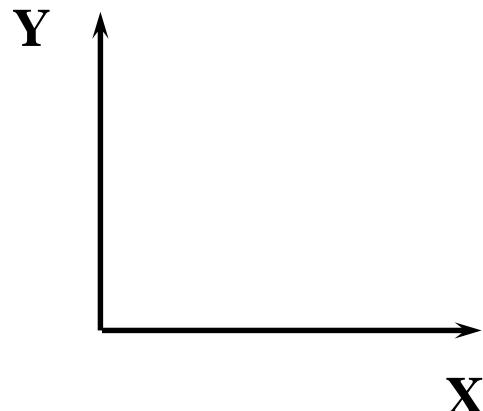


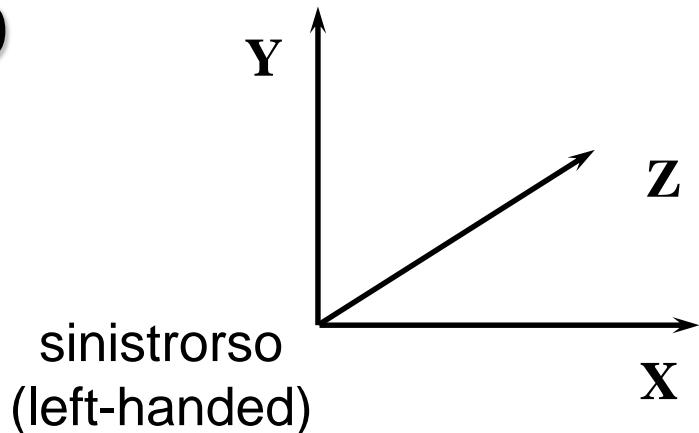
# **NOZIONI DI MATEMATICA DI BASE**

# Sistemi di Coordinate 2D e 3D

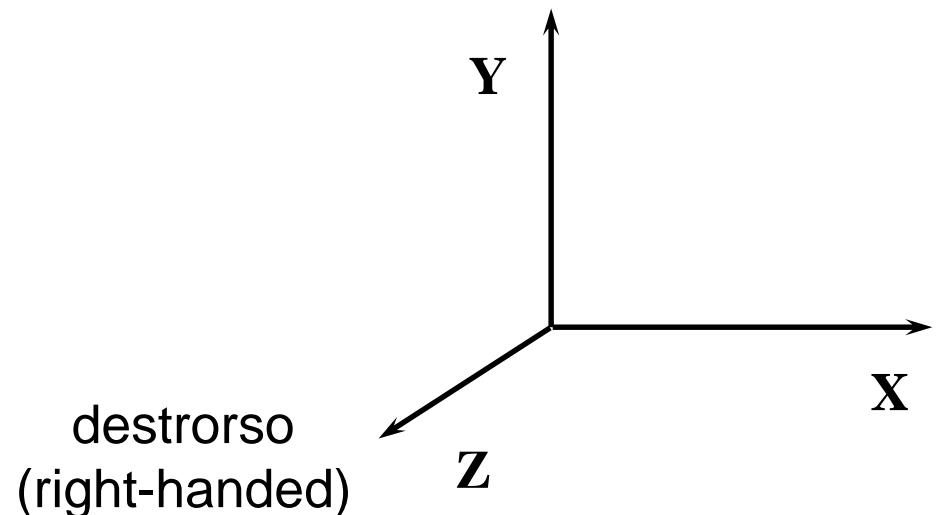
2D



3D



La rotazione di X su Y è oraria  
se vista dalla parte positiva di Z



La rotazione di X su Y è antioraria  
se vista dalla parte positiva di Z

# vettori

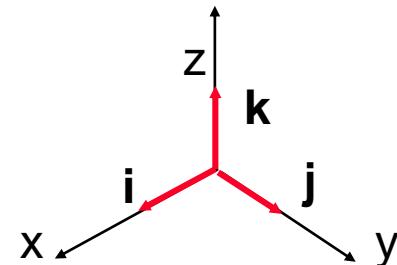
- **Def. operativa:** vettore è un elemento in  $\mathbb{R}, \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, \dots, \mathbb{R}^n$

Seguiamo la definizione operativa...

