Esercizi

Esercizio 1:

Scrivere l'equazione parametrica di una ellisse con semiassi (a,b)=(4,2) centrata nell'origine e che giace sul piano z=0 che viene traslata portando il suo centro nel punto di coordinate C(5,3,-2).

Soluzione:

L'equazione parametrica dell'ellisse centrata nell'origine è:

$$\begin{cases} x = 4\cos\theta \\ y = 2sen\theta \\ z = 0 \end{cases}$$

Applicando la traslazione in coordinate omogenee si ottiene:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4\cos\theta \\ 2sen\theta \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5+4\cos\theta \\ 3+2sen\theta \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Quindi l'equazione parametrica dell'ellisse traslata è:

$$\begin{cases} x = 5+4\cos\theta \\ y = 3+2sen\theta \\ z = -2 \end{cases}$$

Esercizio 2:

Creare la matrice di trasformazione 3D che rappresenta una rotazione di $\theta=30^o$ rispetto all'asse y e verificare il risultato di questa trasformazione applicato al punto P di coordinate (1,0,0)

Soluzione:

La matrice che cerchiamo è

$$T = \begin{bmatrix} \cos(30^\circ) & 0 & sen(30^\circ) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -sen(30^\circ) & 0 & \cos(30^\circ) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Applicando la matrice T al punto P in coordinate omogenee si ottengono le coordinate omogenee del punto trasformato

$$\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Esercizio 3:

Creare la matrice di trasformazione 3D che rappresenta una rotazione di θ=45° rispetto all'asse x seguita da una traslazione di (30,40,0)

Soluzione:

La matrice che cerchiamo si scrive come M=TR dove T rappresenta la traslazione e R la rotazione

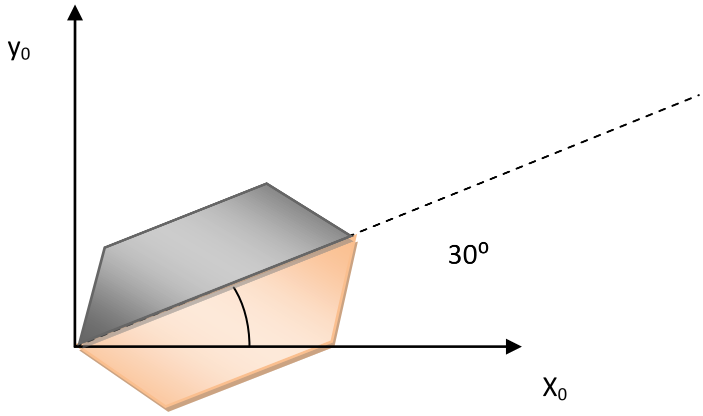
$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & 0 & t_y \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 30 \\ 0 & 1 & 0 & 40 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M = TR = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 30 \\ 0 & 1 & 0 & 40 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 30 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 40 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Esercizio 4:

Creare la matrice di trasformazione 2D che rappresenta una riflessione rispetto ad un asse ruotato di $\theta=30^o$ rispetto all'asse x



Soluzione:

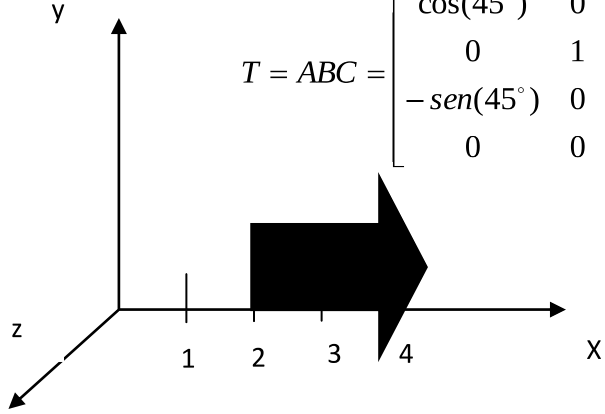
La matrice che cerchiamo si scrive come $M=R^{-1}SR$ dove R rappresenta una matrice di rotazione di $\theta=-30^o$ che serve per portare l'asse allineato con l'asse x del sistema di riferimento globale. S rappresenta una matrice di riflessione rispetto all'asse x.

$$R^{-1}SR=\begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 & 0 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2 & 0 \\ -1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

