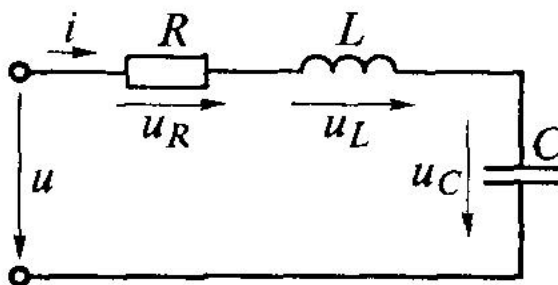


ЛЕКЦИЯ 4

Анализ цепи переменного тока при последовательном включении элементов резистора, катушек индуктивности и емкости. (RLC)

Даны значения R, L, C
и $U(t) = U_m \cdot \sin(\omega t)$

Найти $i(t)$ (отклик цепи) - ?



РЕШЕНИЕ:

Ищем значение мгновенного тока в виде $i(t) = I_m \cdot \sin(\omega t - \varphi)$

так как цепь линейная то, следовательно, частота не меняется и т.о. надо определить амплитуду тока I_m и разность фаз φ .

Запишем по второму правилу Кирхгофа для схемы задачи,

$$u_R(t) + u_L(t) + u_C(t) = u(t)$$

ВСПОМНИМ ЧТО

$$u_R(t) = i(t) \cdot R, \quad u_L(t) = \frac{L \cdot di(t)}{dt}, \quad u_C(t) = \frac{1}{C} \cdot \int i(t) dt$$

в результате получим

$$iR + L \cdot \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \cdot \int i dt = U(t)$$

подставляя значение мгновенного тока в виде $i(t) = I_m \cdot \sin(\omega t - \varphi)$ это выражение, получаем

$$I_m \cdot R \cdot \sin(\omega t - \varphi) + L \cdot I_m \cdot \omega \cos(\omega t - \varphi) - I_m \cdot (1/C \omega) \cdot \cos(\omega t - \varphi) = u(t)$$

Вводим обозначения

$I_m \cdot R = U_{mR}$ - амплитуда напряжения на сопротивление,

$L \omega \cdot I_m = X_L \cdot I_m = U_{mL}$ - амплитуда напряжения на катушки индуктивности а

$X_L = L \omega$ реактивное сопротивление катушки индуктивности (реактанс катушки),

$(1/C \omega) \cdot I_m = X_C \cdot I_m = U_{mC}$ - амплитуда напряжения на конденсаторе а, $X_C = 1/C \omega$ реактивное сопротивление конденсатора,

и используя связь между Cos и Sin, заменяем Cos

$$+\cos(\omega t - \varphi) = \sin(\omega t - \varphi + \pi/2)$$

$$-\cos(\omega t - \varphi) = \sin(\omega t - \varphi - \pi/2)$$

получим следующее выражение

$$U_{mR} \cdot \sin(\omega t - \varphi) + U_{mL} \cdot \sin(\omega t - \varphi + \pi/2) + U_{mC} \cdot \sin(\omega t - \varphi - \pi/2) = U_m \cdot \sin(\omega t)$$

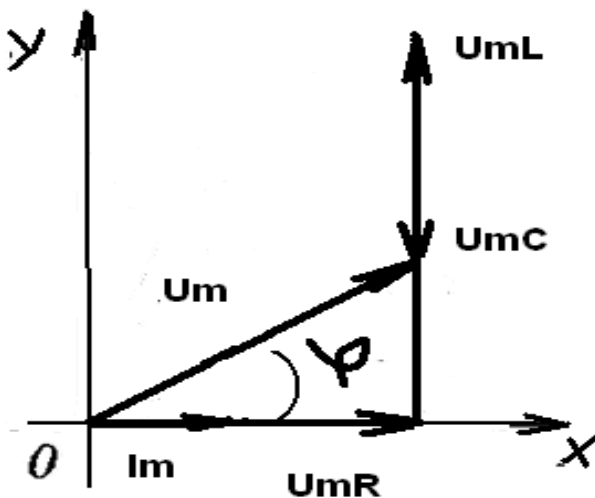
Анализируя полученное выражение, делаем следующие выводы относительно тока $i(t) = I_m \sin(\omega t - \varphi)$:

напряжение на R сдвиг фаз $= 0^\circ$, т.е. напряжение $u_R(t)$ синфазно с током;

напряжение на L $= +90^\circ$;

напряжение на C $= -90^\circ$

Для получения решения задачи, построим, используя полученные выше выводы топографическую (двигаясь по схеме наносим на векторной диаграмме вектор соответствующего напряжения учитывая угол относительно тока и откладываем следующий вектор из конца предыдущего) векторную диаграмму напряжений.



