

8 Проекция

В настоящее время распространены устройства отображения, которые синтезируют изображения на плоскости — экране дисплея или бумаге. Все чаще появляются сведения об устройствах, которые создают истинно объемные изображения, например, об объемных дисплеях или о трехмерных принтерах.

При использовании любых графических устройств обычно используется проекции. Проекция задает способ отображения объектов на графическом устройстве. Однако в данной дисциплине рассматриваются только проекции на плоскость.

8.1 Мировые и экранные координаты

При отображении пространственных объектов на экране или на листе бумаги с помощью принтера необходимо знать координаты объектов. Будем рассматривать две системы координат. Первая — **мировые координаты**, которые описывают истинное положение объектов в пространстве с заданной точностью. Другая — **система координат устройства изображения**, в котором осуществляется вывод изображения объектов в заданной проекции.

Пусть мировые координаты будут трехмерными декартовыми координатами. Где должен размещаться центр координат и какими будут единицы измерения вдоль каждой оси, пока не очень важно. Важно то, что будем знать какие-то числовые значения координат отображаемых объектов.

Для получения изображения в определенной проекции необходимо рассчитать координаты проекции. Из них можно получить координаты для графического устройства — назовем их **экранными координатами**. Для синтеза изображения на плоскости достаточно двумерной системы координат. Однако в некоторых алгоритмах визуализации используются трехмерные экранные координаты, например, в алгоритме Z-буфера.

Представим цепочку преобразований координат от мировых к экранным следующим образом (рис. 8.1):



Рис. 8.1 - Этапы преобразований координат

В качестве мировых и экранных координат используется трехмерная и двумерная ортогональная система. В компьютерных графических системах также используются другие системы координат и иные проекции. В особенности это касается систем, которые моделируют объекты, располагающиеся на поверхности Земли. С этими вопросами можно ознакомиться в многочисленной литературе по геодезии и картографии, а также в работах, посвященных *геоинформационным системам*.

8.2 Проецирование. Основные типы проекций

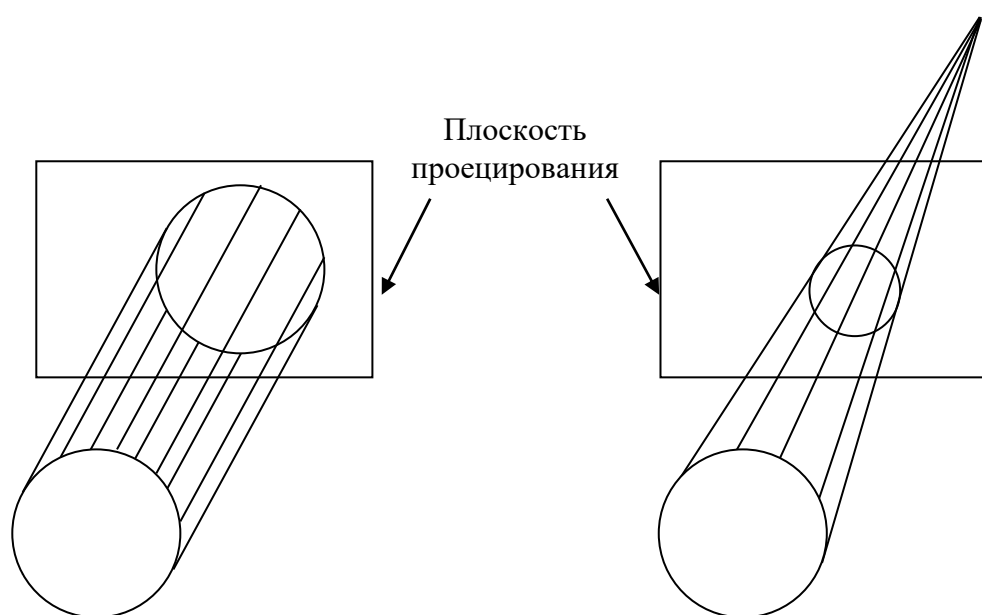
Задача проецирования состоит в следующем: необходимо представить реальный трехмерный объект на устройстве, имеющем двумерную поверхность отображения (экран, чертеж). Решение ее состоит в получении проекции трехмерного объекта на двумерную проекционную плоскость. В общем случае проекции преобразуют точки, заданные в системе координат размерностью n , в точки системы координат размерностью $m < n$.

