Коваленко В.Е. октябрь 2021г.

Лекция 5

Понятие о резонансе в электрических цепях синусоидального тока. Частотные характеристики

Частотная характеристика — зависимость какого либо параметра системы от частоты.

Общее определение резонанса.

Резонанс – явление, при котором цепь, содержащая реактивные элементы, проявляет себя как чисто активная, что соответствует совпадению фаз входного напряжения и тока.

Различают два вида резонанса. Резонанс напряжения или последовательный резонанс и резонанс тока или параллельный резонанс. Остановимся на резонансе напряжения.

1. **Резонанс напряжения (*последовательный резонанс*)** — явление, при котором в цепи с последовательно соединенными участками с резистивным, индуктивным и емкостным характерами нагрузки, входное сопротивление имеет чисто активный характер. Следовательно, реактивного напряжения нет.

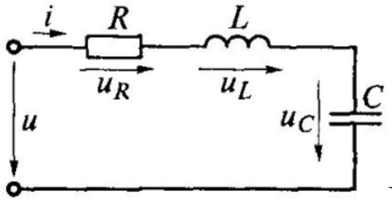


Рис.1

1) $X_{общ} = 0 \rightarrow \dot{Z}_Э = R_э + jX_{общ} = R$ т.е. условие резонанса это равенство нулю мнимой части полного комплексного сопротивления цепи.

   Для нашей задачи это условие будет следующим:

   $X_L - X_C = 0$, и тогда $X_L = X_C$

2) Резонансная частота.

   Используя условия резонанса, выведем формулу для расчёта резонансной частоты. Реактивные сопротивления определяются выроження:

   $X_L = \omega L$; $X_C = 1/\omega C$, подставляем в условие резонанса

   $\omega_p L = 1/\omega_p C$

   Следовательно $$\omega_p = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

   Анализируя полученную формулу делаем выводы по способам настройке на резонанс. ***Различают два способа настройки на резонанс:***

   1) *Параметрический способ (используется в радиоприемниках)*
      а) *C – изменяется, а L = const, ω_p=const*
      б) *L – изменяется, а C = const, ω_p = const*

2) *Частотный способ(настройка несущей частоты)*
   ω – изменяется, а L и C постоянны.

3) Реактивное сопротивление при резонансе

$$(X_L)_p = \omega_p L = \frac{1}{\sqrt{LC}} L = \sqrt{\frac{L}{C}} = \rho$$

– характеристическое (волновое) сопротивление контура

$$(X_C)_p = \frac{1}{\omega_p C} = \sqrt{\frac{L}{C}} = \rho$$

3) Ток при резонансе

$$I_p = \frac{U}{\sqrt{R^2+(X_L-X_C)^2}} = \frac{U}{R}$$ - макс. значение.

.

На резонансе входной ток принимает максимальное значение!

5) Добротность резонансного контура (Q) равна отношению энергии запасенной в контуре к энергии потерь.
Может быть выражена через реактивное сопротивление и активное сопротивление.

$Q = \rho/R$

Расчитаем напряжение на индуктивности и емкости на резонансе:

$(U_L)_p = I_p*(X_L)_p = U\rho/R = QU$

$(U_C)_p = I_p*(X_C)_p = QU$

Из полученных выражений можно сделать вывод: напряжение на реактивном элементе в добротность раз больше чем входное!
Сегодня достигаются высокие значении добртности. Для радиотехнических схем Q более 1000.

6) Построим векторную диаграмму для резонанса напряжения Рис.2.

$\dot{U}_R = IR$, $\dot{U}_L = jX_L I$, $\dot{U}_C = jX_C I$

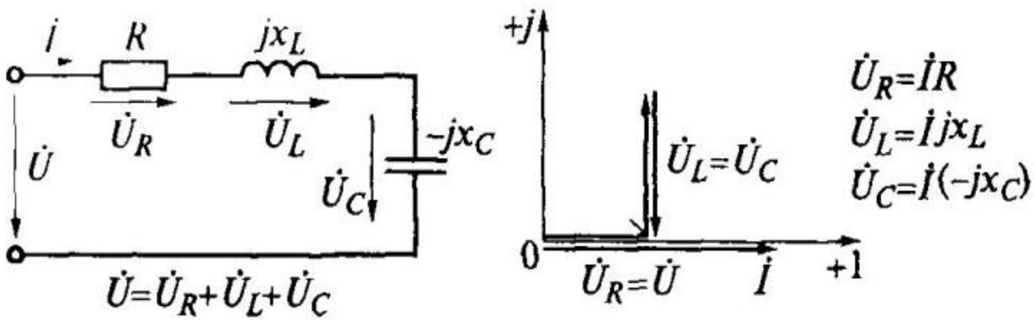


Рис. 2

Получаем, входное напряжение полностью выделяется на «активном» элементе последовательной цепи при резонансе напряжения.