Далее используем теорему Пифагора и вводя понятие полного сопротивления цепи Z, получим:

$$\begin{aligned} U_m^2 &= U_{mR}^2 + (U_{mL} - U_{mC})^2 = R^2 * I_m^2 + (x_L - x_C)^2 * I_m^2 \\ &= (R^2 + (x_L - x_C)^2) * I_m^2 = Z^2 * I_m^2 \end{aligned}$$

обозначаем через

$$Z = \sqrt{R^2 + (x_L - x_C)^2} \quad \text{полного сопротивления последовательной RLC цепи.}$$

Если выразить амплитуду тока, мы получаем формулу похожую на закон Ома

$$I_m = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + (x_L - x_C)^2}} = \frac{U_m}{Z}$$

если слева и справа поделим на $\sqrt{2}$, получим для действующих значений

$$I = \frac{U}{\sqrt{R^2 + (x_L - x_C)^2}} = \frac{U}{Z}$$

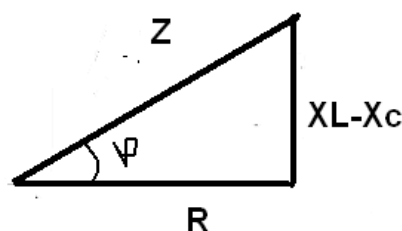
Т.о. закон Ома выполняется для цепей гармонического напряжения и тока как для амплитудных так и для действующих значений.

Мы также определили одно из требуемых значений задачи – амплитуду тока.

Чтобы определить разность фаз φ , перейдем к треугольнику сопротивлений.

Для этого все стороны треугольника напряжений на диаграмме разделим на амплитуду тока I_m и т.о. перейдем к треугольнику сопротивлений.

Теперь определяем угол сдвига фазы между током и напряжением φ .



$$\varphi = \arctg\left(\frac{(x_L - x_C)}{R}\right)$$

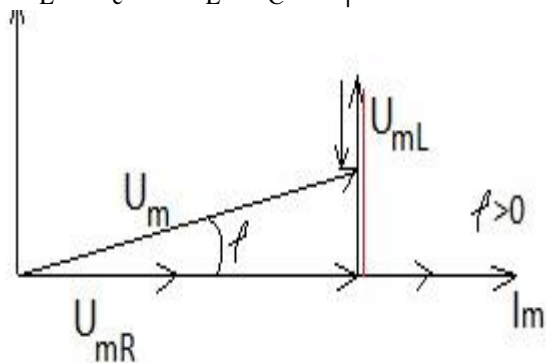
Задача решена.

Выводы из полученного результата анализа R L C цепи.

Возможно три случая в зависимости от соотношений X_L и X_C .

Которое определяет характер сопротивления электрической цепи.

$$1. x_L > x_C \rightarrow U_L > U_C \rightarrow \varphi > 0$$



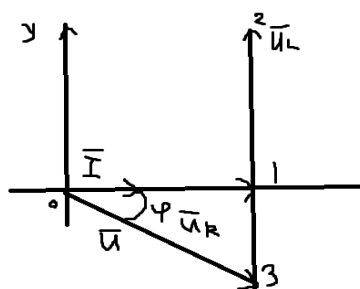
В случае идеальной R L C цепи, т.е. $R = 0$ то $\varphi = 90^\circ$, это чисто индуктивный характер сопротивления нагрузки.

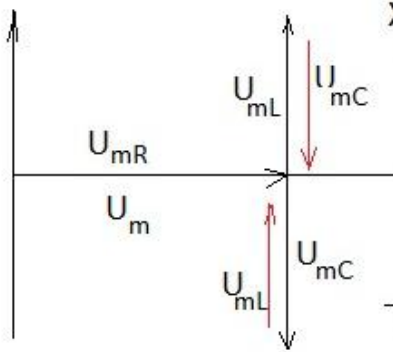
Если потери присутствуют, то цепь носит резистивно-индуктивный характер нагрузки

$$2. x_C > x_L \rightarrow U_C > U_L \rightarrow \varphi < 0$$

В случае идеальной R L C цепи, т.е. $R = 0$ то здесь $\varphi = -90^\circ$, это чисто емкостной характер сопротивления нагрузки.

Если потери присутствуют, то цепь носит резистивно-емкостной характер нагрузки





3. $x_c = x_L \rightarrow U_C = U_L$ и $\varphi = 0$

чисто резистивный характер нагрузки

Метод комплексных амплитуд (символический метод)

Метод основан на комплексном счислении и соответствующей замене мгновенных значений синусоидальных величин комплексами. Таким образом, переходим от интегрально-дифференциальных уравнений, составленных для рассматриваемой цепи по закону Ома и правилам Кирхгофа к алгебраическим уравнениям для комплексных величин.

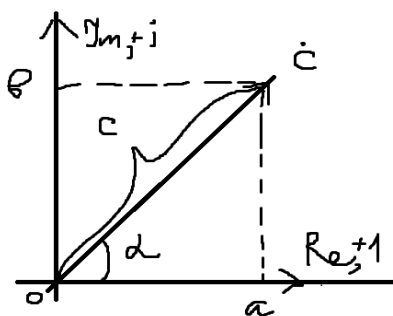
Решение для комплексов токов сводится к решению системы алгебраических уравнений и нахождению этого комплекса. Затем от комплексных величин переходят к мгновенным значениям их.

