Лекция 12 п/п

Ст. преподаватель Коваленко В. Е. кафедра ПрЭ, Томск 2021 г.

Тема: «Переходные процессы в линейных электрических цепях».

Изучаем операторный метод расчёта переходных процессом. Используем преобразование Лапласа. Рассматриваем порядок расчёта. Прямую и обратную задачи, которые надо выполнить при решение этим методом.
Сформулируем правила Кирхгофа, и закон Ома в операторной форме. Рассмотрим пример решения задачи этим методом.

Операторный метод

Алгоритм расчета переходного процесса операторным методом

Операторный метод — это метод расчёта переходных процессов в электрических цепях, основанный на переносе расчёта переходного процесса из области функций действительной переменной (времени *t*) в область функций комплексного переменного (либо операторной переменной), в которой дифференциальные уравнения преобразуются в алгебраические.

Преобразование функций действительного переменного в операторную функцию производится с помощью методов операционного исчисления.

Последовательность расчёта операторным методом:

1) *Анализ цепи до коммутации и определение ННУ.*

Нахождение токов в индуктивностях и напряжений на емкостях в моменты времени до коммутации и момент коммутации (t = -0 , t = 0).

2) *Составление операторной схемы замещения цепи после коммутации.*

При ненулевых *ННУ* в каждую ветвь с индуктивность включают источник ЭДС, равной $Li_L(0)$ и направленной по току, а в ветвь с емкостью включают ЭДС, равную $U_C(0)/p$ и направленную против тока ветви.

3) *Определение операторных изображений.*

Находят операторное изображение воздействия и по рассчитанной операторной схеме выражают искомые величины.

4) *Нахождение операторных характеристических корней.*

Операторное характеристическое уравнение строят из приравнивания знаменателя операторного изображения искомой величины к нулю.

5) *Определение оригиналов искомых функций.*

Осуществляется обратная задача по теореме разложения.

Операторный метод позволяет производить расчёт сложных схем менее трудоёмко, чем классический метод.

Сущность операторного метода заключается в том, что функции $f(t)$ вещественной переменной t, которую называют **оригиналом,** ставится в соответствие функция $F(p)$ комплексной переменной $p = s + j\omega$, которую называют **изображением.** В результате этого производные и интегралы от оригиналов заменяются алгебраическими функциями от соответствующих изображений (дифференцирование заменяется умножением на оператор p, а интегрирование – делением на него), что в свою очередь определяет переход от системы интегро-дифференциальных уравнений к системе алгебраических уравнений относительно изображений искомых переменных. При решении этих уравнений находятся изображения и далее путем обратного перехода – оригиналы. Важнейшим моментом при этом в практическом плане является необходимость определения только независимых начальных условий, что существенно облегчает расчет переходных процессов в цепях высокого порядка по сравнению с классическим методом.

Изображение $F(p)$ заданной функции $f(t)$ определяется в соответствии с **прямым преобразованием Лапласа:**

$$F(p) = \int_0^\infty e^{-pt} f(t) dt \quad (1)$$

В сокращенной записи соответствие между изображением и оригиналом обозначается, как:

$$F(p) \doteq f(t) \qquad \text{или} \qquad F(p) = L\{f(t)\}.$$

Следует отметить, что если оригинал $f(t)$ увеличивается с ростом t, то для сходимости интеграла (1) необходимо более быстрое убывание модуля e^{-St} . Функции, с которыми встречаются на практике при расчете переходных процессов, этому условию удовлетворяют.

В качестве примера в табл. 1 приведены изображения некоторых характерных функций, часто встречающихся при анализе нестационарных режимов.

