

Лекция

тема: Цепи с взаимной индуктивностью. Воздушный трансформатор. Схемы эквивалентных преобразований цепей с индуктивной связью.

1. Цепи со взаимной индуктивностью.

Мы умеем анализировать цепи, в которых присутствует много катушек. Но при переменном напряжении возникает и переменное магнитное поле.

При изменении магнитного поля, связанного с каким-либо витком, в последнем наводится ЭДС, которое согласно закону электромагнитной индукции, определяется скоростью магнитного потока.

При определённых условиях (параметров элементов цепи и в основном катушек индуктивности, частоты изменения гармонического напряжения и особенностью цепи) этим ЭДС можно пренебречь. Но это можно сделать не всегда. Кроме того есть устройства которые в своей работе использует это явление(трансформатор). Поэтому мы проанализируем такую задачу и рассмотрим возможность учёта этого влияния.

Вспомним некоторые понятия по магнитному полю, которые нам понадобятся при анализе. Это магнитный поток, обозначается Φ (ед.изм. вебер сокращённо Вб). Потокосцепление обозначается буквой ψ .

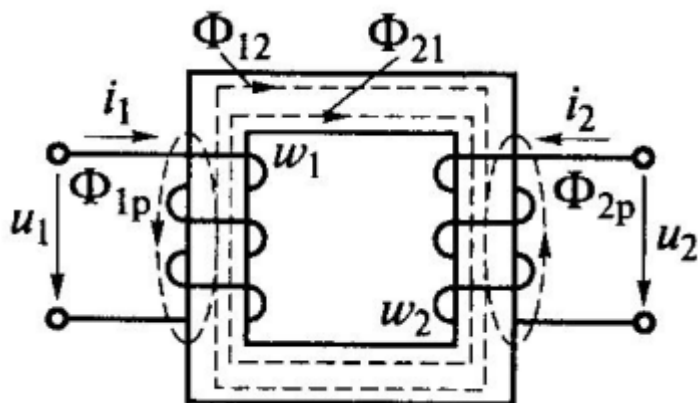
Потокосцепления — сумма магнитных потоков, сцепленных с каждым витком катушки. И если число витков у катушке равно w а магнитный поток пронизывающий каждую катушку Φ , тогда $\psi = w \cdot \Phi$ (т.е. ед.изм. ψ также Вб).

Наведение ЭДС в электрической цепи при изменении потока сцепления, обусловленного током в другой электрической цепи, называется явлением взаимной индукции.

А цепи в которых наводится ЭДС взаимной индукции называют индуктивно связанными цепями.

Рассмотрим две катушки условно разместим их на сердечнике который будет выполнять роль магнитопровода. Направление магнитных потоков создаваемых каждой катушкой определяется по правилу правого винта. И определяются, таким образом, не только направлением тока в обмотках но и направлением наматывания провода на сердечник. На рисунке показаны направления этих магнитных потоков при соответствующих указанных направлениях токов на вводах катушек и намоткой на сердечник.

Наматывается первая катушка, если смотреть сверху сердечника против часовой стрелке, второй катушке по часовой стрелке. Разделаем весь магнитный поток катушек на два. Один будет пронизывать другую катушку и т.о. участвовать в индуктивной связи Φ_{12} и Φ_{21} . Другой не будет участвовать в связи - потоком рассеивания Φ_{1p} и Φ_{2p} .



Тогда собственные магнитные потоки каждой из катушек можем записать в виде:

$$\Phi_{11} = \Phi_{1p} + \Phi_{12},$$

$$\Phi_{22} = \Phi_{2p} + \Phi_{21}$$

где Φ_{11} и Φ_{22} - собственные магнитные потоки индуктивности первой и второй катушек.

Φ_{1p} и Φ_{2p} - потоки рассеивания первой и второй катушек соответственно;

Φ_{12} - поток связи первой катушки со второй;

Φ_{21} - поток связи второй катушки с первой.

С учетом магнитной связи между катушками полный магнитный поток первой и второй катушек имеет следующий вид:

$$\Phi_1 = \Phi_{11} \pm \Phi_{21};$$

$$\Phi_2 = \Phi_{22} \pm \Phi_{12}. \quad (1)$$

Знак плюс соответствует согласованной магнитной связи, следовательно поток взаимосвязи усиливает собственный магнитный поток.

