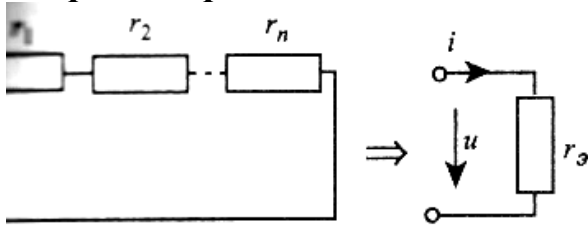


Коваленко В.Е. сентябрь 2021г.

## Занятие на Эквивалентные преобразования.

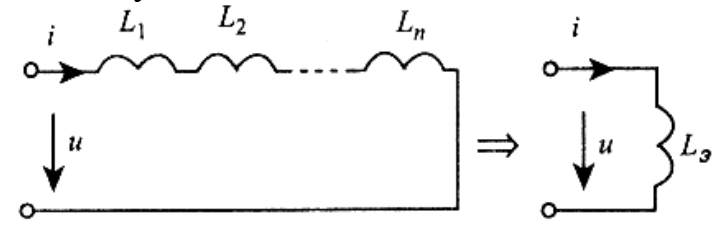
### 1. Расчет эквивалентных параметров соединений элементов при последовательном соединении.

для резисторов



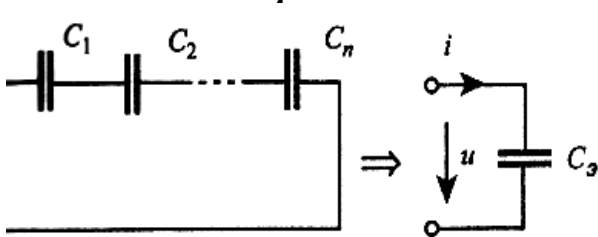
$$r_{\text{э}} = \sum_{k=1}^n r_k .$$

для индуктивностей



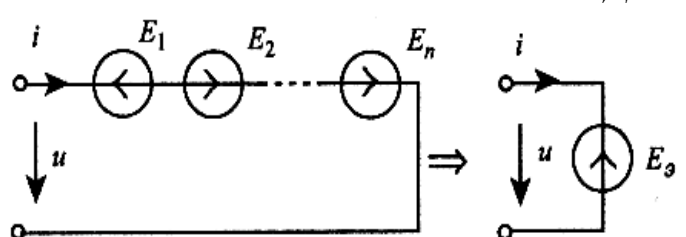
$$L_{\text{э}} = \sum_{k=1}^n L_k ,$$

для конденсаторов



$$1/C_{\text{э}} = \sum_{k=1}^n (1/C_k)$$

для идеальных источников ЭДС

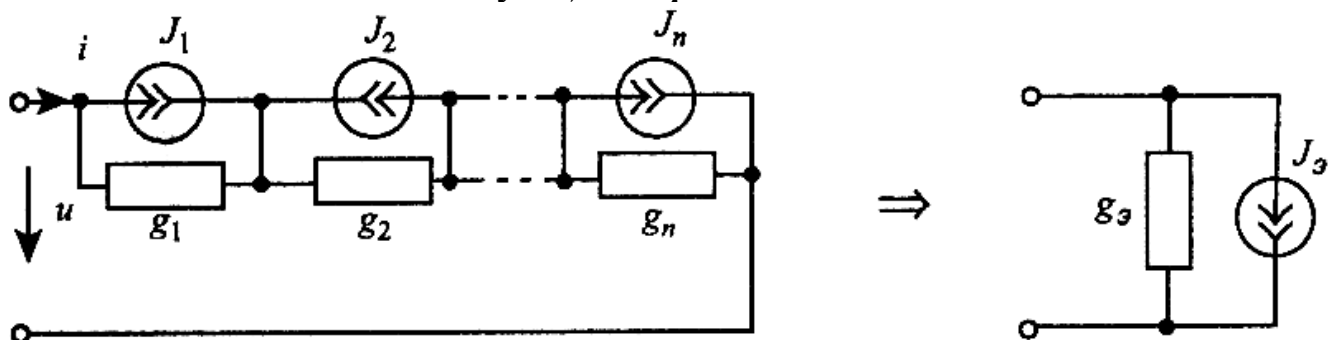


$$E_{\text{э}} = \sum_{k=1}^n E_k$$

знак плюс в

сумме если направления эквивалентного источника совпадает с направлением источника в соединении, если противоположно, то минус.

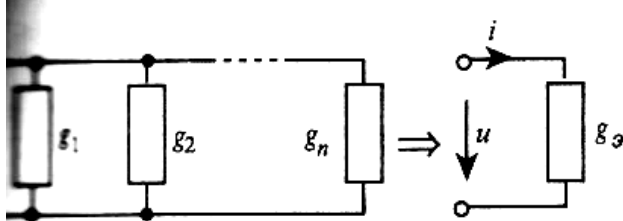
для реальных источников напряжения представленных через идеальные источники тока с соответствующими проводимостями.



