Коваленко В.Е. ноябрь 2021г. **ОЭиЭ**

Метод комплексных амплитуд (символический метод)

1.Комплексные числа и основные операции над ними

Символический *метод комплексных амплитуд* (*символический метод*) основан на представлении гармонических функций времени $a(t)$ в форме комплексных чисел.

Напомним, что *комплексным числом* $\underline{A}$ (обозначаем подчёркиванием) называется выражение вида

$$\underline{A} = A' + jA'' = Ae^{j\varphi},$$

которое на комплексной плоскости отображается в виде точки с абсциссой A' (вещественная часть) и ординатой A'' (мнимая часть) (рис. 2.2, а).

Ось абсцисс, по которой откладывается вещественная часть $\underline{A}$, называется действительной (Re), а ось ординат, по которой откладывается мнимая часть $\underline{A}$, — мнимой (Im).

Каждой точке A комплексной плоскости может ((2.8) авлен в соответствие вектор $\underline{A}$ (рис. 2.2,б). Длину вектора $\underline{A}$ называют его *модулем*

$$|\underline{A}| = \sqrt{(A')^2 + (A'')^2},$$

а угол α, образуемый вектором $\underline{A}$ с положительным направлением вещественной оси, называют *аргументом* комплексного числа (2.9)

$$\alpha = \mathrm{arctg}\,\frac{A''}{A'}.$$

Вещественную и мнимую части комплексного числа можно определить через модуль и аргумент:

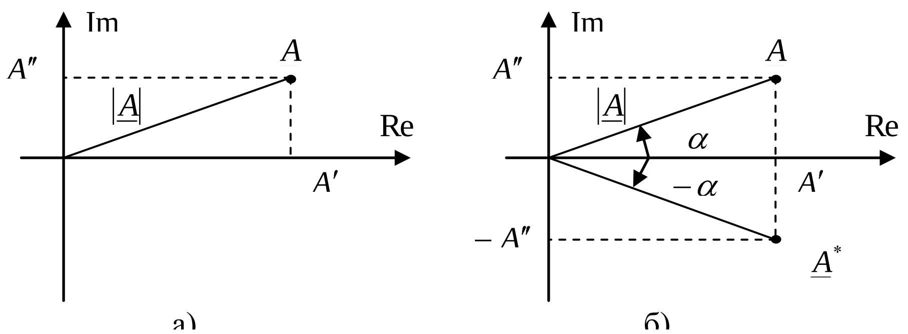


Рис. 2.2

$$A' = \mathrm{Re}(\underline{A}) = |\underline{A}|\cos \qquad (2.10)$$
$$A'' = \mathrm{Im}(\underline{A}) = |\underline{A}|\sin\alpha.$$

Подставляя далее (2.10) в выражение (2.7), можно перейти от алгебраической записи комплексного числа к тригонометрической:

$$\underline{A} = |\underline{A}|\cos\alpha + j\,|\underline{A}|\mathrm{si} \qquad (2.11)$$

Далее, используя формулу Эйлера

$$e^{j\alpha} = \cos\alpha + j\sin\alpha,$$

получаем показательную форму комплексного числа:

$$\underline{A} = |\underline{A}|\,e^{j\alpha}. \qquad (2.12)$$

2. Комплексные изображения гармонических функций

Каждой гармонической функции $a(t)$ можно поставить в соответствие комплексное число $\underline{A}$, называемое мгновенным комплексом гармонической функции:

$$\underline{A} = A_m\, e^{j(\omega t+\psi)} = A_m\, [\cos(\omega t+\psi) + j\sin(\omega t+\psi)] \qquad (2.13)$$

модуль которого равен амплитуде гармонической функции A_m, а аргумент — ее фазе $\theta = \omega t + \psi$.

Значение мгновенного комплекса $\underline{A}$ при $t = 0$ называется *комплексной амплитудой* $\underline{A}_m = \underline{A}\big|_{t=0} = A_m\, e^{j\psi}$ (рис. 2.1).

С использованием понятия комплексной амплитуды выражение для мгновенного комплекса может быть преобразованно к виду

$$\underline{A} = A_m\, e^{j\psi} e^{j\omega t} = \underline{A}_m\, e^{j\omega t}, \qquad (2.14)$$

где $e^{j\omega t}$, называемый *оператором вращения*, имеет единичную длину и вращается в комплексной плоскости против часовой стрелки со скоростью ω (рис. 2.2). Всякий неподвижный вектор, будучи умноженным на $e^{j\omega t}$, начинает вращаться против часовой стрелки с угловой скоростью ω.

