UNIVERSITÀ DI PARMA

Trasformazioni geometriche 2D/3D

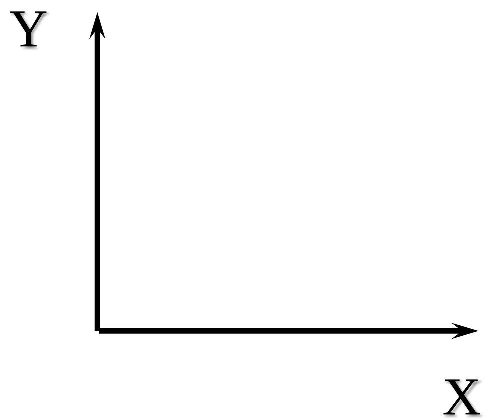
Trasformazioni di modeling 2D /3D

- **Trasformazioni 2D**
- **Coordinate omogenee**
- **Trasformazioni 2D in coordinate omogenee**
- **Trasformazioni 3D in coordinate omogenee**
- **Trasformazioni di sistemi di coordinate**
- **Esercizi**

Sistemi di coordinate 2D e 3D

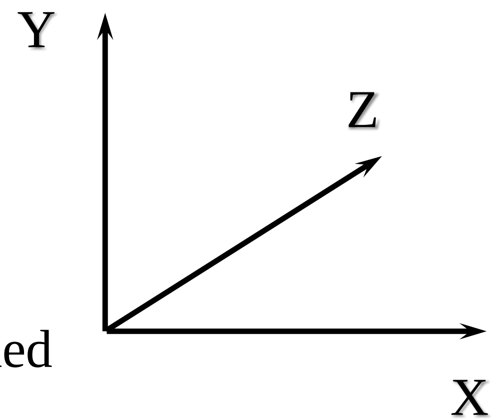
Abbiamo visto…

2D

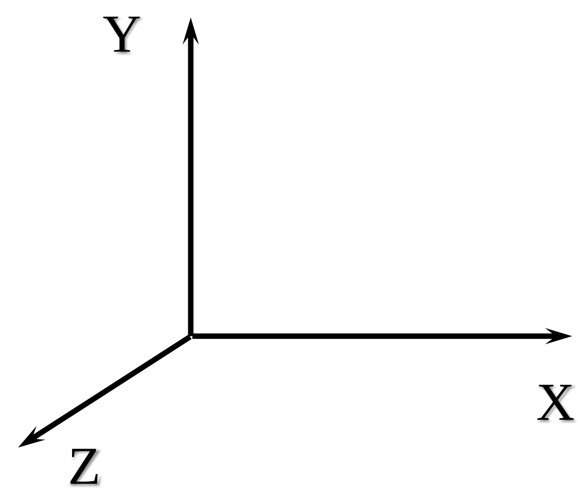


3D

left-handed



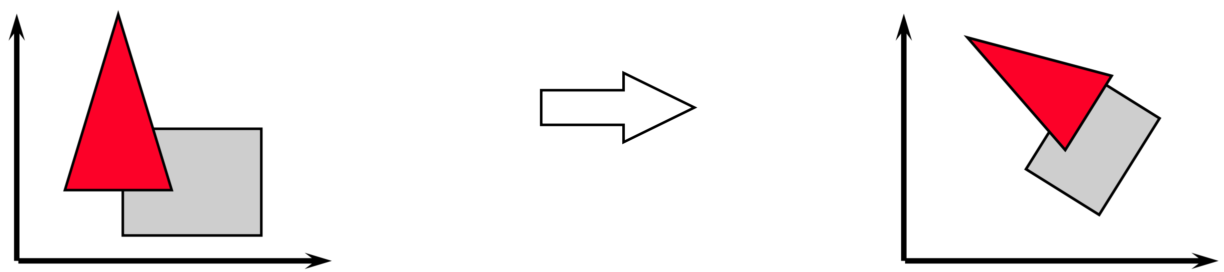
right-handed



Trasformazioni di modeling 2D

2D

- **Traslazione**
- **Rotazione**
- **Trasformazione di scala**
- **Trasformazioni composte**
- **… altre trasformazioni**

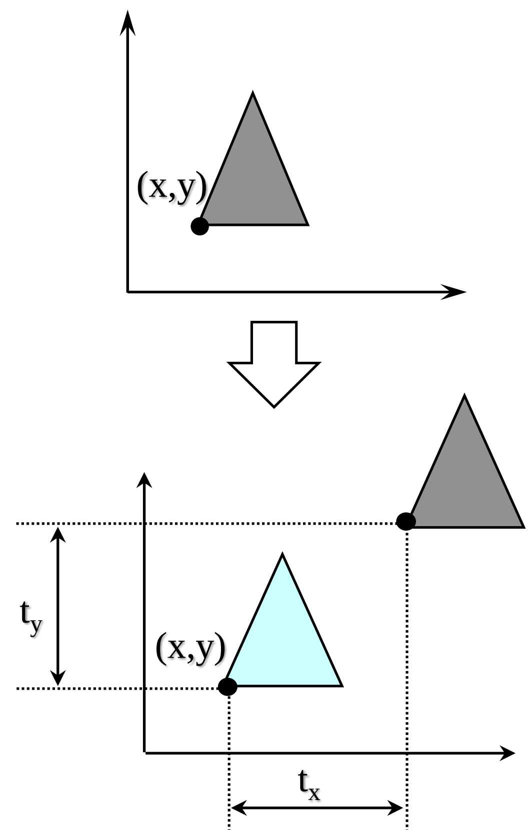


Traslazione 2D

2D

Dato un punto *P* di coordinate *(x,y)*, possiamo traslare *P* in una diversa posizione aggiungendo una certa quantità alle sue coordinate.
Per ogni punto *P=(x,y)* da muovere di d_x lungo *x* e di d_y lungo *y* fino a *P'=(x', y')* possiamo scrivere:

$$x' = x + d_x$$
$$y' = y + d_y$$



Utilizzando la notazione per vettori colonna

$$P = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad P' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}, \quad T = \begin{bmatrix} d_x \\ d_y \end{bmatrix}$$

Allora possiamo scrivere sinteticamente:

$$P' = P + T$$

Traslazione 2D: esempio

2D

- Dati il punto A = [4 2]
- Applicarvi una traslazione T(+3, -4)

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ -2 \end{bmatrix}$$

- **Osservazione:** Potremo traslare un oggetto applicando la precedente trasformazione a tutti i suoi punti, ma siccome ogni linea è costituita da un numero infinito di punti, questo processo richiederebbe un tempo infinito. Tuttavia possiamo traslare tutti i punti su una linea traslando solo i suoi estremi e disegnando poi una nuova linea tra i punti traslati.

Scala 2D rispetto all'origine (0,0)

2D

Le coordinate di un punto *P=(x,y)* possono essere scalate di una quantità s_x lungo l'asse *x* e s_y lungo l'asse *y* per mezzo delle formule:

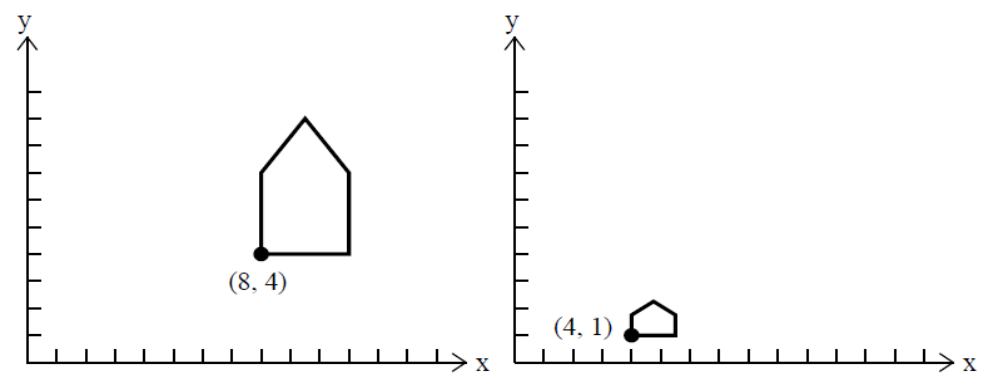
$$x' = s_x \cdot x$$
$$y' = s_y \cdot y$$