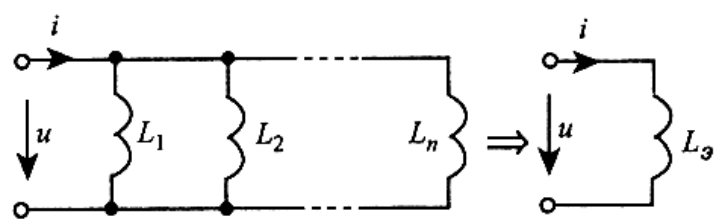
$$1/g_{\Sigma} = \sum_{k=1}^n 1/g_k \quad J_{\Sigma}/g_{\Sigma} = \sum_{k=1}^n (J_k/g_k)$$

2. Расчет эквивалентных параметров при параллельном соединении элементов.

для резисторов



для индуктивностей

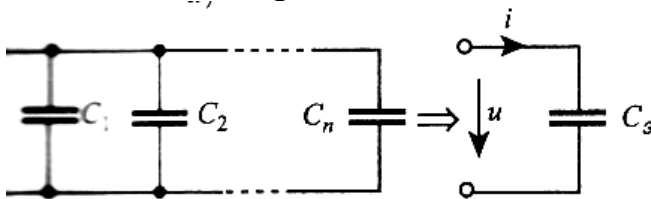


$$1/r_k = \sum_{k=1}^n 1/r_k$$

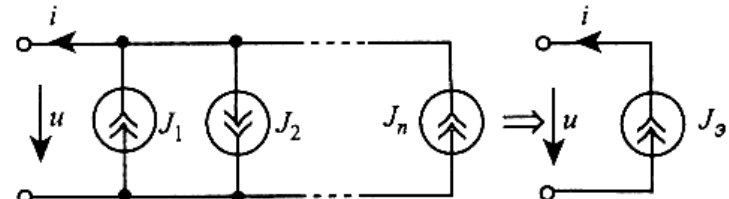
$$1/L_{\Sigma} = \sum_{k=1}^n 1/L_k$$

где  $r_k = 1/g_k$ ;  $r_{\Sigma} = 1/g_{\Sigma}$  - соответственно сопротивления составляющих элементов и эквивалентного.

для конденсаторов



для идеальных источников тока

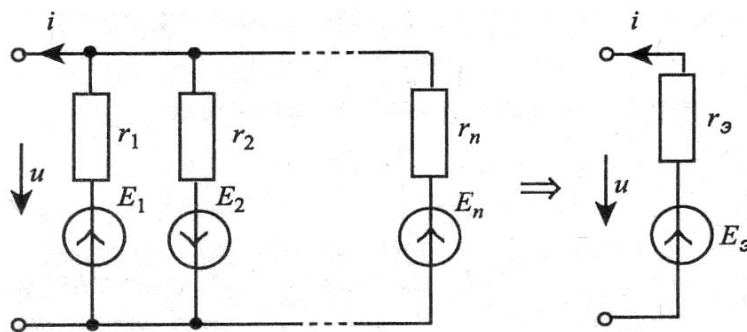


$$C_{\Sigma} = \sum_{k=1}^n C_k$$

$$J_{\Sigma} = \sum_{k=1}^n J_k$$

знак плюс в сумме если направления эквивалентного источника совпадает с направлением источника в соединении, если противоположно то минус.

для реальных источников напряжения представленных через идеальные источники ЭДС с соответствующими сопротивлениями.

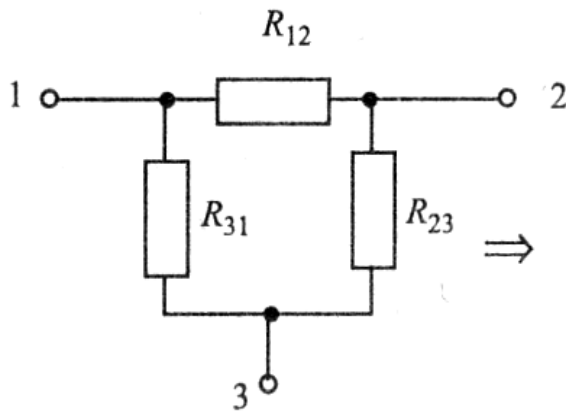


$$1/r_{\Sigma} = \sum_{k=1}^n 1/r_k,$$

$$E_{\Sigma}/r_{\Sigma} = \sum_{k=1}^n (E_k/r_k).$$

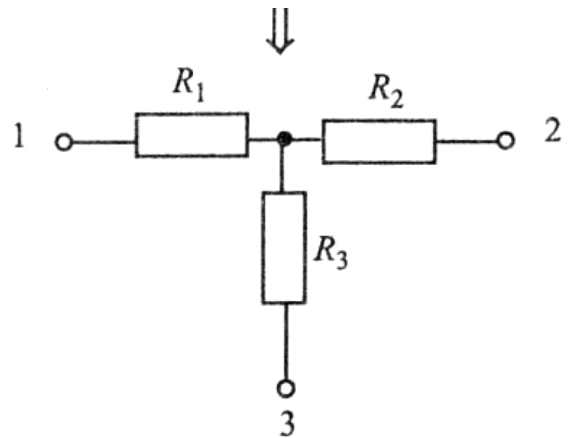
### 3. Преобразования элементов, соединенных, по схемам звезды и треугольника.