Пример 2.1. Комплексная амплитуда гармонического тока $i = 5\sin\left[10^3 t + \dfrac{\pi}{3}\right]$ равна $\underline{I}_m = 5e^{j\frac{\pi}{3}}$, а комплексная амплитуда гармонического напряжения $u = 50\sin 10^5 t$ — $\underline{U}_m = 50\,e^{j0} = 50$.

Основные действия с комплексными изображениями гармонических функций. При сложении (вычитании) комплексных чисел их записывают в алгебраической форме и отдельно складывают (вычитают) их действительные и мнимые части. Например, если

$$\underline{A}_1 = A_1\, e^{j\varphi} = A_1\cos\varphi + jA_1\sin\varphi = A_1' + j\,A_1'',$$

$$\underline{A}_2 = A_2\, e^{j\psi} = A_2\cos\psi + jA_2\sin\psi = A_2' + j\,A_2'',$$

то $A_1 + A_2 = \left(A_1' + A_2'\right) + j\left(A_1'' + A_2''\right) = Ae^{j\alpha}$,

где $A = \sqrt{\left(A_1' + A_2'\right)^2 + \left(A_1'' + A_2''\right)^2}$, $\alpha = \operatorname{arctg}\dfrac{A_1'' + A_2''}{A_1' + A_2'}$.

Умножение и деление комплексных величин производят, как правило, в показательной форме: $\underline{A}_1\underline{A}_2 = A_1 A_2\, e^{j(\varphi+\psi)}$; $\dfrac{\underline{A}_1}{\underline{A}_2} = \dfrac{A_1}{A_2}\, e^{j(\varphi-\psi)}$.

В комплексной форме дифференцирование по времени соответствует умножению, а интегрирование — делению комплексных значений рассматриваемых функций на $j\omega$, поэтому

$$u_L = L\frac{di}{dt} \risingdotseq j\omega L\,\underline{I}_m = j\,X_L\,\underline{I}_m = \underline{Z}_L\,\underline{I}_m = \underline{U}_{Lm},$$

$$u_C = \frac{1}{C}\int i\,dt \risingdotseq \frac{1}{j\omega C}\underline{I}_m = -jX_C\underline{I}_m = \underline{Z}_C\underline{I}_m = \underline{U}_{Cm},$$

где X_L и X_C — индуктивное и емкостное сопротивления; $\underline{Z}_L$ и $\underline{Z}_C$ — соответственно индуктивное и емкостное сопротивления в комплексной форме.

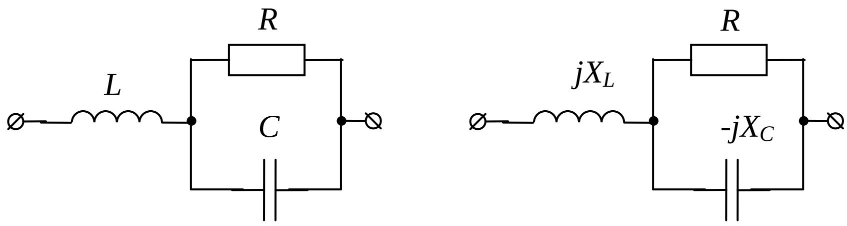
Для резистивного элемента напряжение в комплексной форме

$$u_R = Ri \risingdotseq R\underline{I}_m = \underline{Z}_R\underline{I}_m = \underline{U}_{Rm},$$

где $\underline{Z}_R = R$ — вещественная величина.

Замечание. Часто в практических расчетах удобно пользоваться действующими значениями величин, тогда $\underline{U}_R = \underline{Z}_R\underline{I}$, $\underline{U}_L = \underline{Z}_L\underline{I}$, $\underline{U}_C = \underline{Z}_C\underline{I}$.

Пример 2.2. Определить эквивалентное комплексное сопротивление двухполюсника



а) б)

Рис. 2.3

относительно входных зажимов (рис. 2.3,а).