Знак минус - встречное включение.

При согласном направлении токов в двух индуктивно связанных катушках выводы этих катушек, относительно которых токи направлены одинаково, называются *одноименными*, или *однополярными* и на электрических схемах помечаются точками (рис. а,б ниже) Таким образом, на одноименных выводах индуктивно связанных катушек при одинаковом направлении токов относительно их выводов магнитные потоки самоиндукции и взаимной индукции в каждой катушке складываются. При вычерчивании электрических схем нет необходимости показывать намотку витков индуктивно связанных катушек, достаточно разметить на схеме их поименные выводы (на рис. а, б обозначены точками). Схема на рис. а соответствует согласованному включению катушек, на

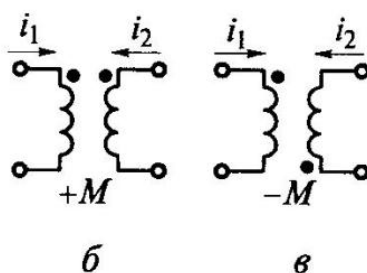


рис. б – встречному включению.

Умножим формулы системы (1) соответственно на число витков катушек (w_1 – для первой катушки; w_2 – для второй катушки).

$$w_1 \Phi_1 = \Psi_1 = w_1 \Phi_{11} + w_1 \Phi_{21} = \Psi_{11} + \Psi_{21}$$

$$w_2 \Phi_2 = \Psi_2 = w_2 \Phi_{22} + w_2 \Phi_{12} = \Psi_{22} + \Psi_{12}$$

тогда, используя определение индуктивности $L = \psi/i$, получим

$$L_1 i_1 = L_{11} i_1 \pm M_{12} i_2$$

$$L_2 i_2 = L_{22} i_2 \pm M_{21} i_1,$$

где L_1 и L_2 – полная индуктивность первой и второй катушек соответственно;
 L_{11} и L_{22} – собственная индуктивность первой и второй катушек соответственно;
 M_{12} – взаимная индуктивность первой со второй катушек;
 M_{21} – взаимная индуктивность второй с первой катушек.

Для линейных цепей очевидно $M_{12} = M_{21} = M$,

тогда система примет вид

$$L_1 i_1 = L_{11} i_1 \pm M i_2;$$

$$L_2 i_2 = L_{22} i_2 \pm M i_1.$$

Взаимная индуктивность M — положительная величина.

Электродвижущая сила самоиндукции катушки определяется выражением

$$e_L = - \frac{d\Psi}{dt}.$$

учитывая выражения для потокосцепления двух индуктивно связанных катушек:

$$\Psi_1 = L_1 i_1 \pm M i_2;$$

$$\Psi_2 = L_2 i_2 \pm M i_1.$$

тогда получим ЭДС каждой катушки:

$$(e_{L_1})_M = -L_1 \cdot \frac{di_1}{dt} - \left(\pm M \cdot \frac{di_2}{dt} \right)$$

$$(e_{L_2})_M = -L_2 \cdot \frac{di_2}{dt} - \left(\pm M \cdot \frac{di_1}{dt} \right)$$

В комплексном виде:

$$\dot{E}_{L_1} = -jX_{L_1} i_1 \pm jX_M i_2$$

$$\dot{E}_{L_2} = -jX_{L_2} i_2 \pm jX_M i_1$$

Обозначим через K_M – коэффициент магнитной связи

$$K_M = \sqrt{\frac{M_{12}M_{21}}{L_1L_2}}, \quad M_{12} = M_{21} = M; \quad K_M = M/\sqrt{(L_1 \cdot L_2)}; \quad 0 < K_M < 1$$

σ – коэффициент рассеивания

$$\sigma = \frac{L_1L_2 - M^2}{L_1L_2} = 1 - \frac{M^2}{L_1L_2} = 1 - K_M^2$$

$K_M \rightarrow 1$, то $\sigma \rightarrow 0$

2. Анализ процессов при последовательном соединении индуктивно связанных катушек:

Найдём токи в цепи
изображённой на рис. 2.1
Известно $u(t)$, R_1 , L_1 , R_2 , L_2 .

