Коваленко В.Е. Сентябрь 2021г.

Лекция 2 Расчёт цепи методами наложения и контурных токов, узловых потенциалов (напряжений).

Метод наложения.

Сначала сформулируем принцип суперпозиции.

Реакция цепи или системы на суммарное воздействие равно сумме реакций от элементарных воздействий в отдельности:

$$f(x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n) = f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + \ldots + f(x_n).$$

Принцип суперпозиции применим только к линейным системам.

Сформулируем метод наложения основанный на этом принципе.

Методом наложения - ток в любой ветви линейной электрической цепи равен алгебраической сумме токов, создаваемых в этой ветви каждым из источников в отдельности. Эти токи от отдельных источников называют частичными токами.

Решения этим методом строится на расчёта цепи с одним источником (в основном) методом эквивалентных преобразований.

Для расчета используем следующий порядок:

1) выбираем произвольно направления реальных токов в исходной схеме;

2) рассматриваем частичные схемы, содержащие только по одному источнику. Если исключается идеальный источник ЭДС то на его месте короткое замыкание(т.е. удаляем его из схеме соединяя его полюса между собой). Если исключается идеальный источник Тока то на его месте разрыв(т.е. удаляем всю ветвь где включён был этот источник);

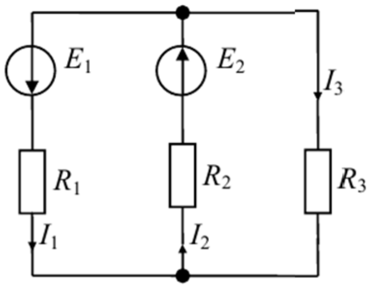
3) выбираем направления частичных токов в каждой схеме, определяется однозначно оставшимся источником;

4) определяем частичные токи во всех ветвях всех схем;

5) определить реальные токи как алгебраическую сумму соответствующих частичных токов. В сумме если направления частичных токов совпадают с выбранными реальными то они берутся с знаком плюс, в противном случаи – минус.

Рассмотрим пример.

Методом наложения рассчитать токи в ветвях схемы на рисунке. Известны параметры резисторов и значения ЭДС.



Произвольно выберем направления реальных токов в ветвях (см. рис.).

Составим частичные схемы замещения для каждого из источников э.д.с, как показано на рисунках а) и б). Проставим направление частичных токов в соответствии с имеющимся в схеме источником.

рис. а

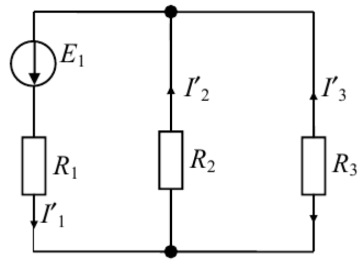
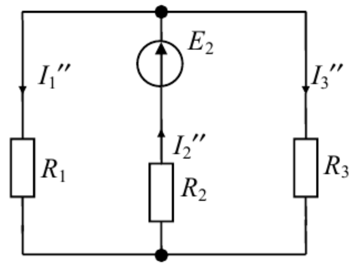


рис.б



Определяем эквивалентное сопротивление:

$$R_{э1} = R_1 + \frac{R_2 R_3}{(R_2 + R_3)} \qquad R_{э2} = R_2 + \frac{R_1 R_3}{(R_1 + R_3)}$$

$$I'_1 = E_1 / R_{э1} \qquad I''_2 = E_2 / R_{э2}$$

По правилу растекания тока находим:

$$I'_2 = \frac{I'_1 R_3}{(R_2 + R_3)} \qquad I''_1 = \frac{I_2 R_3}{(R_1 + R_3)}$$

Используя первое правила Кирхгофа определяем оставшиеся токи:

$$I'_3 = I'_1 - I'_2 \qquad I''_3 = I''_2 - I''_1$$

Определяем ток в любой ветви электрической це пи как алгебраическую сумму частичных токов.

$$I_1 = I'_1 + I''_1; \quad I_2 = I'_2 + I''_2; \quad I_3 = -I'_3 + I''_3 .$$

Частичные токи I'_1 и I''_1 совпадает с реальным током I_1 (нами выбранном направление), поэтому их берем в сумме с плюсом. Частичные токи I'_2 и I''_2 также совпадает с реальным током I_2 (нами выбранном направление), поэтому их берем в сумме с плюсом. А с током I_3 исходной схемы частичный ток I'_3 противоположно направленный, поэтому его берем в сумме с минусом . Частичный ток I''_3 совпадает поэтому учитываем в сумме со знаком плюс.