#### Сопротивлений

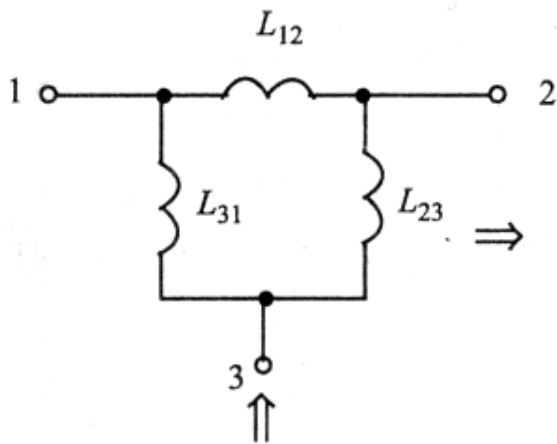


$$\begin{cases} R_1 = (R_{12}R_{31}) / (R_{12} + R_{23} + R_{31}) \\ R_2 = (R_{23}R_{12}) / (R_{12} + R_{23} + R_{31}) \\ R_3 = (R_{31}R_{23}) / (R_{12} + R_{23} + R_{31}) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} R_{12} = R_1 + R_2 + (R_1 R_2) / R_3 \\ R_{23} = R_2 + R_3 + (R_2 R_3) / R_1 \\ R_{31} = R_3 + R_1 + (R_3 R_1) / R_2 \end{cases} \Leftarrow$$

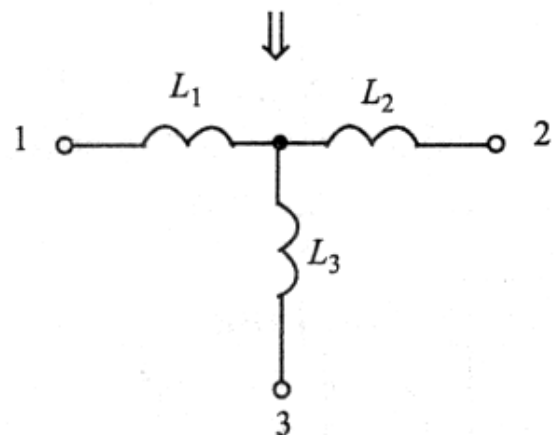


#### Индуктивностей

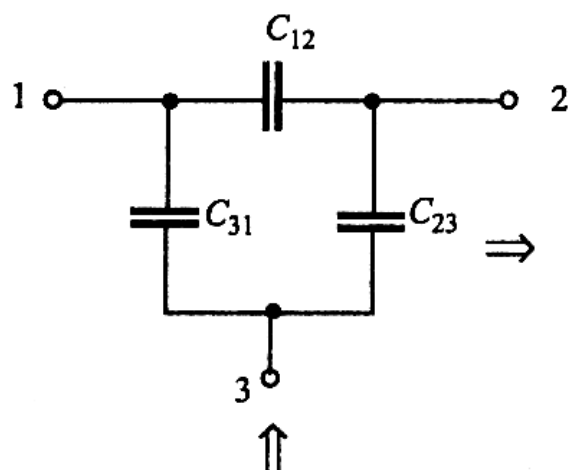


$$\begin{cases} L_1 = (L_{12}L_{31}) / (L_{12} + L_{23} + L_{31}) \\ L_2 = (L_{23}L_{12}) / (L_{12} + L_{23} + L_{31}) \\ L_3 = (L_{31}L_{23}) / (L_{12} + L_{23} + L_{31}) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} L_{12} = L_1 + L_2 + (L_1 L_2) / L_3, \\ L_{23} = L_2 + L_3 + (L_2 L_3) / L_1, \\ L_{31} = L_3 + L_1 + (L_3 L_1) / L_2. \end{cases} \Leftarrow$$