In forma matriciale:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Oppure

$$P' = S \cdot P$$

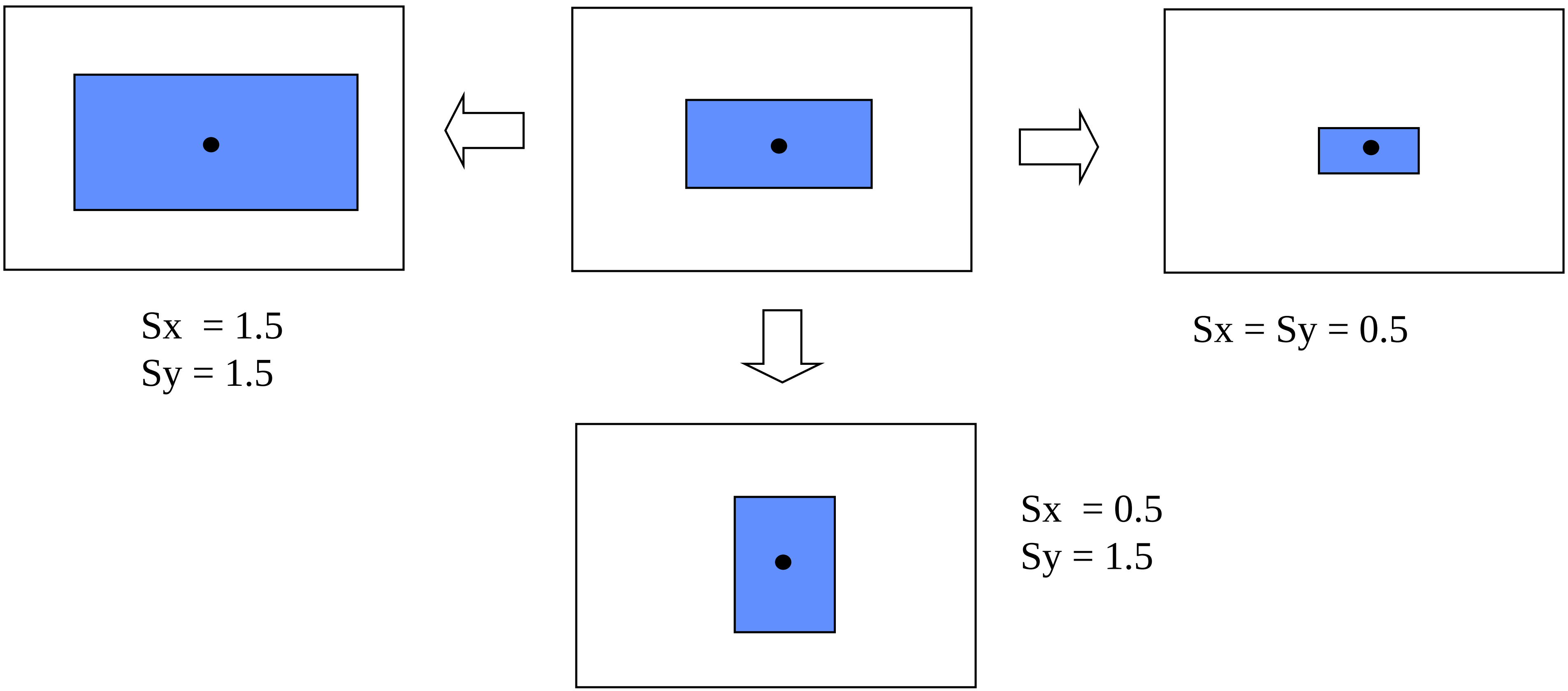


Esempio: la casa è scalata di *1/2* in *x* e *1/4* in *y*. La casa è più piccola e più vicina all'origine. Le proporzioni sono cambiate

Scala 2D: esempi (1/2)

2D

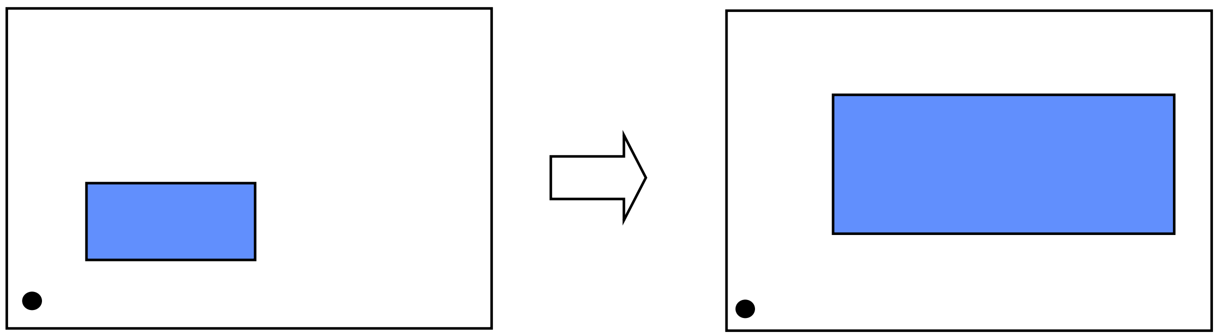
- **Scala di un oggetto simmetrico rispetto all'origine**



Scala 2D: esempi (2/2)

2D

- **Scala di un oggetto non simmetrico rispetto all'origine**



Sx = Sy = 2.0

Scala 2D: esempio

2D

- Dato il punto A = [4 2]
- Scalare di S (0.5, 0.5)

$$\begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Rotazione 2D intorno all'origine (0,0)

2D

Un punto *P=(x,y)* può essere ruotato di un angolo *θ* rispetto all'origine, tale rotazione è definita matematicamente da

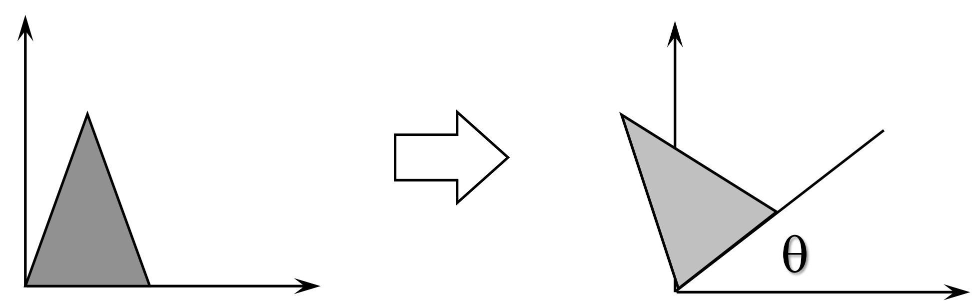
$$
\begin{aligned}
x' &= x \cdot \cos\theta - y \cdot \sin\theta \\
y' &= x \cdot \sin\theta + y \cdot \cos\theta
\end{aligned}
$$

In forma matriciale:

$$
\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}
$$

oppure

$$
P' = R \cdot P
$$



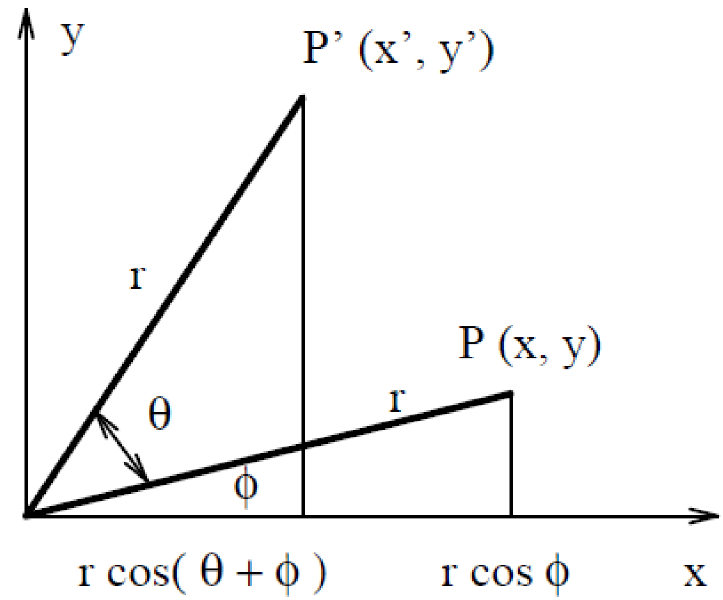
La rotazione è attorno all'origine e gli angoli positivi sono misurati in senso antiorario a partire dall'asse x positivo (verso l'asse y)

Rotazione 2D intorno all'origine (0,0)

2D

Dimostrazione

Esprimiamo *P=(x,y) e P'=(x', y')* in coordinate polari



$$x = r \cdot \cos\phi$$
$$y = r \cdot \sin\phi$$

$$x' = r \cdot \cos(\theta + \phi) = r \cdot \cos\phi \cdot \cos\theta - r \cdot \sin\phi \cdot \sin\theta$$
$$y' = r \cdot \sin(\theta + \phi) = r \cdot \cos\phi \cdot \sin\theta + r \cdot \sin\phi \cdot \cos\theta$$

sostituendo si ricavano le espressioni finali del punto *P'=(x', y')* ruotato

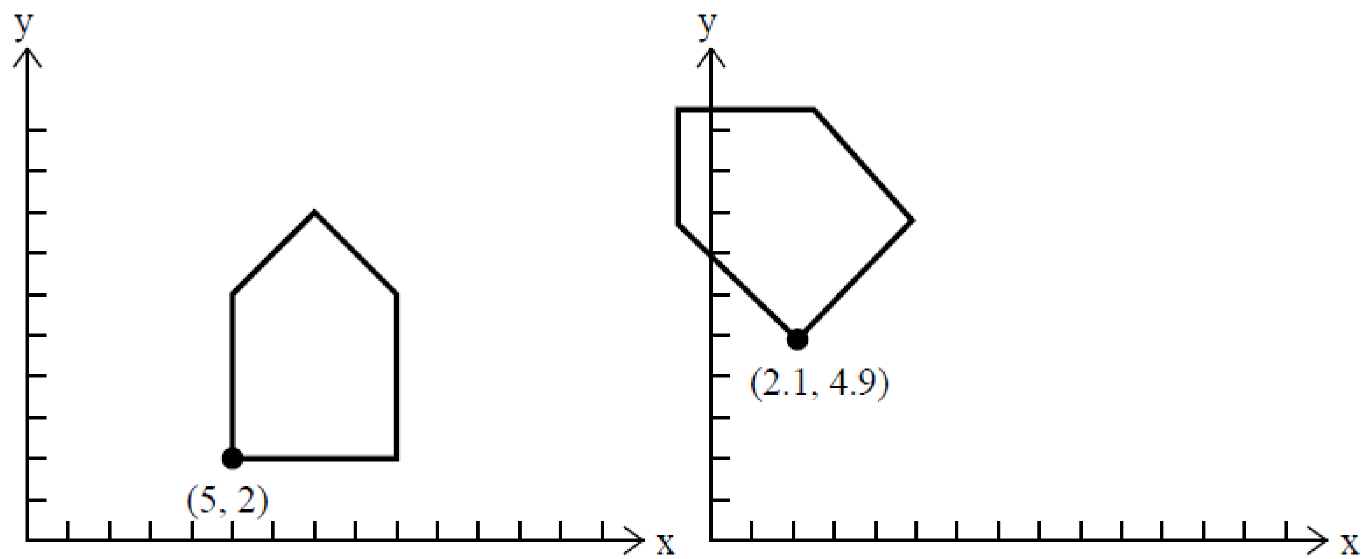
$$x' = x \cdot \cos\theta - y \cdot \sin\theta$$
$$y' = x \cdot \sin\theta + y \cdot \cos\theta$$

