}, y_{C2}, z_{C2}), (x_{C3}, y_{C3}, z_{C3})\}.$$
$$\text{Грань } D = \{(x_{D0}, y_{D0}, z_{D0}), (x_{D1}, y_{D1}, z_{D1}), (x_{D2}, y_{D2}, z_{D2}), (x_{D3}, y_{D3}, z_{D3})\}.$$
$$\text{Грань } E = \{(x_{E0}, y_{E0}, z_{E0}), (x_{E1}, y_{E1}, z_{E1}), (x_{E2}, y_{E2}, z_{E2}), (x_{E3}, y_{E3}, z_{E3})\}.$$
$$\text{Грань } F = \{(x_{F0}, y_{F0}, z_{F0}), (x_{F1}, y_{F1}, z_{F1}), (x_{F2}, y_{F2}, z_{F2}), (x_{F3}, y_{F3}, z_{F3})\}.$$

Схематично это изобразим на рис. 10.3.

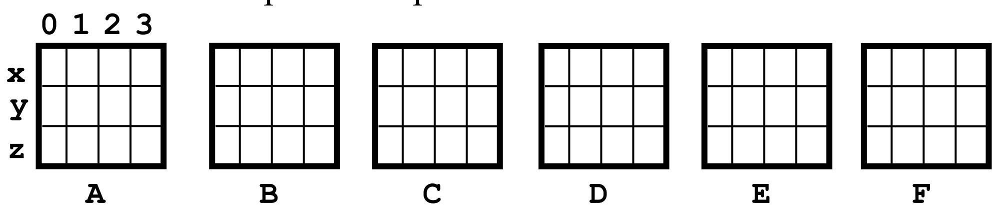
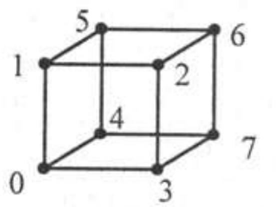


Рис. 10.3 - Отдельные грани

В компьютерной программе такой способ описания объекта можно реализовать разнообразно. Например, для каждой грани открыть в памяти отдельный массив. Можно все грани записывать в один массив-вектор. А можно использовать классы как для описания отдельных граней, так и объектов в целом. Можно создавать структуры, которые объединяют тройки (x, y, z), или сохранять координаты отдельно. В значительной мере это относится уже к компетенции программиста, зависит от его вкуса. Принципиально это мало что изменяет — так или иначе в памяти необходимо сохранять координаты вершин граней плюс некоторую информацию в качестве накладных затрат.

Такое представление избыточно — каждая вершина записана трижды. Не учитывается то, что у граней есть общие вершины.

Второй способ описания.



Для такого варианта координаты восьми вершин сохраняются без повторов. Вершины пронумерованы (рис. 10.4), а каждая грань дается в виде списка индексов вершин (указателей на вершины) (рис.10.5).

Рис. 10.4 - Номера вершин

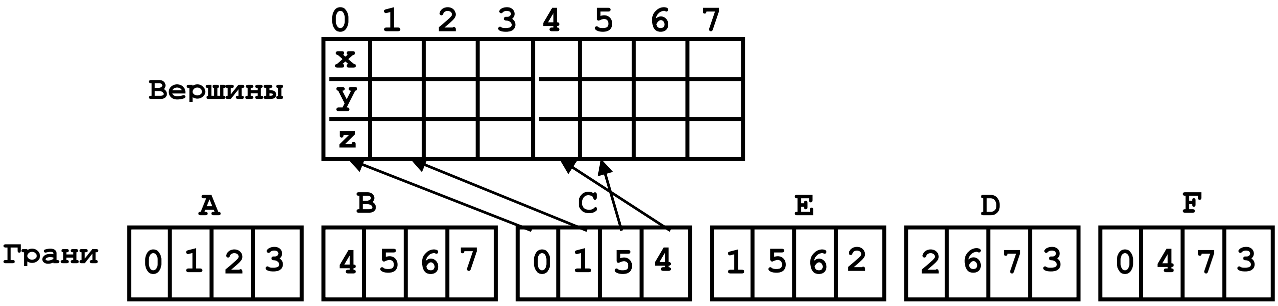


Рис. 10.5 - В массивах граней сохраняются индексы вершин

Третий способ описания (рис. 10.6).

Этот способ (в литературе его иногда называют *линейно-узловой моделью*) основывается на иерархии: вершины-ребра-грани.