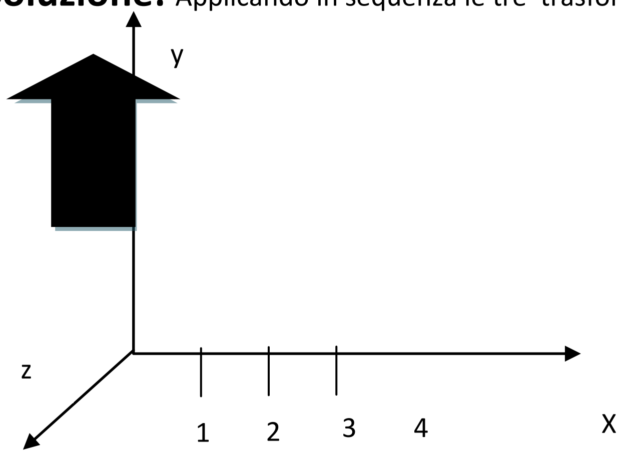
Esercizio 5:

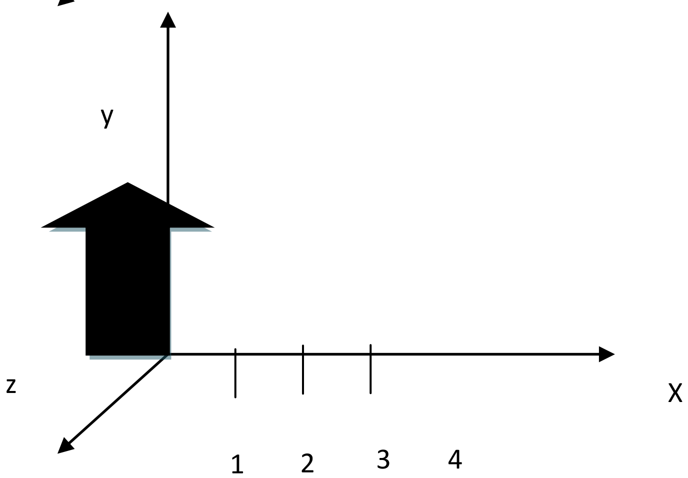
Dato il poligono in figura disegnare il risultato della trasformazione composta T=ABC applicata ad esso

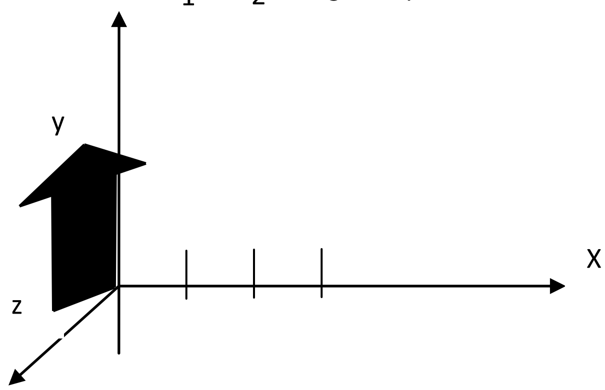
$$T = ABC = \begin{bmatrix} \cos(45^\circ) & 0 & sen(45^\circ) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -sen(45^\circ) & 0 & \cos(45^\circ) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(90^\circ) & -sen(90^\circ) & 0 & 0 \\ sen(90^\circ) & \cos(90^\circ) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Soluzione: Applicando in sequenza le tre trasformazioni C, B, A si ottiene

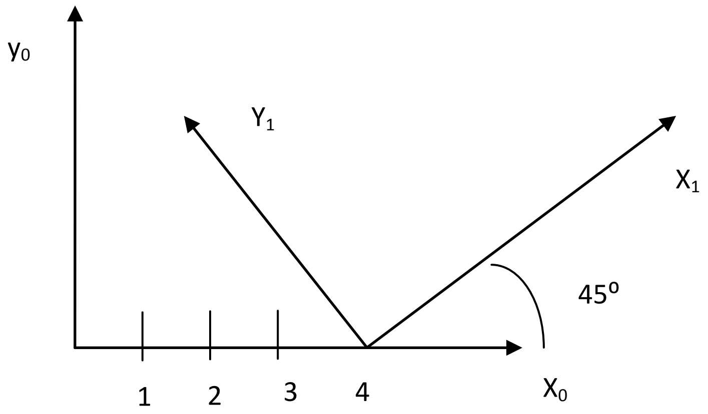






Esercizio 6:

Dati due sistemi di riferimento O_0 e O_1 rappresentati in figura



Scrivere la matrice di trasformazione di coordinate dal sistema di riferimento O_1 al sistema O_0 e calcolare le coordinate ${}^0p$ nel sistema O_0 del punto ${}^1p=[1,0,0,1]^T$ nel sistema O_1

Soluzione:

La matrice che cerchiamo si scrive come composizione di una rotazione di θ=45° rispetto all'asse z_0 (che esce dal piano del foglio) e di una traslazione di 4 lungo x_0

$$ {}^0_1M = TR = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 0 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 0 & 4 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

Le coordinate del punto ${}^1p=[1,0,0,1]^T$ nel sistema di riferimento O_0 si calcolano come

$$ {}^0p = {}^0_1M\,{}^1p = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 0 & 4 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 + 4 \\ \sqrt{2}/2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} $$

Esercizio 7:

Dato il centro di proiezione $F=[2,1,0]^T$ e il piano di proiezione di equazione y=4, scrivere l'espressione della matrice di proiezione 4x4 corrispondente.

Soluzione:

Si scrive l'espressione in forma parametrica della retta passante per il centro di proiezione e per il punto generico $=[x,y,z]^T$

$$x' = 2+(x-2)t$$
$$y' = 1+(y-1)t$$
$$z' = zt$$

Si pone $y'=4$ e si risolve per t, si ottiene ottiene $t = \frac{3}{y-1}$

Sostituendo nelle espressioni di x' e z' si ottiene

$$x' = \frac{3x+2y-8}{y-1}$$
$$z' = \frac{3z}{y-1}$$

(y-1) è il termine di divisione prospettica che determina la quarta riga della matrice di proiezione, la matrice che cerchiamo è

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & -8 \\ 0 & 4 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

i coefficienti della seconda riga (a,b,c,d) si ottengono dall'espressione

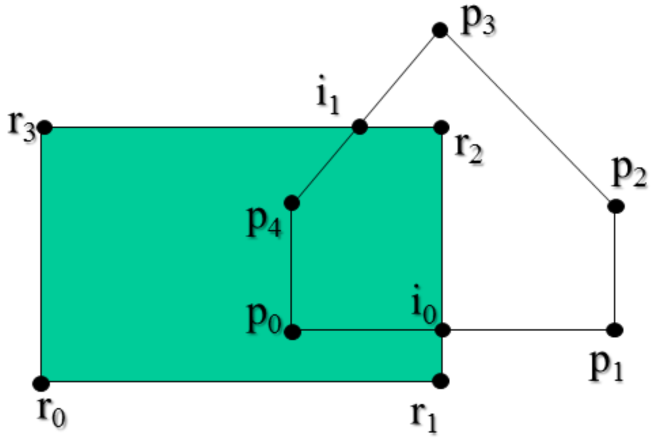
$$4W = 4(y-1) = 0x+4y+0z-4$$

infatti

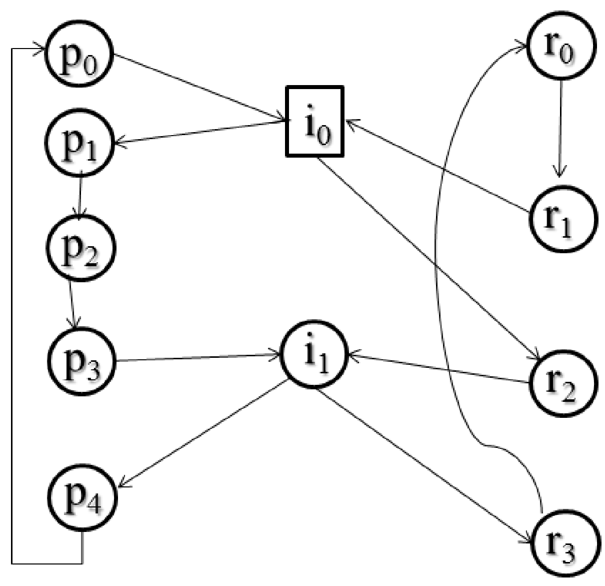
$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & -8 \\ 0 & 4 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x+2y-8 \\ 4(y-1) \\ 3z \\ y-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3x+2y-8}{y-1} \\ 4 \\ \frac{3z}{y-1} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Esercizio 8:

La figura mostra una finestra rettangolare di clipping e un poligono. Disegnare il grafico di connessione dei vertici utilizzato dall'algoritmo di **Weiler-Atherton** per il clipping di poligoni.