Rotazione 2D intorno all'origine (0,0)

2D

Un altro esempio

rotazione della casa di 45 °
rispetto all'origine



Rotazione 2D: esempio

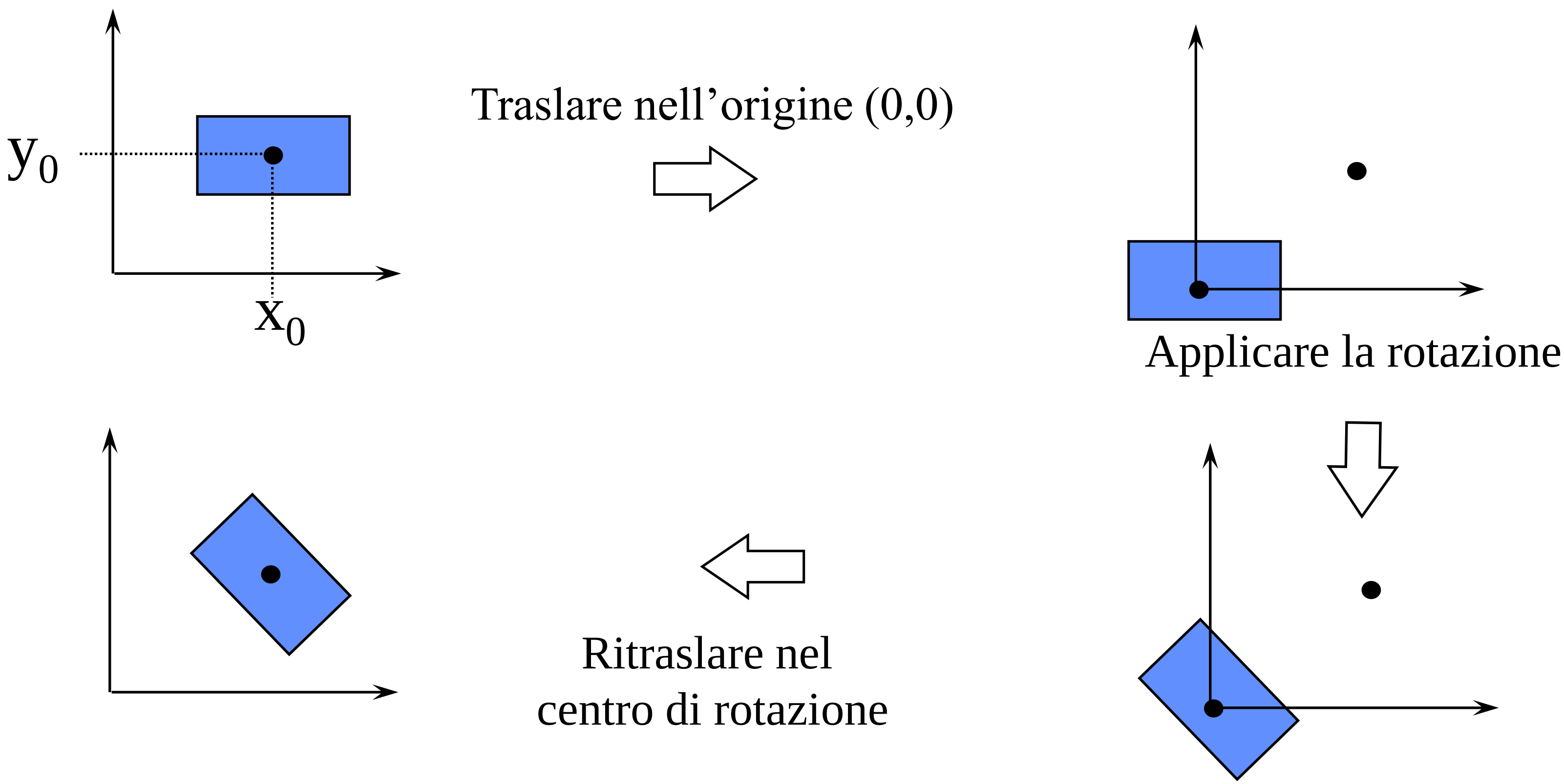
2D

- Dato il punto A = [4 2]
- Applicarvi una rotazione R (90°) attorno all’origine

$$\begin{bmatrix} \cos 90° & -\sin 90° \\ \sin 90° & \cos 90° \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Rotazione 2D intorno ad un punto

2D



$$x' = (x - x_0)\cos\theta - (y - y_0)\sin\theta + x_0$$
$$y' = (x - x_0)\sin\theta + (y - y_0)\cos\theta + y_0$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$$

Coordinate omogenee

- **Problema**

  le rappresentazioni matriciali per traslazione, scala e rotazione sono rispettivamente

$$P' = T + P, \quad P' = S \cdot P, \quad P' = R \cdot P$$

  la traslazione è trattata differentemente rispetto alla scala ed alla rotazione. Sarebbe meglio poter esprimere tutte le trasformazioni nello stesso modo

- **Soluzione**
  - utilizzo delle coordinate omogenee

    la rappresentazione omogenea di un punto P nel piano è: **P** = [xw yw w] $w \neq 0$

    * rappresentazione non univoca a meno di un fattore moltiplicativo
    * la terna (0,0,0) non è ammessa

      [12 8 4]

      [6   4 2] $\Rightarrow$ rappresentano punto [3 2]

      [3   2 1]

    * adottiamo w = 1 $\Rightarrow$ **P** = [x y 1]

    analogamente un punto nello spazio: **P** = [x y z 1]

Coordinate omogenee

2D

Poichè i punti sono ora rappresentati da tre coordinate, le matrici che definiscono le trasformazioni geometriche bidimensionali saranno 3x3.
Se i punti si considerano come vettori colonna di 3 elementi le trasformazioni bidimensionali saranno espresse da

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = M \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

Dove M è una matrice 3x3 opportuna

Traslazione 2D
coordinate omogenee

2D

La traslazione diventa esprimibile come

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & d_x \\ 0 & 1 & d_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

Se si indicano ora con *P* e *P'* i vettori colonna di tre elementi in coordinate omogenee possiamo scrivere in forma compatta

$$P' = T(d_x, d_y) \cdot P$$

dove

$$T(dx, d_y) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & d_x \\ 0 & 1 & d_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Traslazione 2D
coordinate omogenee

2D

Cosa succede se il punto *P* viene traslato di $T(d_{x1}, d_{y1})$ fino a P' e di nuovo traslato di $T(d_{x2}, d_{y2})$ da P' a P''?
Come è intuibile si tratta di una traslazione complessiva $T(d_{x1}+d_{x2}, d_{y1}+d_{y2})$

Ma essendo $P' = T(d_{x1}, d_{y1}) \cdot P$

$$P'' = T(d_{x2}, d_{y2}) \cdot P'$$

Sostituendo la prima nella seconda si ottiene

$$P'' = T(d_{x2}, d_{y2}) \cdot (T(d_{x1}, d_{y1}) \cdot P) = (T(d_{x2}, d_{y2}) \cdot T(d_{x1}, d_{y1}))P$$

Il prodotto delle due matrici è

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & d_{x2} \\ 0 & 1 & d_{y2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & d_{x1} \\ 0 & 1 & d_{y1} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & d_{x1} + d_{x2} \\ 0 & 1 & d_{y1} + d_{y2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La traslazione complessiva è quindi

$$T(d_{x1} + d_{x2}, d_{y1} + d_{y2}) = T(d_{x2}, d_{y2}) \cdot T(d_{x1}, d_{y1})$$

<u>Osservazione:</u> la composizione di trasformazioni si traduce in una moltiplicazione tra matrici

Scala 2D
coordinate omogenee

2D

In modo del tutto analogo, l'equazione di scalatura è rappresentata in forma matriciale per mezzo delle coordinate omogenee come:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

Definendo

$$S(s_x, s_y) = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Si ottiene

$$P' = S(s_x, s_y) \cdot P$$

Scala 2D
coordinate omogenee

2D

composizione di due trasformazioni di scala

$$P' = S(s_{x1}, s_{y1}) \cdot P$$
$$P'' = S(s_{x2}, s_{y2}) \cdot P'$$

Sostituendo la prima nella seconda si ottiene

$$P'' = S(s_{x2}, s_{y2}) \cdot (S(s_{x1}, s_{y1}) \cdot P) = (S(s_{x2}, s_{y2}) \cdot S(s_{x1}, s_{y1})) \cdot P$$