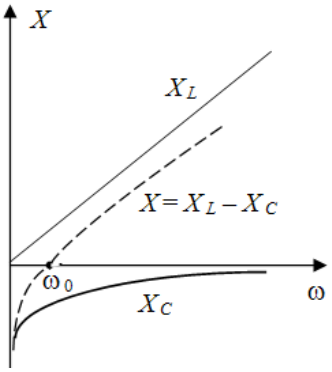
Частотные характеристики для резонансного напряжения

I(ω) – АЧХ (амплитудо-частотная характеристика)

φ(ω) – ФЧХ (фазо-частотная характеристика)

Проанализируем зависимость реактивной части от частоты для исходной цепи.

На рис.3 изображён график этой зависимости.



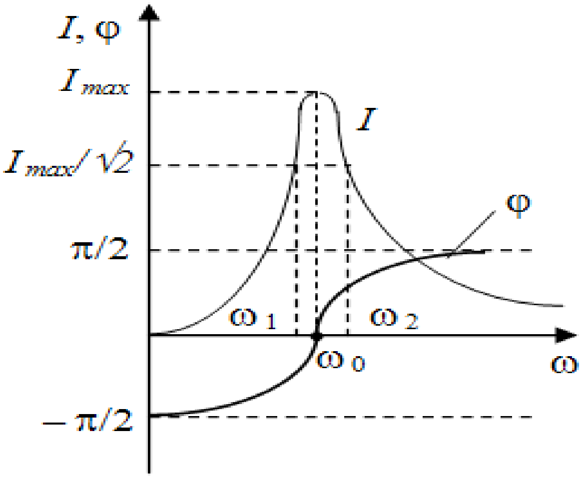
$X_L(\omega) = \omega L$; $X_C(\omega) = 1/\omega C$

$X = X_L - X_C$

Рис.3

Построим АЧХ, используя формулу и применяя график на рис.3:

$$I(\omega) = \frac{U}{\sqrt{R^2 + X(\omega)^2}}$$



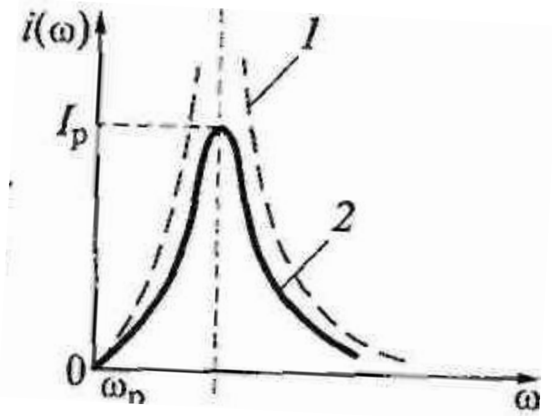


Рис.4

Рис. 5

Идеальный контур – контур без потерь, R = 0, Добротность стремится к бесконечности.

В случаи если потери имеются характеристика плавно меняет и значение максимального тока на резонансе определяется и этим сопротивлением.

На графике Рис. 4 показано как определяется полоса пропускания контура:

$\Pi = \omega_2 - \omega_1$.

На рис. 5 график соответствует идеальному контуру а график 2 реальному.

Добротность, резонансная частота и полоса пропускания взаимосвязаны т.е. $\Pi = f(\omega p; Q)$

Построим ФЧХ (фазо-частотную характеристику), на Рис. 4.

$$\varphi(\omega) = \operatorname{arctg}\frac{X(\omega)}{R}$$

ФЧХ построим используем формулу:

Для случая идеальной цепи, т.е. потери отсутствуют. Угол сдвига фаз до резонанса -90°, после +90° на резонансе 0°.

В случаи если потери имеются характеристика плавно меняет от стремящихся к -90° углов резистивно ёмкостного значения до резонанса 0°. И после резонанса углов резистивно индуктивного характера стремящихся к +90°.