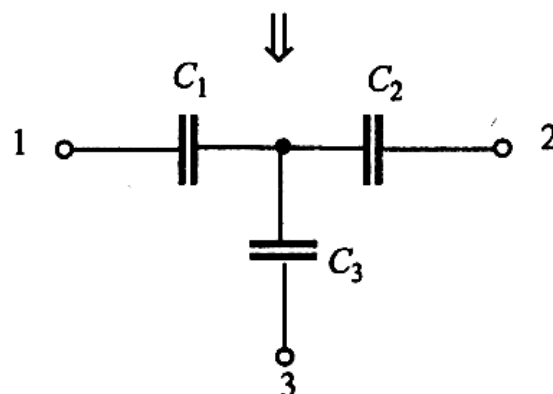


## Конденсаторов



$$\begin{cases} C_1 = C_{31} + C_{12} + (C_{31}C_{12})/C_{23} \\ C_2 = C_{12} + C_{23} + (C_{12}C_{23})/C_{31} \\ C_3 = C_{23} + C_{31} + (C_{23}C_{31})/C_{12} \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_{12} = C_1C_2/(C_1 + C_2 + C_3) \\ C_{23} = C_2C_3/(C_1 + C_2 + C_3) \\ C_{31} = C_3C_1/(C_1 + C_2 + C_3) \end{cases} \Leftarrow$$



## Правило растекания тока.

Ток подтекающий к двум сопротивления включенных параллельно делятся между ветвями по следующему правилу:

*Ток в одной из ветвей равен току подтекающему умноженному на сопротивление противоположной ветви делённое на сумму сопротивлений ветвей.*

Покажем это!

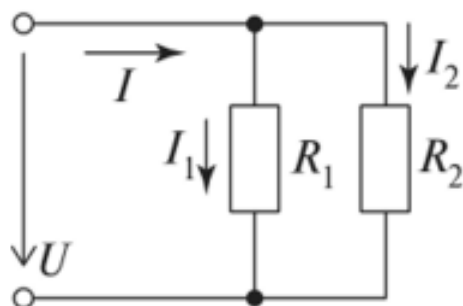
Для нахождения токов  $I_1$  и  $I_2$  воспользуемся законом Ома, но для начала найдем эквивалентное сопротивление для параллельного соединения.

$$R = \frac{R_1R_2}{R_1 + R_2}$$

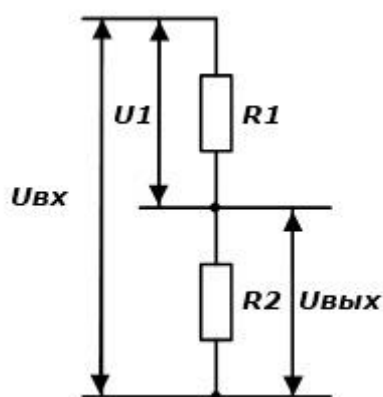
$$U = IR = I \frac{R_1R_2}{R_1 + R_2}$$

$$I_1 = \frac{U}{R_1} = \frac{IR_2}{R_1 + R_2}$$

$$I_2 = \frac{U}{R_2} = \frac{IR_1}{R_1 + R_2}$$



**Делитель напряжения** – это устройство, применяемое в схемотехнике для получения меньшего напряжения из большего.



Простейший делитель напряжения, представляет из себя два последовательно включенных регулируемых резистора, такой делитель называется резистивным. Участки цепи, в которых заключены резисторы, называются плечами.

Так как резисторы соединены последовательно, то ток через них протекает один и тот же, а значит, с помощью закона Ома, падение напряжения на каждом резисторе можно

выразить как:

$$U_1 = IR_1$$

$$U_{\text{вых}} = IR_2$$

Если разделить первое выражение на второе, то получим:

$$\frac{U_1}{U_{\text{вых}}} = \frac{R_1}{R_2}$$

Входное напряжение равно сумме падений напряжений на первом и втором резисторах

$$U_{\text{вх}} = I(R_1 + R_2)$$

А так как выходное напряжение равно

$$U_{\text{вых}} = IR_2$$

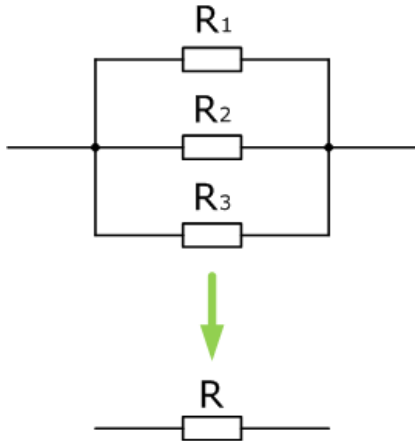
можем найти, как соотносятся входное и выходное напряжение

$$I = \frac{U_{\text{вх}}}{R_1 + R_2}$$

$$U_{\text{вых}} = IR_2 = U_{\text{вх}} \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

Рассмотрим примеры решений задач при помощи эквивалентных преобразований.

Пример 1. Определит эквивалентное сопротивление цепи изображённой на рисунке. Если  $R_1=10\text{ Ом}$ ,  $R_2=30\text{ Ом}$ ,  $R_3=105\text{ Ом}$ .

