Коваленко В.Е. сентябрь 2021г.

ЛЕКЦИЯ 3 1час.

т.2 Электрические цепи переменного тока

п.1 *Синусоидальные электрические величины и их представления*

Переменными называют напряжение и токи, значение которых меняются во времени.
Если напряжение и ток изменяются по синусоидальному закону, то они называются синусоидальными (гармоническими).

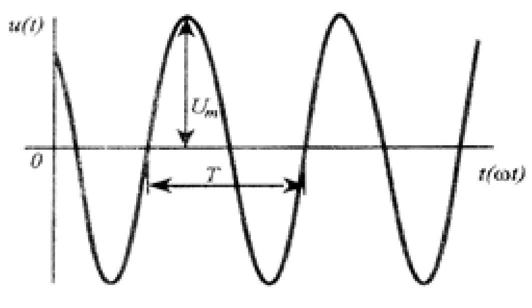
Три вида представления гармонических напряжения и тока:

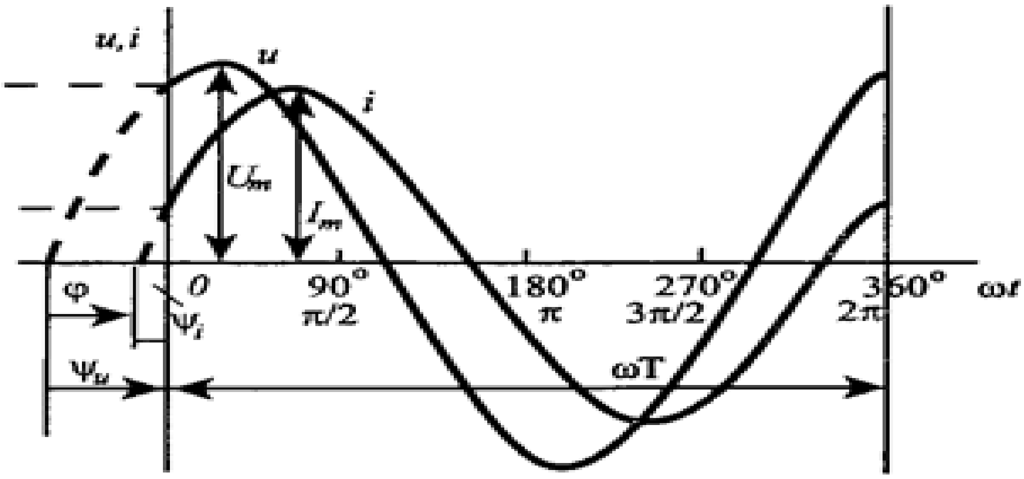
1) **Аналитическое представление:**

$u(t) = U_m\sin(\omega t+\psi_u)$
$i(t)=I_m\sin(\omega t+\psi_i)$
где
$u(t)$, $i(t)$ – мгновенное значение напряжения, тока
U_m, I_m – амплитуда напряжения, тока
ω — угловая частота
ψ_u, ψ_i - начальная фаза напряжения тока

Решения задач для цепей в этом представление сводится к решению системы интегрально дифференциальных уравнений для мгновенных значений и получению результата виде математического выражения.

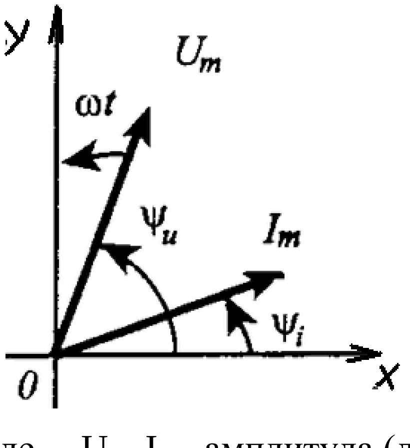
2) **Графическое представление:**





где, U_m ,I_m– амплитуда, ω — угловая частота, ψ_u, ψ_i - начальная фаза напряжения тока и T- период, указаны на графиках.
Это поможет на лабораторных работах определять параметры гармонического сигнала на экране осциллографа.
Решения задач для цепей в этом представление сводится к выполнению требуемых операций над графиками, т.е. результат получаем для каждого момента времени, и получем кривую соединяя эти точки. Если корче, то задачу решаем графически.