Трудоемкость решения возрастает с увеличением числа источников. Поэтому этот метод используется тогда, когда количество источников немного. Обычно не более трёх.

Метод контурных токов

Данный метод позволяет исключить из системы количество уравнений составленных по 1-му правилу Кирхгофа т.е. (У-1).

Сущность метода:

Вводят промежуточную переменную, называемую контурным токам. Осуществляем переход от реальных токов к контурным токам.

Контурный ток - условно расчетный ток, имеющий одинаковое значение на всех участках заданного контура.

Количество контурных токов равно количеству линейно независимых контуров: $N_{кт} = В-(У-1)$.

Если в цепи имеется источник тока, то последний преобразуется в источник ЭДС, или учитываем как дополнительный контурный ток, не имеющий замкнутого контура. Уравнение для него не составляется.

Так по определению величина контурного тока если он проходит через источник тока равна значению этого источника. Такие контурные токи являются изначально известными.

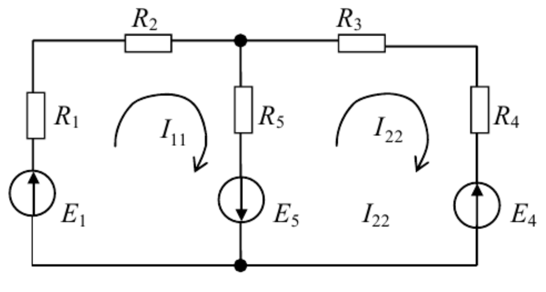
Т.е. количество уравнений необходимых для нахождения неизвестных контурных токов равно : $N_{мкт} = В-(У-1)- N_J$, *где* N_J *- количество источников тока в схеме.*

Для нахождения контурных токов, составляется система уравнений по 2-му правилу Кирхгофа.

Токи в исходной схеме определяются, используя 1-е правило Кирхгофа.

Рассмотрим пример расчёта методом контурных токов.

Для схемs на рисунке ниже рассчитать все токи. Известны все параметры резисторов и значения источников.



Выбираем два линейно независимых контура (в каждый из них входит ветвь, не вошедшая в другой). Произвольно выбираем направления контурных токов, обозначим их I_{11} и I_{22}.

Составим уравнения, по второму закону Кирхгофа учитывая, что по смежной ветви течет ток I_{11} - I_{22} сверху вниз:

$$\left.\begin{aligned} I_{11}(R_1+R_2)+(I_{11}-I_{22})R_5=E_1+E_5 \\ -(I_{11}-I_{22})R_5+I_{22}(R_3+R_4)=-E_4-E_5 \end{aligned}\right\}$$

Сгруппируем уравнения относительно контурных токов. Получим.

$$\left.\begin{aligned} I_{11}(R_1+R_2+R_5)+I_{22}(-R_5)=E_1+E_5 \\ I_{11}(-R_5)+I_{22}(R_3+R_4+R_5)=-E_4-E_5 \end{aligned}\right\}$$

Введем обозначения:

$R_{11}=R_1+R_2+R_5$, $R_{22}=R_3+R_4+R_5$ — полные (или собственные) сопротивления контуров;

$R_{12}=R_{21}=-R_5$ — взаимное (или смежное) сопротивление;

$E_{11}=E_1+E_5$;

$E_{22}=-E_4-E_5$ — контурные э.д.с.

С учетом обозначений последняя система примет вид:

$$\left.\begin{aligned} I_{11}R_{11}+I_{22}R_{12}=E_{11} \\ I_{11}R_{21}+I_{22}R_{22}=E_{22} \end{aligned}\right\}$$

Можно сформулировать правила составления контурных уравнений: Алгебраическая сумма ЭДС в контуре, взятых со знаком плюс если совпадают с контурным током данного контура и со завком минус если нет равна произведению контурного тока данного контура на сумма всех сопротивлений контура, минус произведение контурных токов соседних контуров, на соответствующее сопротивление смежных ветвей, если через эти ветви они проходят встречно, и плюс если направление контурных токов совпадают.

Если бы в схеме было больше двух контуров, например три, то система уравнений выглядела бы следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} I_{11}R_{11}+I_{22}R_{12}+I_{33}R_{13}=E_{11} \\ I_{11}R_{21}+I_{22}R_{22}+I_{33}R_{23}=E_{22} \\ I_{11}R_{31}+I_{22}R_{32}+I_{33}R_{33}=E_{33} \end{aligned}\right\}$$

Сформулируем порядок решения по МКТ:

1. Определить число контурных токов $N_{кт}$ = *В-(У-1).*
2. Выбираем пути прохождения этих контурных токов. Они могут быть известные и неизвестные.