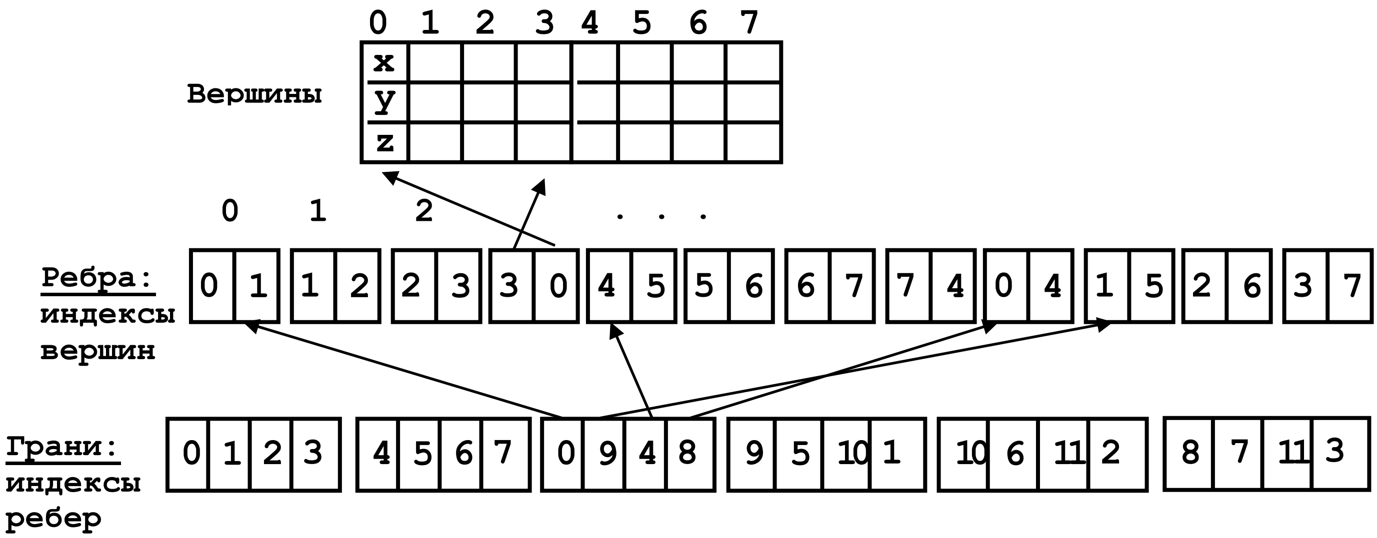


Рис. 10.6 - Линейно-узловая модель

Положительные черты векторной полигональной модели:

- удобство масштабирования объектов. При увеличении или уменьшении объекты выглядят более качественно, чем при растровых моделях описания. Диапазон масштабирования определяется точностью аппроксимации и разрядностью чисел для представления координат вершин;

- небольшой объем данных для описания простых поверхностей, которые адекватно отображаются (аппроксимируются) плоскими гранями;
- необходимость вычислять только координаты вершин при преобразованиях систем координат или перемещении объектов;
- аппаратная поддержка многих операций в современных графических видеосистемах, которая обуславливает достаточную скорость для анимации.

Недостатки полигональной модели:

- сложные алгоритмы визуализации для создания реалистичных изображений;
- сложные алгоритмы выполнения топологических операций, таких, например, как разрезы;
- аппроксимация плоскими гранями приводит к погрешности моделирования. При моделировании поверхностей, которые имеют сложную фрактальную форму, обычно невозможно увеличивать количество граней из-за ограничений по быстродействию и объему памяти компьютера.

10.3 Воксельная модель

Воксельная модель — **это трехмерный растр**. Подобно тому, как пиксели располагаются на плоскости 2D-изображения, так и воксели образовывают трехмерные объекты в определенном объеме (рис. 10.7). ***Воксель*** — это элемент объема (**voxel** — volume element).