Таким образом, расчет линейной электрической цепи (ЛЭЦ) гармонического тока аналогичен расчету ЛЭЦ постоянного тока.

Вспомним комплексные числа. Так как символ i в нашем курсе обозначает ток, за мнимую единицу примем символ j .

$$j = \sqrt{-1}, \quad j^2 = -1, \quad j^3 = -j$$

Существуют три формы представления комплексных чисел.



$\dot{C} = a \pm jb$ - алгебраическая форма представления комплексного числа.

на комплексно плоскости изображено вектором, это комплексное число \dot{C} . Длина этого вектора равна C , а угол наклона этого вектора к оси «+1» равен α . Эти значения соответственно равны:

$$|\dot{C}| = C = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \alpha = \arctg(b/a)$$

$\dot{C} = C(\cos \alpha \pm j \sin \alpha)$ - Тригонометрическая форма представления комплексного числа;

$\dot{C} = C e^{\pm j\alpha}$ - Экспоненциальная форма представления комплексного числа

Связь между экспоненциальной и тригонометрической формами представления комплексного числа:

$$C \cdot e^{\pm j\alpha} = C \cdot (\cos \alpha \pm j \sin \alpha) - \text{Формула Эйлера}$$

Свойства комплексных чисел:

1. $\dot{A}j = \dot{A} e^{+j\pi/2}$ поворот комплексного числа \dot{A} на +90 градусов (против часовой стрелки) на комплексной плоскости.

$$2. -\dot{A} = \dot{A} * e^{+j\pi}$$

$$3. \dot{A} * \dot{A}^* = a^2 + b^2 = A^2$$

$\dot{A} = c + j*b$; $\dot{A}^* = c - j*b$ - комплексно сопряженное число к комплексному числу \dot{A}

\dot{A}^* - комплексно сопряженное

Свойства 1 и 2 очевидны, если использовать Формулу Эйлера.

Порядок расчета комплексным методом.

1. Переходим от мгновенных значений ЭДС, тока и напряжения к их комплексным значениям, рассматриваем далее схему с комплексными значениями идеальных источников и сопротивлений.

$$U(t) = U_m \cdot \sin(\omega t + \psi_u) \text{ — ставим в соответствие } \rightarrow U_m \cdot e^{j(\omega t + \psi_u)} = U_n \cdot e^{j\psi_u} \cdot e^{j\omega t}$$

$$U_n \cdot e^{j\psi_u} = \dot{U}_m \text{ — комплексная амплитуда напряжения.}$$

$$i(t) = I_m \cdot \sin(\omega t + \psi_i) \text{ — ставим в соответствие } \rightarrow I_m \cdot e^{j(\omega t + \psi_i)} = I_m \cdot e^{j\psi_i} \cdot e^{j\omega t},$$

$$I_m \cdot e^{j\psi_i} = \dot{I}_m \text{ — комплексная амплитуда тока.}$$

$$e(t) = E_m \sin(\omega t + \psi_e) \text{ — ставим в соответствие } \rightarrow E_m \cdot e^{j(\omega t + \psi_e)} = E_m \cdot e^{j\psi_e} \cdot e^{j\omega t}$$

$$E_m \cdot e^{j\psi_e} = \dot{E}_m \text{ — комплексная амплитуда ЭДС.}$$

Комплексная амплитуда в своём составе несёт информацию о амплитуде и фазе электрической величины, а так как цепи линейные и частота не изменяется то используем в расчётах только её.

Так же можем ввести по аналогии с действующим значением гармонических ЭДС, напряжений, тока и комплексы действующих значений ЭДС, напряжений, тока.

Очевидно что:

$$\dot{E} = E_m / \sqrt{2}; \quad \dot{U} = U_m / \sqrt{2}; \quad \dot{I} = I_m / \sqrt{2}.$$

Рассмотрим примеры перехода от мгновенных значений к их комплексам и обрано:

$U(t) = 100 \sin(\omega t - 15^\circ)$ - ставим в соответствие $\rightarrow \dot{U} = 100 * e^{-j15} / \sqrt{2}$;

$i(t) = 5 * \sin(\omega t)$ - ставим в соответствие $\rightarrow \dot{I} = 5 / \sqrt{2} * e^{j0} = 5 / \sqrt{2}$ это комплексное число только с одной реальной частью;

$U(t) = 150 * \sin(\omega t + 240^\circ)$ - ставим в соответствие $\rightarrow \dot{U}_m = 150 * e^{j240} = -150 e^{j60}$.

2. Составляем уравнение по правилам Кирхгофа и закону Ома в комплексной форме \rightarrow получаем систему уравнений для комплексов. Это уже система алгебраических уравнений для комплексных величин. Решаем систему известными способами. В результате получаем решение для комплексов.