Решение. Комплексное сопротивление схемы замещения электрической цепи (рис. 2.3, б):

$$\underline{Z} = jX_L + \frac{R(-jX_C)}{R - jX_C}.$$

Пример 2.3. К зажимам идеализированного пассивного элемента (рис. 2.4) приложено напряжение $\underline{U} = 0{,}36e^{j74^\circ}$ мВ. Определить тип и параметры элемента $\underline{Z}$, если значение тока: а) $\underline{I} = 2{,}4e^{j74^\circ}$ мкА; б) $\underline{I} = 2{,}4e^{j164^\circ}$ мкА;

в) $\underline{I} = 2{,}4e^{j344^\circ}$ мкА.

Решение. Значение параметра элемента $\underline{Z} = \dfrac{\underline{U}}{\underline{I}}$.

а) $\underline{Z} = 0{,}15e^{j0^\circ}$ кОм; б) $\underline{Z} = 0{,}15e^{-j90^\circ}$ кОм;

в) $\underline{Z} = 0{,}15e^{j90^\circ}$ кОм.

Если сдвиг фаз между напряжением и током на элементе равен 0, $\frac{\pi}{2}$ или $-\frac{\pi}{2}$, то такой элемент будет соответственно резистивным, индуктивным или емкостным.

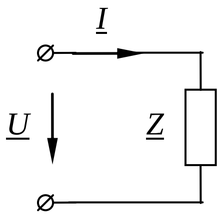


Рис. 2.4

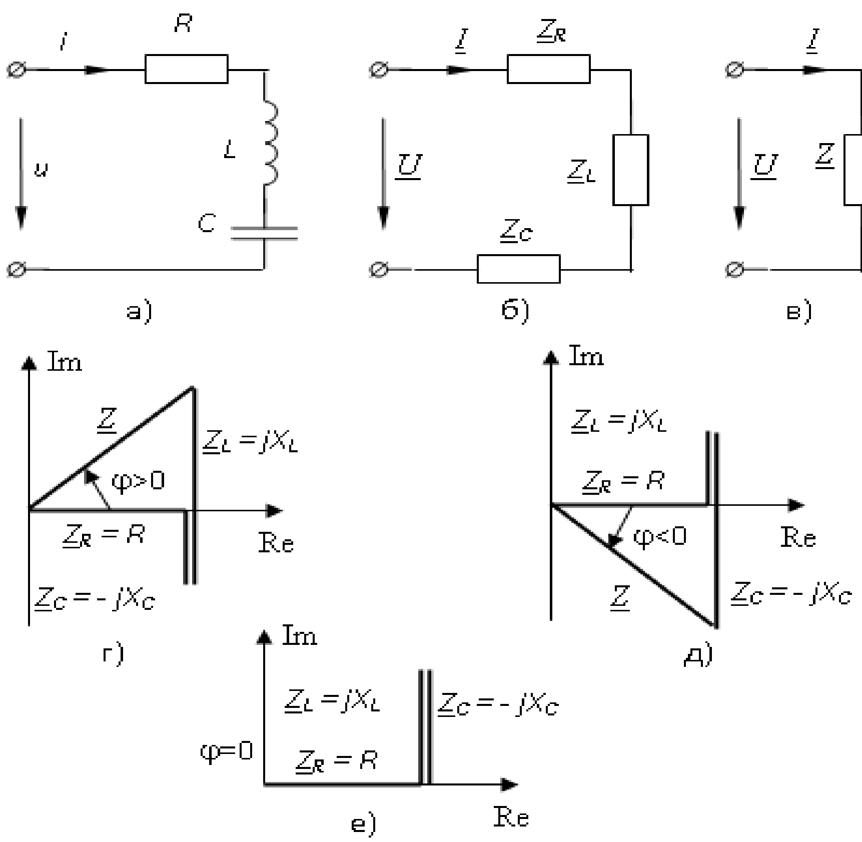


Рис. 2.5

Пример 2.4. Выразить входное сопротивление и ток последовательной *RLC*-цепи (рис. 2.5,а) в комплексной форме для частот $\omega_1 = 2{,}5 \cdot 10^6$ с$^{-1}$, $\omega_2 = 8 \cdot 10^6$ с$^{-1}$, $\omega_3 = 5 \cdot 10^6$ с$^{-1}$. Параметры цепи: $L = 80$ мкГн, $C = 500$ пФ, $R = 100$ Ом. Входное напряжение $u = 10\sqrt{2}\cos\omega t$.