   Правило выбора пути контурных токов:

   - Известные контурный ток выбираем таким образом, чтобы он проходил только через один источник тока.
   - Неизвестный контурный токи выбираются, так чтоб он не проходил через ветви с источниками тока.

Определяем количество уравнений в системе по формуле $N_{мкт}$ = В-(У-1)- N_J , где N_J - количество источников тока в схеме.

3. Составляем систему уравнения в общем виде через собственные, смежные сопротивления, контурные токи и суммарные ЭДС контуров. Учитывая соответствия направлений ЭДС и контурного тока соседних контуров с контурным током данного контура.
4. Определяем значения собственные, смежные сопротивления и суммарные ЭДС контуров;
5. Решаем полученную систему, находим неизвестные контурные токи;
6. Определяем токи для выбранных направлений схемы задачи. Для этого рассматриваем ветвь, где определяем ток, и учитываем контурные токи, протекающие по этой ветви и его направление относительного искомого тока. Значение определяется как сумма всех контурных токов протекающих по данной ветви взятых с соответствующим знаком(плюс - совпадают, минус – противоположны).

Метод узловых напряжений (потенциалов)

Количество уравнений, составленных по 2-му правилу Кирхгофа.

$N_{мун} = Y - 1$

<u>Применяется этот метод, когда количество узлов меньше количества контуров.</u>

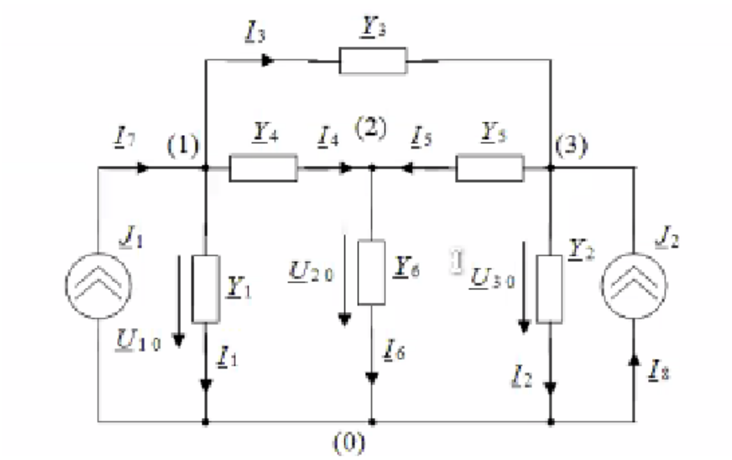
Сущность метода: вводятся промежуточные переменные – узловые напряжения (потенциал).

<u>Узловое напряжение</u> – напряжение между любым узлом схемы и некоторым базисным узлом той же самой схемы, потенциал которого принимается равным нулю.

Далее записывается уравнение напряжения узлов по 1-му правилу Кирхгофа.
Искомые токи находим, используя обобщённый закон Ома из найденных узловых напряжений.

Пример 1:

(Во всех формулах за место R – Y должна быть. Где подчёркивание – означает комплексное, делать их не нужно в своих работах)



// 4 узла

// Y = 1 / r

Нужно найти U_{10}, U_{20}, U_{30} относительно нулевого.

Уравнения, составленные по правилу Кирхгофа:

I1+I3+I4=J1;

I4-I5+I6=0;

I2-I3+i5=J2;

Обобщённый закон ома. Тк тут нет ЭДС, то проводимость участка вычисляется:

$$\underline{I}_1 = \underline{Y}_1\underline{U}_1 = \underline{Y}_1\underline{U}_{10};\ \underline{I}_2 = \underline{Y}_2\underline{U}_2 = \underline{Y}_2\underline{U}_{30};$$
$$\underline{I}_3 = \underline{Y}_3\underline{U}_3 = \underline{Y}_3\left(\underline{U}_{10} - \underline{U}_{30}\right);$$
$$\underline{I}_4 = \underline{Y}_4\underline{U}_4 = \underline{Y}_4\left(\underline{U}_{10} - \underline{U}_{20}\right);$$
$$\underline{I}_5 = \underline{Y}_5\underline{U}_5 = \underline{Y}_5\left(\underline{U}_{30} - \underline{U}_{20}\right);\ \underline{I}_6 = \underline{Y}_6\underline{U}_6 = \underline{Y}_6\underline{U}_{20}.$$

Ток, который протекает от т1 с большим потенциалом к точке 2 с меньшем потенциалом = потенциал 1 – потенциал 2.