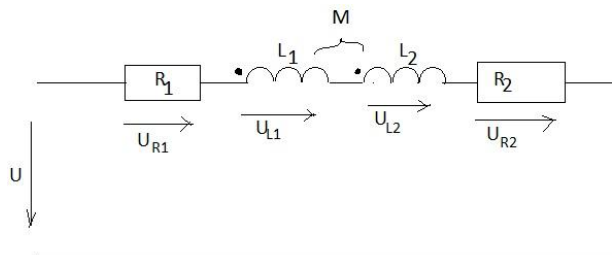


рис. 2.1

Решение:

Запишем по правилам Кирхгофа выражение:

$$U = U_{R1} + U_{L1} + U_{M1} + U_{R2} + U_{L2} + U_{M2}$$

перейдём к токам

$$U = iR_1 + L_1 \frac{di}{dt} + M_1 \frac{di}{dt} + L_2 \frac{di}{dt} + M_2 \frac{di}{dt} + iR_2$$

$$M_1 = M_2 = M$$

тогда для комплексов получим уравнение:

$$U' = I' (R_1 + R_2 + j(X_{L1} + X_{L2} + 2X_m))$$

Получим

$$I' = \frac{U'}{R_1 + R_2 + j(X_{L1} + X_{L2} + 2X_m)}$$

для согласованного включения

катушек

$$I' = \frac{U'}{R_1 + R_2 + j(X_{L1} + X_{L2} - 2X_m)}$$

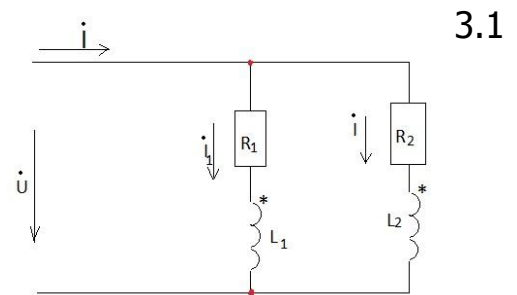
для встречного включения катушек

Токи и напряжения комплексные.

3. Анализ процессов при параллельном соединении индуктивно связанных катушек

Найдём токи в цепи изображённой на рис .
Известно $u(t)$, R_1 , L_1 , R_2 , L_2 .

рис. 3.1



Решение:

Запишем по правилам Кирхгофа
выражения для контуров соответствующих:

$$U' = I'_1(R_1 + jX_{L1}) \pm I'_2jX_m$$

$$U' = I'_2(R_2 + jX_{L2}) \pm I'_1jX_m$$

$$I'_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}$$

$$I'_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}$$

$$\Delta' = \begin{vmatrix} R_1 + jX_{L1} & \pm jX_m \\ \pm jX_m & R_2 + jX_{L2} \end{vmatrix} = R_1R_2 - X_{L1}X_{L2} + j(R_1X_{L2} + R_2X_{L1}) \pm X_m^2$$

$$\Delta'_1 = \frac{U'}{U'} \begin{vmatrix} \pm jX_m & R_2 + jX_{L2} \end{vmatrix} = U'(R_2 + j(X_{L2} \mp X_m))$$

$$\Delta'_2 = U'(R_1 + j(X_{L1} \mp X_m))$$

4. Определение взаимной индуктивности.

Для определения взаимной индуктивности M в схему двух последовательно включённых катушек изображённой на рисунке ниже включают следующие измерительные приборы: амперметр A , вольтметр V ваттметр W .