Решение. Комплексное входное сопротивление по (2.16) равно сумме комплексных сопротивлений элементов цепи. Подставляя в (2.16) параметры элементов, находим:

$$\underline{Z}_1\big|_{\omega=\omega_1} = 100 - j\,600 = 608\,e^{-j\,80{,}5^\circ}\ \text{Ом};$$

$$\underline{Z}_2\big|_{\omega=\omega_2} = 100 + j\,390 = 403\,e^{j\,75{,}6^\circ}\ \text{Ом};\quad \underline{Z}_3\big|_{\omega=\omega_3} = 100\ \text{Ом}.$$

Таким образом, при $\omega = \omega_1$ входное сопротивление имеет резистивно-емкостный характер, при $\omega = \omega_2$ — резистивно-индуктивный, а при $\omega = \omega_3$ — чисто резистивный характер.

Используя закон Ома в комплексной форме, находим:

$$\underline{I}_1 = \frac{10}{608\,e^{-j\,80{,}5^\circ}} = 16{,}4\,e^{j\,80{,}5^\circ}\ \text{мА};$$

$$\underline{I}_2 = \frac{10}{402{,}6\,e^{j\,75{,}6^\circ}} = 24{,}8\,e^{-j\,75{,}6^\circ}\ \text{мА};\quad \underline{I}_3 = \frac{10}{100} = 100\ \text{мА}.$$

Здесь $\underline{I}_1$ опережает входное напряжение на $80{,}5^\circ$, $\underline{I}_2$ отстает от напряжения на $75{,}6^\circ$, $\underline{I}_3$ совпадает по фазе с напряжением.

Пример 2.5. В цепи (рис. 2.10) напряжения на соответствующих индексам элементах и ток $\underline{I}_1$ имеют следующие значения:

$\underline{U}_{R1} = 2{,}33 e^{149{,}8^\circ}$ В;

$\underline{U}_{R2} = 6{,}93 e^{210{,}5^\circ}$ В;

$\underline{U}_{L} = 4{,}66 e^{239{,}8^\circ}$ В;

$\underline{U}_{C} = 0{,}77 e^{120{,}5^\circ}$ В;

$\underline{U}_{J} = 6{,}97 e^{24{,}2^\circ}$ В;

$\underline{I}_1 = 2{,}33 e^{144{,}8^\circ}$ А.

Проверить выполнение баланса мощностей.

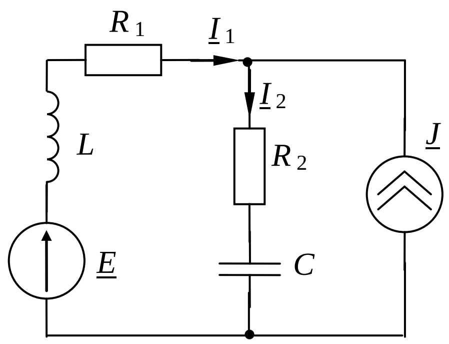


Рис. 2.10

Решение. В соответствии с условием баланса мощностей мощность источников равна мощности потребителей: $\underline{S}_{и} = \underline{S}_{п}$.

$\underline{S}_{и} = \underline{E}\overset{*}{\underline{I}}_1 + \underline{U}_J \overset{*}{\underline{J}} = (1{,}5 + j9{,}06)10^{-3}$ В·А;

$\underline{S}_{п} = \underline{I}_1^2 (R_1 + jX_L) + \underline{I}_2^2 (R_2 - jX_C) = (1{,}4 + j9{,}07)10^{-3}$ В·А.

Условие баланса выполняется.

3. Преобразования электрических цепей

Понятие об эквивалентных преобразованиях. Анализ процессов в электрических цепях может быть существенно упрощен за счет использования различных преобразований, в результате которых отдельные участки цепей заменяются эквивалентными — либо с более простой топологией, либо более удобными для анализа.

Два участка цепи называются *эквивалентными*, если при замене одного из этих участков другим токи и напряжения в остальной части цепи не изменятся. Преобразования такого типа также называются *эквивалентными*. Отметим, что преобразуемые электрические цепи должны иметь одинаковое число внешних выводов, и в процессе преобразований токи выводов и напряжения между ними должны оставаться неизменными.