Dove il prodotto delle due matrici $S(s_{x2}, s_{y2}) \cdot S(s_{x1}, s_{y1})$ è

$$\begin{bmatrix} s_{x2} & 0 & 0 \\ 0 & s_{y2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s_{x1} & 0 & 0 \\ 0 & s_{y1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{x1} \cdot s_{x2} & 0 & 0 \\ 0 & s_{y1} \cdot s_{y2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Rotazione 2D
coordinate omogenee

2D

In modo del tutto analogo, l'equazione di rotazione è rappresentata in forma matriciale per mezzo delle coordinate omogenee come:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ponendo

$$R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

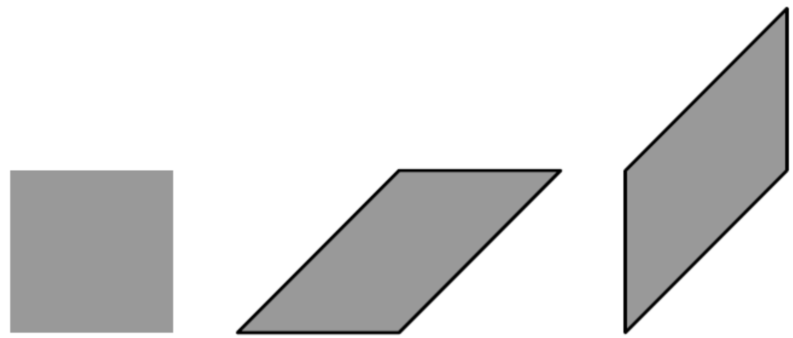
si ottiene

$$P' = R(\theta) \cdot P$$

Shear 2D
coordinate omogenee

2D

shear o deformazione di taglio



$$SH_x = \begin{bmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad SH_y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Dove *a* e *b* sono costanti di proporzionalità
Considerando la deformazione di taglio lungo x di un generico punto si ottiene:

$$SH_x \cdot P = \begin{bmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + ay \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

Si tratta di una traslazione lungo *x* che dipende da *y*

Trasformazioni composte

2D

Trasformazioni elementari (traslazione, rotazione, scala…) possono essere composte attraverso la moltiplicazione di matrici.

Vantaggi della composizione tra matrici:

- la rappresentazione con coordinate omogenee consente di combinare un numero arbitratrio di trasformazioni, il risultato è sempre una matrice 3x3

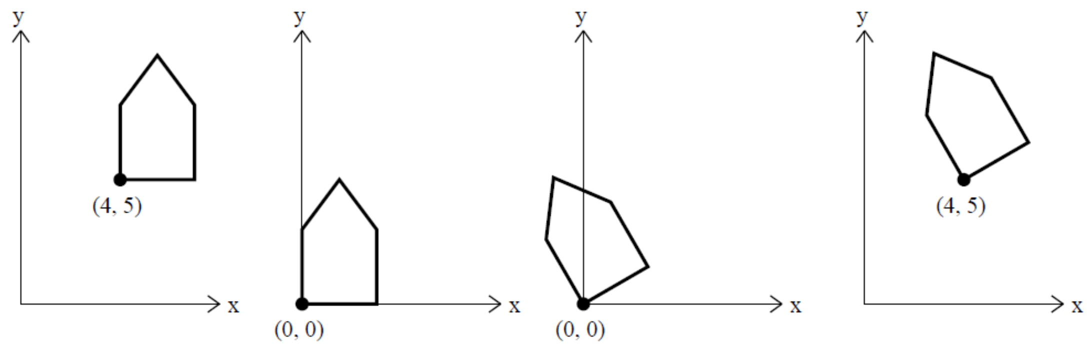
- spesso è più semplice descrivere una trasformazione complessa come composizione di trasformazioni elementari piuttosto che cercare di ottenere direttamente il risultato finale

Trasformazioni composte

2D

Rotazione intorno ad un punto

1. Traslazione del punto nell'origine
2. Rotazioni intorno all'origine
3. Traslazione del punto nella posizione iniziale



$$T(x_1, y_1) \cdot R(\theta) \cdot T(-x_1, -y_1) =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & y_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & -x_1 \\ 0 & 1 & -y_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & x_1(1-\cos\theta) + y_1 \sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta & y_1(1-\cos\theta) - x_1 \sin\theta \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ATTENZIONE
ALL'ORDINE
DELLE TRASFORMAZIONI

Trasformazioni composte

2D

Scala attorno ad un punto arbitrario

1 Traslazione del punto nell'origine

2 Scala

3 Traslazione del punto nella posizione iniziale

$$T(x_1, y_1) \cdot S(s_x, s_y) \cdot T(-x_1, -y_1) =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & y_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & -x_1 \\ 0 & 1 & -y_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

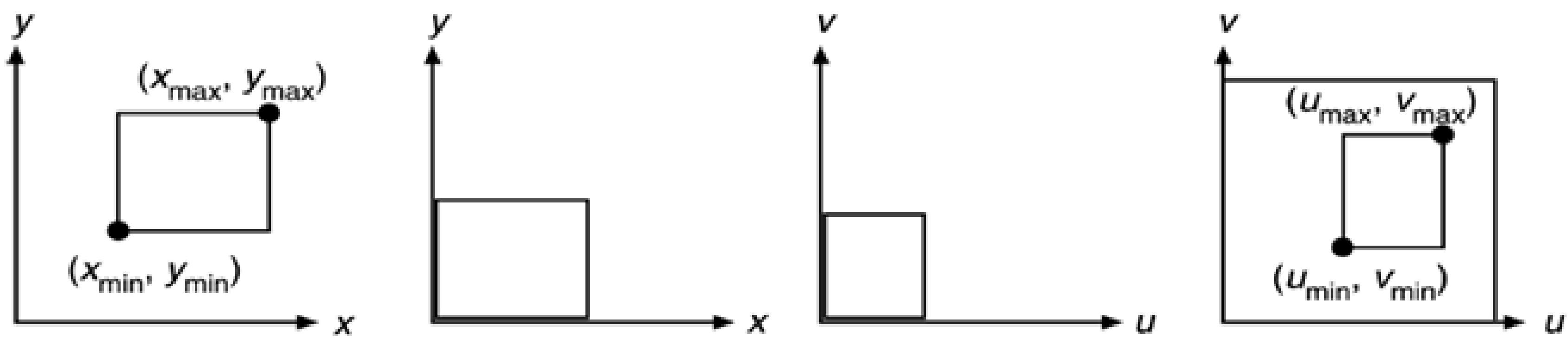
$$= \begin{bmatrix} s_x & 0 & x_1(1 - s_x) \\ 0 & s_y & y_1(1 - s_y) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Trasformazioni composte

2D

Trasformazione di un rettangolo in un altro rettangolo

1. Traslazione nell'origine del rettangolo originale
2. Scala
3. Traslazione finale del rettangolo scalato



$$M_{WV} = T(u_{min}, v_{min}) \cdot S\left(\frac{u_{max} - u_{min}}{x_{max} - x_{min}}, \frac{v_{max} - v_{min}}{y_{max} - y_{min}}\right) \cdot T(-x_{min}, -y_{min})$$

$$P' = M_{wv} P$$

Trasformazioni composte

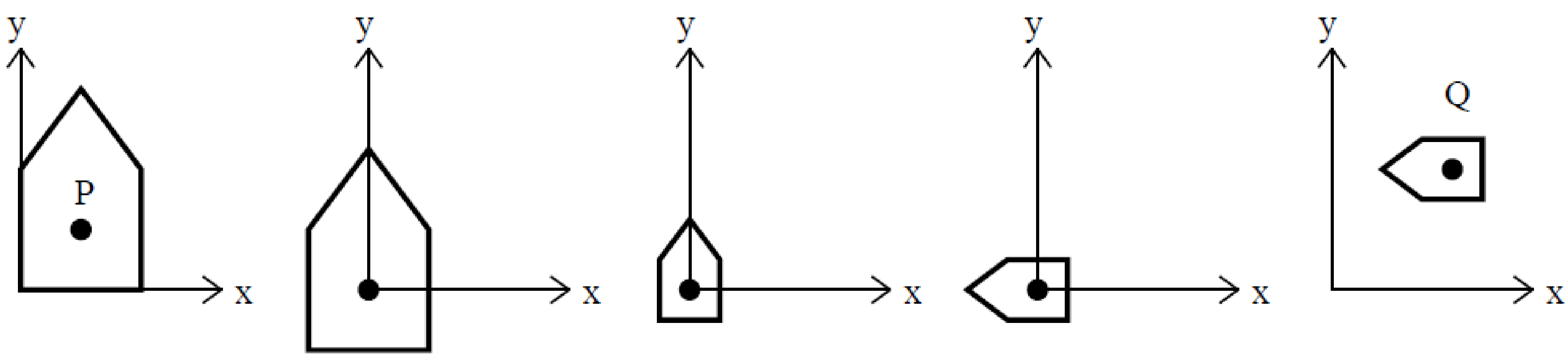
2D

Esercizio

Scalatura e rotazione di 90° di una casa attorno al punto *P*, con traslazione finale in *Q*