Получение проекции объекта математически можно описать как преобразование. Для описания преобразований проецирования будем использовать матрицы, векторы и однородные координаты. Это позволит упростить изложение и решение задач геометрического моделирования.

Проецирование выполняется с помощью прямолинейных проецирующих лучей, идущих из центра проекции через каждую точку объекта до пересечения с плоскостью проекции. При этом всегда проекцией отрезка является отрезок, поэтому достаточно спроецировать лишь граничные точки.

Далее рассматриваются только плоские проекции, при которых поверхность проекции - плоскость в трехмерном пространстве.

По расположению центра проекции относительно плоскости проекции различаются *центральная (перспективная)* и *параллельные* проекции (рис. 8.2.).



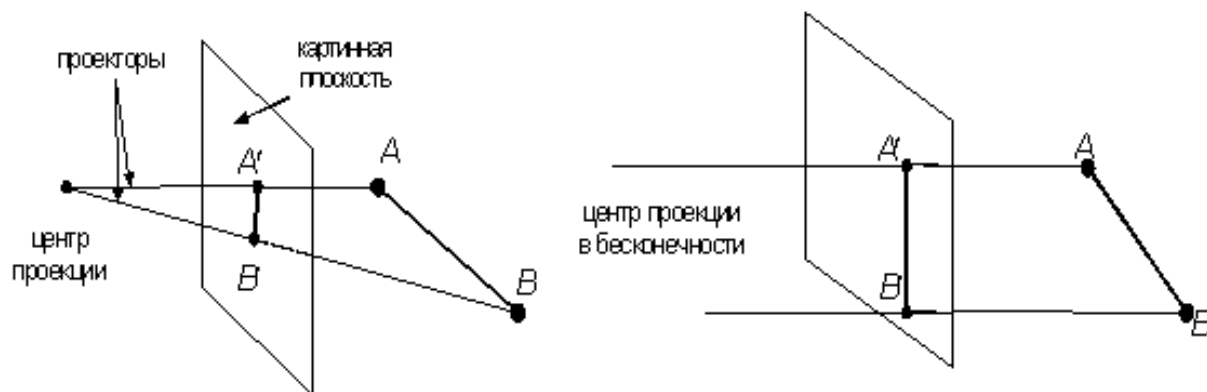


Рис. 8.2 — Параллельная и центральная проекции

При **параллельной проекции** центр проекции находится на бесконечном расстоянии от плоскости проекции. Проецирующие лучи представляют собой пучок параллельных лучей. В этом случае необходимо задавать направление проецирования и расположение плоскости проекции. По взаимному расположению проецирующих лучей, плоскости проекции и осей координат различаются *ортогональные, прямоугольные аксонометрические и косоугольные аксонометрические проекции*.

При *ортогональной проекции* проецирующие лучи перпендикулярны плоскости проекции, а плоскость проекции перпендикулярна координатной оси, т.е. они параллельны координатной оси.

При *аксонометрической проекции* имеется одна из двух перпендикулярностей (рис.8.3):

- при *прямоугольной аксонометрической проекции* проецирующие лучи перпендикулярны плоскости проекции, которая расположена под углом к координатной оси;
- при *косоугольной аксонометрической проекции* проецирующие лучи не перпендикулярны плоскости проекции, но плоскость проекции перпендикулярна к координатной оси.