3. Осуществляем переход от комплексов электрических величин к их мгновенным значениям (обратный переход).

Примеры обратного перехода или восстановления из комплексов мгновенных значений электрических величин:

$\dot{I} = 10 e^{j35}$ - восстанавливаем $\rightarrow i(t) = 10 \sqrt{2} * \sin(\omega t - 35^\circ)$;

$\dot{U} = 70,7 e^{j75}$ - восстанавливаем $\rightarrow u(t) = 70,7 \sqrt{2} * \sin(\omega t + 75^\circ)$,

частота в линейных цепях не меняется, поэтому её записываем такую, какой она была в источнике.

Комплексы напряжений реактивных элементов.

На катушке индуктивности L напряжение пропорционально дифференциалу от тока: $U_L = L \frac{di}{dt}$. Найдем комплекс напряжения, используя эту связь. Запишем комплекс действующего значения тока: $\dot{I} = I e^{j\psi_i} * e^{j\omega t}$.

$\dot{U}_L * e^{j\omega t} = L \frac{d\dot{I}}{dt} = L I e^{j\psi_i} * j\omega e^{j\omega t}$, так как использовать при расчётах будем только комплекс действующего значения \dot{U}_L , для справедливости выражения помножим его на $e^{j\omega t}$. Зная что $\omega L = X_L$, то следовательно комплекс напряжения равен: $\dot{U}_L = j X_L \dot{I}$

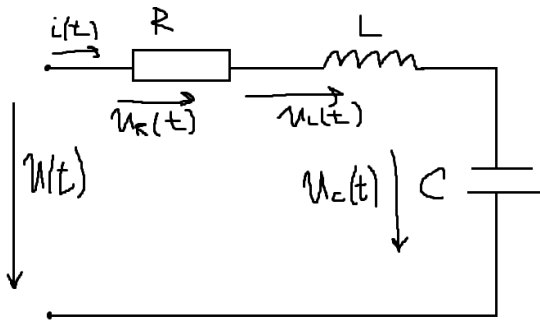
На конденсаторе C , связь напряжения с током определяется так: $U_C = \frac{1}{C} \int i(t) dt$.

Аналогично рассуждая получим:

$\dot{U}_C * e^{j\omega t} = \frac{1}{C} \int i(t) dt = \frac{I e^{j\psi_i}}{C j \omega} * e^{j\omega t}$ и так как $\frac{1}{C \omega} = X_C$

тогда $\dot{U}_C = \frac{X_C \dot{I}}{j} = -j X_C \dot{I}$

Закон Ома и правила Кирхгофа в комплексной форме.



Рассмотрим задачу, рассчитаем цепь с последовательным соединением R, L и C элементами

Дано R, L, C и $U(t) = U_m \sin(\omega t)$

Определить $i(t)$.

По 2 правилу Кирхгофа для мгновенных значений напряжений, запишем выражение:

$$U_R(t) + U_L(t) + U_C(t) = U(t)$$

$$i(t)R + L \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int i(t) dt = U(t)$$

используя связи напряжения с током, получим:

Значения тока ищем в виде $i(t) = I_m \sin(\omega t - \varphi)$ его комплекс действующего значения будет $\dot{I} = \dot{I} e^{-j\varphi}$.

комплекс действующего значения входного напряжения равен $\dot{U} = \dot{U} e^{j0} = U$

Подставляя комплексы напряжений на реактивных элементов, получим:

$$\dot{I}R + jX_L \dot{I} - jX_C \dot{I} = \dot{U}, \text{ или}$$

$\dot{I}(R + j(X_L - X_C)) = \dot{U}$ тогда для комплекса тока получаем:

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{\dot{Z}}, \quad \text{где } \dot{Z} = R + j(X_L - X_C) \text{ — комплексное полное сопротивление.}$$

Если умножить и слева и справа на $\sqrt{2}$, получим: $\dot{I}_m = \frac{\dot{U}_m}{\dot{Z}}$.

Это закон Ома в комплексной форме, он справедлив как для комплекса действующих значений так и для комплексов амплитудных значений.

Задачу мы решили, осталось перейти только к мгновенному значению тока.

$$i(t) = I_m \sin(\omega t - \varphi), \quad \text{где } I_m = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 - (X_L - X_C)^2}} = \frac{U_m}{Z}, \quad \varphi = \arctg\left(\frac{X_L - X_C}{R}\right)$$

Правила Кирхгофа в комплексной форме.

Если перейти в правилах Кирхгофа для мгновенных значениях к комплексам, то можно сформулировать правила Кирхгофа в комплексной форме в следующем форме.

Первое правило Кирхгофа:

В любом узле k электрической цепи алгебраическая сумма n комплексных токов равна 0.