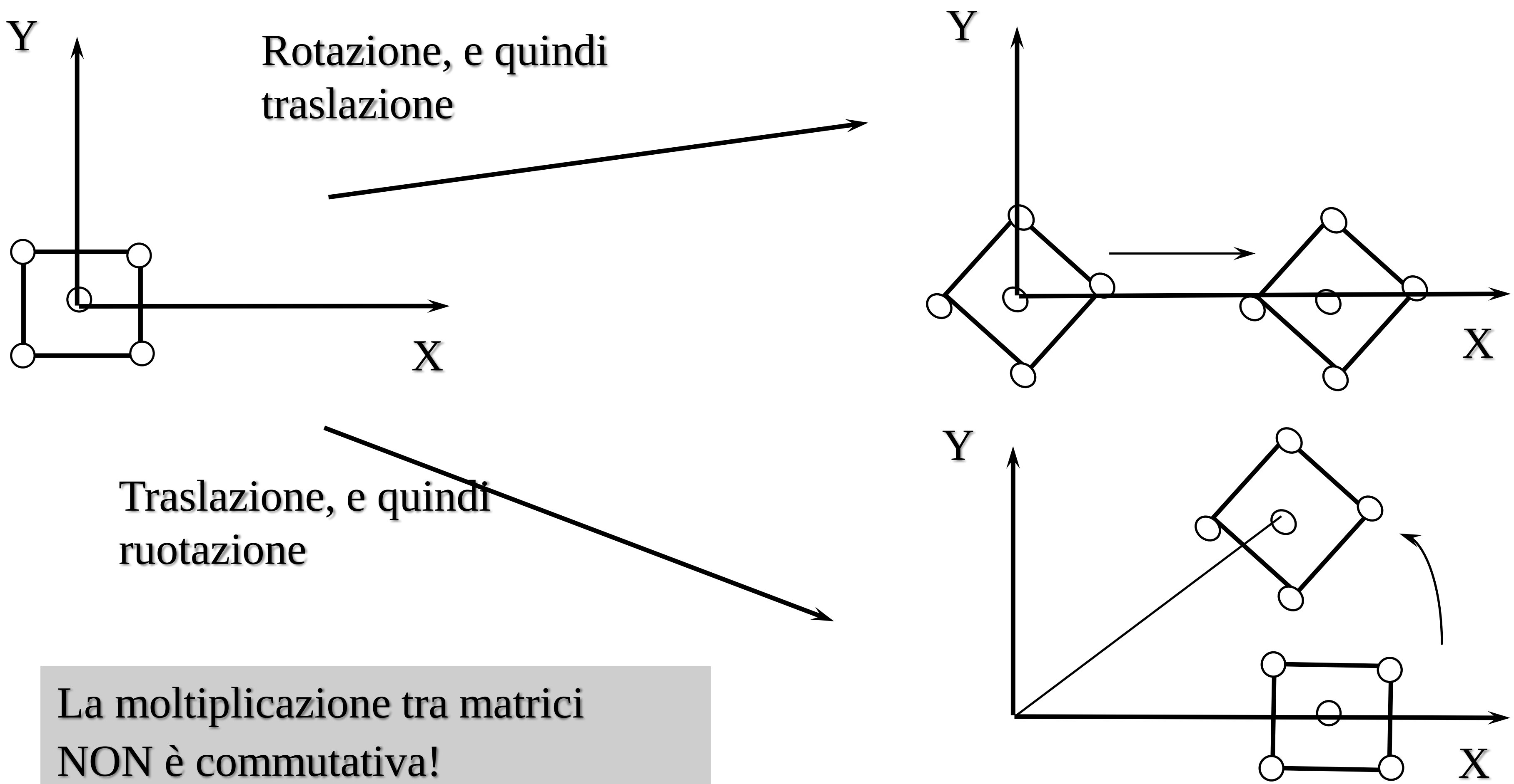
Calcolare la matrice di trasformazione complessiva

$$T(x_2, y_2) \cdot R(\theta) \cdot S(s_x, s_y) \cdot T(-x_1, -y_1)$$



Ordine delle trasformazioni

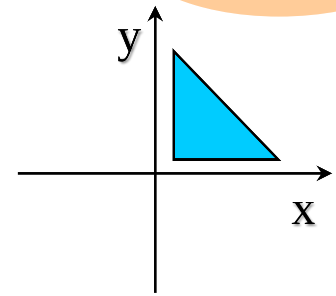
2D (3D)



La moltiplicazione tra matrici NON è commutativa!

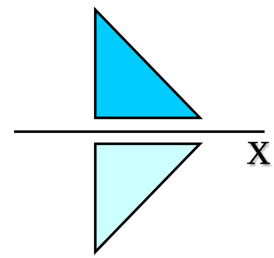
Altre trasformazioni

2D



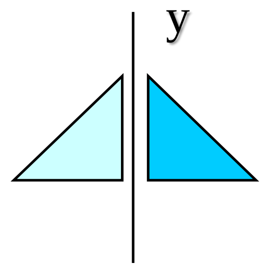
- **Riflessione**
  - rispetto asse x, y=0

$$T_{RFLx} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



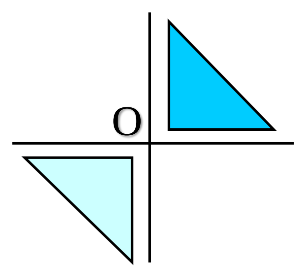
  - rispetto asse y, x=0

$$T_{RFLy} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



  - rispetto origine (0,0)

$$T_{RFL(0,0)} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



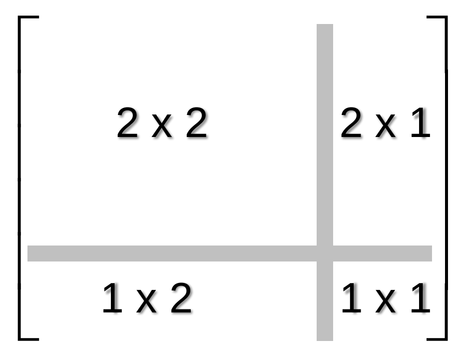
... riassumendo

2D

- **coordinate ordinarie** | **coordinate omogenee**

1 P’ = P + **t**	P’ = T * P	Traslazione
2 P’ = R * P	P’ = R * P	Rotazione
3 P’ = S * P	P’ = S * P	Scala

- **una matrice di trasformazione può essere suddivisa in 4 zone**
  - 2 x 2 Rotazione e/o scala differenziata, riflessione e shear
  - 2 x 1 Traslazione
  - 1 x 2 Proiezione
  - 1 x 1 Fattore di scala uniforme



... riassumendo

2D

- **uniformità delle operazioni matriciali**
- **il prodotto tra matrici è associativo (AB)C=A(BC)**
- **in generale il prodotto tra matrici NON è commutativo**

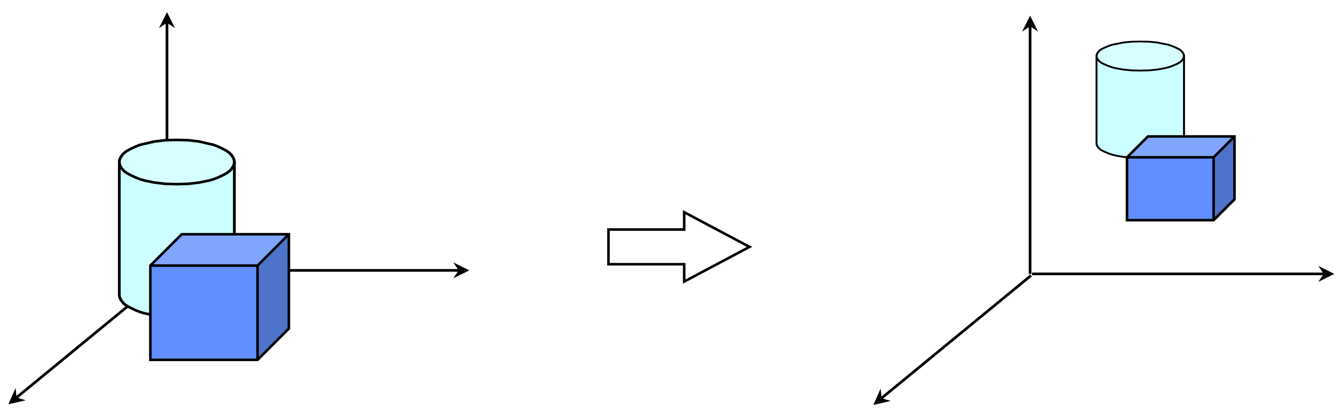
MA: date due matrici di trasformazione M_1 e M_2, il prodotto è commutativo nei seguenti casi:

$\mathbf{M_1}$	$\mathbf{M_2}$	
Traslazione	Traslazione	
Scala	Scala	
Rotazione (2D)	Rotazione (2D)	in 3D vale solo per rotazioni rispetto allo stesso asse
Scala (sx=sy)	Rotazione	

Trasformazioni di modeling 3D

3D

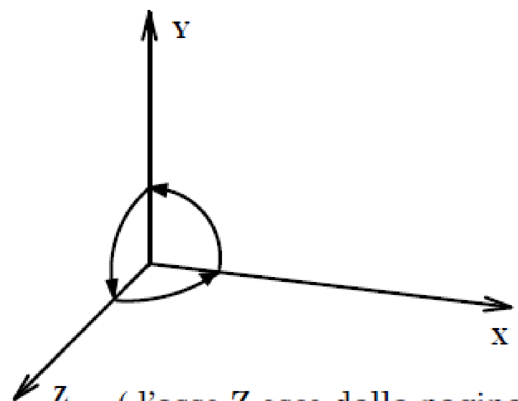
- **Traslazione**
- **Scala**
- **Rotazione**
- **Trasformazioni composte**
- **.... altre trasformazioni**



Trasformazioni di modeling 3D

3D

Le matrici che esprimono le trasformazioni nello spazio 3D sono 4x4, i punti si esprimono come vettori colonna a quattro elementi. Si utilizza un sistema destrorso



(l'asse Z esce dalla pagina)

le rotazioni di angolo positivo rispetto a ciascuno dei tre assi coordinati sono definite in senso antiorario guardando dalla parte positiva dell'asse verso l'origine. Una rotazione di 90º (positiva) rispetto ad un asse trasforma quindi uno dei due rimanenti assi positivi nel terzo.