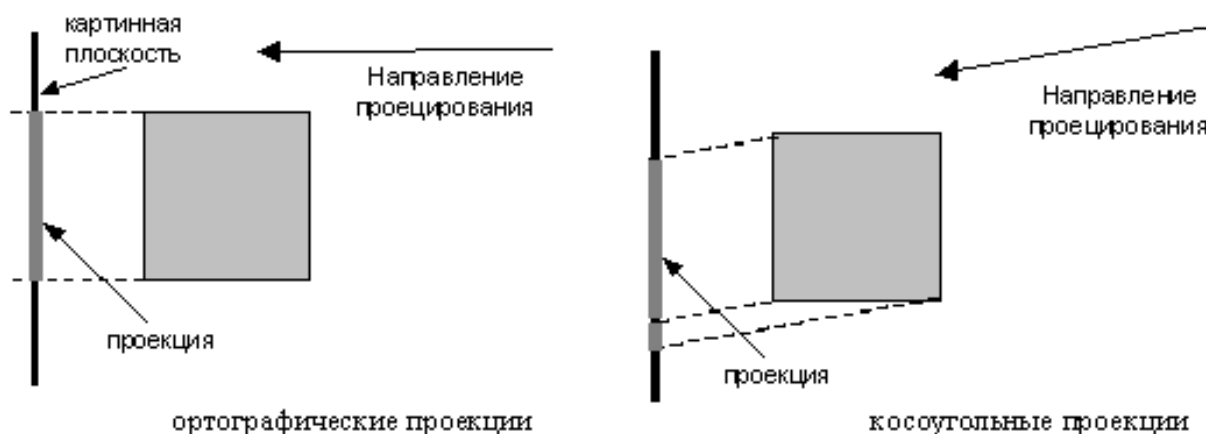


Рис. 8.3 — Прямоугольные и косоугольные проекции

Изображение, полученное при параллельном проецировании, не достаточно реалистично, но передаются точные форма и размеры, хотя и возможно различное укорачивание для различных осей.

При **центральной (перспективной) проекции** расстояние от центра проекции до плоскости проецирования конечно, поэтому проецирующие лучи представляют собой пучок лучей, исходящих из центра проекции. В этом случае надо задавать расположение и центра проекции и плоскости проекции. Изображения на плоскости проекции имеют т.н. перспективные искажения, когда размер видимого изображения зависит от взаимного расположения центра проекции, объекта и плоскости проекции. Из-за перспективных искажений изображения, полученные центральной проекцией, более реалистичны, но нельзя точно передать форму и размеры. Различаются одно, двух и трехточечные центральные проекции в зависимости от того по скольким осям выполняется перспективное искажение.

На рис.8.4 приведена классификация основных типов плоских проекций, используемых в КГ.



Рис.8.4 - Виды плоских проекций

Вначале рассмотрим ортогональные проекции. Затем будут проиллюстрированы аксонометрические и косоугольные проекции в правосторонней системе координат, близкой к компьютерной графике (ось Y вертикальна, ось X направлена горизонтально вправо, а ось Z – от экрана к наблюдателю). Для каждой проекции выведем матрицы преобразования.

8.2.1 Ортогональная проекция

Рассмотрим ортографические (ортогональные) проекции, в которых плоскость проекции совпадает с одной из координатных плоскостей или параллельна ей (см. рис. 8.5).

Матрица проецирования вдоль оси X на плоскость YOZ имеет вид

$$T' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

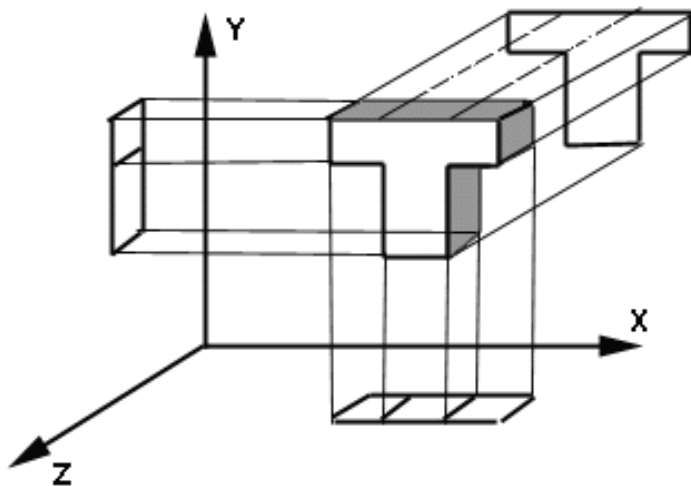


Рис. 8.5 – Ортогографические проекции

В случае, если плоскость проецирования параллельна координатной плоскости ($x=p$), необходимо применить еще преобразование переноса:

$$T = T' \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ p & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ p & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Аналогично, проецирование в плоскость $y = q$ или $z = r$ реализуется матрицами:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & q & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ и } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r & 1 \end{bmatrix}$$

соответственно.

8.2.2 Аксонометрические проекции

Аксонометрической проекцией называется параллельная проекция, у которой проецирующие лучи перпендикулярны плоскости проекции, однако плоскость проекции не параллельна координатным плоскостям, т.е. расположена под углами к координатным осям. Среди аксонометрических проекций различают:

- изометрию (все три угла между плоскостью проекции и координатными осями равны);
- диметрию (два угла между плоскостью проекции и координатными осями равны);
- триметрию (все три угла между плоскостью проекции и координатными осями различны).