Правило знака: втекающие в узел берём со знаком «+», вытекающие со знаком «-».
или в виде выражения :

$$\pm \sum_n I_k = 0$$

Второе правило Кирхгофа:

В каждом контуре цепи алгебраическая сумма m комплексов ЭДС равна алгебраической сумме n комплексов падения напряжения.

Если направление ЭДС и падения напряжения совпадают с заданным направлением обхода, то в сумме берутся со знаком «+», если нет, то «-».

или в виде выражения :

$$\pm \sum_m E_k = \pm \sum_n I_k Z_k$$

Комплексы сопротивлений и проводимости в цепях переменного тока.

На комплексной плоскости удобно строить треугольники сопротивлений.

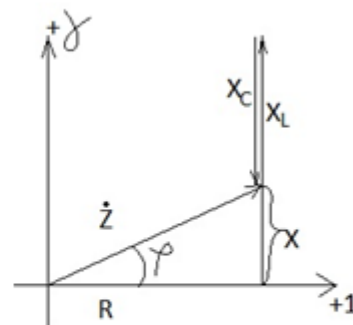
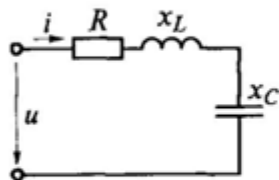
Для цепи последовательного включения R, L и C элементов, комплекс сопротивлений запишется в следующем виде:

$$\dot{Z} = R + j(X_L - X_C) = R + jX = Z e^{j\varphi}, \text{ где}$$

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$$

$$\varphi = \arctg \frac{X_L - X_C}{R} = \arctg \frac{X}{R}$$

$\varphi > 0$, резистивно-индуктивный



Комплекс проводимости, величина обратная комплексу сопротивления.

$$\dot{Y} = \frac{1}{\dot{Z}}$$

Комплекс проводимости будем записывать таким образом:

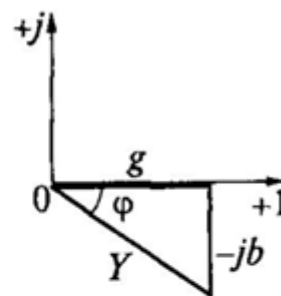
$$\dot{Y} = g - jb.$$

Выразим реальные и мнимые части комплекса

проводимости через реальные и мнимые части комплекса сопротивления.

$$\dot{Y} = g - jb$$

И покажем ЧТО $g \neq \frac{1}{R}; \quad b \neq \frac{1}{X}$



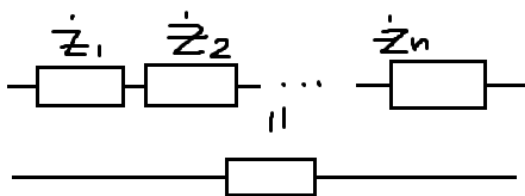
$$\begin{aligned} \dot{Y} &= \frac{1}{R + j(X_L - X_C)} \cdot \frac{R - j(X_L - X_C)}{R - j(X_L - X_C)} = \frac{R}{R^2 + (X_L - X_C)^2} - j \frac{X_L - X_C}{R^2 + (X_L - X_C)^2} \\ &= \frac{R}{\dot{Z}^2} - j \frac{(X_L - X_C)}{\dot{Z}^2} = g - j(b_L - b_C) \end{aligned}$$

$$\dot{Y} = g - jb = Y e^{-j\varphi}; \quad Y = \sqrt{g^2 + b^2}; \quad \varphi = \arctg \left(-\frac{b_L - b_C}{g} \right)$$

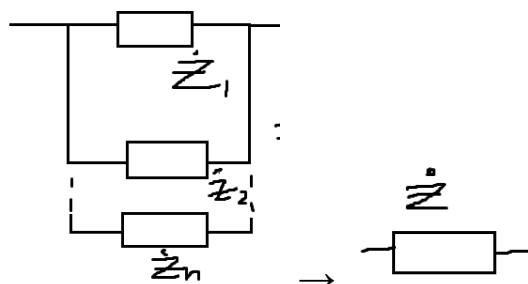
Эквивалентные преобразования для комплексных сопротивлений.

Формулы для расчёта те же, что и для простых резисторов.

Последовательное соединение.



Параллельное соединение.



$$\dot{Z} = \sum_{k=1}^n \dot{Z}_k \quad \text{для сопротивления} \quad \frac{1}{\dot{Z}} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\dot{Z}_k}$$

Через проводимости при параллельном соединении $\dot{Y} = \sum_{k=1}^n \dot{Y}_k$.

Формулы перехода от звезды к треугольнику и от треугольника к звезде такие же как и для резистивных схем. Только сопротивления в этих формулах комплексное.

Знать и помнить!!!

Расчёт эквивалентных параметров комплексного сопротивления и проводимости:

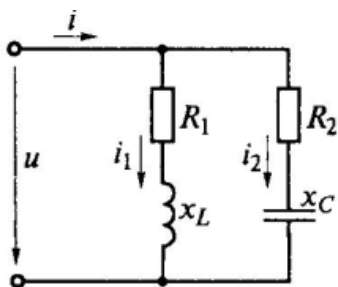
Правила расчёта эквивалентных параметров, такие же что и для обычного сопротивления и проводимости.