3) Векторные диаграммы — совокупность векторов, изображающих синусоидальные функции времени. Синусоидальные величины представлены в виде декартовых координат, вращающимся с угловой скоростью ω вектором, длина которого равна амплитуде напряжения U_m или тока I_m, а угол наклона оси горизонта — начальной фазе ψ.



где, U_m ,I_m– амплитуда (длина векторов U_m,I_m);
ωt —вращение всех векторов вокруг начало координат с угловой скоростью ω;
ψ_u, ψ_i - начальная фаза напряжения тока - указаны на диаграмме.

Решения задач для цепей в этом представление сводится к решению геометрической задачи с векторами, а численный результат можно получить используя тригонометрические формулы и теорему Пифагора.

Основные определения параметров синусоидальных сигналов:

Амплитуда — максимальное значение синусоидальной функции (U_m, I_m, E_m)

Период (T) — минимальное расстояние между двумя одинаковыми значениями функции. (2π)

Частота. f – линейная частота, величина обратная периоду [Гц]. $f=1/T$;

Начальные фазы (ψ_u, ψ_i, ψ_e)— значение фазы в нулевой момент времени.
Знак фазы определяется соизмеримо с осью времени. Если по часовой стрелке, то -, если против, то +.

Сдвиг фаз — разность фаз начальных между напряжением и током. $\varphi=\psi_u - \psi_i$

Угловая скорость — скорость изменения фазы. [рад/с], [1/с]
$\omega = d(\omega t+\psi)/dt$;

формула связи между угловой скоростью и линейной частотой:
$\omega=2\pi f=2\pi/T$;

п.2 *Средние и действующие значения синусоидальной функции.*

Для количественной характеристики переменной периодической функции используются интегральные значения за период.
Для расчёта среднего значения за период используется следующая формула

$$F_{\text{ср}} = \frac{1}{T} * \int_0^1 f\,(t)dt$$

но для $f(t) = \sin \rightarrow F_{\text{ср}} = 0$;
поэтому используются для синусоидальных функций среднее значение за полпериода, и для тока получаем следующее:

$$I_{\text{ср}} = \frac{2}{T} * I_m * \int_0^{\frac{T}{2}} \sin\,(\omega * t)dt = \frac{2 * I_m}{\pi} = 0{,}637 * I_m$$

Начальную фазу тока для простоты решения приняли равной нулю.
Для напряжение, очевидно, получим такое же соотношение:

$$U_{\text{ср}} = 2U_m/\pi = 0{,}637U_m$$

Это значение будим называть средним значением гармонической функции и обозначать с подстрочным значком - *ср* (например, $I_{\text{ср}}$, $U_{\text{ср}}$).

Существуют электроизмерительные приборы, которые реагируют на средние значения — магнитоэлектрические системы.

Другой количественной характеристикой для гармонической функции используются среднеквадратичные интегральные значения (т.е. среднее значение от квадрата функции) за период.
Наподобие теплового действия постоянного тока, которое пропорционально квадрату тока или напряжения.
Определим действующее значение синусоидального тока.

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} * \int_0^T i^2\,(t)dt} = \sqrt{\frac{I_m^2}{t} * \int_0^T \left(\frac{(1 - cos2 * \omega * t)}{2}\right) dt} = 0{,}707 * I_m$$

$$sin^2(\omega * t) \; = \frac{(1 - cos(2 * \omega * t))}{2}$$

используя ворожение:
Для напряжение, очевидно, получим такое же соотношение

$$U = \frac{U_m}{\sqrt{2}} = 0{,}707 * U_m$$

Это значение будим называть действующими (или среднеквадратичными) значением гармонической функции.
Обозначаем без подстрочных значков (например: I, U).