Каждый из трех типов указанных проекций получается комбинацией поворотов, за которой следует параллельное (ортогональное) проецирование.

8.2.2.1 Диметрическая проекция

При построении диметрической проекции производится *комбинированное вращение*, при котором одинаково сокращаются две из трех координатных осей.

Рассмотрим последовательность преобразований при построении диметрических проекций (формула 8.1):

- вращение вокруг оси Y на угол α ;
- вращение вокруг оси X на угол β ;
- ортогональное проецирование (параллельное проецирование) на плоскость $Z=0$;

$$\begin{aligned}
 [\tilde{x} \quad \tilde{y} \quad \tilde{z} \quad h] &= \\
 &= [x \quad y \quad z \quad 1] \cdot \begin{bmatrix} \cos \alpha & 0 & -\sin \alpha & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin \alpha & 0 & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \beta & \sin \beta & 0 \\ 0 & -\sin \beta & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\
 &= [x \quad y \quad z \quad 1] \cdot \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \sin \beta & -\sin \alpha \cos \beta & 0 \\ 0 & \cos \beta & \sin \beta & 0 \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \sin \beta & \cos \alpha \sin \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \quad (8.1) \\
 &= [x \quad y \quad z \quad 1] \cdot \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \sin \beta & 0 & 0 \\ 0 & \cos \beta & 0 & 0 \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \sin \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Получим выражение для расчета углов α и β .

Единичный вектор оси X с однородными координатами $[1 \ 0 \ 0 \ 1]$ в результате преобразования (8.1) преобразуется к виду:

$$[\cos \alpha \quad \sin \alpha \sin \beta \quad 0 \quad 1]$$

и имеет длину

$$\sqrt{x^{*2} + y^{*2}} = \sqrt{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha \sin^2 \beta}.$$

Аналогично, единичный вектор оси Y с однородными координатами $[0 \ 1 \ 0 \ 1]$ преобразуется к

$$[0 \quad \cos \beta \quad 0 \quad 1]$$

и имеет длину

$$\sqrt{\cos^2 \beta} = |\cos \beta|.$$

По условию диметрической проекции: значение двух преобразованных единичных векторов сокращаются в равное число раз. Поэтому, приравняем значения векторов осей x и y , т.е.

$$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha \sin^2 \beta = |\cos^2 \beta|$$

Используя $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$, получим:

$$1 - \sin^2 \alpha + \sin^2 \alpha \sin^2 \beta = 1 - \sin^2 \beta$$

или

$$\sin^2 \alpha = \frac{\sin^2 \beta}{1 - \sin^2 \beta} = \operatorname{tg}^2 \beta \quad (8.2)$$

Таким образом, получили требуемое соотношение между углами α и β для построения диметрической проекции. При этом, конкретные значения одного из углов можно выбрать достаточно произвольно.

Часто используется следующий подход к выбору углов. Будем выбирать β таким образом, чтобы ось z сократилась в фиксированное число раз, например, в два раза ($1/2$). Единичный вектор оси z с однородными координатами $[0 \ 0 \ 1 \ 1]$ преобразуется к $[\sin \alpha \ -\cos \alpha \sin \beta \ 0 \ 1]$ длиной $\sqrt{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha \sin^2 \beta}$.

Требование уменьшить его длину в два раза означает

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha \sin^2 \beta = (1/2)^2$$

$$\sin^2 \alpha + (1 - \sin^2 \alpha) \sin^2 \beta = 1/4$$

С учетом (8.2)

$$\frac{\sin^2 \beta}{1 - \sin^2 \beta} + \sin^2 \beta - \frac{\sin^2 \beta \sin^2 \beta}{1 - \sin^2 \beta} = 1/4$$

.....

$$8\sin^4 \beta - 9\sin^2 \beta + 1 = 0$$

Решая данное уравнение, получаем одно из решений $\sin^2 \beta = \pm 1/8$. Тогда $\beta = 20.705^\circ$, а т.к. $\sin \alpha = \operatorname{tg} \beta$, то $\alpha = 22.208^\circ$.