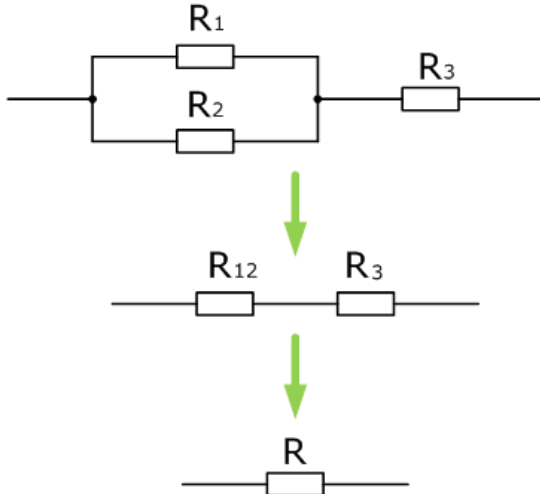


В данном примере три сопротивления включены параллельно друг другу. Тогда общее сопротивление будет равно

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

$$R = \frac{R_1 R_2 R_3}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_3} = \frac{10 * 30 * 105}{10 * 30 + 30 * 105 + 10 * 105} = 7\text{ Ом}$$

Пример 2. Определит эквивалентное сопротивление цепи изображённой на рисунке. Если  $R_1=10\text{ Ом}$ ,  $R_2=30\text{ Ом}$ ,  $R_3=105\text{ Ом}$ .



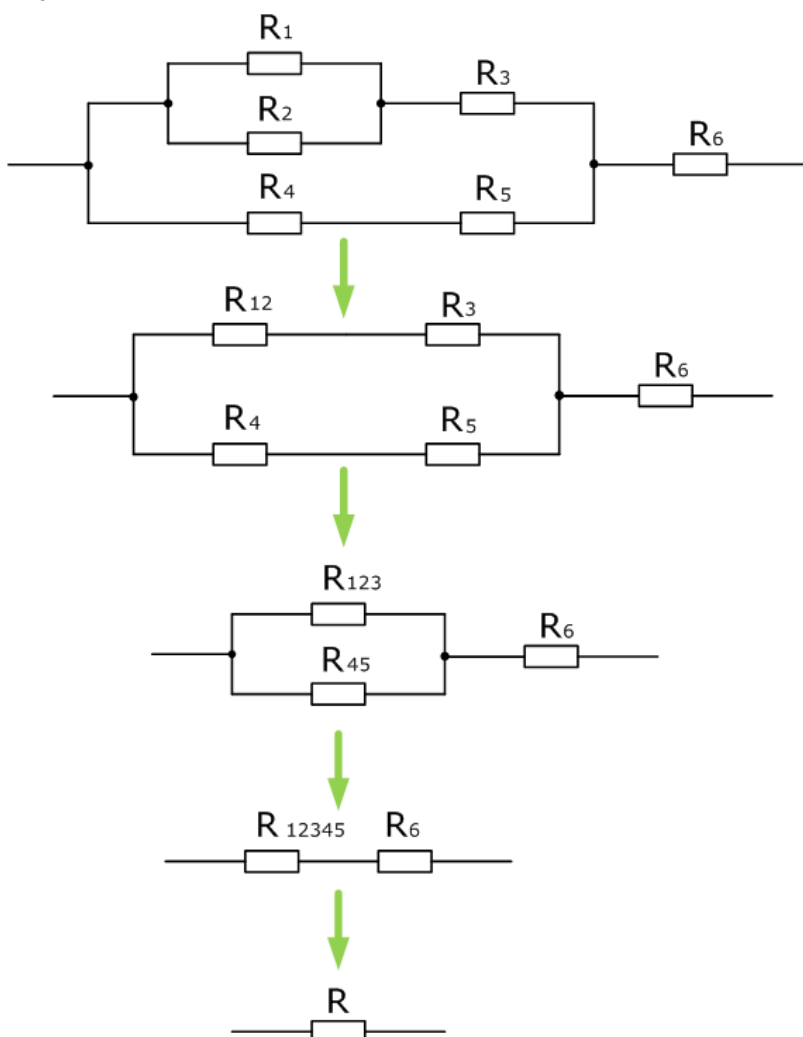
Чтобы рассчитать общее сопротивление смешанного соединения элементов, надо выделить участки с чисто последовательным и чисто параллельным соединением.

Для нашей задачи необходимо для начала найти общее сопротивление резисторов  $R_1$  и  $R_2$  соединенных параллельно, а затем общее сопротивление, как сумму  $R_{12}$  и  $R_3$  соединенных последовательно.

$$R_{12} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{10 * 30}{10 + 30} = 7,5\text{ Ом}$$

$$R = R_{12} + R_3 = 7,5 + 105 = 112,5\text{ Ом}$$

Пример 3. Определит эквивалентное сопротивление цепи изображённой на рисунке. Если  $R_1=10\text{ Ом}$ ,  $R_2=30\text{ Ом}$ ,  $R_3=105\text{ Ом}$ ,  $R_4=20\text{ Ом}$ ,  $R_5=40\text{ Ом}$ ,  $R_6=15\text{ Ом}$ .