Т.е. эквивалентное сопротивление последовательного соединения нескольких комплексов сопротивления это сумма всех комплексов сопротивлений. А при параллельном соединении, обратное сопротивление равно сумме всех обратных сопротивлений включённых параллельно.

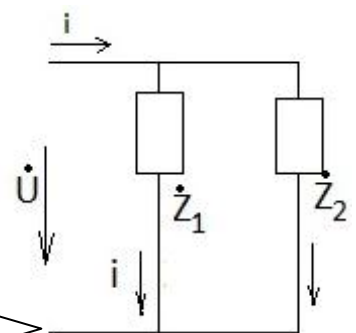
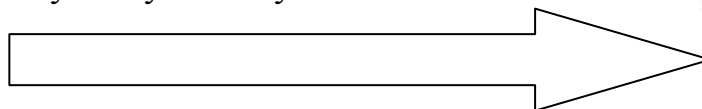
Или если использовать комплекс проводимости то эквивалентная проводимость параллельного соединения нескольких комплексов проводимости это сумма всех этих комплексов проводимости.

Пример.

Решить задачу. Найти выражения для мгновенных значений токов в ветвях схемы изображённой ниже. Дано X_L , X_C , R_1 , R_2 и $u(t) = U_m \sin \omega t$.



Решение: Переходим от мгновенных значений к комплексам и рассматриваем полученную схему.



Так как участки параллельно друг другу, следовательно напряжения на каждой ветви одинаково. Т.о. воспользуемся законом Ома для действующих значений в комплексной форме. Решим задачу двумя путями, рассчитывая эквивалентные параметры отдельно активные и реактивные проводимости и рассчитывая комплексные проводимости (через сопротивления схемы).

1. Рассчитываем эквивалентные параметры отдельно активные и реактивные проводимости

$$\text{Для L: } g_1 = \frac{R_1}{Z_1^2} = \frac{R_1}{R_1^2 + X_L^2}, \quad b_1 = \frac{X_L}{Z_1^2} = \frac{X_L}{R_1^2 + X_L^2}$$

$$\text{Для C: } g_2 = \frac{R_2}{Z_2^2} = \frac{R_2}{R_2^2 + X_C^2}, \quad b_2 = -\frac{X_C}{Z_2^2} = -\frac{X_C}{R_2^2 + X_C^2}$$

$$Y = \sqrt{g^2 + b^2}$$

$$1) g = g_1 + g_2 = R_1/X_1^2 + R_2/X_2^2;$$

$$2) b = b_1 + b_2 = X_L/Z_1^2 - X_C/Z_2^2; \quad \varphi = \arctg\left(\frac{b_1+b_2}{g_1+g_2}\right) = \arctg\frac{b}{g}$$

$$\text{Проводимость ветвей равна: } Y_1 = \sqrt{g_1^2 + b_1^2}, \quad Y_2 = \sqrt{g_2^2 + b_2^2}.$$

Тогда токи, в ветвях и входной ток используя закон Ома для действующих значений через проводимости будут равны: $I_1 = U \cdot Y_1$, $I_2 = U \cdot Y_2$, $I = U \cdot Y$.

2. Рассчитываем комплексные проводимости первого, второго участков и общую по

$$\text{формулам: } \dot{Y}_1 = g_1 + jb_1 = \sqrt{g_1^2 + b_1^2} e^{j \arctg b_1/g_1},$$

$$\dot{Y}_2 = g_2 + jb_2 = \sqrt{g_2^2 + b_2^2} e^{j \arctg b_2/g_2}, \quad \dot{Y} = \dot{Y}_1 + \dot{Y}_2.$$

Токи определяем используя закон Ома в комплексной форме:

$$\dot{I}_1 = \dot{U} \cdot \dot{Y}_1, \quad \dot{I}_2 = \dot{U} \cdot \dot{Y}_2, \quad \dot{I} = \dot{U} \cdot \dot{Y}.$$

То мы находим комплексы токов и переходим, используя полученные комплексные значения к мгновенным токам $\dot{i}(t)$, $\dot{i}_1(t)$, $\dot{i}_2(t)$.

Мощность в цепях переменного тока. Баланс мощностей.

Мощность переменного тока — величина изменяющаяся. Ее мгновенное значение определяется формулой: $p(t) = u(t) \cdot i(t)$

Рассчитаем $p(t)$, пусть $u(t)$, $i(t)$ изменяются по следующим гармоническим законам: если $u(t) = U_m \sin(\omega t)$, тогда $i(t) = I_m \sin(\omega t - \varphi)$, где φ сдвиг фазы тока относительно напряжения.