Далее по измеренным току I , напряжению U , активной мощности цепи P , определяют полное сопротивление цепи Z , активное R и реактивное X по

$$U/I = Z; \quad P/I = R; \quad x = \sqrt{Z^2 - R^2}.$$

следующим формулам:

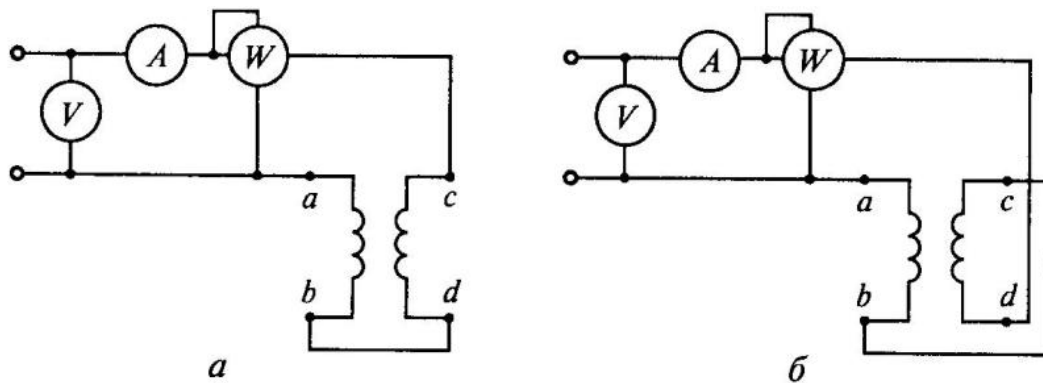


рис. 4.1.

Проводят измерения для двух вариантов включения катушек рис. а и рис.б. Один вариант соответствует согласованному включению катушек второй встречному. Тогда взаимная индуктивность может быть определена из следующих уравнений:

$$X_1 = X_{L1} + X_{L2} + 2X_M, \quad X_2 = X_{L1} + X_{L2} - 2X_M$$

$$\Delta X = X_1 - X_2 = 4X_M$$

$$M = \frac{\Delta X}{4\omega}$$

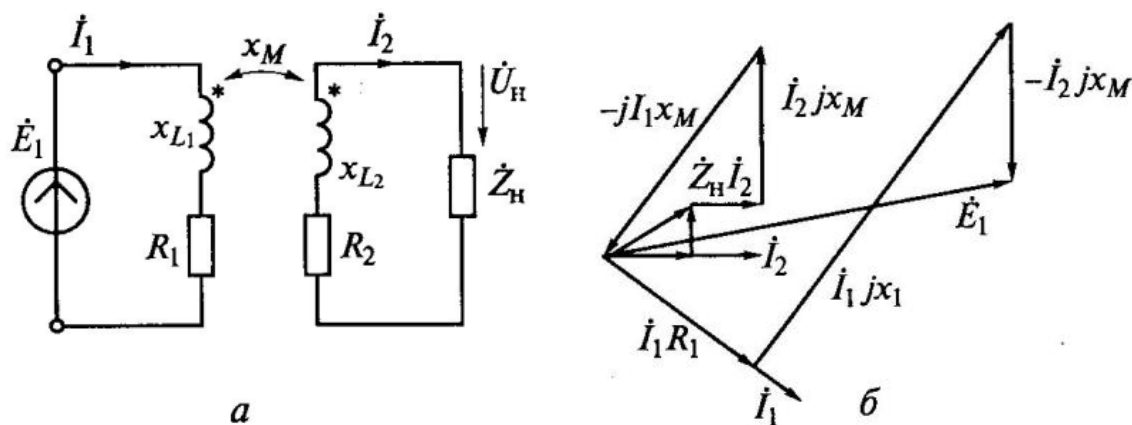
5. Воздушный трансформатор

Рассмотрим случай присоединения источнику питания одной катушки индуктивности из двух, имевших индуктивную связь между собой. На зажимах второй катушки измерим напряжение, наведенное переменным магнитным полем первой катушки, по которой протекает переменный ток. Напряжение на выводах

$$\dot{U}_2 = jx_M \dot{I}_1.$$

2ой катушки определяется выражением:

Такое устройство называется *воздушным трансформатором*



— электрическая схема; б — векторная диаграмма
рис.5.1

Воздушный трансформатор - электротехническое устройство, одна из катушек которого подключена к источнику питания, а вторая имеет индуктивную связь с первой. Сердечник — воздух.