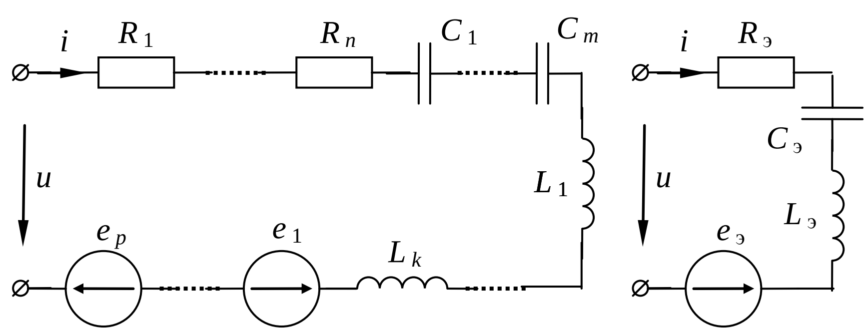
Рассмотрим правила преобразования цепей с последовательным и параллельным соединениями.

Участки цепи с последовательным соединением элементов. Рассмотрим одноконтурную цепь (рис. 2.11). Уравнение этой цепи составим по второму закону Кирхгофа для мгновенных значений:

$$R_1 i + \Lambda + R_n i + \frac{1}{C_1}\int i\,dt + \Lambda + \frac{1}{C_m}\int i\,dt + L_1\frac{di}{dt} + \Lambda + L_k\frac{di}{dt} =$$

$$= u - (e_1 + \Lambda + e_p). \quad (2.34)$$

После приведения подобных (2.34) примет вид:



а) б)

Рис. 2.11

$$R_Э i + \frac{1}{C_Э}\int i\,dt + L_Э \frac{di}{dt} = u - e_Э \qquad (2.35)$$

где $R_Э = \sum_{i=1}^{n} R_i$; $\frac{1}{C_Э} = \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{C_i}$; $L_Э = \sum_{i=1}^{k} L_i$; $e_Э = \pm\sum_{i=1}^{p} e_i$.

Если обобщенная одноконтурная цепь находится под гармоническим воздействием, то от эквивалентной схемы (рис. 2.11) удобнее перейти к электрической схеме для комплексных значений (рис. 2.12, а). Уравнения (2.34) в комплексной форме в этом случае имеют вид:

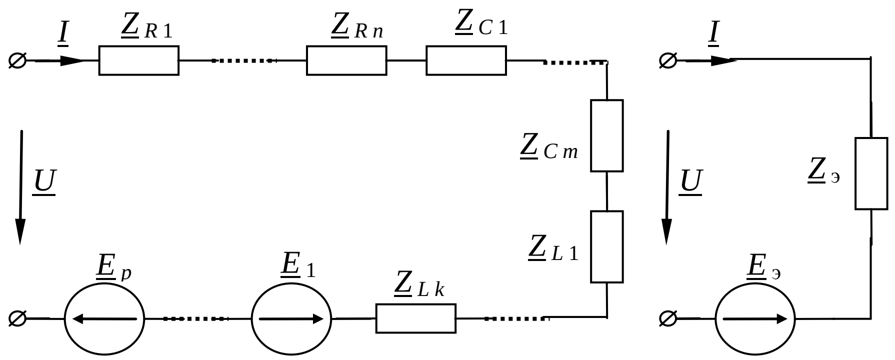
$$\underline{Z}_{R1}\underline{I} + \Lambda + \underline{Z}_{Rn}\underline{I} + \underline{Z}_{C1}\underline{I} + \Lambda + \underline{Z}_{Cm}\underline{I} + \underline{Z}_{L1}\underline{I} + \Lambda + \underline{Z}_{Lk}\underline{I} =$$
$$= \underline{U} - \left(\underline{E}_1 + \Lambda - \underline{E}_p\right). \qquad (2.36)$$

После преобразований:

$$\underline{Z}_Э \underline{I} = \underline{U} - \underline{E}_Э ,$$

где $\underline{Z}_Э = \sum_{i=1}^{n} \underline{Z}_{Ri} + \sum_{i=1}^{m} \underline{Z}_{Ci} + \sum_{i=1}^{k} \underline{Z}_{Li}$; $\underline{E}_Э = \pm\sum_{i=1}^{p} \underline{E}_i$.

Эквивалентная цепь для комплексных действующих значений приведена на рис. 2.12, б.