На рис.8.6 приведена диметрическая проекция куба со стороной $A=1$. Там же показаны коэффициенты сжатия. Обычно вместо коэффициента сжатия 0.94 используется 1, а вместо 0.47 - 0.5.

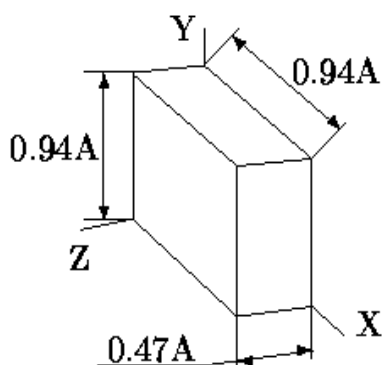


Рис. 8.6 - Диметрическая проекция куба со стороной A

8.2.2.2 Изометрия, триметрия

Для получения изометрической проекции ставится условие *равного сокращения всех трех координатных осей*.

Применяя преобразование, как описано выше, к единичному вектору, направленному по оси Z, получим

$$[\sin \alpha \quad -\cos \alpha \sin \beta \quad 0 \quad 1].$$

Имеем еще одну связь между углами α и β .

$$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha \sin^2 \beta = \cos^2 \beta$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha \sin^2 \beta = \cos^2 \beta$$

Или

$$\sin^2 \alpha = \frac{\sin^2 \beta}{1 - \sin^2 \beta} = \operatorname{tg}^2 \beta$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - 2 \sin^2 \beta}{1 - \sin^2 \beta}$$

(8.3)

Решая совместно эти уравнения, получим

$$\sin^2 \beta = 1/3 \quad (8.4)$$

Подставляя найденное значение в (8.3) получим $\sin^2 \alpha = 1/2$ или $\beta = 35.26^\circ, \alpha = 45^\circ$.

На рис.8.7 приведена изометрическая проекция куба со стороной A. При этой проекции плоскость проецирования наклонена ко всем главным координатным осям под одинаковым углом. Стандартом регламентируется коэффициент сжатия, равный 0.82, а также расположение и взаимные углы главных координатных осей, равные 120° как это показано в левом верхнем углу рис.8.6. Обычно сжатие не делается.

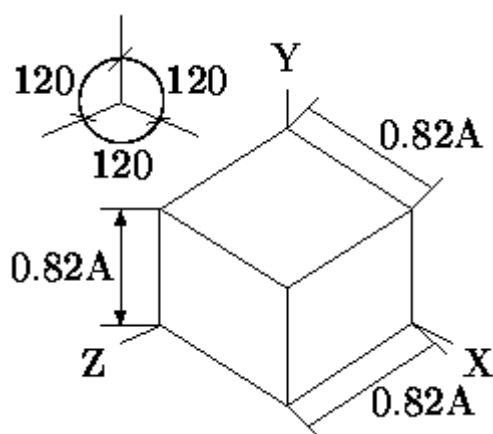


Рис. 8.7 - Изометрическая проекция куба со стороной A

При триметрии длины единичных векторов, полученных в результате проекции:

$$\begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \sin \beta & 0 & 1 \\ 0 & \cos \beta & 0 & 1 \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \sin \beta & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad - \text{различны.}$$

8.2.3 Косоугольные проекции

В косоугольных проекциях плоскость проекции перпендикулярна координатной оси, а проецирующие лучи расположены под углом к ней. Таким образом, косоугольные проекции сочетают в себе свойства ортогональных и аксонометрических прямоугольных проекций.

Наиболее распространены два вида косоугольной проекции:

- горизонтальная косоугольная изометрия (проекция Kavalier - кавалье), или военная перспектива, или свободная проекция;
- фронтальная косоугольная диметрия (проекция Kabinett – кабине) или кабинетная проекция.

В случае горизонтальной косоугольной изометрии (свободной проекции) плоскость проецирования перпендикулярна оси Y, а угол между проецирующими лучами и плоскостью проекции равен 45° . В результате проекция отрезка, перпендикулярного проекционной плоскости, имеет ту же длину, что и сам отрезок, т. е. укорачивание отсутствует (рис.8.8).