Состояние цепи можно определить по уравнениям Кирхгофа:

$$\begin{aligned}\dot{U}_1 &= R_1 \dot{I}_1 + jx_1 \dot{I}_1 + jx_M \dot{I}_2; \\ 0 &= R_2 \dot{I}_2 + jx_2 \dot{I}_2 + jx_M \dot{I}_1 + \dot{U}_2.\end{aligned}\quad (5.1)$$

В теории трансформаторов принято записывать эти уравнения в другой форме:

$$\dot{U}_1 = R_1 \dot{I}_1 - \dot{E}_1;$$

$$\dot{E}_2 = R_2 \dot{I}_2 + \dot{U}_2,$$

где \dot{E}_2 — генераторная ЭДС

Воздушный трансформатор используется для изоляции электрических цепей, так называемые электронные развязки или цепей рассогласования.

Особо остановимся на порядке построения векторной диаграммы для воздушного трансформатора. Векторная диаграмма линейного трансформатора (рис.5.1а) строится в порядке, указанном цифрами (рис. 5.2). Строить диаграмму начинаем с тока во второй катушке, если принять его фазу за ноль. Нанесение остальных напряжений (зная - токи в сопротивлениях совпадают по фазе с напряжениями на них и токи в катушках индуктивностей и взаимной индуктивности отстают по фазе на 90° от напряжениями на них) в результате даёт входное напряжение. Будем строить векторную диаграмму, предполагая резистивно индуктивный характер нагрузки.

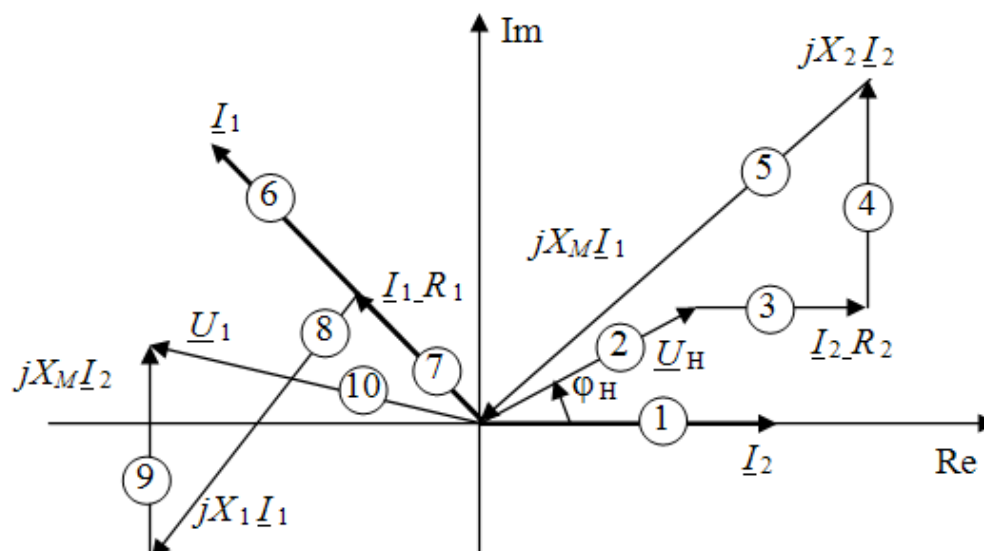


рис. 5.2

6. Эквивалентные преобразования участков цепей со связанными индуктивностями.

Для того чтобы перейти к схеме трансформатора без индуктивной связи, прибавим и отнимем $jX_M L_1$ в первом уравнении (5.1) и $jX_M L_2$ — во втором уравнении (5.1). После преобразований получим:

$$\begin{aligned} \underline{I}_1 [R_1 + j(X_1 - X_M) + jX_M] + \underline{I}_2 jX_M &= \underline{U}_1; \\ \underline{I}_2 [R_2 + j(X_2 - X_M) + jX_M] + \underline{I}_1 jX_M + \underline{I}_2 \underline{Z}_H &= 0. \end{aligned} \quad (6.1)$$

Уравнения (5.2) являются контурными для схемы рис. 6.1

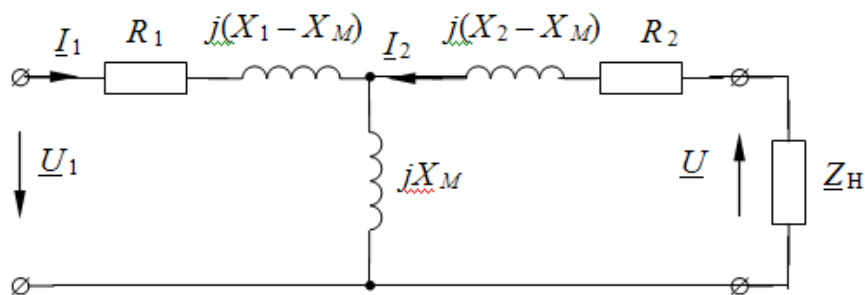


рис.6.1

Это эквивалентная схема воздушного трансформатора.