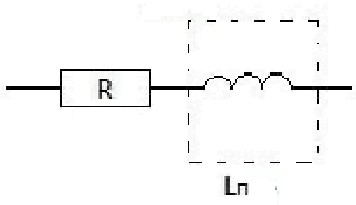
Большинство электроизмерительных приборов градуируются в действующих значениях.

п.3 ***Идеальные элементы цепи переменного тока. Схемы замещения реальных элементов.***

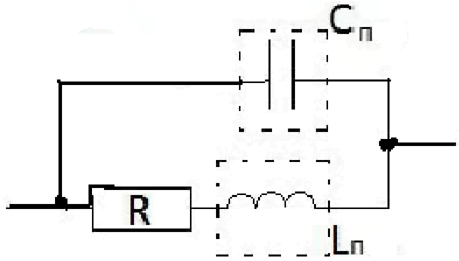
Особенности расчёта цепей переменного тока требует учёта паразитных резисторов, индуктивностей и ёмкостей которые присутствуют в реальных элементах и которые можно не учитывать для постоянных цепей. Так как катушка для постоянного тока это короткое замыкание, а конденсатор это разрыв цепи. А для переменного они обладают сопротивление определяемое в том числе и частотой. Поэтому при анализе реальные элементы моделируются следующими схемами.

1) Сопротивление может изготавливаться из проводника материал которого имеет сопротивление, выбирая длину которого определяем значение. Чтобы уложить его в требуемых размерах проводник наматывают на сердечник, а это уже катушка индуктивности.

На низких частотах (НЧ)

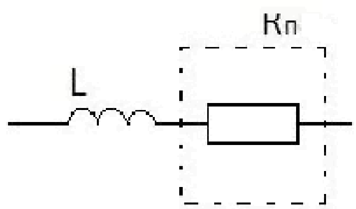


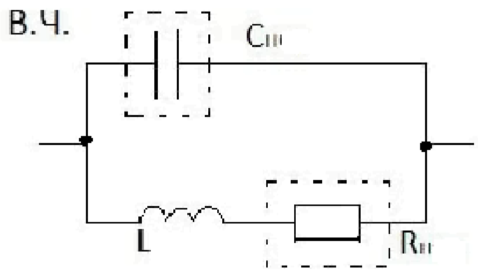
На высоких частотах(ВЧ)



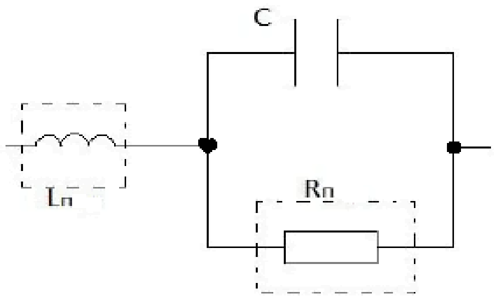
2) Индуктивность, изготавливается из проводника обладающее каким-то сопротивлением. Следовательно потери – активное сопротивление переменному току. На высоких добавляется паразитная межвитковая ёмкость.

Н.Ч.



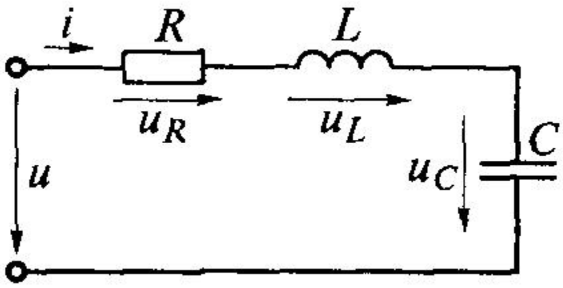


3) Конденсатор на низких частотах замещается конденсатором без паразитных элементах. На ВЧ и СВЧ схема приведена ниже.



где L_n, C_n, R_n - паразитные индуктивности, ёмкости и сопротивления соответственно. При определённых частотах они могут вносит существенный вклад и необходимо при анализе учитывать эти значения.

п.4 ***Анализ цепи переменного тока при последовательном включении элементов резистора, катушек индуктивности и емкости. (RLC)***



Даны значения R,L,C
и $U(t) = U_m*\sin(\omega t)$

____

Найти i(t) (отклик цепи) - ?

