1. Главный вектор и главный момент системы сил. Когда главный вектор и равнодействующая совпадают?

Сходящиеся в точке О силы можно заменить главным вектором $\overline{R}$, приложенной в этой же точке, причем

$$\overline{R} = \sum_{k=1}^{n} \overline{F}_k.$$

Система пар в результате сложения векторов моментов

Этот результат формулируется как **теорема о приведении системы сил:**

Любая система сил, действующих на АТТ, при приведении к произвольному центру О заменяется одной силой, равной главному вектору этих сил, приложенному в этом центре, и одной парой с моментом, равным моменту системы относительно центра О.

Важно заметить, что $\overline{R}$ не является равнодействующей данной системы сил, т.к. заменяет эту систему только вместе с парой.

Следствие

Две системы сил, имеющие одинаковые главные векторы и главные моменты относительно одного центра, эквивалентны (условие эквивалентности систем сил).

Главный вектор и равнодействующая совпадают, когда сумма моментов сил, действующих на тело, равна нулю.

2 Условия равновесия системы сил в пространственном и плоском случаях

Равновесие любой **системы сил** обеспечивается, если

$$\bar{R} = 0,\ \overline{M}_O = 0. \quad (1.1)$$

Соответствующие аналитические условия равновесия можно записать в трех формах.

1. **Основная форма** условий равновесия сводится к записи первого из векторных равенств (1.1) в проекциях на оси, а второго – в виде суммы моментов от отдельных сил: суммы проекций сил на оси координат и сумма моментов этих сил относительно произвольного центра должны быть равны нулю:

$$\Sigma F_{kx} = 0,\ \Sigma F_{ky} = 0,\ \Sigma m_0(\mathbf{F}_k) = 0. \quad (1.2)$$

---

2. **Вторая форма**: для равновесия произвольной плоской системы сил необходимо и достаточно, чтобы суммы моментов этих сил относительно каких-либо центров A, B и сумма их проекций на ось OX, не перпендикулярную AB, были равны нулю:

$$\Sigma m_A(\mathbf{F}_k)=0,\ \Sigma m_B(\mathbf{F}_k)=0,\ \Sigma F_{kx}=0.$$

Т.е. сумма всех сил, действующих на тело и сумма всех моментов должны быть равны нулю. Тогда тело и не двигается и не вращается.

3 Трение скольжения. Законы трения скольжения. Почему сила, с которой нужно тянуть санки за веревочку, меньше, чем сила, с которой нужно толкать санки?

Сила сопротивления относительному скольжению тел называется трением скольжения. Такое сопротивление

Здесь $F_{пр}$ называется предельной силой трения.

Сила трения всегда направлена против направления, в котором действующие на тело силы стремятся его сдвинуть.

2. Предельная сила трения определяется соотношением

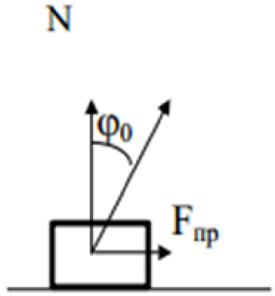
$$F_{пр} = f_0 \cdot N,$$

Если сани толкать, то часть силы будет направлена вниз, увеличивая их вес и, соответственно, силу трения. Если их тянуть, то сила будет направлена вверх, уменьшая вес.

4 Угол трения. Что такое эффект заклинивания?

Реакция $\overline{R}$ шероховатой поверхности имеет две составляющие – нормальную $\overline{N}$ и силу трения $\overline{F}$. В итоге $\overline{R}$ всегда отклонена от нормали на угол φ_0 (рис. 1.18):

$$\mathrm{tg}\,\varphi_0 = F_{пр}/N.$$



φ_0 – наибольший угол, который образует с поверхностью полная реакция шероховатой связи. Это т.н. угол трения. Т.к.

$$F_{пр} = f \cdot N,$$

то

Рис. 1.18

$$\mathrm{tg}\,\varphi_0 = f_0.$$

Если тело в равновесии, то полная реакция $\overline{R}$ всегда находится внутри угла трения. Если к телу приложить силу, прижимающую его к поверхности под углом $\alpha<\varphi_0$, то это тело не сдвинется. Для движения необходимо, чтобы

$$P\sin\alpha > F_{пр} = f_0 \cdot P\cos\alpha, \text{ или } \mathrm{tg}\,\alpha > f_0.$$

Это объясняет эффект «самозаклинивания» или самоторможения тел.

Таким образом, груз тащить лучше за веревочку, нежели его толкать. В первом случае сила давления на грунт уменьшается за счет натяжения веревочки, а во втором случае увеличивается за счет вертикальной составляющей силы, с которой толкаем груз.

5 Трение качения. Коэффициент трения качения. Переведите угол 0.0018 рад в угловые минуты и секунды.