Изображения типовых функций

Оригинал $f(t)$	A	$e^{\alpha t}$	$\sin \omega t$	$\cos \omega t$	$sh\, \alpha t$	$ch\, \alpha t$
Изображение $F(p)$	$\frac{A}{p}$	$\frac{1}{p-\alpha}$	$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$	$\frac{p}{p^2+\omega^2}$	$\frac{\alpha}{p^2-\alpha^2}$	$\frac{p}{p^2-\alpha^2}$

Закон Ома в операторной форме

Пусть имеем некоторую ветвь от m до n (см. рис. 3), выделенную из цепи. Замыкание ключа во внешней цепи приводит к переходному процессу, при этом начальные условия для тока в ветви и напряжения на конденсаторе в общем случае ненулевые.

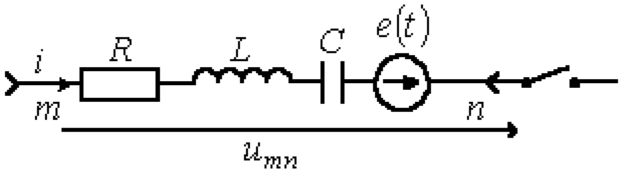

рис.3

Для мгновенных значений переменных можно записать:

$$u_{mn}(t) = iR + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int_0^t i dt + u_C(0) - e(t)$$.

Тогда на основании приведенных выше соотношений получим:

$$U_{mn}(p) = I(p)\left(R + Lp + \frac{1}{Cp}\right) - Li(0) + \frac{u_C(0)}{p} - E(p)$$.

Отсюда

$$I(p) = \frac{U_{mn}(p) + Li(0) - \frac{u_C(0)}{p} + E(p)}{Z(p)}, \qquad (2)$$

где $Z(p) = R + Lp + \frac{1}{Cp}$ - операторное сопротивление рассматриваемого участка цепи.
Следует обратить внимание, что операторное сопротивление $Z(p)$ соответствует комплексному сопротивлению $\underline{Z}(j\omega)$ ветви в цепи синусоидального тока при замене оператора p на $j\omega$.
Уравнение (2) есть математическая запись закона Ома для участка цепи с источником ЭДС в операторной форме. В соответствии с ним для ветви на рис. 3 можно нарисовать **операторную схему замещения,** представленную на рис. 4.

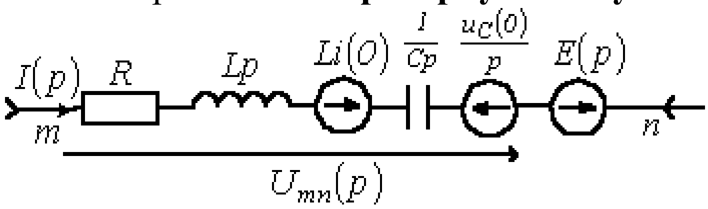

рис. 4

Законы Кирхгофа в операторной форме

Первый закон Кирхгофа: алгебраическая сумма изображений токов, сходящихся в узле, равна нулю

$$\sum_{\kappa=1}^{n} I_\kappa(p) = 0$$.

Второй закон Кирхгофа: алгебраическая сумма изображений ЭДС, действующих в контуре, равна алгебраической сумме изображений напряжений на пассивных элементах этого контура

$$\sum_{\kappa=1}^{m} E_\kappa(p) = \sum_{\kappa=1}^{m} U_\kappa(p)$$.

При записи уравнений по второму закону Кирхгофа следует помнить о необходимости учета ненулевых начальных условий (если они имеют место). С их учетом последнее соотношение может быть переписано в развернутом виде.

$$\sum_{\kappa=1}^{m}\left(E_\kappa(p) + L_\kappa i_\kappa(0) - \frac{u_{C\kappa}(0)}{p}\right) = \sum_{\kappa=1}^{m}\left(R + Lp + \frac{1}{Cp}\right) I_\kappa(p)$$

В качестве примера запишем выражение для изображений токов в цепи на рис. 5 для двух случаев: 1 - $u_C(0) = 0$; 2 - $u_C(0) \neq 0$.