РЕШЕНИЕ:
Ищем значение мгновенного тока в виде $i(t) = I_m*\sin(\omega t-\varphi)$
так как цепь линейная то, следовательно, частота не меняется и т.о. надо определить амплитуду тока I_m и разность фаз φ.

Запишем по второму правилу Кирхгофа для схемы задачи,
$u_R(t)+u_L(t)+u_C(t)=u(t)$
вспомним что
$u_R(t)= i(t)\cdot R$, $u_L(t)= \frac{L*di(t)}{dt}$, $u_C(t)= \frac{1}{C} * \int i(t)dt$

в результате получим

$$iR + L*\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}*\int idt = U(t)$$

подставляя значение мгновенного тока в виде $i(t) = I_m\cdot\sin(\omega t-\varphi)$ это выражение , получаем

$$I_m\cdot R\cdot \sin(\omega t - \varphi) + L\cdot I_m\cdot\omega \cos(\omega t - \varphi) - I_m\cdot(1/C\omega)\cdot\cos(\omega t - \varphi) = u(t)$$

Вводим обозначения
$I_m * R=U_{mR}$ - амплитуда напряжения на сопротивление,

$L\omega\cdot I_m = X_L\cdot I_m = U_{mL}$ - амплитуда напряжения на катушки индуктивности а $X_L= L\omega$ реактивное сопротивление катушки индуктивности (реактанс катушки),

$(1/C\omega)\cdot I_m = X_c\cdot I_{mC}=U_{mC}$ - амплитуда напряжения на конденсаторе а , $X_C=1/C\omega$ реактивное сопротивление конденсатора,

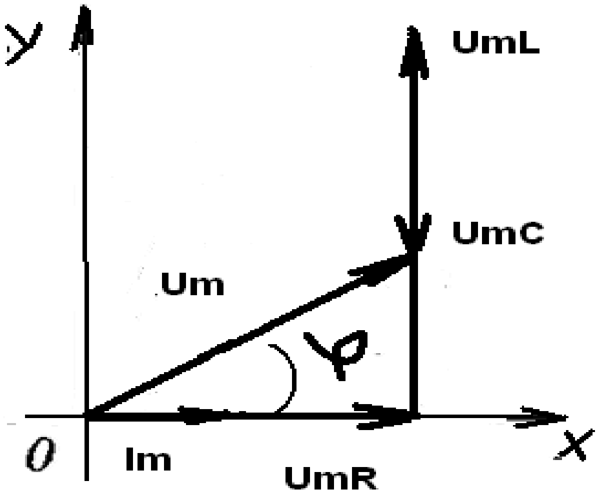
и используя связь между Cos и Sin, заменяем Cos
$+\cos(\omega t - \varphi) = \sin(\omega t-\varphi+\pi/2)$
$-\cos(\omega t - \varphi) = \sin(\omega t - \varphi-\pi/2)$

получим следующее выражение

$U_{mR} \cdot sin(\omega t–\varphi)+ U_{mL} \cdot sin(\omega t–\varphi+\pi/2) + U_{mC} \cdot sin(\omega t–\varphi–\pi/2) = U_m \cdot sin(\omega t)$

Анализируя полученное выражение, делаем следующие выводы относительно тока $i(t) = I_m sin(\omega t- \varphi)$:

напряжение на R сдвиг фаз = 0°, т.е. напряжение $u_R(t)$ синфазно с током;
напряжение на L = +90°;
напряжение на C = -90°
Для получения решения задачи, построим, используя полученные выше выводы топографическую(двигаясь по схеме наносим на векторной диаграмме вектор соответствующего напряжения учитывая угол относительно тока и откладываем следующий вектор из конца предыдущего) векторную диаграмму напряжений.



Далее используем теорему Пифагора и вводя понятие полного сопротивления цепи Z, получим:

$$U_m^2 = U_{mR}^2 + (U_{mL} - U_{mC})^2 = R^2 * I_m^2 + (x_L - x_C)^2 * I_m^2 = (R^2 + (x_L - x_C)^2) * I_m^2 = z^2 * I_m^2$$

обозначаем через

$$Z = \sqrt[2]{R^2 + (x_L - x_C)^2}$$

полного сопротивления последовательной RLC цепи.