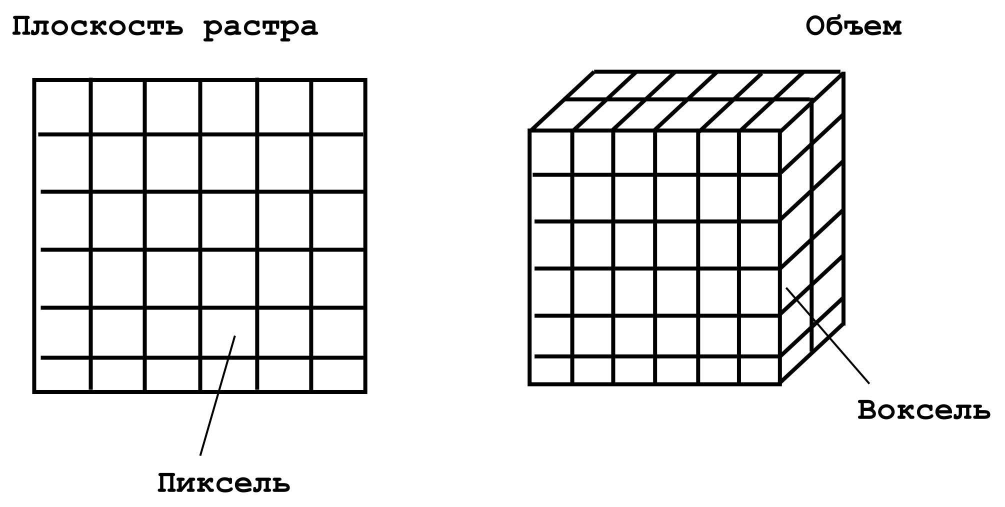


Рис. 10.7 - Пиксели и воксели

Как известно, каждый пиксель должен иметь свой цвет. Каждый воксель также имеет свой цвет, а, кроме того, прозрачность. Полная прозрачность вокселя означает пустоту соответствующей точки объема. При моделировании объема каждый воксель представляет элемент объема определенного размера. Чем больше вокселов, в определенном объеме и меньше размер вокселов, тем точнее моделируются трехмерные объекты — увеличивается разрешающая способность.

Для современной КГ воксельный метод считается одним из перспективных. Его используют в компьютерных системах для медицины. Например, при сканировании томографом (computer tomography) получаются изображения срезов объекта, которые потом объединяются в виде объемной модели для дальнейшего анализа, Воксельный метод используется в геологии, сейсмологии, в компьютерных играх. Воксели также используются для графических устройств отображения, которые создают действительно объемные изображения.

Положительные черты воксельной модели:

– позволяет достаточно просто описывать сложные объекты и сцены;
– простая процедура отображения объемных сцен;
– простое выполнение топологических операций над отдельными объектами и сценой в целом. Например, просто выполняется показ разреза — для этого соответствующие воксели можно сделать прозрачными.

Недостатки воксельной модели:

- большое количество информации, необходимой для представления объемных данных. Например, объем 256x256x256 имеет небольшую разрешающую способность, но требует свыше 16 миллионов вокселов;
- значительные затраты памяти ограничивают разрешающую способность, точность моделирования;
- большое количество вокселов обусловливает малую скорость создания изображений объемных сцен;
- как и для любого растра, возникают проблемы при увеличении или уменьшении изображения. Например, при увеличении ухудшается разрешающая способность изображения.

10.4 Равномерная сетка

Эта модель описывает координаты отдельных точек поверхности следующим способом (рис. 10.8). Каждому узлу сетки с индексами *(i, j)* приписывается значение высоты z_y. Индексам (*i, j*) соответствуют определенные значения координат (*x, y*). Расстояние между узлами одинаковое — *dx* по оси *x* и *dy* по оси *y*.

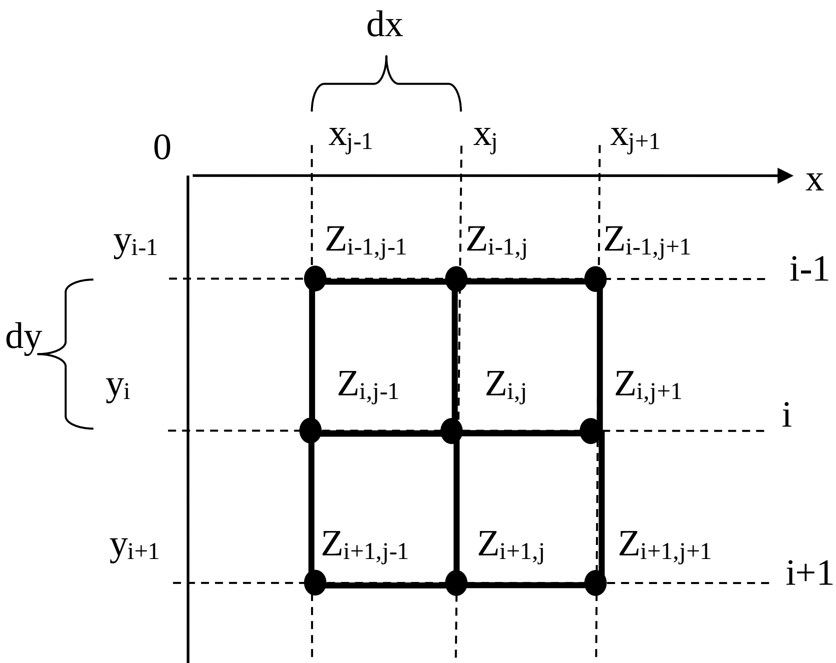


Рис.10.8. Узлы равномерной сетки

Фактически, такая модель — двумерный массив, растр, матрица, каждый элемент которой сохраняет значение высоты.