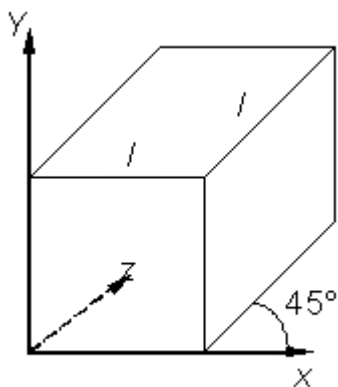


Рис. 8.8 - Свободная проекция (горизонтальная косоугольная изометрия) куба со стороной А

В случае фронтальной косоугольной диметрии (кабинетной проекции) направление проецирования составляет с проекционной плоскостью угол $\alpha = \arctg(1/2)$ ($\approx 26,5^\circ$). При этом отрезки, перпендикулярные проекционной плоскости, после проецирования составляют $1/2$ их действительной длины (рис.8.9). Проекция Кабине являются более реалистическими, чем проекция Кавалье, так как укорачивание с коэффициентом $1/2$ больше согласуется с нашим визуальным опытом.

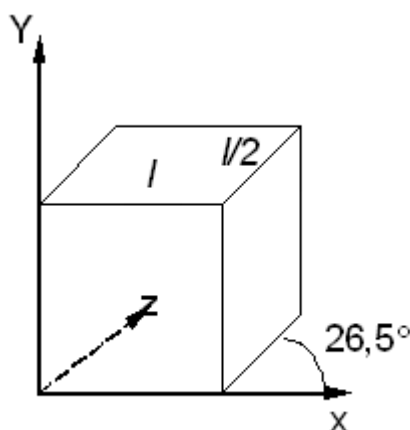


Рис. 8.9 - Фронтальная косоугольная диметрия (кабинетная проекция) куба со стороной А

Рассмотрим проекцию на плоскость XOY и предположим, что p_x и p_y являются составляющими косоугольной проекции единичного вектора z на эту плоскость, т.е. вектор $[0 \ 0 \ 1 \ 1]$ преобразуется в вектор $[p_x \ p_y \ 0 \ 1]$. Матрица такого преобразования имеет вид

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ p_x & p_y & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Для свободной проекции $p_x = \cos 45^\circ$, $p_y = \sin 45^\circ$.

Для кабинетной проекции $p_x = \frac{1}{2} \cos 45^\circ$, $p_y = \frac{1}{2} \sin 45^\circ$.

Допускается значение угла 30 и 60°. Обратите внимание, что в данной системе координат плоскость фронтальной проекции - плоскость XOY , в отличие от системы координат технического черчения, где фронтальная проекция, формируется в плоскости XOZ .

8.2.4 Центральная (перспективная) проекция

Наиболее реалистично трехмерные объекты выглядят в центральной проекции из-за перспективных искажений сцены. При построении центральной проекции проецирующие лучи сходятся в *точке схода*. В зависимости от числа точек схода различаются одно-, двух- и трехточечные центральные проекции. Иллюстрация одно-, двух- и трехточечной центральных проекций куба приведена на рис. 8.10.