Данная электрическая цепь сложнее, чем предыдущие, но как можно увидеть, она также состоит из последовательно или параллельно соединенных сопротивлений, которые можно постепенно сворачивать, приводя цепь к единственному эквивалентному сопротивлению  $R$ .

$$R_{12} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{10 * 30}{10 + 30} = 7,5\text{ Ом}$$

$$R_{123} = R_{12} + R_3 = 7,5 + 105 = 112,5\text{ Ом}$$

$$R_{45} = R_4 + R_5 = 20 + 40 = 60\text{ Ом}$$

$$R_{12345} = \frac{R_{123} R_{45}}{R_{123} + R_{45}} = \frac{112,5 * 60}{112,5 + 60} \approx 39,1\text{ Ом}$$

$$R = R_{12345} + R_6 = 39,1 + 15 = 54,1\text{ Ом}$$

Путем сворачивания цепи с помощью преобразований последовательно и параллельно соединенных проводников, можно максимально упростить для дальнейшего расчета сколь угодно сложную схему. Исключением

служат цепи содержащие сопротивления, соединенные по схеме звезда и треугольник.

Пример 4. (пример определения без численных значений параметров элементов)

**Определить входное сопротивление для схемы на рисунке ниже со стороны источника питания с напряжением  $U$ .**

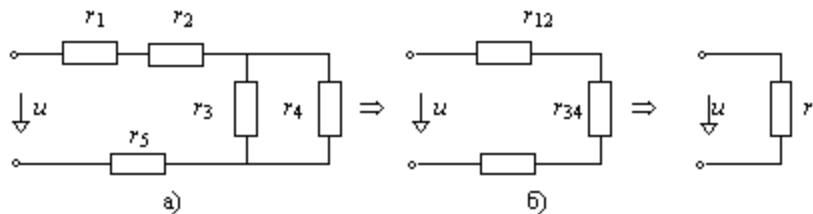


Рис. Последовательность упрощения разветвленной цепи

Решение рекомендуем начинать с упрощения удаленных от источника питания элементов. На первом этапе объединяем последовательно соединенные элементы  $r_1$  и  $r_2$  и параллельно соединенные  $r_3$  и  $r_4$ :

$$r_{12} = r_1 + r_2; \quad r_{34} = \frac{r_3 r_4}{r_3 + r_4}.$$

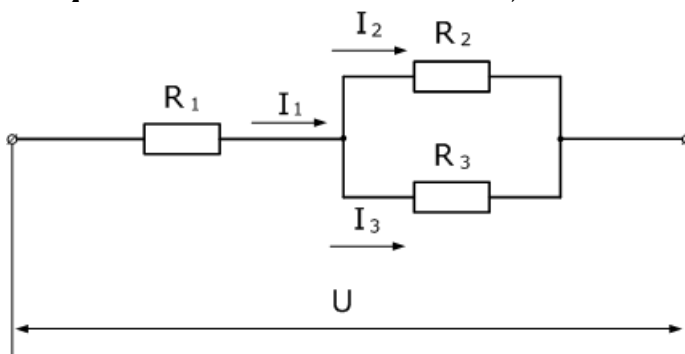
Схема упрощается и на рис.б принимает вид последовательного соединения трёх элементов. На втором этапе суммируем  $r_{12}$ ,  $r_{34}$  и  $r_5$  (рис. с одним резистором):

$$r_3 = r_{12} + r_{34} + r_5.$$

В результате вся совокупность резистивных элементов сведена к одному эквивалентному, которое и будет входным сопротивлением цеп

### Пример задачи 1.

**В электрической цепи, изображенной на схеме  $R_1=50$  Ом,  $R_2=180$  Ом,  $R_3=220$  Ом. Найти мощность, выделяемую на резисторе  $R_1$ , ток через резистор  $R_2$ , напряжение на резисторе  $R_3$ , если известно, что напряжение на зажимах цепи 100 В.**



Чтобы рассчитать мощность постоянного тока, выделяемую на резисторе  $R_1$ , необходимо определить ток  $I_1$ , который является общим для всей цепи.



Зная напряжение на зажимах и эквивалентное сопротивление цепи, можно его найти.