Пример задачи на резонанс напряжения.

Для схемы рис. 6, известно U=0.8В; R=16Ом; L= $16 \cdot 10^{-6}$Гн; Резонансная частота $f_р$= 1 МГц.

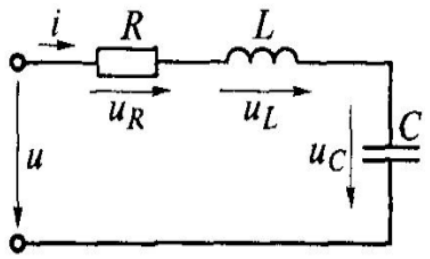


Рис. 6

Найти:

значения емкости С при которой в цепи наступит резонанс. Также найти ток, мощность, напряжений на элементах цепи при резонансе.

Решение: Из выражения $\omega_р = 2\pi f = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

$$C_p = \frac{1}{\omega^2 L} = 0{,}16 \cdot 10^{-9}\text{Ф} = 0{,}16\text{нФ}.$$

Сразу можно определит напряжение на сопротивление, ток и мощность.

$$U_p = U = 0{,}8\text{В}; \quad I_p = \frac{U}{R} = 0{,}05\text{А}; \quad \text{P}_p = I^2 R = 0{,}04\text{Вт}.$$

Напряжение на реактивных элементах рассчитаем используя добротность:

$$U_{Lp} = U_{Cp} = QU = \frac{\sqrt{L/C}}{R} U = 49.68\text{В}.$$

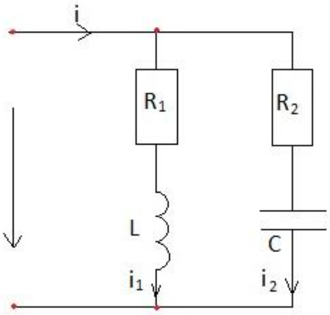
Задача решена.

Коваленко В.Е. октябрь 2021г.

Лекция 6

Резонанс токов (РТ) и его особенности

Резонанс токов (*параллельный резонанс*) - это явление в цепи, содержащее параллельно соединенные участки с резистивно-индуктивным и резистивно-емкостным характерами нагрузки, при котором входной (общий) ток цепи совпадает по фазе с входным напряжением ($\varphi = 0$)



1) Реактивные проводимости ветвей:
   $b_1 = \frac{X_L}{Z_1^2} = \frac{X_L}{R_1^2+X_L^2}$
   $b_2 = \frac{X_C}{Z_2^2} = \frac{X_C}{R_2^2+X_C^2}$
2) Условия резонанса тока:
   $I_m(У_к) = 0$,
   где $У_к$ входная проводимость контура.
   Для схемы нашей задачи это условие : $b_1 - b_2 = 0$
   тогда получим ворожение : $\frac{X_L}{R_1^2+X_L^2} = \frac{X_C}{R_2^2+X_C^2}$,
   подставим в это равенство значения $X_L = \omega L$ и $X_C = 1/\omega C$.

   Разрешаю относительно частоты., определяем формулу для резонансной частоты для параллельного контура.

   $$\omega_p = \frac{1}{\sqrt{LC}}\sqrt{\frac{R_1^2-\frac{L}{C}}{R_2^2-\frac{L}{C}}} = \frac{1}{\sqrt{LC}}\sqrt{\frac{R_1^2-\rho^2}{R_2^2-\rho^2}}$$, где ρ^2=L/C- квадрат

   характеристического сопротивления контура.
   Проанализируем полученное вырожение.
   Если $R_1 = R_2 = \rho$ –получаем неопределенность 0/0 –это условие так называемого вечного резонанса.
   В реальных контурах для получения высокой добротности характерестическое сопротивление $\rho >> R_1$, $\rho >> R_2$, тогда можем записать $\omega_p \cong \frac{1}{\sqrt{LC}}$
3) Тогда для добротности контура при $\omega_p \approx \omega_0$ $Q \cong \frac{\rho}{R_1+R_2}$, где резонансная частота последовательного резонанса.

   В общем случаи добротность параллельного контура $Q = \dfrac{\omega_p L}{R_1 + R_2\omega_p^2/\omega_0^2}$.