И мгновенная мощность определится выражением:

$$p(t) = u(t) \cdot i(t) = U_m \sin \omega t \cdot I_m \sin(\omega t - \varphi) = \frac{U_m I_m}{2} \cdot (\cos \varphi - \cos(2\omega t - \varphi)).$$

Мгновенная мощность имеет постоянную составляющую и переменную двойной частоты. Графики изменения u , i , p приведены на рис.1 ниже.

Обратите внимание на интервалах, когда u и i имеют одинаковое направление, мгновенная мощность положительна, энергия потребляется от источника. На интервалах, когда u и i имеют противоположное направление, мгновенная мощность отрицательна и энергия возвращается источнику.

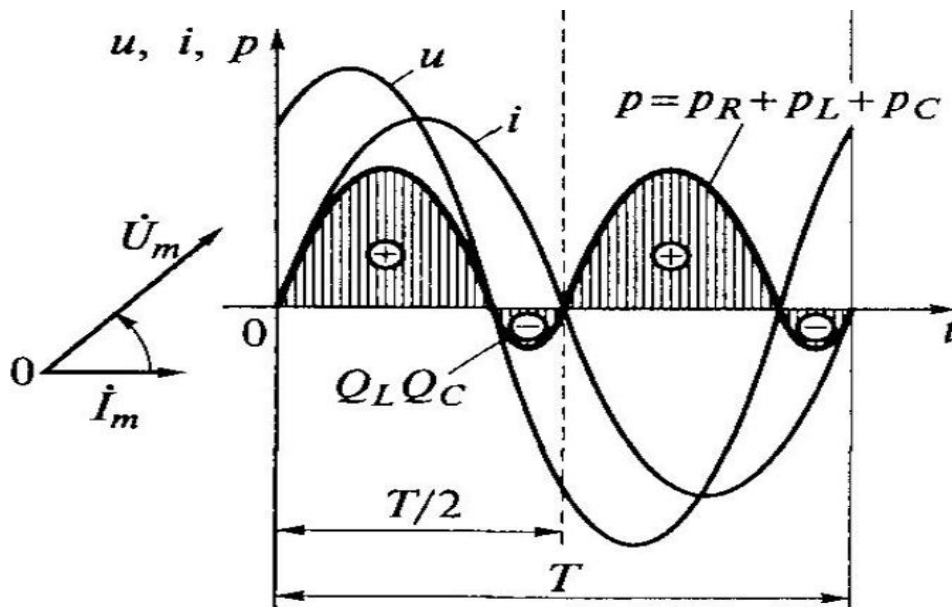


Рис. 1 Мгновенные значения напряжений, токов и мощности и соответствующая векторная диаграмма напряжений токов при смешанной нагрузке электрической цепи.

Используя связь между амплитудным значением и действующим значением, найдем среднюю мощность за период.

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt = UI \frac{1}{T} \cos \varphi * t \Big|_0^T - 0 = UI \cos(\varphi)$$

Эту мощность P называют активной мощностью. Единицы измерения P *ватт* [Вт]. Активная мощность (из выражения для P) зависит от сдвига фаз между током и напряжением. Значение $\cos(\varphi)$ называют коэффициентом мощности.

Часть мощности запасается на реактивных элементах, эту мощность обозначим Q – поэтому её называют реактивной мощностью. Единица измерения Вольт-Ампер реактивный или сокращённо [ВАр].

Она определяется следующей формулой:

$$Q = UI \sin \varphi$$

Полной мощностью будет обозначается S и определяется так:

$$S = UI = \sqrt{P^2 + Q^2}$$

Единица измерения полная мощность Вольт-Ампер или сокращённо [ВА].

Для получения высокого КПД использования мощности генератора необходимо повышать коэффициент мощности. Так как в качестве потребителей в основном участвует нагрузка индуктивного характера (обмотки двигателя, трансформатора и т.д.) следовательно φ положителен. Для уменьшения φ очевидно нужно подключить конденсатор (дающий отрицательный сдвиг) – чтоб уменьшить угол.

Наиболее благоприятное значение $\cos(\varphi) \approx 0,7-0,8$.

Баланс мощностей

Служит для проверки правильности решения задач расчёта цепей.

Сущность баланса мощностей сводится к тому, что мощность, отдаваемая в цепь источниками энергии переменного тока, полностью расходуется ее элементами.

Активная ее часть потребляется резисторами - «активными» элементами, а реактивная циркулирует через реактивные элементы.

Комплекс полной мощности источников определяется как произведения комплекса разности потенциалов на зажимах источника на сопряженный комплекс входного тока от источника в цепь:

$$\dot{S}_U = \dot{U} \dot{I}^*; \text{ если } \dot{U} = U e^{j\psi_U}; \dot{I} = I e^{j\psi_I}, \text{ тогда}$$

$$\dot{S}_U = U I e^{j(\psi_U - \psi_I)} = S_U e^{j\varphi}, \quad \dot{S}_U = P_U + jQ_U$$

$$S_U = \sqrt{P_U^2 + Q_U^2}$$

\dot{U} - комплекс разности потенциалов на зажимах источника.