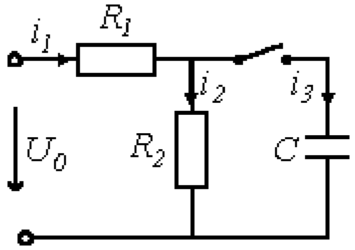

Рис. 5

В первом случае в соответствии с законом Ома

$$I_1(p) = \frac{U_0(p)}{R_1 + \dfrac{R_2\dfrac{1}{Cp}}{R_2 + \dfrac{1}{Cp}}} = \frac{U_0(1 + R_2Cp)}{p(R_1R_2Cp + R_1 + R_2)}$$.

Тогда

$$I_2(p) = I_1(p)\frac{1}{R_2Cp + 1} = \frac{U_0}{p(R_1R_2Cp + R_1 + R_2)}$$

и

$$I_3(p) = I_1(p)\frac{R_2Cp}{R_2Cp + 1} = \frac{U_0R_2C}{R_1R_2Cp + R_1 + R_2}$$.

Во втором случае, т.е. при $u_C(0) \neq 0$, для цепи на рис. 5 следует составить операторную схему замещения, которая приведена на рис. 6. Изображения токов в ней могут быть определены любым методом расчета линейных цепей, например, методом контурных токов:

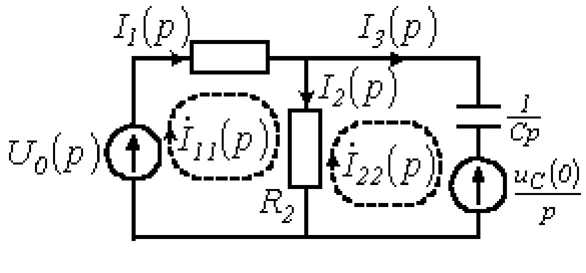

рис. 6

$$I_{11}(p)(R_1+R_2)-I_{22}(p)R_2=\frac{U_0}{p};$$

$$-I_{11}(p)R_2+I_{22}\left(R_2+\frac{1}{Cp}\right)=-\frac{u_C(0)}{p},$$

откуда $I_1(p)=I_{11}(p)$; $I_2(p)=I_{11}(p)-I_{22}(p)$ и $I_3(p)=I_{22}(p)$.

Переход от изображений к оригиналам

Переход от изображения искомой величины к оригиналу может быть осуществлен следующими способами:

1. **Посредством обратного преобразования Лапласа**

$$f(t)=\frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty}F(p)e^{pt}dp\ ,$$

которое представляет собой решение интегрального уравнения (1) и сокращенно записывается, как:

$$f(t)=L^{-1}\{F(p)\}\ .$$

На практике этот способ применяется редко.

2. **По таблицам соответствия между оригиналами и изображениями**

В специальной литературе имеется достаточно большое число формул соответствия, охватывающих практически все задачи электротехники. Согласно данному способу необходимо получить изображение искомой величины в виде, соответствующем табличному, после чего выписать из таблицы выражение оригинала.

Например, для изображения тока в цепи на рис. 7 можно записать

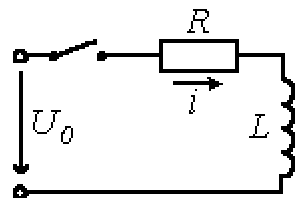

рис.7

$$I(p)=\frac{U_0(p)}{Z(p)}=\frac{U_0}{p(R+pL)}=\frac{U_0}{R}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{p+\frac{R}{L}}\right).$$

Тогда в соответствии с данными табл. 1

$$i(t)=\frac{U_0}{R}\left(1-e^{-\frac{R}{L}t}\right),$$

что соответствует известному результату.

3. **С использованием формулы разложения**

Пусть изображение $F(p)$ искомой переменной определяется отношением двух полиномов

$$F(p)=\frac{F_1(p)}{F_2(p)}=\frac{b_m p^m+b_{m-1}p^{m-1}+\dots b_1 p+b_0}{a_n p^n+a_{n-1}p^{n-1}+\dots a_1 p+a_0},$$

где $m<n$.