Используя это можно определить переход от схем с индуктивной связью к схеме без индуктивной связи.

На рис. 6.2 приведены эквивалентные преобразования участков цепей со взаимно индуктивностями и замену их участками, не содержащими связанных индуктивностей. Точками на схемах отмечены одноименные выводы катушек.

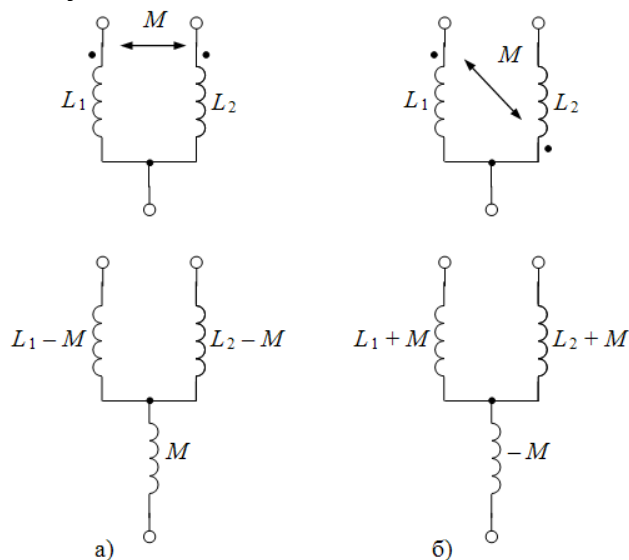


рис. 6.2

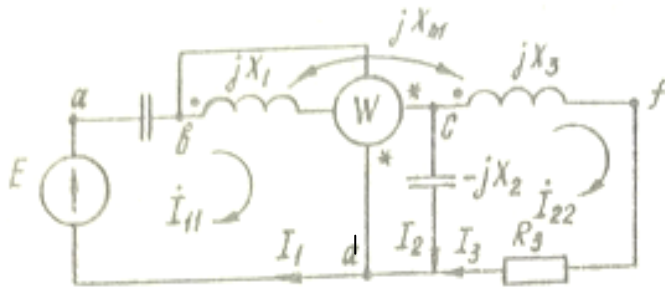
Пример решения. Расчёт цепей с индуктивно связными катушками.

Дано: $\underline{E} = 220 \text{ В}$

$X_0 = 20 \text{ Ом}; X_1 = 100 \text{ Ом};$

$X_2 = 60 \text{ Ом}; X_3 = 80 \text{ Ом};$

$R_3 = 20 \text{ Ом}; X_M = 50 \text{ Ом};$



комментарий к схеме: с низу т. d.

Определить токи в ветвях, показание P_W , баланс мощности.

РЕШЕНИЕ: Будем решать задачу методом контурных токов для комплексов.

Выберем положительные направления токов. выберем контурные токи и обозначим их на схеме.

Для составления уравнений удобнее вначале записать систему уравнений по второму закону Кирхгофа для выделенных контуров.

Определяем включение катушек оно согласное. Так как те направление токов которые мы выбрали, втекают в одноимённые выводы катушек (обозначены точками).

$$\begin{cases} -jX_0 \dot{I}_1 + jX_1 \dot{I}_1 + jX_M \dot{I}_3 - jX_2 \dot{I}_2 = \dot{E}; \\ jX_3 \dot{I}_3 + jX_M \dot{I}_1 + jR_3 \dot{I}_3 + jX_2 \dot{I}_2 = 0 \end{cases}$$

Выразим токи в ветвях через выбранные контурные:

