7 Преобразования в пространстве

Процесс вывода 3-хмерной графической информации является более сложным, чем процесс двумерного отображения. Это связано с тем, что экран компьютера – это плоскость и в процессе визуализации трехмерная информация должна быть преобразована в двумерную. Это осуществляется с помощью проекций. При этом преобразования трехмерной информации осуществляется в трехмерном пространстве, а построение проекции необходимо производить непосредственно перед визуализацией.

Рассмотрим сначала способы преобразования трехмерной информации. Для этого обобщим результаты, полученные для плоскости, на трехмерный случай.

Точка в 3-хмерном пространстве [x y z] с помощью однородных координат представляется 4-хмерным вектором [x y z 1] или в общем случае $\begin{bmatrix} \tilde{x} & \tilde{y} & \tilde{z} & h \end{bmatrix}$.

Преобразование в пространстве однородных координат описываются соотношением:

[x* y* z* 1] = [x y z 1] * T,

где [x* y* z* 1] – новые координаты точки;

[x y z 1] - старые координаты точки;

T – матрица преобразования

Матрица преобразования T для 3-хмерных однородных координат имеет размер 4x4 и в общем случае записывается следующим образом:

$$T = \left[\begin{array}{ccc|c} a & b & c & p \\ d & e & f & q \\ h & i & j & r \\ \hline l & m & n & s \end{array}\right]$$

Данную матрицу можно представить как совокупность 4-х частей:

1) матрица $\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ h & i & j \end{bmatrix}$ - осуществляет покоординатное изменение масштаба, сдвиг и вращение

2) вектор $\begin{bmatrix} l & m & n \end{bmatrix}$ - осуществляет перенос.

3) элементы $\begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix}$ - осуществляют преобразование в перспективе

4) элемент *[s]* – общее изменение масштаба.

7.1 Простейшие преобразования в пространстве

Рассмотрим простейшие 3-хмерные преобразования.

1) ***Покоординатное изменение масштаба*** выполняется с помощью диагональных элементов матрицы Т.

$$\begin{bmatrix} x & y & z & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & j & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax & ey & jz & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^* & y^* & z^* & 1 \end{bmatrix}$$

2) Общее изменение масштаба

$$\begin{bmatrix} x & y & z & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & z & s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{x}{s} & \frac{y}{s} & \frac{z}{s} & 1 \end{bmatrix}$$

3) ***Сдвиг и смещение.*** За преобразование сдвига отвечают недиагональные элементы верхней левой подматрицы размером 3x3.

$$[x \quad y \quad z \quad 1] * \begin{bmatrix} 1 & b & c & 0 \\ d & 1 & f & 0 \\ h & i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [x + dy + hz \quad bx + y + iz \quad cx + fy + z \quad 1]$$

4) ***Вращение вокруг координатных осей.*** Вращение осуществляется в положительном направлении. Положительным направлением считается направление против часовой стрелки, если смотреть вдоль оси вращения к началу координат.

Вращение вокруг оси OX на угол φ осуществляется с помощью матрицы T:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ 0 & -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Если φ = 90º, то $T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Вращение вокруг оси OY

$$T = \begin{bmatrix} \cos\varphi & 0 & -\sin\varphi & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin\varphi & 0 & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Вращение вокруг оси OZ

$$T = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

5) ***Отображение относительно координатных плоскостей.***

Отображение относительно плоскости XOY меняет лишь знак z-координаты точек. Таким образом, матрица преобразования имеет следующий вид:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Отображение относительно плоскости YOZ

$$T = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Отображение относительно плоскости XOZ

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

6) ***Пространственный перенос.***

Трехмерный линейный перенос изображения определяется следующей матрицей:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ l & m & n & 1 \end{bmatrix}$$

7.2 Трехмерное вращение вокруг произвольной оси

В двумерном случае вращение вокруг произвольной точки (оси) осуществлялось путем композиции преобразований:

1) перенос точки пересечения оси с плоскостью XOY в начала координат

2) вращение вокруг оси (вокруг начала координат)

3) перенос точки пересечения в исходное положение

В трехмерном пространстве ставится задача вращения вокруг произвольной оси. Как и для двумерного случая метод заключается в последовательном выполнении переноса, вращения вокруг оси, проходящей через начало координат, и обратного переноса. Однако при этом ось, проходящая через начало координат, может иметь произвольное направление.

Итак, если ось, вокруг которой выполняется вращение проходит через точку

$A = [l \;\; m \;\; n]$, то матрица преобразования однородных координат определяется следующим образом:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -l & -m & -n & 1 \end{bmatrix} * R * \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ l & m & n & 1 \end{bmatrix},$$

где R – матрица вращения вокруг оси произвольного направления, проходящей через начало координат.

Определим элементы матрицы R. Направление произвольной оси, проходящей через начало координат, удобно определять через так называемые направляющие косинусы. Единичный вектор направления задается как (рис.7.1)

$$\overline{n} = n_1 i + n_2 j + n_3 k,$$

где $n_1 = \cos\alpha, n_2 = \cos\beta, n_3 = \cos\gamma$ - направляющие косинусы,

или в векторной форме $\overline{n} = [n_1 \quad n_2 \quad n_3]$; $\quad |\overline{n}| = 1$

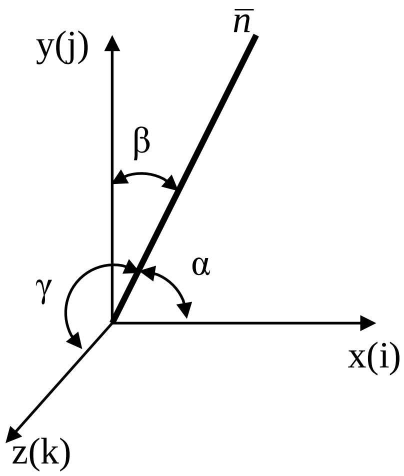

Рисунок 7.1

Матрица R вращения на угол φ вокруг оси $\overline{n} = [n_1 \quad n_2 \quad n_3]$ (ось проходит через начало координат) имеет следующий вид:

$$R = \begin{bmatrix} n_1^2 + \left(1 - n_1^2\right)\cos\varphi & n_1 n_2 (1 - \cos\varphi) + n_3 \sin\varphi & n_1 n_3 (1 - \cos\varphi) - n_2 \sin\varphi & 0 \\ n_1 n_2 (1 - \cos\varphi) - n_3 \sin\varphi & n_2^2 + \left(1 - n_2^2\right)\cos\varphi & n_2 n_3 (1 - \cos\varphi) + n_1 \sin\varphi & 0 \\ n_1 n_3 (1 - \cos\varphi) + n_2 \sin\varphi & n_2 n_3 (1 - \cos\varphi) - n_1 \sin\varphi & n_3^2 + \left(1 - n_3^2\right)\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

В качестве примера рассмотрим вращение на угол φ вокруг оси *Z*. При этом $n_1 = 0, n_2 = 0, n_3 = 1$

$$R = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

то есть это тот же самый результат, который был получен ранее.