Трение качения

Трение качения – сопротивление, возникающее при качении одного тела по поверхности другого.

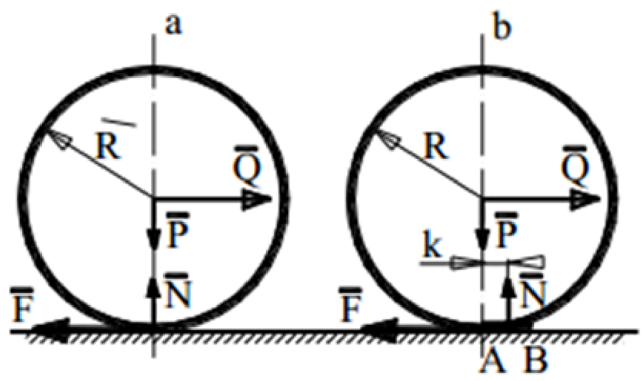


Рис. 1.20 – Идеальная (a) и реальная (b) схемы взаимодействия катящегося круглого цилиндра с горизонтальной опорой

Если, например, цилиндрический каток катится по шероховатой абсолютно твердой поверхности, то вес $\overline{P}$ уравновешен реакцией $\overline{N}$ (рис. 1.20, а), а горизонтальная сила $\overline{Q}$ с силой трения $\overline{F}$ образуют пару, т.к. численно они равны. В этом случае при любом, даже самом малом, значении $\overline{Q}$ должно начаться качение.

В действительности дело обстоит иначе.

Вследствие деформации тел их реальное взаимодействие идет по некоторой площадке АВ (рис. 1.16, b). В итоге реакция связи (в данном случае горизонтальной опоры) $\overline{N}$ смещается в сторону точки В. С увеличением Q это смещение растет до некоторого предельного значения k. В предельном положении, когда $Q = Q_{пр}$, имеем

$$Q_{пр} \cdot R = N \cdot \text{k}, \text{ или } Q_{пр} = \text{k/R} \cdot N.$$

При $Q < Q_{пр}$ каток будет находиться в покое.

k – это линейная (размерная) величина и называется коэффициентом трения качения. Величина k (в см) для случаев:

дерево по дереву	0.05...0.8;
колесо по рельсу	0.005;
шарикоподшипник	0.001.

Перевод,

$$\frac{\text{пи}}{180 * 60 * 60} = \frac{\text{угол в радианах}}{\text{искомый уголв секундах}}$$¶

6. Почему нельзя сравнивать коэффициенты трения скольжения и качения?

Коэффициент трения скольжения относится к ситуации, когда два тела скользят друг по другу, тогда как коэффициент трения качения относится к взаимодействию между телом, которое катится, и поверхностью. Эти два процесса имеют разные физические механизмы и зависят от различных факторов, таких как деформация материалов и свойства поверхности.

коэффициент трения качения
дерево по дереву 0.05...0.8;

коэффициент трения скольжения
$f_0 =$ 0.4...0.7 – дерево по дереву,

Они имеют разную размерность. коэф трения скольжения безразмерный, а коэф трения качения имеет размерность длины. (см формулу, там коэф, делить на длину, умножить на силу = сила трения. чтобы убрать размерность длины в знаменателе коэф должен иметь размерность длины.). Я бы написал так

7 Как находится равнодействующая системы двух параллельных сил?
Применим к повернутым силам теорему Вариньона с учетом, что

$\overline{R}'$ – равнодействующая системы сил $\overline{F}_k'$, где $|\overline{R}'| = |\overline{R}|$, $|\overline{F}_k'| = |\overline{F}_k|$. .

Тогда

$$m_y(\overline{R}') = \Sigma m_y(\overline{F}_k'),$$

но

$$m_y(\overline{R}) = |\overline{R}| \cdot x_c, \quad m_y(\overline{F}_k) = |\overline{F}_k| \cdot x_k.$$

Отсюда следует

$$Rx_c = F_1x_1 + F_2x_2 + \ldots + F_nx_n,$$

и тогда

$$x_c = \Sigma F_kx_k/R, \quad y_c = \Sigma F_ky_k/R, \quad z_c = \Sigma F_kz_k/R.$$

Можно отметить, что эти формулы справедливы и для параллельных сил, направленных в разные стороны, но тогда нужно у сил учитывать знаки, предварительно условившись одно из направлений считать положительным, а противоположное - отрицательным; кроме того, необходимо, чтобы R не равнялось 0. Если последнее требование нарушается, т.е. R = 0, то система сил либо уравновешена, либо сводится к главному моменту, который можно заменить парой сил, не имеющей, как было отмечено, равнодействующей.