Asse di rotazione	la direzione di una rotazione positiva è
X	da Y verso Z
Y	da Z verso X
Z	da X verso Y

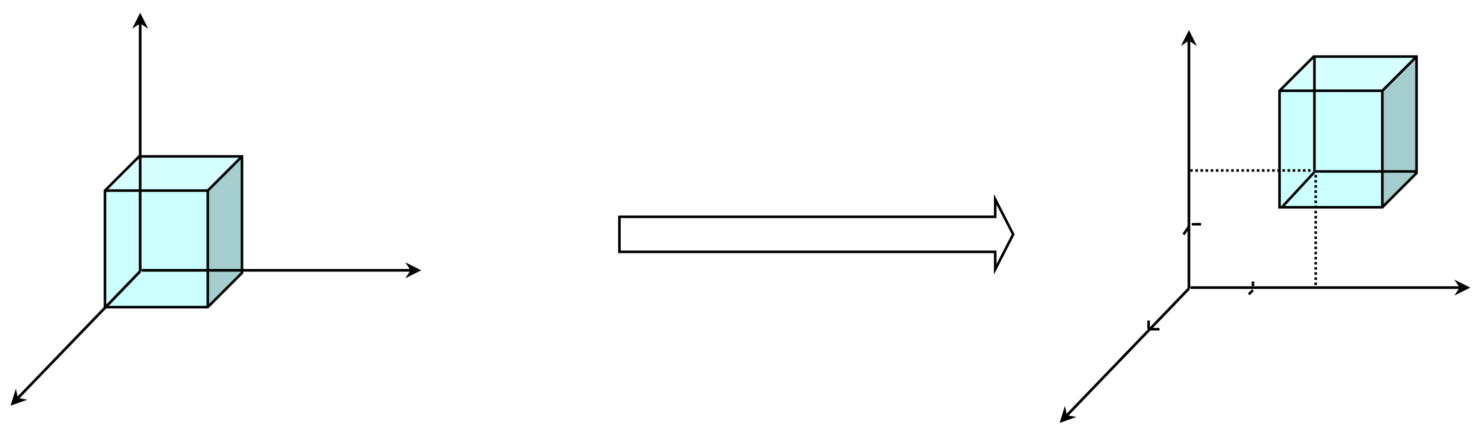
Traslazione 3D
coordinate omogenee

3D

La traslazione è una semplice estensione del caso bidimensionale:

$$T(d_x, d_y, d_z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & d_x \\ 0 & 1 & 0 & d_y \\ 0 & 0 & 1 & d_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Infatti $T(d_x, d_y, d_z) \cdot [x \ \ y \ \ z \ \ 1]^T = [x + d_x \ \ y + d_y \ \ z + d_z \ \ 1]^T$



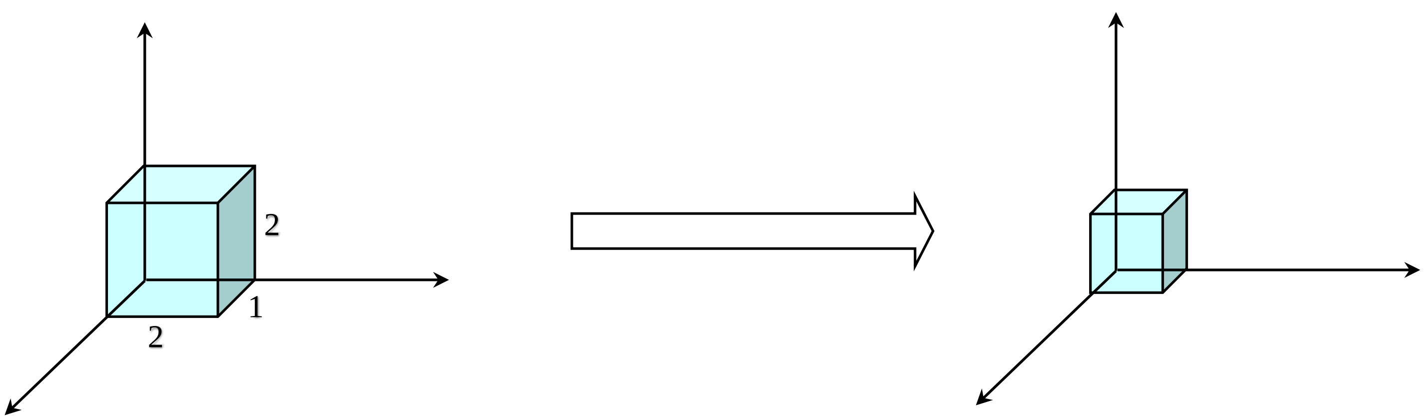
Scala 3D
coordinate omogenee

3D

La scala è una semplice estensione del caso bidimensionale:

$$S(s_x, s_y, s_z) = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

infatti $S(s_x, s_y, s_z) \cdot [x \;\; y \;\; z \;\; 1]^T = [x \cdot s_x \;\; y \cdot s_y \;\; z \cdot s_z \;\; 1]^T$



Rotazione 3D
coordinate omogenee

3D

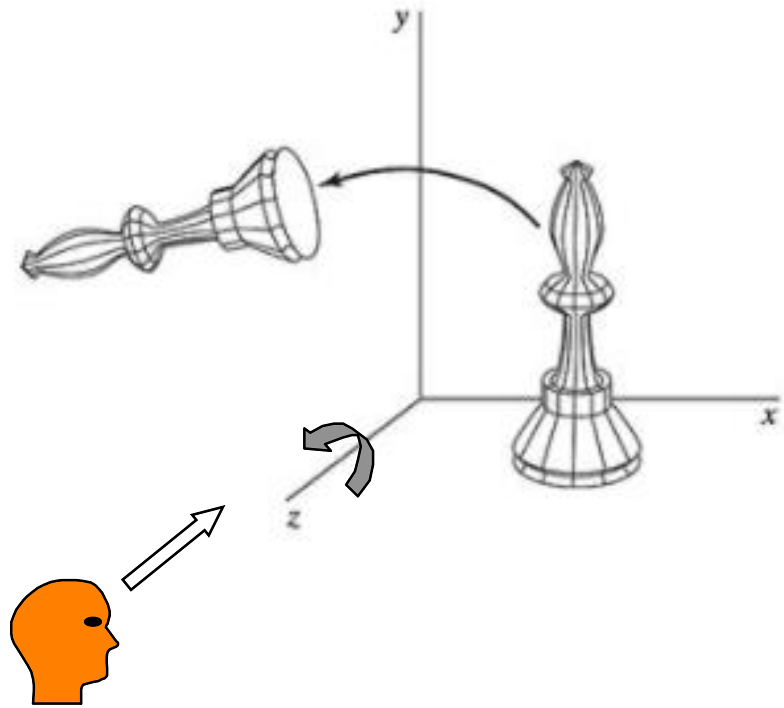
La rotazione si complica leggermente passando al caso tridimensionale, nel senso che è necessario definire tre rotazioni base, una attorno a ciascuno dei tre assi x, y e z

- **Rotazione intorno ad asse z**
- **Rotazione intorno ad asse x**
- **Rotazione intorno ad asse y**

Rotazione intorno ad asse z

3D

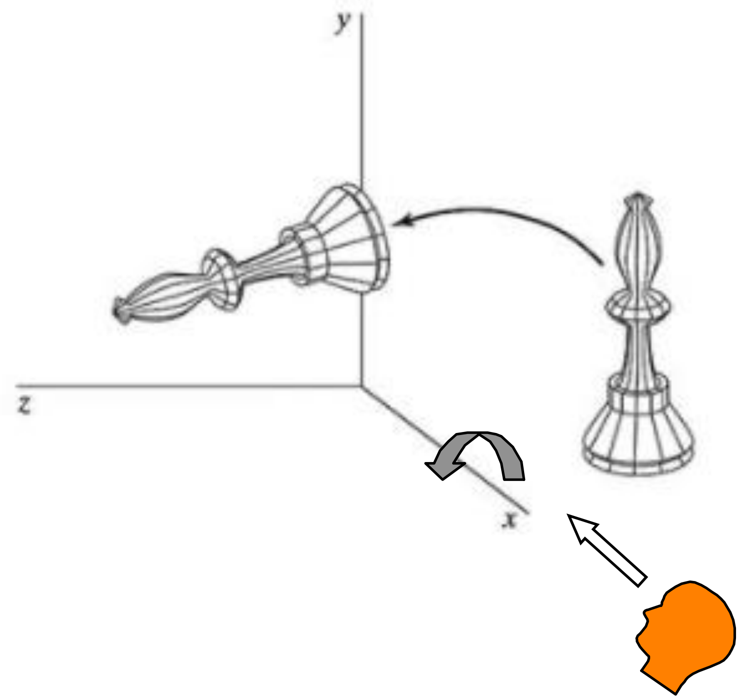
$$R_z(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Rotazione intorno ad asse x