Это выражение может быть представлено в виде суммы простых дробей

$$F(p)=\frac{F_1(p)}{F_2(p)}=\sum_{\kappa=1}^{n}\frac{A_\kappa}{p-p_\kappa}, \qquad (3)$$

где p_κ - к-й корень уравнения $F_2(p)=0$.

Для определения коэффициентов A_κ умножим левую и правую части соотношения (3) на ($p-p_\kappa$):

$$(p-p_\kappa)\sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n}\frac{A}{p-p_i}+A_\kappa=\frac{F_1(p)(p-p_\kappa)}{F_2(p)}.$$

При $p\to p_\kappa$

$$A_\kappa=F_1(p_\kappa)\lim_{p\to p_\kappa}\frac{p-p_\kappa}{F_2(p)}.$$

Рассматривая полученную неопределенность типа $0/0$ по правилу Лопиталя, запишем

$$A_к = F_1(p_к)\lim_{p\to p_к}\frac{\frac{d}{dp}(p-p_к)}{F_2'(p)} = \frac{F_1(p_к)}{F_2'(p_к)}.$$

Таким образом,

$$F(p) = \frac{F_1(p)}{F_2(p)} = \sum_{к=1}^{n}\frac{F_1(p_к)}{F_2'(p_к)}\frac{1}{p-p_к}.$$

Поскольку отношение $\frac{F_1(p_к)}{F_2'(p_к)}$ есть постоянный коэффициент, то учитывая, что $e^{\alpha t} \doteqdot \frac{1}{p-\alpha}$, окончательно получаем

$$f(t) = \sum_{к=1}^{n}\frac{F_1(p_к)}{F_2'(p_к)}e^{p_к t}. \qquad (4)$$

Соотношение (4) представляет собой формулу разложения. Если один из корней уравнения $F_2(p)=0$ равен нулю, т.е. $F_2(p) = pF_3(p)$, то уравнение (4) сводится к виду

$$f(t) = \frac{F_1(0)}{F_3(0)} + \sum_{к=1}^{n}\frac{F_1(p_к)}{p_к F_3'(p_к)}e^{p_к t}.$$

В заключение раздела отметим, что для нахождения начального $f(0)$ и конечного $f(\infty)$ значений оригинала можно использовать **предельные соотношения**

$$f(0) = \lim_{p\to\infty} pF(p);$$
$$f(\infty) = \lim_{p\to 0} pF(p),$$

которые также могут служить для оценки правильности полученного изображения.

Расчеты операторным методом цепей с двумя реактивными элементами.

Ещё раз отметим- операторный метод отличается от классического переходом к операторной схеме замещения и определение постоянных интегрирования. При этом начальные значения находятся только для токов в индуктивностях и для напряжений на емкостях в момент коммутации.

1. В исследуемой схеме выбираем направления токов и напряжений, определяем начальные значения токов в индуктивностях и напряжений на емкостях до коммутации, т.е. ННУ.
2. По электрической схеме после коммутации составляется операторная. При этом в ветви, содержащие индуктивности и емкости, вводятся дополнительные ЭДС:

согласно с током $e_L = L \cdot i_L(0)$,

встречно с током $e_C = -\dfrac{U_C(0)}{p}$.

Если $i_L(0) = 0$, $U_c(0) = 0$, то эти величины в схему не включаются.

Рассмотрим применимо к схеме на рис. 8 а.