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_{11}, \quad \dot{I}_2 = \dot{I}_{11} - \dot{I}_{22}, \quad \dot{I}_3 = \dot{I}_{22}$$

и подставим их уравнения. После группировки членов уравнения приобретут вид:

$$\begin{cases} \dot{I}_{11}(jX_1 - jX_0 - jX_2) + \dot{I}_{22}(jX_M + jX_2) = \dot{E} \\ \dot{I}_{11}(jX_M + jX_2) + \dot{I}_{22}(R_3 + jX_3 - jX_2) = 0 \end{cases}$$

Решаем задачу используя правило Крамера.

$$\Delta = \begin{vmatrix} j20 & j110 \\ j110 & 20 + j20 \end{vmatrix} = 11700e^{j2^\circ};$$

$$\Delta_{11} = \begin{vmatrix} 200 & j110 \\ 0 & 20 + j20 \end{vmatrix} = 5670e^{j45^\circ};$$

$$\Delta_{22} = \begin{vmatrix} j20 & 200 \\ j110 & 0 \end{vmatrix} = j22000.$$

Тогда контурные и искомые токи равны:

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_{11} = \frac{\Delta_{11}}{\Delta} = 0,53e^{j43^\circ} \text{ A};$$

$$\dot{I}_3 = \dot{I}_{22} = \frac{\Delta_{22}}{\Delta} = 2,07e^{-j92^\circ} \text{ A};$$

$$\dot{I}_2 = \dot{I}_{11} - \dot{I}_{22} = 2,47e^{j79^\circ} \text{ A}.$$

Баланс мощности: Проверяем полученные результаты.

Определяем вначале мощность комплексную источников, для нашего случая это мощность одного источника \dot{E} :

$$S_{\text{ист}} = \dot{E}\dot{I}_1 = 220 * 0,53e^{j43^\circ} = 70,6 - j66,2 = P_{\text{ист}} - j Q_{\text{ист}} \text{ ВА};$$

Определим мощность потребляемую активную и реактивную. С активной составляющей точно так же как и в цепях без связей:

$$P_{\text{потр}} = I_3^2 R_3 = 1,87^2 * 20 = 70 \text{ Вт};$$

А с реактивной нужно учесть составляющую за счёт согласованной магнитной связью. Она определяется токами в этих ветвях и сдвигом фаз токов между первым и вторым $2X_M I_1 I_3 \cos(\varphi_1 - \varphi_3)$ и знак плюс, так как согласованная связь.

$$Q_{\text{потр}} = I_1^2(X_1 - X_0) - I_2^2 X_2 + I_3^2 X_3 + 2X_M I_1 I_3 \cos(\varphi_1 - \varphi_3) = -67 \text{ Вар}$$

Что бы определить показания ваттметра, по схеме включения нужно определить на каком участке ваттметр определяет ток и напряжение. Кроме того на схеме выводы плюсовые помечены звездочками. Напряжение между точками ***v*** и ***d*** – это напряжение U_{db} (вывод со звёздочкой подключён к т. ***d***) на цепи которая подсоединена к этим точкам. По току это разрыв цепи т. ***v*** и т. ***c*** т.е. ток I_1 со знаком минус т.к. плюсовой вывод подсоединён к т. ***c***.

Ваттметр определяет только активную мощность, поэтому нужно определить только реальную часть:

$$P_w = \Re[\underline{U}_{db} (-\dot{I}_1)^*]$$

По второму закону Кирхгофа имеем:

$$-\underline{U}_{db} - I_1 jX_1 = \dot{E}, \text{ отсюда}$$

$$-\underline{U}_{db} = 193e^{j182^\circ}; -\dot{I}_1 = -0,53e^{-j43^\circ} e^{-j180^\circ} = 0,53e^{-j223^\circ}$$

$$P_w = \Re(193e^{j182^\circ} 0,53e^{-j223^\circ}) = \Re(93,5e^{-j41^\circ}) = 93,5 \cos(-41^\circ) = 70,5 \text{ Вт}.$$

Так как, активна часть мощности, потребляется только «активными» элементами, то она должна быть равна нами рассчитанной активной мощности всей исходной цепи. Есть только одно сопротивление R_3 в схемах. Это выполняется!