Эквивалентное сопротивление и ток в цепи

$$R = R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} = 50 + \frac{180 * 220}{180 + 220} = 149 \text{ Ом}$$

$$I_1 = \frac{U}{R} = \frac{100}{149} \approx 0.67 \text{ А}$$

Отсюда мощность, выделяемая на  $R_1$

$$P = I^2 R_1 = 0.67^2 * 50 \approx 22,5 \text{ В}$$

Ток  $I_2$  определим с помощью формулы делителя тока, учитывая, что ток  $I_1$  для этого делителя является общим

$$I_2 = \frac{I_1 R_3}{R_2 + R_3} = \frac{0.67 * 220}{180 + 220} = 0,369 \text{ А}$$

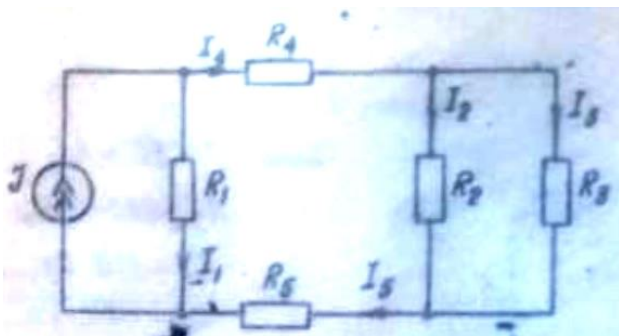
Так как, напряжение при параллельном соединении резисторов одинаковое, найдем  $U_3$ , как напряжение на резисторе  $R_2$

$$U_3 = U_2 = I_2 R_2 = 0.37 * 180 = 66.4 \text{ В}$$

Таким образом, производится расчет простых цепей постоянного тока.

### Пример задачи 2.

**Определить токи  $I_1, I_2, I_3, I_4, I_5$  для схем ниже . Если дано  $R_1= 10 \text{ кОм}$ ,  $R_2= 12 \text{ кОм}$ ,  $R_3= 6 \text{ кОм}$ ,  $R_4= 0,5 \text{ кОм}$ ,  $R_5= 1,5 \text{ кОм}$ ,  $J= 120 \text{ мА}$ .**



Решение: Для решения задачи используем эквивалентные преобразования, правило растекания тока и правило Кирхгофа.

По закону Кирхгофа

$$I_4 = I_2 + I_3; \quad I_5 = I_2 + I_3.$$

Для определения токов  $I_1$  и  $I_4$  необходимо цепь с резисторами  $R_4, R_2, R_3$  и  $R_5$  заменить эквивалентом. Видно, что  $R_2, R_3$  соединены параллельно друг с другом, и они последовательно включены с  $R_4, R_5$ .

Обозначим сопротивление эквивалента  $R_{4235}$ , а сопротивление параллельного соединения  $R_{23}$ .

Тогда,

$$R_{23} = R_2 * R_3 / (R_2 + R_3) = 4 \text{ кОм}; \quad R_{4235} = R_4 + R_{23} + R_5 = 6 \text{ кОм}.$$

Определяем токи, используя правило растекания тока и правило Кирхгофа.

$$I_1 = J * R_{4235} / (R_1 + R_{4235}) = 45 \text{ мА}; \quad I_4 = I_5 = J - I_1 = 75 \text{ мА};$$

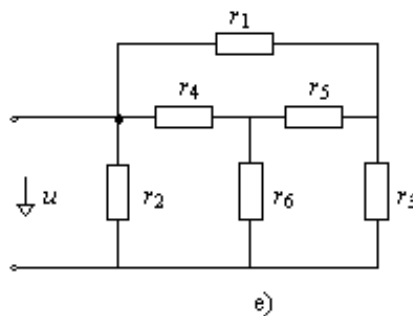
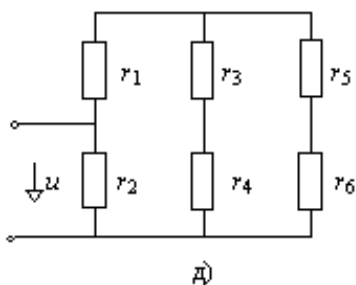
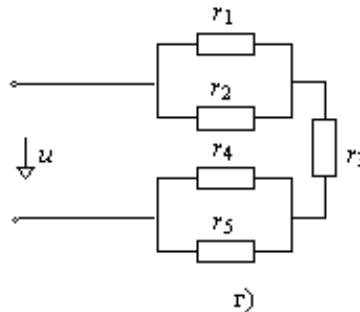
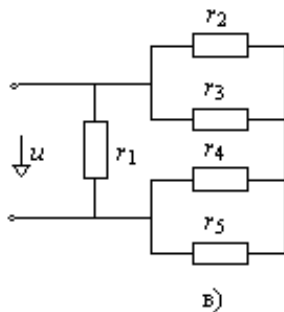
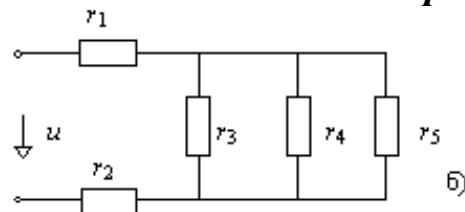
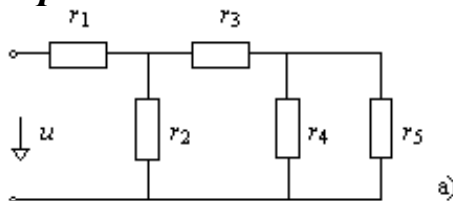
$$I_2 = I_4 * R_3 / (R_2 + R_3) = 25 \text{ мА}; \quad I_3 = I_4 - I_2 = 50 \text{ мА};$$

Задача решена.