Равнодействующая системы двух параллельных сил находится в зависимости от их направления:

1. *Силы направлены в одну сторону. Равнодействующая равна по модулю сумме модулей слагаемых сил, им параллельна и направлена в ту же сторону. Линия действия равнодействующей проходит между точками приложения слагаемых сил на расстояниях от этих точек, обратно пропорциональных этим силам.*
2. *Силы направлены в разные стороны. Равнодействующая равна по модулю разности модулей слагаемых сил, им параллельна и направлена в сторону большей силы. Линия действия равнодействующей проходит вне отрезка, соединяющего точки приложения слагаемых сил, на расстояниях от этих точек, обратно пропорциональных силам.* (Алиса)

8 Формула для центра тяжести системы материальных точек.

Координаты центра тяжести определяются так же, как центра параллельных сил:

$$x_c = \Sigma p_k x_k / P, \quad y_c = \Sigma p_k y_k / P, \quad z_c = \Sigma p_k z_k / P,$$

где xk, yk, zk – координаты точек приложения сил тяжести pk .

Мы ранее располагали выражением для определения координат центра тяжести системы тел или материальных точек. Заменив в них выражение веса P на величину Mg, а для отдельных частей pk на mkg, в тех же формулах после сокращения на g получим выражения для координат центра масс.

$$\vec{p}_k = m_k\vec{g} \qquad P = Mg$$

$$x_C = \frac{\sum p_k x_k}{P} = \frac{\sum m_k g x_k}{Mg} = \frac{\sum m_k x_k}{M}$$

$$\vec{p}_k = m_k\vec{g} \qquad P = Mg$$

$$y_C = \frac{\sum p_k y_k}{P} = \frac{\sum m_k g y_k}{Mg} = \frac{\sum m_k y_k}{M}$$

$$\vec{p}_k = m_k\vec{g} \qquad P = Mg$$

$$z_C = \frac{\sum p_k z_k}{P} = \frac{\sum m_k g z_k}{Mg} = \frac{\sum m_k z_k}{M}$$

9. Формулы для определения центров тяжести объемной, плоской и линейной фигур.

Для объёмной фигуры:

$$x_c = \frac{V_1x_1+V_2x_2+...+V_nx_n}{V_1+V_2+...+V_n}$$

$$y_c = \frac{V_1y_1+V_2y_2+...+V_ny_n}{V_1+V_2+...+V_n}$$

$$z_c = \frac{V_1z_1+V_2z_2+...+V_nz_n}{V_1+V_2+...+V_n}$$

Для объемного трехмерного тела объемом V:

$$x_c = \frac{1}{V}\iiint x\,dV$$

$$y_c = \frac{1}{V}\iiint y dV$$
$$z_c = \frac{1}{V}\iiint z dV$$

Для плоской фигуры:

$$x_c = \frac{S_1x_1+S_2x_2+\ldots+S_nx_n}{S_1+S_2+\ldots+S_n}$$
$$y_c = \frac{S_1y_1+S_2y_2+\ldots+S_ny_n}{S_1+S_2+\ldots+S_n}$$

Для плоской фигуры площадью S:

$$x_c = \frac{1}{S}\iiint x dS$$
$$y_c = \frac{1}{S}\iiint y dS$$

Для линейной фигуры:

$$x_c = \frac{l_1x_1+l_2x_2+\ldots+l_nx_n}{l_1+l_2+\ldots+l_n}$$
$$y_c = \frac{l_1y_1+l_2y_2+\ldots+l_ny_n}{l_1+l_2+\ldots+l_n}$$
$$z_c = \frac{l_1z_1+l_2z_2+\ldots+l_nz_n}{l_1+l_2+\ldots+l_n}$$

Для пространственной кривой длиной L:

$$x_c = \frac{1}{L}\iiint x dl$$
$$y_c = \frac{1}{L}\iiint y dl$$
$$z_c = \frac{1}{L}\iiint z dl$$

10 Формулы для центров тяжести дуги, сектора, полушара.

Определить центр тяжести дуги окружности радиусом R, раствором 2α (рис. 1.25).

Координата элемента дуги определяется как $x = R\cos\varphi$, величина элементарного участка дуги $dl = Rd\varphi$.

Тогда

$$x_c = \frac{1}{L}\int_{-\alpha}^{\alpha} R\cos\varphi R d\varphi = \frac{2R^2}{L}\sin\alpha.$$

Но $L = R\cdot 2\alpha$. Тогда $x_c = R\sin\alpha/\alpha$.

Если $\alpha \to 0$, то $x_c \to R$, если $\alpha = \pi/2$, то $x_c = 2R/\pi \approx 2/3\cdot R$.