Soluzione:



Esercizio 9:

Si consideri un vertice P (1,2,3) su un poligono con versore normale N(0,0,1), una luce posizionale posta in (4,5,5) e un osservatore posto in (1,2,6). Calcolare i versori L,V,R e l'intensità del colore nel punto P secondo il modello di Phong in assenza di luce emessa sapendo che i parametri del materiale sono ka=0.2,kd=0.5,ks=0.5,n=2 e che le componenti di intensità della sorgente di luce sono Ia=1,Id=1,Is=1

Soluzione:

$$L = \frac{(4,5,5)-(1,2,3)}{\|(4,5,5)-(1,2,3)\|} = \frac{(3,3,2)}{\sqrt{22}}$$

$$V = \frac{(1,2,6)-(1,2,3)}{\|(1,2,6)-(1,2,3)\|} = \frac{(0,0,3)}{\sqrt{9}} = (0,0,1)$$

$$R = 2(N \cdot L)N - L = 2\left((0,0,1) \cdot \frac{(3,3,2)}{\sqrt{22}}\right)(0,0,1) - \frac{(3,3,2)}{\sqrt{22}} = \frac{(-3,-3,2)}{\sqrt{22}}$$

$$I = I_a k_a + I_d k_d (N \cdot L) + I_s k_s (R \cdot V)^n = 0.2 + 0.5\left((0,0,1) \cdot \frac{(3,3,2)}{\sqrt{22}}\right) + 0.5\left(\frac{(-3,-3,2)}{\sqrt{22}} \cdot (0,0,1)\right)^2 =$$

$$= 0.2 + \frac{1}{\sqrt{22}} + 0.5\left(\frac{2}{\sqrt{22}}\right)^2 = 0.2 + 0.213 + 0.09 = 0.504$$

Esercizio 10:

Dato il triangolo avente per vertici i punti A(4,6) B(2,1) e C(6,3) calcolare le coordinate baricentriche del punto $P_1(4,\frac{10}{3})$ che appartiene al triangolo.

Soluzione:

Le coordinate baricentriche (α,β,γ) di un punto $P(P_x,P_y)$ rispetto ai vertici del triangolo sono:

$$P=\alpha A+\beta B+\gamma C$$

con $\alpha+\beta+\gamma=1$

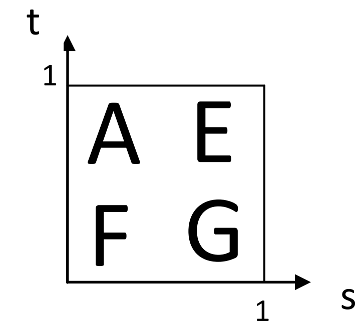
Pertanto si può scrivere il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} P_x = 4\alpha+2\beta+6\gamma \\ P_y = 6\alpha+\beta+3\gamma \\ \alpha+\beta+\gamma=1 \end{cases}$$

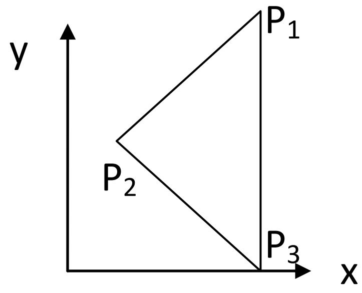
Che risolto fornisce le coordinate cercate $(\alpha,\beta,\gamma)=(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3})$

Esercizio 11:

La seguente texture che contiene le lettere “AEFG”



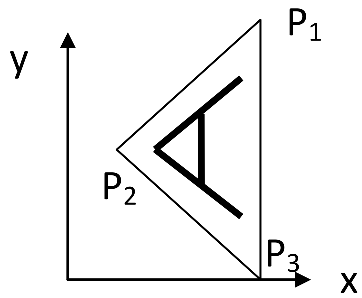
viene mappata sul triangolo di vertici P_1 (40,60,0), P_2 (10,30,0) P_3 (40,0,0)



mediante le seguenti relazioni P_1 : (s,t) = (0.5,0.5) P_2 : (s,t) = (0.25,1) P_3 : (s,t) = (0,0.5)