Определив значения реальных токов чз узловые напряжения (предварительно заменив нулём). Подставляем в систему (в ур-я, составленные по правилу Кирхгофа):

$$\left(\underline{Y}_1 + \underline{Y}_3 + \underline{Y}_4\right)\underline{U}_{10} - \underline{Y}_4\underline{U}_{20} - \underline{Y}_3\underline{U}_{30} = \underline{J}_1;$$
$$-\underline{Y}_4\underline{U}_{10} + \left(\underline{Y}_4 + \underline{Y}_5 + \underline{Y}_6\right)\underline{U}_{20} - \underline{Y}_5\underline{U}_{30} = 0;$$
$$-\underline{Y}_3\underline{U}_{10} - \underline{Y}_5\underline{U}_{20} + \left(\underline{Y}_2 + \underline{Y}_3 + \underline{Y}_5\right)\underline{U}_{30} = \underline{J}_2.$$

После решения этой системы уравнения получаем значения узл. напряжения и определяем токи для цепи.

** Если количество узлов равно k, то уравнение запишется так (Лямбда – многоточие):

$$\underline{Y}_{11}\underline{U}_{10} + \underline{Y}_{12}\underline{U}_{20} + \Lambda + \underline{Y}_{1p}\underline{U}_{p0} = \underline{J}_{10};$$
$$\underline{Y}_{21}\underline{U}_{10} + \underline{Y}_{22}\underline{U}_{20} + \Lambda + \underline{Y}_{2p}\underline{U}_{p0} = \underline{J}_{20};$$
$$\mathrm{K};$$
$$\underline{Y}_{p1}\underline{U}_{10} + \underline{Y}_{p2}\underline{U}_{20} + \Lambda + \underline{Y}_{pp}\underline{U}_{p0} = \underline{J}_{p0}.$$

Тоже самое (K – многоточие):

В матричной форме

$$\underline{\mathbf{Y}}_{ij}\underline{\mathbf{U}}_{i0} = \underline{\mathbf{J}}_{i0}, \qquad (4.17)$$

где $\underline{\mathbf{Y}}_{ij} = \begin{bmatrix} \underline{Y}_{11} & \underline{Y}_{12} & \mathrm{K} & \underline{Y}_{1p} \\ \underline{Y}_{21} & \underline{Y}_{22} & \mathrm{K} & \underline{Y}_{2p} \\ \mathrm{K} & \mathrm{K} & \mathrm{K} & \mathrm{K} \\ \underline{Y}_{m1} & \underline{Y}_{m2} & \mathrm{K} & \underline{Y}_{mm} \end{bmatrix}$ — матрица узловых прово-

димостей цепи; $\underline{\mathbf{U}}_{i0} = \begin{vmatrix} \underline{U}_{10} \\ \underline{U}_{20} \\ \mathrm{K} \\ \underline{U}_{p0} \end{vmatrix}$, $\underline{\mathbf{J}}_{i0} = \begin{vmatrix} \underline{J}_{10} \\ \underline{J}_{20} \\ \mathrm{K} \\ \underline{J}_{m0} \end{vmatrix}$ — вектор-столбцы

Порядок решения задач по методу узловых напряжений (потенциалов)

1. Выбираем направление токов в ветвях схемы
2. Определяем количество линейно независимых узлов (по формуле p=y(количество узлов) - 1)
3. Выбираем узел, потенциал которого приравниваем к нулю. Проставляем на схеме направление узловых напряжений.
4. Если в схеме имеются ветви **только с источником ЭДС**, то по определению источника ЭДС напряжение между узлами этой ветви известно. (смотреть на направление и если оно совпадает: то +, нет -)
5. Количество уравнений в системе определяется по следующей формуле: $N_{мун}= y – 1 – N_e$ (N_e – только с источником ЭДС)
6. Составляем систему уравнений в каноническом виде. [Количество уравнений определяется как $N_{мун}$. Количество составляющих по количеству линейно независимых узлов]

7. Определяем собственную проводимость узлов, взаимную проводимость узлов и суммарный узловой ток. (собственную проводимость определяем как сумму всех проводимостей, подключенную к данному узлу)

<u>Взаимная проводимость</u> – это проводимость, включенная между узлами (для Y(1)(2) это будет Y4).