3D

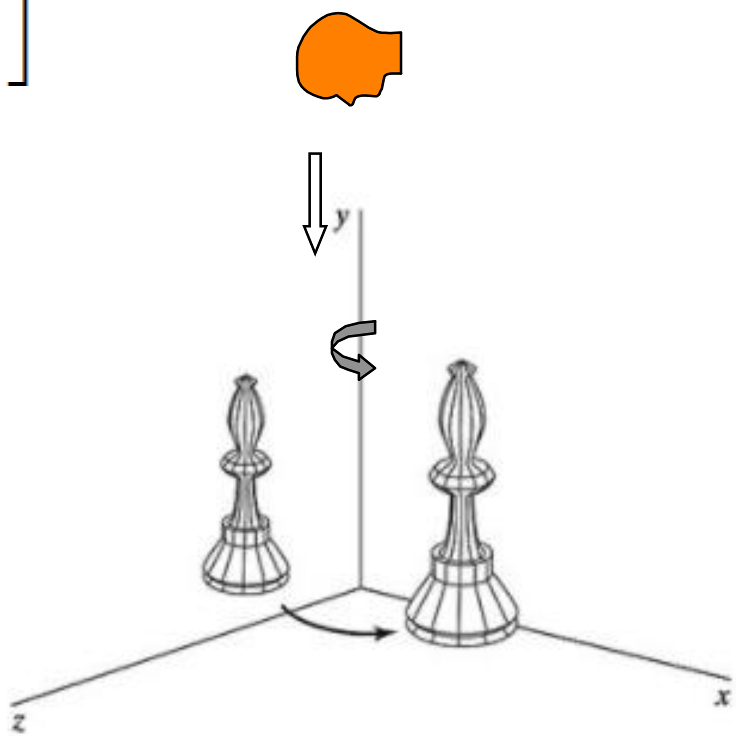
$$R_x(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Rotazione intorno ad asse y

3D

$$R_y(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Trasformazioni di modeling 3D

3D

Le colonne (e le righe) delle sottomatrici 3x3 in alto a sinistra di $R_z(\theta)$, $R_x(\theta)$ e $R_y(\theta)$ sono vettori unitari mututamente perpendicolari e le sottomatrici hanno determinante unitario, il che signica le tre matrici che sono **ortogonali**

Combinando insieme, cioè moltiplicando, un numero arbitrario di rotazioni, operazioni di scala, e traslazioni si ottiene una matrice della forma:

$$\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & t_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & t_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Si può scrivere anche nel modo seguente:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = R \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + T$$

Trasformazioni di modeling 3D

3D

Tutte le matrici di trasformazione viste ammettono l'inversa.

L'inversa di una traslazione pura *T* si ottiene cambiando segno a d_x, d_y e d_z, l'inversa di una scalatura pura *S* si ottiene prendendo il reciproco di s_x, s_y ed s_z e quella delle tre matrici di rotazione rispetto agli assi coordinati si ottiene cambiando segno all'angolo.

Per una matrice ortogonale l'inversa si può calcolare più semplicemente mediante la trasposizione:
ovvero, se B è ortogonale allora

$$\mathbf{B}^{-1} = \mathbf{B}^{T}$$

Rotazione intorno ad un asse arbitrario

3D

Si vuole scrivere la matrice di rotazione di un angolo α attorno ad un asse arbitrario (definito dal segmento disegnato in figura). Possibile procedimento:

1 Traslazione T di $(-x_1,-y_1,-z_1)$ che porta l'asse di rotazione a passare per l'origine

2 Rotazione rispetto a y di un angolo θ che porta l'asse di rotazione sul piano yz

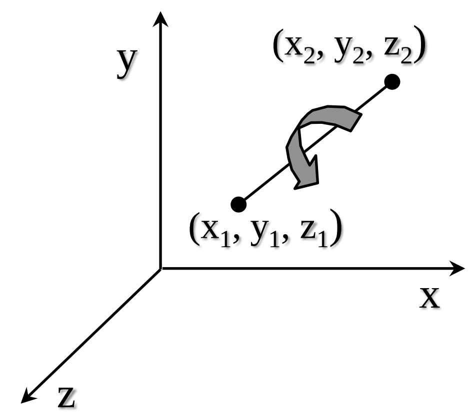
3 Rotazione rispetto a x di un angolo ϕ che porta l'asse di rotazione su z

4 Rotazione intorno ad asse z dell'angolo voluto α

5 Rotazione inversa del punto 3

6 Rotazione inversa del punto 2

7 Traslazione inversa del punto 1



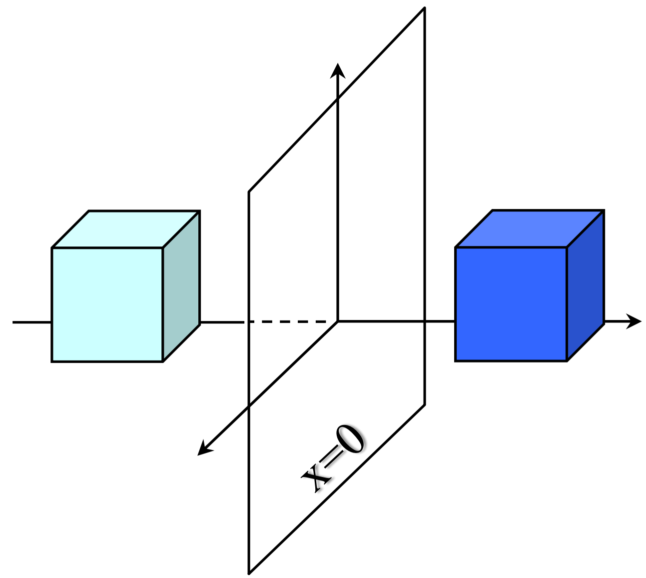
…. quindi $\mathbf{T^{-1}} * \mathbf{R_y^{-1}}(\theta) * \mathbf{R_x^{-1}}(\phi) * \mathbf{R_z}(\alpha) * \mathbf{R_x}(\phi) * \mathbf{R_y}(\theta) * T$

Altre trasformazioni

3D

- **Riflessione**
  - rispetto piano zy, x=0

$$T_{RFLzy} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



  - rispetto piano zx, y=0

$$T_{RFLzx} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

  - rispetto piano xy, z=0

$$T_{RFLxy} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

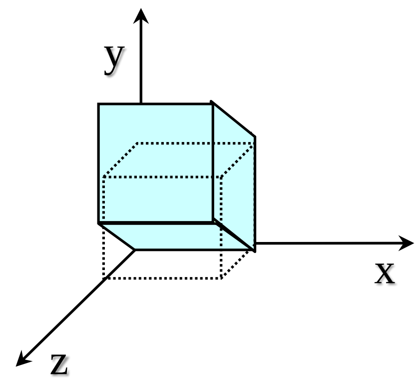
Altre trasformazioni

3D

- **Shear**

shear lungo piano xy, z invariata

$$SH_{xy}(sh_x, sh_y) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & sh_x & 0 \\ 0 & 1 & sh_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

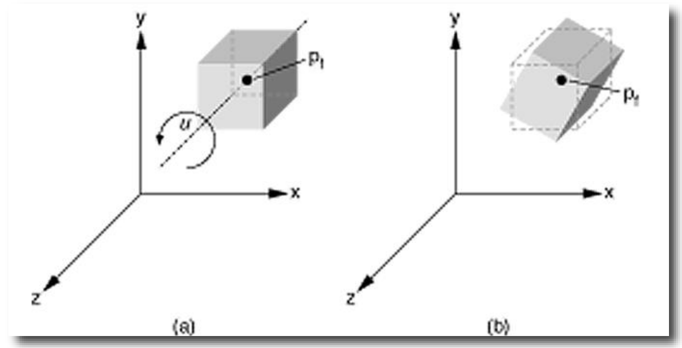


Trasformazioni composte

3D

Rotazione *Θ* attorno a un punto *p* e parallela a un asse coordinato

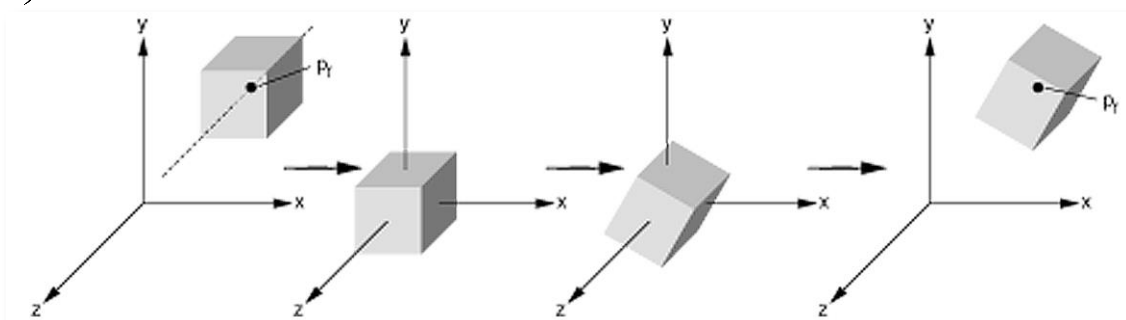
1. Traslare l'oggetto nell'origine
2. Ruotare attorno all'origine di un angolo Θ
3. Traslare inversamente



$$\mathbf{M=T^{-1}RT}$$

$$\mathbf{T^{-1}RT} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & p_x \\ 0 & 1 & 0 & p_y \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -p_x \\ 0 & 1 & 0 & -p_y \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & (-p_x\cos\theta + p_y\sin\theta + p_x) \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & (-p_x\sin\theta - p_y\cos\theta + p_y) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