Disegnare qualitativamente come la texture viene mappata sopra il triangolo

Soluzione:



Esercizio 12:

Calcolare il vettore normale N alla superficie parametrica $Q(u,v) = (2u, 2v, -(2u-1)^2 - \frac{1}{2}(2v-1)^2)$ nel punto $P = (u,v) = (\frac{1}{2}, 0)$

Soluzione:

Il vettore N si calcola come $N = Q_u(u,v) \times Q_v(u,v)$ dove

$$Q_u = \frac{\partial Q}{\partial u}$$
$$Q_v = \frac{\partial Q}{\partial v}$$

Pertanto si ottiene

$$Q_u(u,v) = (2, 0, -4(2u-1))$$
$$Q_v(u,v) = (0, 2, -2(2v-1))$$

e quindi $Q_u(\frac{1}{2}, 0) = (2,0,0)$

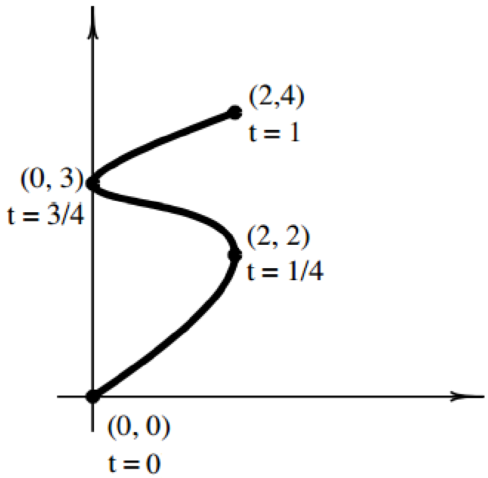
$$Q_v(\frac{1}{2}, 0) = (0,2,2)$$

Infine

$$N(\frac{1}{2}, 0) = (2,0,0) \times (0,2,2) = (0,-4,4)$$

Esercizio 13:

Calcolare con il metodo dell'interpolazione di **Lagrange** l'equazione parametrica della curva polinomiale cubica in 2D che passa per i punti di coordinate (0,0) per t=0, (2,2) per t=1/4, (0,3) per t=3/4, (2,4) per t=1.



Soluzione:

stiamo cercando una curva parametrica (con parametro t) del tipo: $\begin{cases} x(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 \\ y(t) = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + b_3 t^3 \end{cases}$

la soluzione consiste nel trovare i valori dei coefficienti (a_0, a_1, a_2, a_3) e (b_0, b_1, b_2, b_3)

Imponendo le condizioni di interpolazione fornite dal problema si ottengono due sistemi lineari:

$$\begin{cases} 0 = a_0 + a_1 0 + a_2 0^2 + a_3 0^3 \\ 2 = a_0 + a_1(\frac{1}{4}) + a_2(\frac{1}{4})^2 + a_3(\frac{1}{4})^3 \\ 0 = a_0 + a_1(\frac{3}{4}) + a_2(\frac{3}{4})^2 + a_3(\frac{3}{4})^3 \\ 2 = a_0 + a_1 1 + a_2 1^2 + a_3 1^3 \end{cases}$$

che risolto fornisce il risultato $(a_0, a_1, a_2, a_3) = (0,18,-48,32)$

$$\begin{cases} 0 = b_0 + b_1 0 + b_2 0 + b_3 0 \\ 2 = b_0 + b_1 \frac{1}{4} + b_2 \left(\frac{1}{4}\right)^2 + b_3 \left(\frac{1}{4}\right)^3 \\ 3 = b_0 + b_1 \frac{3}{4} + b_2 \left(\frac{3}{4}\right)^2 + b_3 \left(\frac{3}{4}\right)^3 \\ 4 = b_0 + b_1 + b_2 + b_3 \end{cases}$$

che risolto fornisce il risultato $(b_0, b_1, b_2, b_3) = (0,12,-\frac{56}{3},\frac{32}{3})$