а) б)

Рис. 2.12

Участки цепи с параллельным соединением элементов. Пусть электрическая цепь (рис. 2.13, а) состоит из параллельно соединенных *n* активных сопротивлений, *m* емкостей, *k* индуктивностей и *p* независимых источников тока (обобщенная двухузловая цепь). Все элементы цепи находятся под одним и тем же напряжением *u*, поэтому уравнение цепи, по первому закону Кирхгофа

$$i = \frac{1}{R_1}u + \Lambda + \frac{1}{R_n}u + C_1\frac{du}{dt} + \Lambda + C_m\frac{du}{dt} +$$
$$+ \frac{1}{L_1}\int u\,dt + \Lambda + \frac{1}{L_k}\int u\,dt - \left(J_1 + \Lambda - J_p\right). \qquad (2.37)$$

После приведения подобных

$$i = \frac{1}{R_Э}u + C_Э\frac{du}{dt} + \frac{1}{L_Э}\int u\,dt - J_Э \qquad (2.38)$$

где $R_Э = \sum_{i=1}^{n} R_i$; $\frac{1}{L_Э} = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{L_i}$; $C_Э = \sum_{i=1}^{m} C_i$; $J_Э = \pm\sum_{i=1}^{p} J_i$.

Уравнению (2.38) соответствует преобразованная цепь (рис. 2.13, б).

При гармоническом воздействии для комплексной схемы замещения (рис. 2.14, а, б, в)

$$\underline{I} = \underline{Y}_{R1}\underline{U} + \dots + \underline{Y}_{Rn}\underline{U} + \underline{Y}_{C1}\underline{U} + \dots + \underline{Y}_{Cm}\underline{U} +$$

$$+ \underline{Y}_{L1}\underline{U} + \dots + \underline{Y}_{Lk}\underline{U} - (\underline{J}_1 + \dots - \underline{J}_p).$$

После преобразований:

$$\underline{I} = \underline{Y}_Э\underline{U} - \underline{J}_Э, \quad (2.39)$$

где $\underline{Y}_Э = \sum_{i=1}^{n}\underline{Y}_{Ri} + \sum_{i=1}^{m}\underline{Y}_{Ci} + \sum_{i=1}^{k}\underline{Y}_{Li}$; $\underline{J}_Э = \pm\sum_{i=1}^{p}\underline{J}_i$.