Не каждая поверхность может быть представлена этой моделью. Если в каждом узле записывается только одно значение высоты, то это означает, что поверхность описывается однозначной функцией $z = f(x, y)$. Иначе говоря, это такая поверхность, которую любая вертикаль пересекает только один раз. Не могут моделироваться также вертикальные грани. Необходимо заметить, что для сетки не обязательно использовать только декартовые координаты. Например, для того чтобы описать поверхность шара однозначной функцией, можно использовать полярные координаты. Равномерная сетка часто используется для описания рельефа земной поверхности.

Положительные черты равномерной сетки:

1) простота описания поверхностей;

2) возможность быстро узнать высоту любой точки поверхности простой интерполяцией.

Недостатки равномерной сетки:

1) поверхности, которые соответствуют неоднозначной функции высоты в узлах сетки, не могут моделироваться;

2) для описания сложных поверхностей необходимо большое количество узлов, которое может быть ограничено объемом памяти компьютера;

3) описание отдельных типов поверхностей может быть сложнее, чем в других моделях. Например, многогранная поверхность требует избыточный объем данных для описания по сравнению с полигональной моделью.

10.5 Неравномерная сетка.

Неравномерной сеткой назовем модель описания поверхности в виде множества отдельных точек $\{(x_0, y_0, z_0), (x_1, y_1, z_1), \ldots, (x_{n-1}, y_{n-1}, z_{n-1}\})\}$, принадлежащих поверхности. Эти точки могут быть получены, например, в результате измерений поверхности какого-нибудь объекта с помощью определенного оборудования.

Такую модель можно считать обобщением для некоторых рассмотренных нами моделей. Например, векторная полигональная модель и равномерная сетка могут считаться разновидностями неравномерной сетки.

Рассмотрим модель поверхности в виде ***множества точечных значений***, логически никак не связанных между собой. Неравномерность задания опорных точек усложняет определение координат для других точек поверхности, которые не совпадают с опорными точками. Нужны специальные методы пространственной интерполяции. Так, например, можно поставить такую задачу — по известным координатам (x, y) вычислить значения координаты z. Для этого необходимо найти несколько самых близких точек, а потом вычислить искомое значение z, исходя из взаимного расположения этих точек в проекции (x, y).

Еще одна задача — отобразить поверхность.

Эту задачу можно решать несколькими способами, в том числе **триангуляцией**. Процесс триангуляции можно представить себе так (рис. 10.9). Сначала находим первые три самые близкие друг другу точки — и получаем одну плоскую треугольную грань. Потом находим точку, ближайшую к этой грани, и образовываем смежную грань. И так далее, пока не останется ни одной отдельной точки. Это общая схема, в других источниках информации представлено много разных способов триангуляции. Довольно часты ссылки на триангуляцию Делоне.

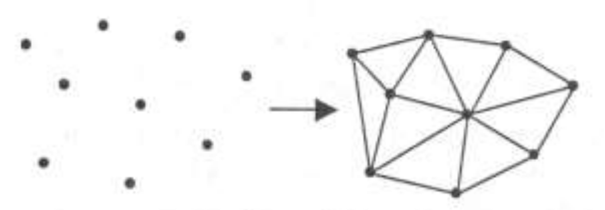


Рис. 10.9. Триангуляция неравномерной сетки

Описание поверхности треугольными гранями можно уже считать разновидностью векторной полигональной модели. В англоязычной литературе для нее встречается такое название: TIN (Triangulated Irregular Network). После триангуляции получаем полигональную поверхность, отображение которой сделать уже достаточно просто.

Положительные черты неравномерной сетки:

– использование отдельных опорных точек, наиболее важных для заданной формы поверхности, обуславливает меньший объем информации по сравнению с другими моделям, например, с равномерной сеткой;

Недостатки:

– невозможность или сложность выполнения многих операций над поверхностями;
– сложные алгоритмы преобразования в другие формы описания поверхностей.