4) Определим токи в ветвях индуктивности и конденсатора:
   $$(I_l)_p = (U) * (Y_l)_p \cong U(b_1)_p = U\frac{1}{\omega_p L} = \frac{U}{\rho}$$
   где $У_1 = \sqrt{g_1^2 + b_1^2}$ - модуль проводимости участка с индуктивностью.

$$(I_C)_p = \dot{U}(Y_2)_p = U/\rho .$$

где $У_2 = \sqrt{g_2^2 + b_2^2}$ - модуль проводимости участка с конденсатором.

Общий ток при резонансе равен: $\boldsymbol{I = U(g_1 + g_2)}$

так как $\boldsymbol{b = b_1 - b_2 = 0}$.

Таким образом, общий ток при резонансе токов минимальный, так как в ворожение для этого тока появится добавка за счёт мнимой части проводимости при отстройки от резонанса.

5) Тогда соотношение тока в ветви и общего тока:

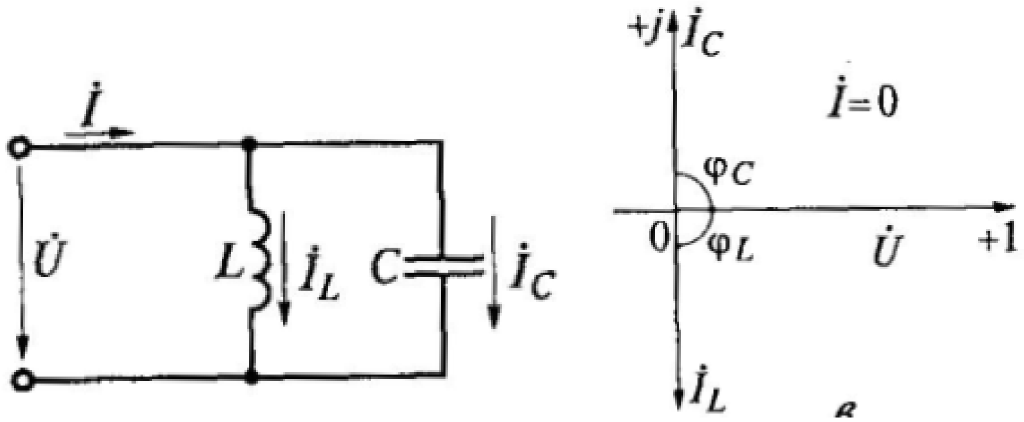
$$\frac{(I_L)_p}{I} = \frac{U/\rho}{U(g_1 + g_2)} = Q; \qquad \frac{(I_C)_p}{I} = \frac{U/\rho}{U(g_1 + g_2)} = Q.$$

6) Получаем, что токи в ветвях с реактивными элементами в добротность раз больше чем входной ток. Отсюда и название явление резонанс токов.
7) Векторные диаграммы для резонанса тока.

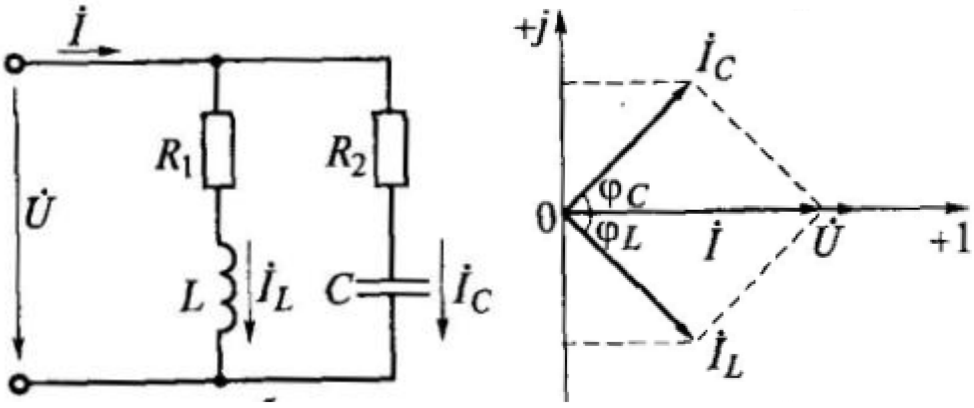
Комплекс входного тока равен:

$$\dot{I} = \dot{U}\dot{Y} = \dot{U}(g - jb) = \dot{U}[\ \underbrace{(g_1 + g_2)}_{\substack{\text{активная}\\ \text{проводимость}}}\ - j\ \underbrace{(b_L - b_C)}_{\substack{\text{реактивная}\\ \text{проводимость}}}\ ]; \quad I_p = Ug.$$