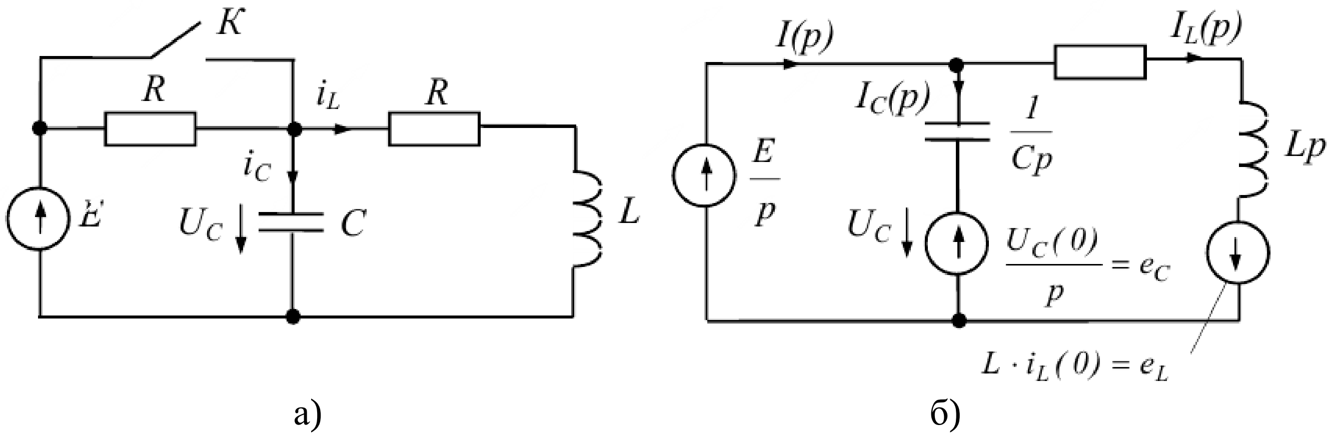

рис. 8

Для схемы на рис. 6 а известны параметры U=100 В, L= 100 мГн, C=100 мкФ, R=10 Ом.

Определим для схемы до коммутации ННУ.

$$i_L(0) = \frac{E}{2R} = \frac{100}{2 \cdot 10} = 5 \text{ А}, \quad e_L = L \cdot i_L(0) = 100 \cdot 10^{-3} \cdot 5 = 0{,}5 \text{ В};$$

$$U_C(0) = \frac{E}{2R} \cdot R = \frac{100}{2} = 50 \text{ В}.$$

Составить операторную схему замещения она представлено на рис.6 б.

Напомним, что операторная схема замещения составляется для состояния электрической схемы *после коммутации.*

3. По операторной схеме замещения находятся операторные выражения исследуемых величин. При этом используется любой из известных в электротехнике метод: законов Кирхгофа, контурных токов, узловых потенциалов и др.

Полученные выражения могут быть двух видов:

а) с нулевым корнем, например

$$U_C(p) = \frac{A(p)}{p \cdot B(p)} = \frac{a_1 p + a_0}{p\left(b_2 p^2 + b_1 p + b_0\right)};$$ (5)

б) без нулевого корня, например

$$I_L(p) = \frac{A(p)}{B(p)} = \frac{a_1 p + a_0}{b_2 p^2 + b_1 p + b_0}.$$, (6)

В обоих случаях характеристическое уравнение *B(p)* находится в знаменателе

$$B(p) = b_2 p^2 + b_1 p + b_0 = 0.$$ (7)

4. Определяются корни характеристического уравнения

$$p_{1,2} = -\frac{b_1}{2b_2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{b_1}{b_2}\right)^2 - \frac{b_0}{b_2}}.$$ (8)

5. Составляются формулы теоремы разложения для искомых переходных величин. Эти уравнения отличаются в зависимости от значения корней.