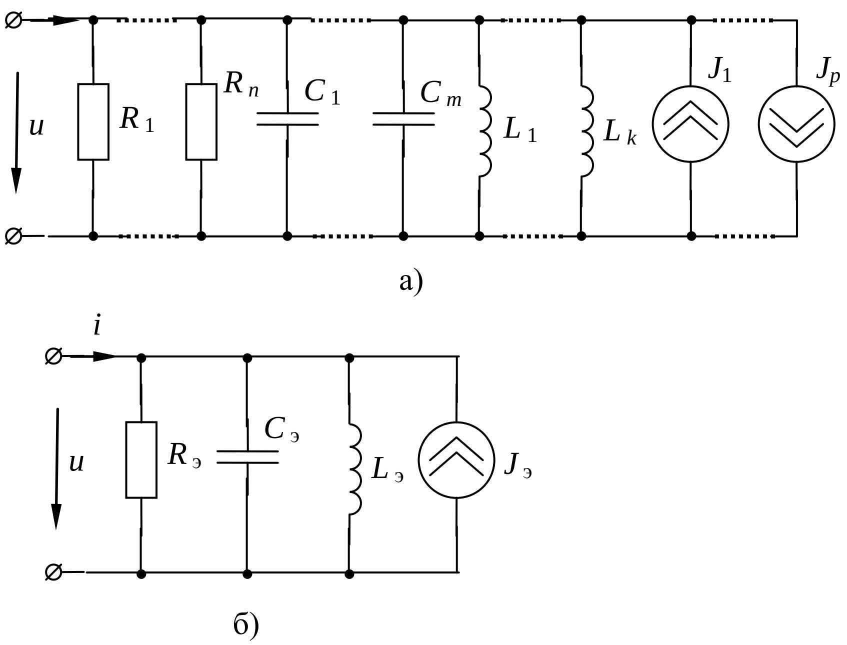


Рис. 2.13

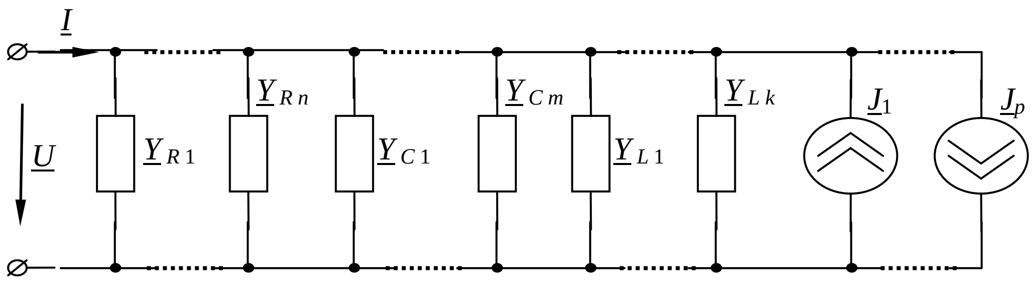
Эквивалентные преобразования треугольника сопротивлений в звезду и звезды — в треугольник.

Такие преобразования должны быть эквивалентными по отношению к внешней цепи. Это значит, что подходящие к выводам токи должны быть одинаковы, одинаковы также должны быть напряжения между выводами, т. е. $\underline{I}_1$, $\underline{I}_2$, $\underline{I}_3$ и $\underline{U}_{12}$, $\underline{U}_{23}$, $\underline{U}_{31}$ одинаковы как для звезды (рис. 2.15, а), так и для треугольника (рис. 2.15, б) сопротивлений.

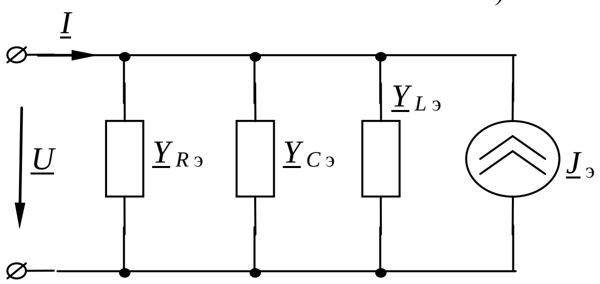
Соотношения эквивалентности для комплексных значений при переходе от треугольника к звезде:

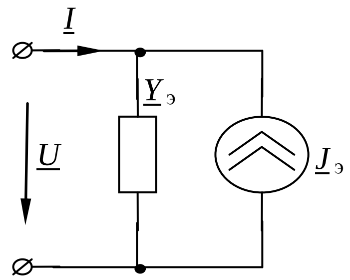
$$\underline{Z}_1 = \frac{\underline{Z}_{12}\underline{Z}_{31}}{\underline{Z}_{12} + \underline{Z}_{23} + \underline{Z}_{31}}; \ \underline{Z}_2 = \frac{\underline{Z}_{12}\underline{Z}_{23}}{\underline{Z}_{12} + \underline{Z}_{23} + \underline{Z}_{31}};$$

$$\underline{Z}_3 = \frac{\underline{Z}_{23}\underline{Z}_{31}}{\underline{Z}_{12} + \underline{Z}_{23} + \underline{Z}_{31}}. \qquad (2.40)$$



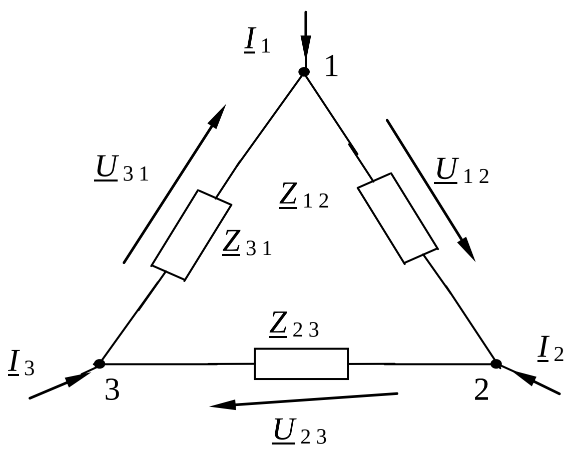
а)