Таким образом, на резонансе остается только часть с активной проводимостью. Построим векторную диаграмм для идеального контура, т.е. нет потерь. Сначала откладываем вектор напряжения направленного по оси реальной частью(так как ветви параллельны следовательно на каждой из них присутствует одно и тоже напряжение). Далее строим вектор тока в конденсаторе, он опережает напряжение на угол + 90˚, а вектор тока в индуктивности отстает на угол -90˚от напряжение. Сумма этих векторов равна нулю, так как на резонансе их проводимости равны.

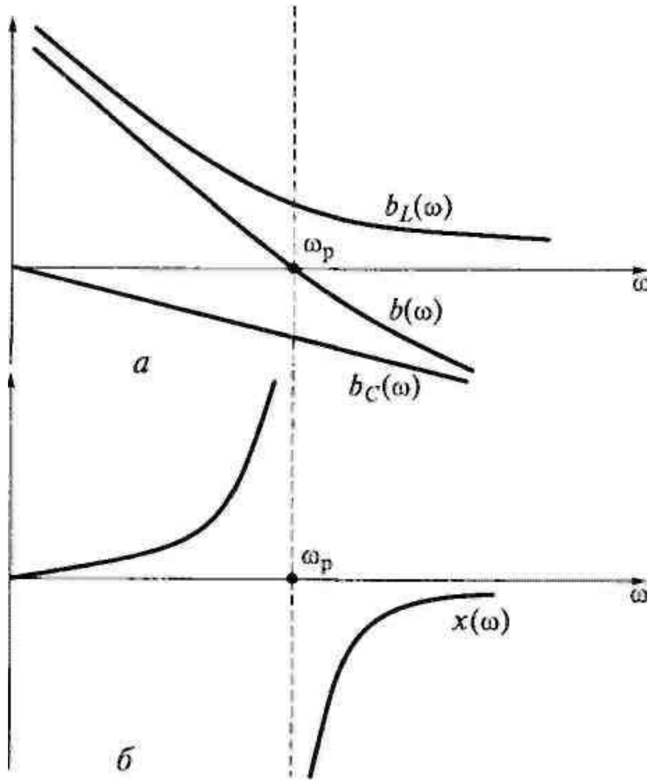


Для реального контура, вектора токов будут имеет углы φ_L и φ_c отличные от 90˚, так как характер сопротивление уже будет в ветвях не чисто индуктивный и и не чисто ёмкостной. Построим теперь векторную диаграмму как и в предыдущем случаи но учитывая особенности – углы φ_L и φ_c не 90˚:



Частотные характеристики при резонансе токов.

Для построения частотных характеристик для резонанса тока проанализируем сначала идеальный контур.
Построим для этого зависимости реактивных проводимостей от частоты $b_L(\omega)$ и $b_C(\omega)$).



гипербола $\quad b_L(\omega) = \dfrac{1}{x_L(\omega)} = \dfrac{1}{\omega L}$

прямая $\quad b_C(\omega) = \dfrac{1}{x_C(\omega)} = \omega C$

Построим и общую проводимость как $\quad b(\omega) = b_L(\omega) - b_C(\omega)$

Ниже нарисуем график б общего сопротивления идеального контура от частоты

Проанализируем график $b(\omega)$:

1. При РТ, также как и при РН, резонансный режим меняет скачком характер нагрузки цепи: нагрузка до частоты ω_p имеет индуктивный характер; нагрузка после частоты ω_p имеет емкостной характер; при частоте, равной ω_p цепь имеет активный характер.

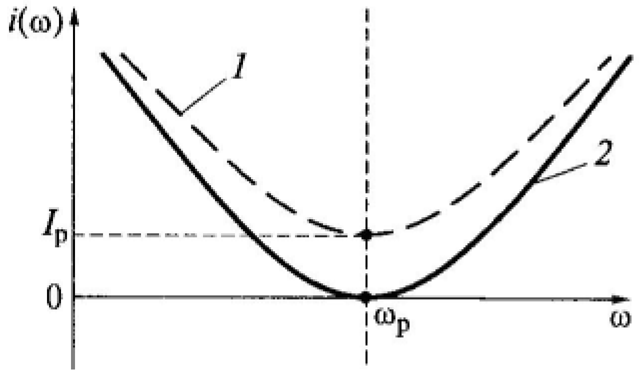
2. В точке ω_p реактивная проводимость цепи становится равной 0, а поэтому сопротивление этой цепи стремится к бесконечности (разрыв второго рода).