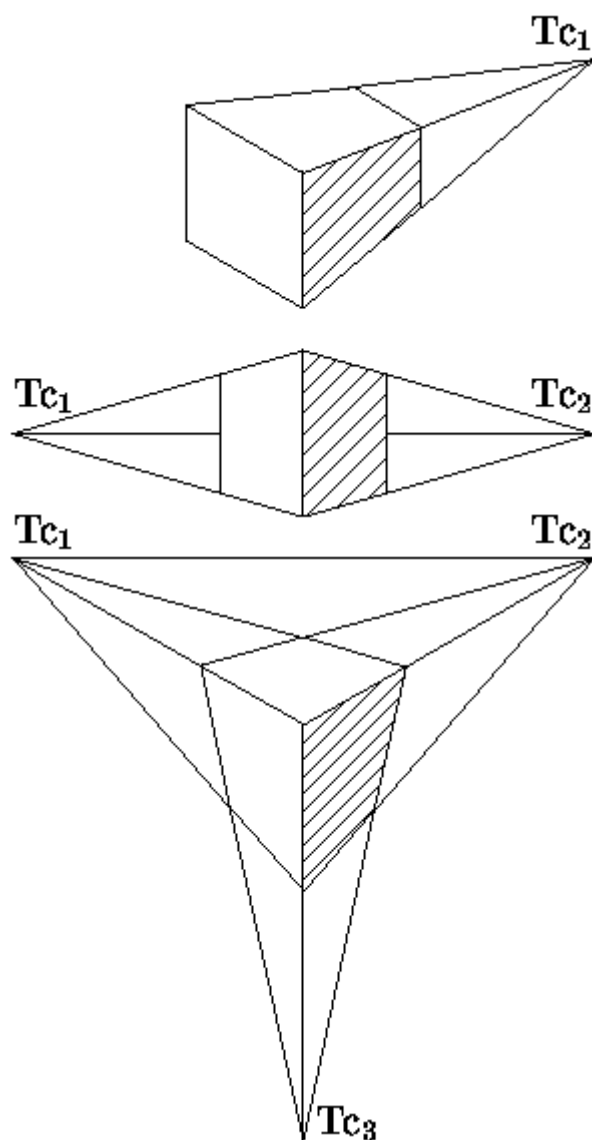


Рис. 8.10 - Одно-, двух- и трехточечная центральные проекции куба

Наиболее широко используется двухточечная центральная проекция.

Выведем матрицу, определяющую центральное проецирование для простого случая односточечной проекции (рис. 8.11), когда плоскость проекции перпендикулярна оси Z и расположена на расстоянии d от начала координат. (Здесь используется удобная для машинной графики левосторонняя система координат).

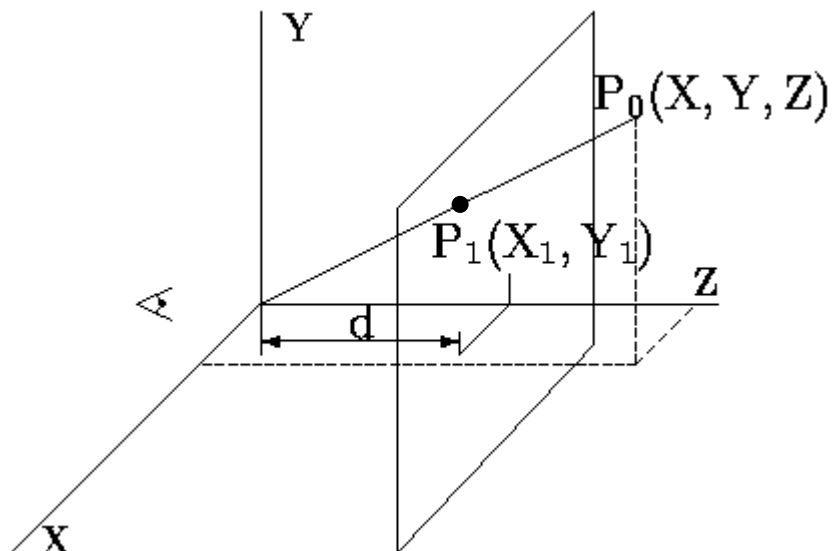


Рис. 8.11 - Центральная проекция точки P_0 в плоскость $Z = d$

Начало отсчета находится в точке просмотра. Ясно, что изображения объектов, находящиеся между началом координат и плоскостью проекции увеличиваются, а изображения объектов, расположенных дальше от начала координат, чем плоскость проекции, уменьшаются.

Из рис. 8.11 видно, что для координат (X_1, Y_1) точки P_1 , полученной проецированием точки $P_0(X, Y, Z)$ в плоскость $Z = d$ (плоскость экрана), выполняются следующие соотношения:

$$\frac{X_1}{d} = \frac{X}{Z} \quad \frac{Y_1}{d} = \frac{Y}{Z} \quad X_1 = \frac{X}{Z/d} \quad Y_1 = \frac{Y}{Z/d}$$

Такое преобразование может быть представлено матрицей 4×4

$$[X \ Y \ Z \ 1]^* \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/d \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = [X \ Y \ Z \ Z/d]$$

Для перехода к декартовым координатам делим все на Z/d и получаем:

$$\left[\frac{X}{Z/d} \quad \frac{Y}{Z/d} \quad d \quad 1 \right]$$

Если же точка просмотра расположена в плоскости проекции, тогда центр проекции расположен в точке $(0, 0, -d)$. Рассматривая подобные треугольники, аналогично вышеописанному, можем получить:

$$X_1 = \frac{X}{Z/d + 1} \quad Y_1 = \frac{Y}{Z/d + 1}$$

Матрица преобразования в этом случае имеет вид:

$$T_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/d \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

В общем случае данную матрицу можно представить так:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & r \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ а точка } [0 \ 0 \ 1/r \ 1] \text{ является } \textit{\textbf{точкой схода}} \text{ проецирующих}$$

лучей на оси OZ.