а) Нет нулевого корня, остальные - вещественные, разные, отрицательные.

$$X(t) = \frac{A(p_1)}{B'(p_1)} \cdot e^{p_1 t} + \frac{A(p_2)}{B'(p_2)} \cdot e^{p_2 t},$$ (9)

где $A(p_1) = a_1 p_1 + a_0, \quad A(p_2) = a_1 p_2 + a_0.$

$$B'(p) = \frac{dB(p)}{dp} = 2b_2 p + b_1;$$

$$B'(p_1) = 2b_2 p_1 + b_1, \qquad B'(p_2) = 2b_2 p_2 + b_1.$$

б) Есть нулевой корень, остальные вещественные, разные, отрицательные.

$$X(t) = \left[\frac{A(0)}{B(0)} = \frac{a_0}{b_0}\right] + \frac{A(p_1)}{p_1 B'(p_1)} \cdot e^{p_1 t} + \frac{A(p_2)}{p_2 B'(p_2)} \cdot e^{p_2 t}.$$

в) Нет нулевого корня, но другая пара - комплексные, сопряженные

$$p_{1,2} = -\delta` \pm j\omega.$$

$$X(t) = 2\,Re\left|\frac{A(p_1)}{B'(p_1)}\right| e^{-\delta t} \cdot \sin(\omega t - \Theta),$$ (10)

где $\theta = arctg\left|\frac{\omega}{\delta}\right|$, *Re* - отношение модулей. (11)

г) Есть нулевой корень при паре комплексных, сопряженных

$$X(t) = \frac{a_0}{b_0} + 2\,Re\left|\frac{A(p_1)}{p_1 B'(p_1)}\right| e^{-\delta t} \cdot \sin(\omega t - \Theta). \qquad (12)$$

Решите задачу самостоятельно для цепи, рис. 8 а. операторным методом, получите зависимости $i_C(t)$ и $U_L(t)$ после коммутации.

Пример. Задано изображение в виде

$$F(p) = \frac{p+2}{p\left(p^2+5p+4\right)}.$$

Обозначим $F_1(p) = p + 2$; $F_2(p) = p(p^2 + 5p + 4)$. При этом получим $F(p)$ в виде (7.25). Найдем корни характеристического уравнения $F_2(p) = p(p^2 + + 5p + 4) = 0$.

$$p_1 = 0; \quad p_2 = -1; \quad p_3 = -4.$$

При этом $F_1(p_1) = 2$; $F_1(p_2) = 1$; $F_1(p_3) = -2$.

Определим производную

$$F_2'(p) = 3p^2 + 10p + 4.$$

Отсюда $F_2¢(p_1) = 4$; $F_2¢(p_2) = -3$; $F_2¢(p_3) = 12$. Воспользовавшись формулой (7.30), окончательно получим:

$$f(t) = \frac{F_1(p_1)}{F_2'(p_1)}e^{p_1 t} + \frac{F_1(p_2)}{F_2'(p_2)}e^{p_2 t} + \frac{F_1(p_3)}{F_2'(p_3)}e^{p_3 t} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}e^{-t} - \frac{1}{6}e^{-4t}.$$

Учитывая, что среди корней характеристического уравнения $F_2(p) = 0$ имеем один нулевой корень, при нахождении $f(t)$ можно было воспользоваться и формулой (7.31). Действительно, если обозначим

$$F_3(p) = p^2 + 5p + 4,$$

то получим

$$F(p) = \frac{F_1(p)}{pF_3(p)}.$$

Тогда корни уравнения $F_3(p) = 0$ будут равны $p_1 = —l$, $p_2 =—4$. С учетом значений

$$F_3'(p) = 2p + 5; \quad F_3'(p_1) = 3; \quad F_3'(p_2) = -3;$$
$$F_3(0) = 4; \quad F_1(0) = 2; \quad F_1(p_1) = 1; \quad F_1(p_2) = -2$$

согласно (7.31) окончательно получим

$$f(t) = \frac{F_1(0)}{F_3(0)} + \frac{F_1(p_1)}{p_1 F_3'(p_1)}e^{p_1 t} + \frac{F_1(p_2)}{p_2 F_3'(p_2)}e^{p_2 t} = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}e^{-t} - \frac{1}{6}e^{-4t}\right),$$

Задание к Лекции.

Самостоятельно решить задачу для схемы рис. 8 до конца.