Пользуясь графиками рис. а и б, построим искомые частотные характеристики которые определяются следующими выражениями:

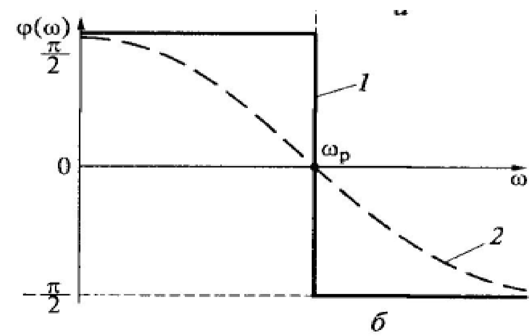
$$\dot{I} = \dot{U}\dot{Y} = \dot{U}(g - jb)$$, отсюда

$$I = U\sqrt{g^2 + b^2}; \quad I_p = Ug = I_{min}; \quad \varphi = \operatorname{arctg}(b/g).$$

Амлитудно частотная характеристика входного тока(АЧХ) для идеального контура (сплошная линия на графике) при резонансе равна нулю. Если контур не идеальный то значение тока будет отлично от нуля но минимальное.

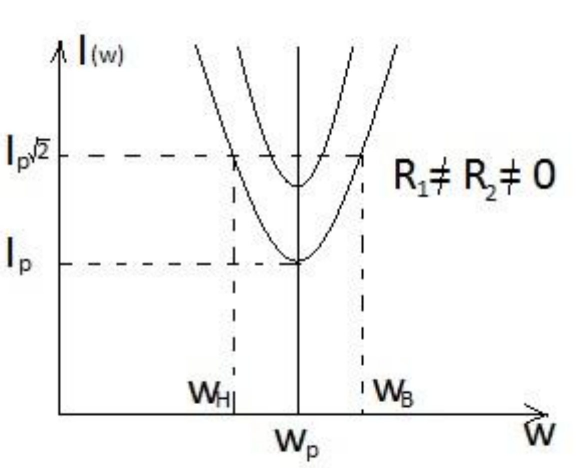


Фазочастотная характеристика (ФЧХ) (разность фаз между входным током и напряжением) будет для идеального контура (Кривая 2 сплошная) будет, имеет чисто индуктивный характер до частоты т.е. угол равен +90˚, на резонансе 0 и после резонанса -90˚. В случаи наличия потер в контуре это изменение будет, менятся плавно в интервале от величин близких к +90˚ до 0˚на резонансе. И после резонанса от 0˚ до фаз, приближающих к -90˚.



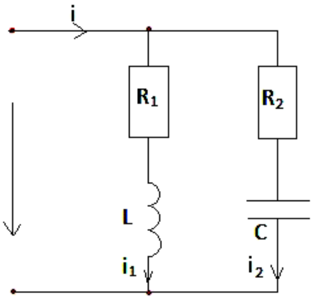
И чем выше добротность контура, тем круче будет, проходит эта кривая(резко изменятся).

Для определения полосы пропускания используют уровень тока на √2 больше минимального(тока на резонансе). Определяют для этого значения тока частоту выше резонанса $\omega_В$ и частоту ниже резонанса $\omega_Н$. Находят полосу пропускания как разность этих двух частот $П=\omega_В- \omega_Н$. Единица измерения определяется исходной частотой. На рисунке ниже это показано.



$$П = \omega_в - \omega_н$$

Задача по резонансу токов.



Вычислить, при какой емкости в схеме на рисунке будет резонанс токов, если R_1= 30 Ом; R_2 = 0 Ом; ωL = 40 Ом; ω= 10^3 $с^{-1}$.

Решение.
Из условия возникновения резонанса токов следует, что ёмкостное сопротивление. Ом,

$$x_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{R_1^2 + (\omega L)^2}{\omega L} = \frac{30^2 + 40^2}{40} = 62{,}5,$$

тогда ёмкость конденсатора будет равна:

$C = 1/\omega \cdot x_C$ =16мкФ.

задача решена!