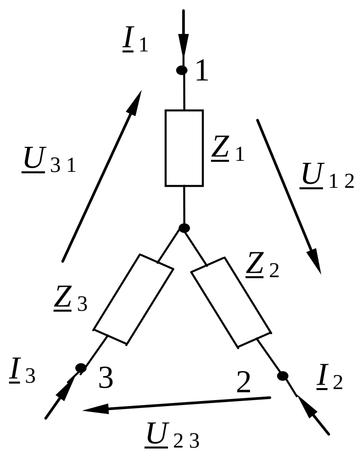




б) в)

Рис. 2.14





а) б)

Рис. 2.15

При переходе от звезды к треугольнику:

$$\underline{Z}_{12} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \frac{\underline{Z}_1\underline{Z}_2}{\underline{Z}_3};\ \underline{Z}_{23} = \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 + \frac{\underline{Z}_2\underline{Z}_3}{\underline{Z}_1};\ \underline{Z}_{31} = \underline{Z}_3 + \underline{Z}_1 + \frac{\underline{Z}_3\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2}. \qquad (2.41)$$

Выражения комплексных проводимостей, образующих стороны треугольника, могут быть получены из (2.41) путем замены комплексных сопротивлений их проводимостями:

$$\underline{Y}_{12} = \frac{\underline{Y}_1\underline{Y}_2}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3};\ \underline{Y}_{23} = \frac{\underline{Y}_2\underline{Y}_3}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3};$$

$$\underline{Y}_{31} = \frac{\underline{Y}_3\underline{Y}_1}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3}.$$

Пример 2.6. Рассчитать комплексное входное сопротивление цепи (рис. 2.16). Параметры цепи:

$R_1 = R_2 = 1\,\text{кОм}$;

$C_1 = C_2 = 0{,}5\,\text{нФ}$;

$L = 10\,\text{мГн}$; $f = 39{,}8\,\text{кГц}$.

Решение. Эквивалентное комплексное сопротивление ветви $R_1 - C_1 - L_1$

$$\underline{Z}_{Э1} = \underline{Z}_{R1} + \underline{Z}_{L} + \underline{Z}_{C1}.$$

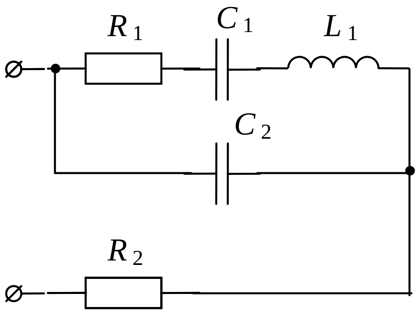


Рис. 2.16

Комплексное сопротивление параллельно включенных ветвей с $\underline{Z}_{Э1}$ и C_2

$$\underline{Z}_{Э2} = \frac{\underline{Z}_{Э1}\underline{Z}_{C2}}{\underline{Z}_{Э1} + \underline{Z}_{C2}}.$$

Комплексное входное сопротивление цепи

$$\underline{Z}_{ВХ} = \underline{Z}_{R2} + \underline{Z}_{Э2}.$$

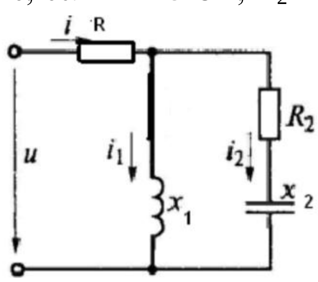
В этих выражениях

$$\underline{Z}_{R1} = \underline{Z}_{R2} = R,\ \underline{Z}_{L} = j\omega L,\ \underline{Z}_{C1} = \underline{Z}_{C2} = -\frac{j}{\omega C}.$$

Подставив значения параметров элементов цепи, получим: $\underline{Z}_{ВХ} = 1$ кОм.

Решаем задачу на занятие.

1) Определить токи i(t), $i_1(t)$, $i_2(t)$ в ветвях для схемы ниже, если R=8 Ом, R_2=4 Ом, X_1=6 Ом, X_2=3 Ом, u(t)= (50√2 Sin (ωt)) В , f=50 Гц. Определить параметры L и C.



Дорешать задачу 1 до конца самостоятельно.

Самостоятелно решить задачу.

Дано R= 10 Ом, R_2=4 Ом, X_L=3 Ом, X_C=6 Ом, u(t)= (141 Sin (628t)) В. Определить токи i(t), $i_1(t)$, $i_2(t)$ в ветвях для схемы ниже.