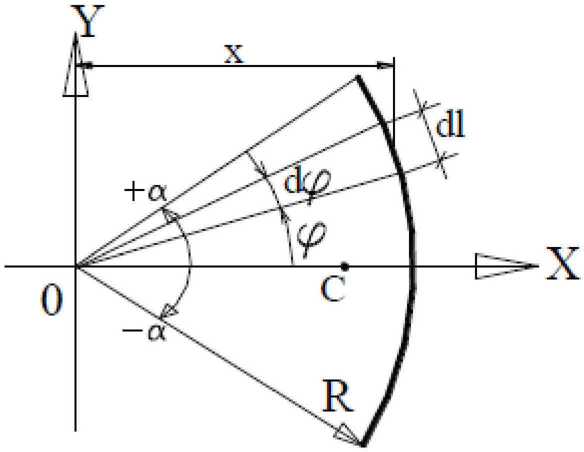


Рис. 1.25

Найти центр тяжести сектора с той же геометрией (см. рис. 1.25).

Для любого элементарного треугольника с основанием dS его центр тяжести находится на расстоянии $2/3R$ от вершины сектора. Это следует из того, что центр тяжести треугольника находится на пересечении его медиан.

Таким образом, центры тяжести набора элементарных секторов образуют дугу радиусом $r = 2/3R$. Но для определения центра тяжести дуги уже получена формула, и если ее использовать, получим

$$x_c = r\cdot\sin\alpha/\alpha = 2/3\cdot R\sin\alpha/\alpha.$$

Можно идти непосредственно от выражений координат центра тяжести для плоской фигуры, в частности:

$$x_c = \frac{1}{S}\int_S xds.$$

В полярных координатах площадь элемента сектора $ds = rd\varphi dr$, а текущая координата точки $x = r\cos\varphi$. Здесь по сравнению с предыдущим случаем для дуги величина радиуса r является переменной, и по ней нужно проводить интегрирование от 0 до R. Тогда

$$x_c = \frac{1}{S}\int_0^R\int_{-\alpha}^{\alpha} r\cos\varphi r d\varphi dr = \frac{1}{S}\int_0^R r^2 dr\int_{-\alpha}^{\alpha}\cos\varphi d\varphi = \frac{1}{S}\frac{R^3}{3}2\sin\alpha.$$

В свою очередь, часть площади круга $S = 2\alpha/2\pi\cdot\pi R^2 = \alpha R^2$, и тогда $x_c = 2R\sin\alpha/3\alpha$ – т.е. получается тот же результат, что и выше.

11. Почему полушар, опирающийся на свою вершину, является «неваляшкой»?

Положение полушара на горизонтальной плоскости будет устойчиво, когда плоскость сечения будет параллельна горизонту. При наклоне полушара центр тяжести смещается, но точка опоры остается под ним. Это создает ситуацию, когда сила тяжести действует так, что она стремится вернуть полушар в вертикальное положение.

12. Как находится центр тяжести фигуры, часть которой вырезана?

(https://isopromat.ru/teormeh/kratkaja-teoria/opredelenie-koordinat-centra-tyazhesti)

Чтобы найти центр тяжести фигуры, из которой вырезана часть, можно использовать метод, основанный на принципе суперпозиции. Этот метод включает следующие шаги:

1. **Определение центра тяжести полной фигуры**: Сначала найдите центр тяжести полной фигуры (без выреза). Для простых фигур (например, прямоугольников, треугольников, кругов) центр тяжести можно определить с помощью известных формул. Для сложных фигур может понадобиться интегрирование.

2. **Определение центра тяжести вырезанной части**: Затем найдите центр тяжести вырезанной части. Для этого также можно использовать известные формулы или интегрирование, в зависимости от формы выреза.

3. **Вычисление площади**: Определите площади полной фигуры и вырезанной части. Обозначим их как A_{full} и A_{cut}.

4. **Применение формулы для центра тяжести**: Используйте следующую формулу для нахождения нового центра тяжести фигуры с вырезом:

$$\bar{x} = \frac{A_{full} \cdot \overline{x_{full}} - A_{cut} \cdot \overline{x_{cut}}}{A_{full} - A_{cut}}$$

$$\bar{y} = \frac{A_{full} \cdot \overline{y_{full}} - A_{cut} \cdot \overline{y_{cut}}}{A_{full} - A_{cut}}$$

   Здесь $(\bar{x}_{full}, \bar{y}_{full})$ и $(\bar{x}_{cut}, \bar{y}_{cut})$ — координаты центров тяжести полной фигуры и вырезанной части соответственно.

5. **Итоговый центр тяжести**: Результирующие координаты $(\bar{x}, \bar{y})$ будут координатами центра тяжести фигуры с вырезом.

Этот метод позволяет учесть влияние вырезанной части на распределение массы в оставшейся фигуре и правильно определить ее центр тяжести.