Если выразить амплитуду тока, мы получаем формулу похожую на закон Ома

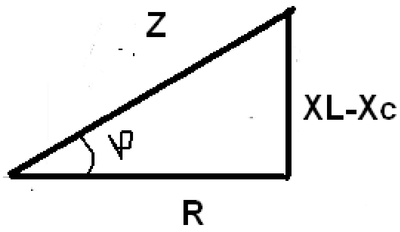
$$\text{Im} = \frac{Um}{\sqrt[2]{R^2 + (x_L - x_C)^2}} = \frac{Um}{Z}$$

если слева и справа поделим на $\sqrt{2}$, получим для действующих значений

$$\text{I} = \frac{U}{\sqrt[2]{R^2 + (x_L - x_C)^2}} = \frac{U}{Z}$$

Т.о. закон Ома выполняется для цепей гармонического напряжения и тока как для амплитудных так и для действующих значений.

Мы также определили одно из требуемых значений задачи – амплитуду тока. Чтобы определит разность фаз φ, перейдем к треугольнику сопротивлений. Для этого все стороны треугольника напряжений на диаграмме разделим на амплитуду тока Im и т.о. перейдём к треугольнику сопротивлений.
Теперь определяем угол сдвига фазы между током и напряжение φ .



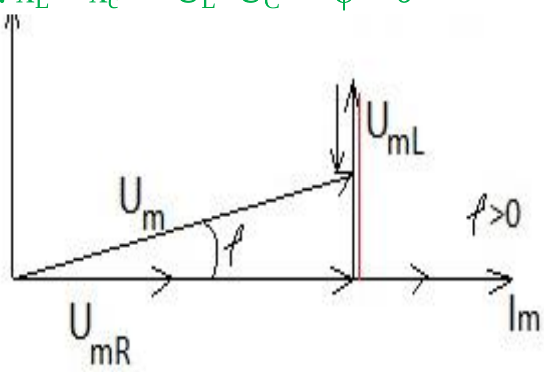
$$\varphi = arctg(\frac{(x_L - x_C)}{R})$$

Задача решена.

Выводы из полученного результата анализа R L C цепи.

Возможно три случая в зависимости от соотношений X_L и X_c.
Которое определяет характер сопротивления электрической цепи.

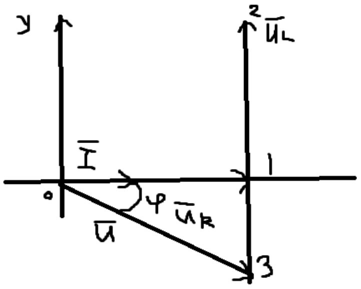
1. $x_L > x_c \rightarrow U_L > U_C \rightarrow \varphi > 0$



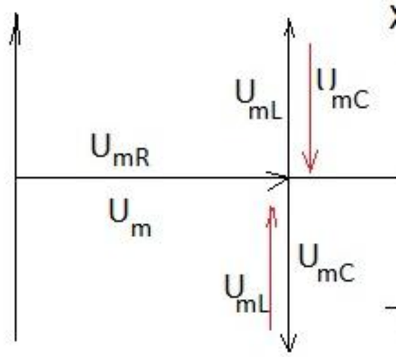
В случаи идеальной R L C цепи, т.е. R = 0 то $\varphi = 90^0$, это чисто индуктивной характер сопротивления нагрузки.
Если потери присутствуют, то цепь носит резистивно-индуктивный характер нагрузки

2. $x_c > x_L \rightarrow U_C > U_L \rightarrow \varphi < 0$

В случаи идеальной R L C цепи, т.е. R = 0 то здесь φ = -90^0 , это чисто емкостной характер сопротивления нагрузки.



Если потери присутствуют, то цепь носит резистивно-емкостной характер нагрузки



3. $x_c = x_L \rightarrow U_C = U_L$ и $\varphi = 0$

чисто резистивный характер нагрузки