\dot{I}^* - сопряженный комплекс входного тока от источника в цепь.

Для проверки решения, вначале определяют активную и реактивную мощности источника используя ниже приведенные формулы:

$$\dot{S}_U = S_U e^{j\varphi} = S_U \cos\varphi + j S_U \sin\varphi$$

$$P_U = S_U \cos\varphi$$

$$Q_U = S_U \sin\varphi$$

Затем находят P_{np} активную и Q_{np} реактивную мощности приемников, используя ниже приведенные формулы:

$$P_{np} = \sum_{k=1}^n P_{Rk} = \sum_{k=1}^n R_k I_k^2$$

$$Q_{np} = \sum_{k=1}^m Q_X = \sum_{k=1}^{mL} Q_{X_L} - \sum_{k=1}^{mC} Q_{X_C} = \sum_{k=1}^{mL} I_k^2 X_{Lk} - \sum_{k=1}^{mC} I_k^2 X_{Ck}, \text{ где}$$

R_k - активные и X_{Lk} , X_{Ck} -реактивные сопротивления в k-ой ветви, а I_k -токи соответствующей k-ой ветви.

Балансу мощностей соответствует выполнения равенств:

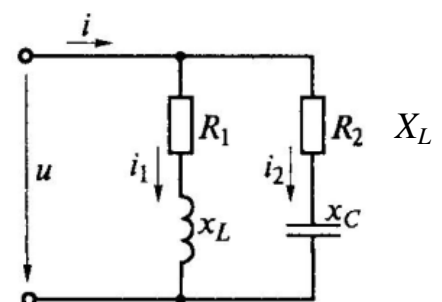
$$P_{np} = P_R = \sum_{k=1}^m I_k^2 R_k; \quad Q_{np} = Q_x = \sum_{k=1}^l I_k^2 x_{Lk} - \sum_{k=1}^r I_k^2 x_{Ck}.$$

рассмотрим на примере:

для схемы на рис. 2.

Если известны: $u(i) = 183 \sin 314t$; $R_1 = 8 \text{ Ом}$; $R_2 = 12 \text{ Ом}$; $= 6 \text{ Ом}$; $X_C = 5 \text{ Ом}$.

Найти переменные токи $i_1(t)$, $i_2(t)$, $i(t)$ и проверить решение (баланс мощностей).



Решение

Рис.2

Комплекс действующего значения напряжения для $u(t)$,будет равен:

$$\dot{U} = \frac{U_m}{\sqrt{2}} = 130.$$

Так как ветви параллельны то входное напряжение приложено к каждой из ветвей равно U , отсюда по закону Ома определяем:

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}}{\dot{Z}_1} = \frac{130}{\sqrt{R_1^2 + x_L^2} e^{j \arctg \frac{x_L}{R_1}}} = \frac{130}{10 e^{j37^\circ}} = 13 e^{-j37^\circ} \rightarrow$$
$$\rightarrow i_1(t) = 13\sqrt{2} \sin(\omega t - 37^\circ);$$

$$\dot{I}_2 = \frac{\dot{U}}{\dot{Z}_2} = \frac{130}{\sqrt{R_2^2 + x_C^2} e^{j \arctg \frac{x_C}{R_2}}} = \frac{130}{13 e^{-j22^\circ}} = 10 e^{j22^\circ} \rightarrow$$
$$\rightarrow i_2(t) = 10\sqrt{2} \sin(\omega t + 22^\circ).$$

Комплекс входного тока определяем используя первое правило Кирхгофа:

$$\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 = (10,4 - j7,8) + (9,3 + j3,74) = 19,7 - j4,06 = 20 e^{-j11,5^\circ}.$$

тогда мгновенный ток изменяется по следующему закону:

$$i(t) = 20\sqrt{2} \sin(\omega t - 11,5^\circ) = 28 \sin(314t - 11,5^\circ).$$

Определяем активную и реактивную мощности источника используя формулы, вычисляем P_u и Q_u :

$$P_u = UI \cos \varphi = 130 \cdot 20 \cos 11,5^\circ = 2548;$$

$$Q_u = UI \sin \varphi = 130 \cdot 20 \sin 11,5^\circ = 518.$$

Затем находят активную и реактивную мощности приемников, используя формулы, вычисляем P_{np} и Q_{Unp} :

$$P_{np} = P_1 + P_2 = I_1^2 R_1 + I_2^2 R_2 = 1352 + 1200 = 2552;$$

$$Q_{np} = Q_1 + Q_2 = I_1^2 x_L - I_2^2 x_C = 1014 - 500 = 514.$$

Баланс мощностей выполняется, решение выполнено правильно. Обращаю внимание что имеется различие в значения мощностей источника и приёмника, но незначительное. Это особенность баланса для цепей гармонического тока. Так как из-за перехода из одной формы представления комплексного числа к другой в процессе решения набегает ошибка.