Riepilogo

3D

- **Una matrice di trasformazione può essere suddivisa in 4 zone**
  - 3 x 3   Rotazione e/o scala differenziata, riflessione e shear
  - 3 x 1   Traslazione
  - 1 x 3   Proiezione
  - 1 x 1   Fattore di scala uniforme

$$\left[\begin{array}{c|c} 3 \times 3 & 3 \times 1 \\ \hline 1 \times 3 & 1 \times 1 \end{array}\right]$$

Convenzioni

- **Convenzioni**
  - matrice di trasformazione pre-moltiplicata al vettore colonna

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B & C & D \\ E & F & G & H \\ I & J & K & L \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

CONVENZIONE PER VETTORI COLONNA

  - matrice di trasformazione post-moltiplicata al vettore riga

$$\begin{bmatrix} x' & y' & z' & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & z & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} A & E & I & 0 \\ B & F & J & 0 \\ C & G & K & 0 \\ D & H & L & 1 \end{bmatrix}$$

CONVENZIONE PER VETTORI RIGA

SONO EQUIVALENTI!

per passare da una convenzione all'altra occorre calcolare matrici trasposte:

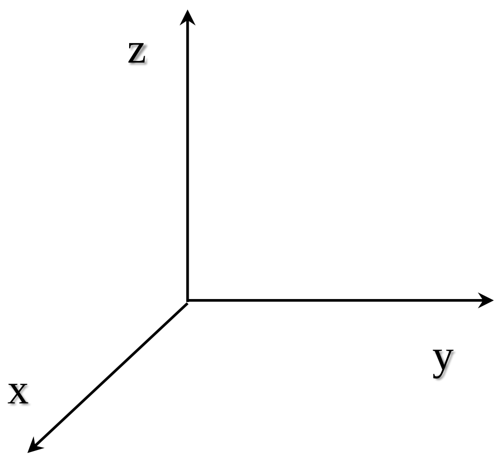
$$(M * P)^T = P^T * M^T$$

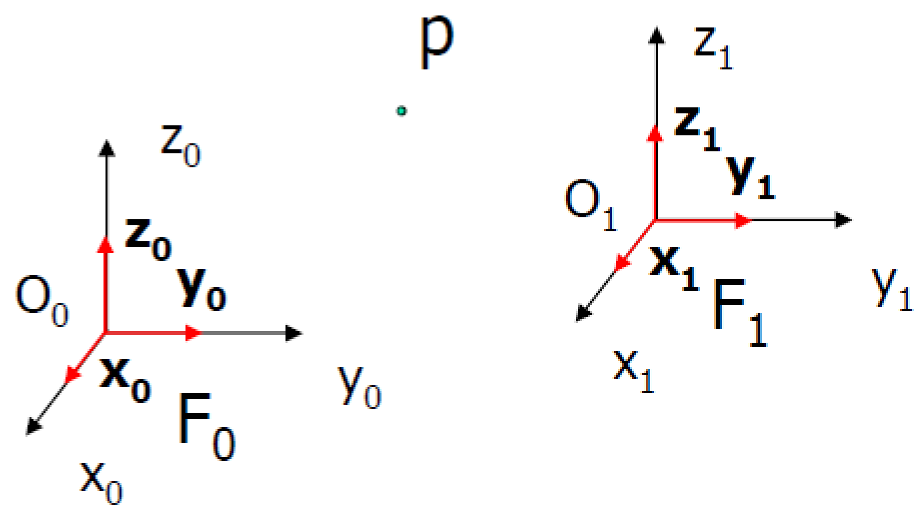
Trasformazioni come cambiamento di coordinate

3D

Si è visto come utilizzare le matrici di trasformazione per trasformare punti nello stesso sistema di riferimento.

Le trasformazioni geometriche possono essere utilizzate anche per effettuare il cambiamento di coordinate tra sistemi di riferimento diversi.





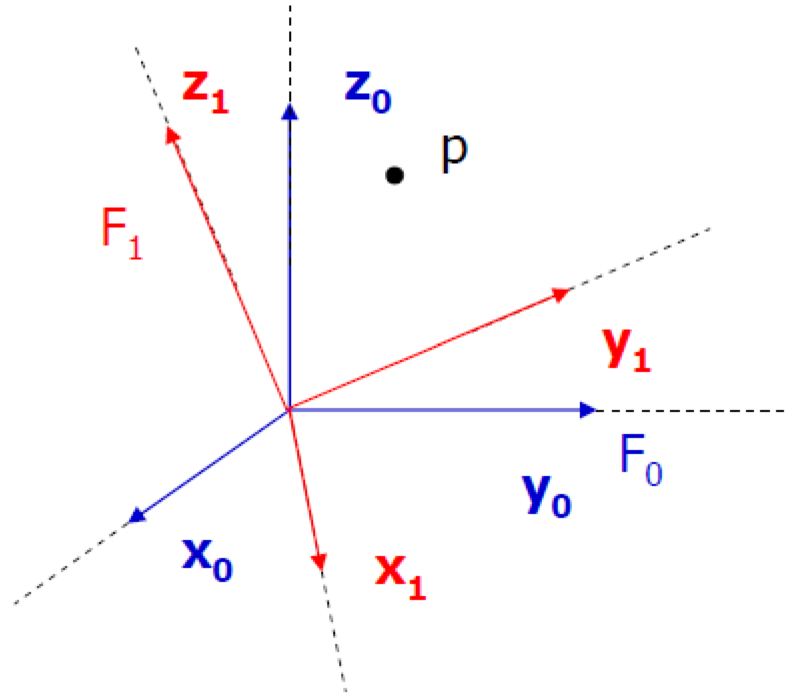
$$^{0}p = p - O_0 = [\langle p - O_0, \mathbf{x}_0\rangle, \langle p - O_0, \mathbf{y}_0\rangle, \langle p - O_0, \mathbf{z}_0\rangle]^T$$

$$^{1}p = p - O_1 = [\langle p - O_1, \mathbf{x}_1\rangle, \langle p - O_1, \mathbf{y}_1\rangle, \langle p - O_1, \mathbf{z}_1\rangle]^T$$

Trasformazioni come cambiamento di coordinate

3D

Consideriamo due sistemi di riferimento ruotati con la stessa origine degli assi



si verifica la seguente relazione

$$^0p = {^0R_1}\, {^1p}$$

dove

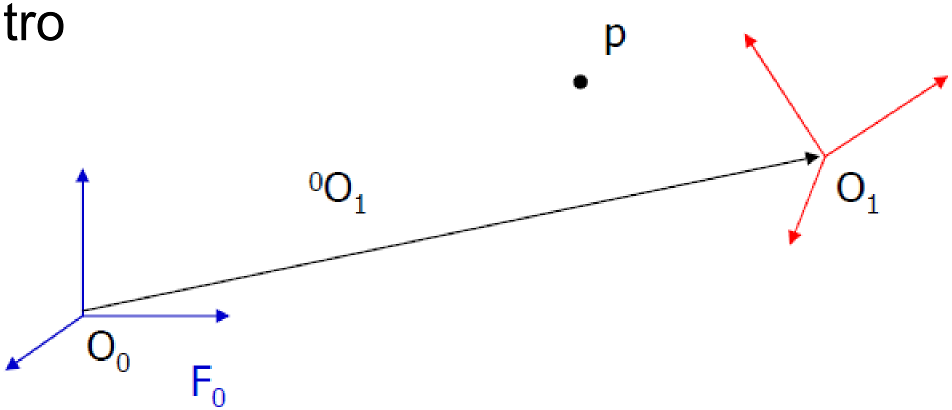
$$^0R_1 = \begin{pmatrix} \langle \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1 \rangle & \langle \mathbf{x}_0, \mathbf{y}_1 \rangle & \langle \mathbf{x}_0, \mathbf{z}_1 \rangle \\ \langle \mathbf{y}_0, \mathbf{x}_1 \rangle & \langle \mathbf{y}_0, \mathbf{y}_1 \rangle & \langle \mathbf{y}_0, \mathbf{z}_1 \rangle \\ \langle \mathbf{z}_0, \mathbf{x}_1 \rangle & \langle \mathbf{z}_0, \mathbf{y}_1 \rangle & \langle \mathbf{z}_0, \mathbf{z}_1 \rangle \end{pmatrix}$$

matrice dei coseni direttori che rappresenta l'orientazione di F_1 rispetto a F_0

Trasformazioni come cambiamento di coordinate

3D

Consideriamo ora due sistemi di riferimento traslati e ruotati l'uno rispetto all'altro



$$ {}^0p = {}^0R_1 \, {}^1p + {}^0O_1 $$

${}^0R_1$ è la matrice di rotazione tra i due sistemi di riferimento "pensati" come concentrici

È possibile scrivere il cambiamento di coordinate con una matrice di trasformazione omogenea

$$ {}^0H_1 = \begin{pmatrix} {}^0R_1 & {}^0O_1 \\ 000 & 1 \end{pmatrix} $$