<u>Суммарный узловой ток</u> – это алгебраическая сумма всех источников тока, подключенных к данному узлу (не сумма токов, а сумма источников тока. Суммарный узловой ток (1) узла – J1. Для (2) – это ноль. Для (3) это J2 со знаком +).

8. Решаем полученную с известными коэффициентами систему, находим соответствующие узловые напряжения.
9. Искомые токи в ветвях определяем используя обобщённый закон Ома.

Пример.

Для схемы на рис. 15 задано: $J_1 = 1$ А; $J_2 = 2$ А; $E = 30$ В; $R = 10$ Ом.

Требуется определить токи всех ветвей.

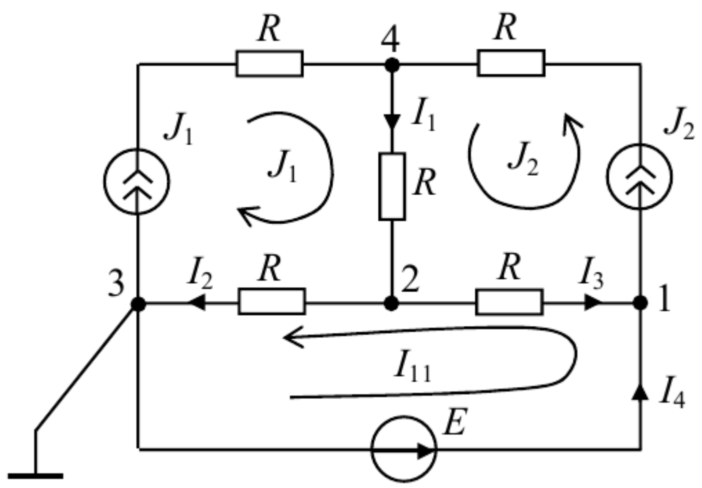


Рис.15

В схеме шесть ветвей, четыре узла и два источника тока. По второму закону Кирхгофа необходимо составить одно уравнение, столько же и по методу контурных токов.

Решим задачу методом узловых потенциалов.

Особенность схемы — наличие ветви с нулевым сопротивлением, в которой включен только идеальный источник э.д.с. между узлами 1 и 3. Для расчета такой схемы целесообразно один и названных узлов заземлить. Например, заземлим узел 3. Тогда $\varphi_3 = 0$; $\varphi_1 = E = 30$ В.

Неизвестными будут потенциалы узлов 2 и 4. Составим для них уравнения и определим неизвестные:

$$\left.\begin{aligned} &\varphi_2\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R}+\frac{1}{R}\right)-\varphi_4\frac{1}{R}-\varphi_1\frac{1}{R}=0; \\ &\varphi_4\left(\frac{1}{R}+0+0\right)-\varphi_2\frac{1}{R}-\varphi_1\frac{1}{\infty}=J_1+J_2; \end{aligned}\right\}$$

$$\begin{rcases} 0,3\varphi_2 - 0,1\varphi_4 - 3 = 0; \\ 0,1\varphi_4 - 0,1\varphi_2 = 3; \end{rcases}$$

$$\varphi_2 = 30 \text{ В}; \ \varphi_4 = 60 \text{ В}.$$

Далее рассчитаем токи ветвей:

$$I_1 = \frac{\varphi_4 - \varphi_2}{R} = \frac{60 - 30}{10} = 3 \text{ А};$$

$$I_2 = \frac{\varphi_2 - \varphi_3}{R} = \frac{30 - 0}{10} = 3 \text{ А};$$

$$I_3 = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{R} = \frac{30 - 30}{10} = 0 \text{ А}.$$

Ток в ветви с нулевым сопротивлением можно найти только по первому закону Кирхгофа. Из этого закона для узла 3 получим:

$$I_4 = I_2 - J_1 = 3 - 1 = 2 \text{ А}.$$

Задача решена.

Баланс мощностей

Проверить полученное решения расчёта схемы можно используя метод баланса мощностей.

Мощность, отдаваемая источниками электрической энергии равна мощности, принимаемой приемниками электрической энергии.
Рист = Рпр

Рист = $\pm\sum_{k=1}^{n} E_k I_k$. Составляющие мощностей источников энергии берутся со знаком плюс если ЭДС и ток в ветви с источником совпадает по направлению если нет то минус.

Рпр = $\sum_{k=1}^{m} I_k^2 R_k$