## Задачи для самостоятельного решения.

### Задание 1 (а,б,в,г,д,е).

Определить входные сопротивления для схем на рисунках а,б,в,г,д,е



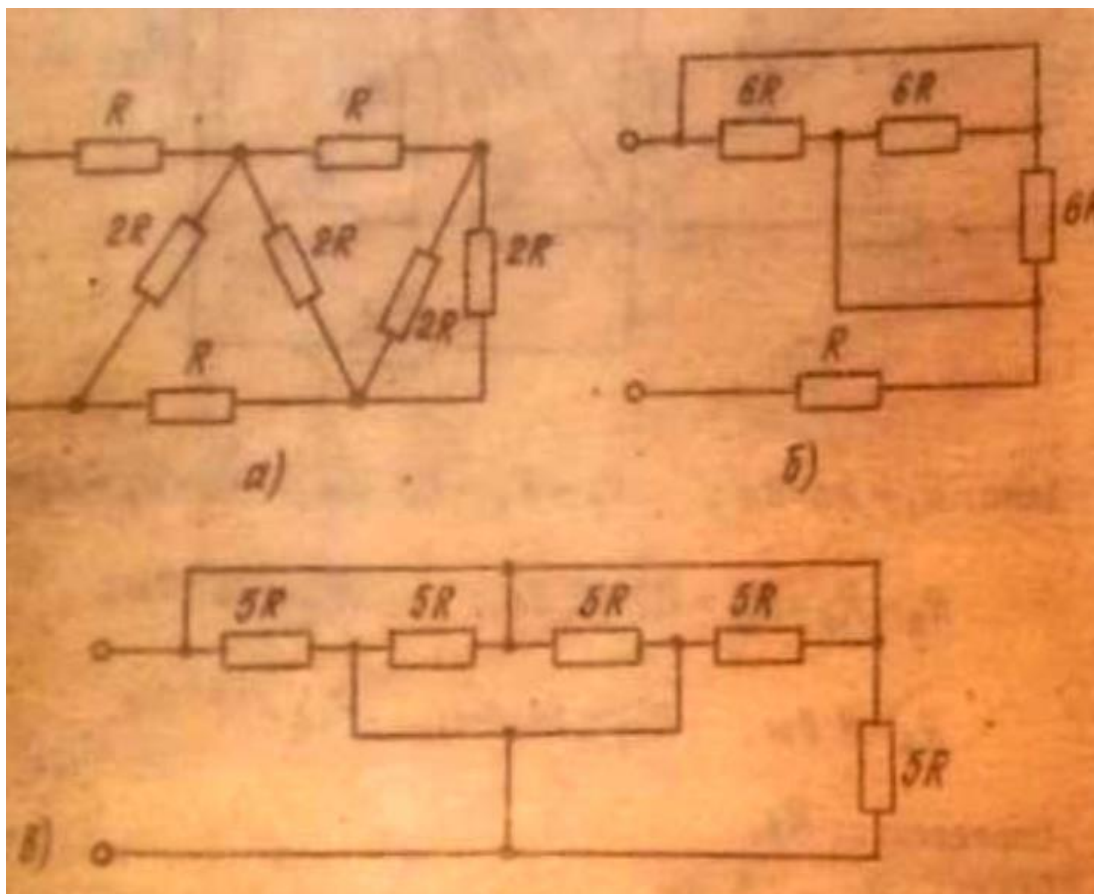
Встречаются схемы, на которых визуально трудно понять только параллельное или только последовательное соединение.

При нахождении эквивалентных параметров таких схем для получения навыков необходимо вначале все одинаковые соединения элементов обозначить символами (буквы, цифры) и перерисовать схему, исключая

ветви без элементов. Строите цепь от одного из входных зажимов, постепенно включая элементы, имеющие один и тот же символ(буквы, цифры). Получим цепь наподобие схем изображенных в примерах.

### Задание 2 (а,б,в).

Определить входные сопротивления для схем на рисунках а,б,в.



### Задание 3.

Определить показания идеальных амперметров  $I_{A1}$  и  $I_{A2}$  для изображённой схемы. Если известно значения  $R_3 = 600 \text{ Ом}$ ,  $R_4 = 300 \text{ Ом}$ ,  $R_5 = 800 \text{ Ом}$ ,  $J = 60 \text{ мА}$  (внутреннее сопротивление идеальных амперметров равно нулю).