Аналогично, перспективное преобразование

$$[\tilde{x} \ \tilde{y} \ \tilde{z} \ h] = [x \ y \ z \ 1] \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & q \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [x \ y \ z \ q \cdot y + 1]$$

$$[x^* \ y^* \ z^* \ 1] = \left[\frac{x}{q \cdot y + 1} \ \frac{y}{q \cdot y + 1} \ \frac{z}{q \cdot y + 1} \ 1 \right]$$

будет приводить к точке схода $[0 \ 1/q \ 0 \ 1]$.

$$\text{Преобразование: } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & p \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

будет приводить к точке схода $[1/p \ 0 \ 0 \ 1]$.

Преобразования, которые мы сейчас рассмотрели, являются одноточечными (имеют одну точку схода). Их еще называют *параллельными перспективными преобразованиями*.

Если в 4-м столбце матрицы 4×4 два элемента ненулевые, то получим двухточечную или угловую перспективу

$$[\tilde{x} \ \tilde{y} \ \tilde{z} \ h] =$$

$$\begin{aligned}
&= [x \ y \ z \ 1] \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & p \\ 0 & 1 & 0 & q \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [x \ y \ z \ p \cdot x + q \cdot y + 1] \\
[x^* \ y^* \ z^* \ 1] &= \\
&= \left[\frac{x}{p \cdot x + q \cdot y + 1} \quad \frac{y}{p \cdot x + q \cdot y + 1} \quad \frac{z}{p \cdot x + q \cdot y + 1} \quad 1 \right]
\end{aligned}$$

Точки схода в данном случае расположены на оси x : $[1/p \ 0 \ 0 \ 1]$ и на оси y : $[0 \ 1/q \ 0 \ 1]$.

Отметим, что для построения реалистичной проекции недостаточно просто отцентрировать объект. Его нужно еще повернуть определенным образом.

Аналогично, получается трехточечная или *косая перспектива*:

$$\begin{aligned}
[\tilde{x} \ \tilde{y} \ \tilde{z} \ h] &= \\
&= [x \ y \ z \ 1] \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & p \\ 0 & 1 & 0 & q \\ 0 & 0 & 1 & r \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [x \ y \ z \ px + qy + rz + 1]
\end{aligned}$$

$$[x^* \ y^* \ z^* \ 1] = \left[\frac{x}{px + qy + rz + 1} \quad \frac{y}{px + qy + rz + 1} \quad \frac{z}{px + qy + rz + 1} \quad 1 \right]$$

Точки схода лежат на всех трех осях:

$$[1/p \ 0 \ 0 \ 1], [0 \ 1/q \ 0 \ 1], [0 \ 0 \ 1/r \ 1].$$

При построении перспективных проекции для получения "правильных" (реалистических) изображений часто полезно выполнить ряд предварительных аффинных преобразований поворотов вокруг координатных осей и смещения. При этом может измениться вид перспективы.

Повернем единичный куб вокруг оси y на угол Θ и сместим его к точке $[l \ m \ n]$. Затем построим одноточечную перспективную проекции с центром в точке k на оси z на плоскости $z=l$.

Матрица преобразования

$$\begin{bmatrix} \cos \Theta & 0 & -\sin \Theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin \Theta & 0 & \cos \Theta & 0 \\ l & m & n & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{k} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \cos \Theta & 0 & -\sin \Theta & \frac{-1}{k} \sin \Theta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin \Theta & 0 & \cos \Theta & \frac{1}{k} \cos \Theta \\ l & m & n & \frac{n}{k} + 1 \end{bmatrix}$$

дает двухточечную перспективу.

При этом линии, которые были параллельны оси y , остались параллельны, а линии, которые были параллельны осям x и z , сходятся в точках $[-k \cdot \operatorname{ctg} \Theta \ 0]$ и $[k \cdot \operatorname{ctg} \Theta \ 0]$ на оси x .

Трехточечная перспектива получается, если предварительно выполнено вращение вокруг двух координатных осей, например, на угол Θ вокруг оси y и угол Φ вокруг оси x .