- **Vettore in  $\mathbb{R}^2$ :**  $\mathbf{v} = (u, v)$     ...in  $\mathbb{R}^3$ :  $\mathbf{v} = (u, v, w)$     ...in  $\mathbb{R}^n$ :  $\mathbf{v} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$

## Caso di interesse: vettore nello spazio

- **$\mathbf{v} = (u, v, w)$  è individuato da due gruppi di attributi:**
  - Ampiezza, modulo o valore assoluto (lunghezza)  $|\mathbf{v}| = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2}$
  - direzione (orientamento)
    - e.g., coseni dei 3 angoli formati con 3 direzioni principali (nello spazio)
- **Versore:** vettore di modulo unitario:  $\mathbf{v}$  tale che  $|\mathbf{v}|=1$
- **Versori principali:**
  - Vettori nelle direzioni degli assi coordinati
  - $\mathbf{i} = (1, 0, 0), \mathbf{j} = (0, 1, 0), \mathbf{k} = (0, 0, 1)$



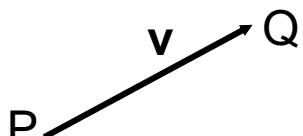
# vettori

- **Addizione di vettori**

- proprietà commutativa:  $\mathbf{u}+\mathbf{v} = \mathbf{v}+\mathbf{u}$
- proprietà associativa:  $\mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w}) = (\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w}$
- esistenza vettore nullo:  $\mathbf{u}+\mathbf{0}=\mathbf{0}+\mathbf{u}=\mathbf{u}$
- esistenza vettore opposto:  $\mathbf{v}+(-\mathbf{v})=\mathbf{0}$
- DEF in  $\mathbb{R}^3$ :  $\mathbf{u}+\mathbf{v} = (u_x, u_y, u_z) + (v_x, v_y, v_z) = (u_x+v_x, u_y+v_y, u_z+v_z)$

- **Prodotto di uno scalare per un vettore**

- $(\alpha\beta) \mathbf{v} = \alpha (\beta\mathbf{v})$
- $(\alpha+\beta) \mathbf{v} = \alpha\mathbf{v}+\beta\mathbf{v}$
- $\alpha (\mathbf{v}+\mathbf{w}) = \alpha\mathbf{v}+\alpha\mathbf{w}$
- $1 \mathbf{v} = \mathbf{v}$
- DEF in  $\mathbb{R}^3$ :  $\alpha\mathbf{v} = (\alpha v_x, \alpha v_y, \alpha v_z)$



- **Vettore applicato:  $(P, \mathbf{v})$**

Altre notazioni:

$$\mathbf{v} = \mathbf{Q}-\mathbf{P}$$

$$\mathbf{v} = \overrightarrow{PQ}$$

# vettori

- **Prodotto scalare (dot product) di due vettori**

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (u_x, u_y, u_z) \cdot (v_x, v_y, v_z) = u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z$$

– oppure  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{u}| |\mathbf{v}| \cos \theta$

– Proprietà:  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{v}|^2$

prodotto scalare è commutativo  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$

disuguaglianza:  $|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}| \leq |\mathbf{u}| |\mathbf{v}|$

proprietà dei versori fondamentali:  $\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 1$        $\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{i} = 0$

– DEF: vettori ortogonali: loro prodotto scalare è nullo

- **Prodotto vettoriale (cross product) di due vettori**

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (u_y v_z - u_z v_y, -u_x v_z + u_z v_x, u_x v_y - u_y v_x) \quad (\text{regola del determinante di matrice})$$

– Significato geometrico:  $|\mathbf{u} \times \mathbf{v}| = |\mathbf{u}| |\mathbf{v}| \sin \theta$

$\mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$  è perpendicolare sia a  $\mathbf{u}$  che a  $\mathbf{v}$

– Proprietà:  $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -(\mathbf{v} \times \mathbf{u})$

$\mathbf{u} \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$ ;     $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$  sse  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  sono paralleli o uno dei due è nullo

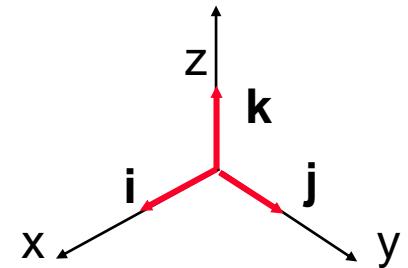
se  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  sono perpendicolari:  $|\mathbf{u} \times \mathbf{v}| = |\mathbf{u}| |\mathbf{v}|$

distributiva:  $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \times \mathbf{v} + \mathbf{u} \times \mathbf{w}$

$\mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{k} = \mathbf{0}$      $\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}$ ,     $\mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}$ ,     $\mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}$

# vettori

$$v \times w = \det \begin{bmatrix} i & j & k \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix}$$



**Esempio:** prodotto vettoriale tra il vettore  $v(1,2,3)$  e  $w(1,1,1)$

$$\begin{aligned} v \times w &= \det \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \\ & \left| \begin{array}{cc|c} 2 & 3 & \mathbf{i} - \\ 1 & 1 & \end{array} \right| \left| \begin{array}{cc|c} 1 & 3 & \mathbf{j} + \\ 1 & 1 & \end{array} \right| \left| \begin{array}{cc|c} 1 & 2 & \mathbf{k} = -\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k} \\ 1 & 1 & \end{array} \right| = (-1, 2, -1) \end{aligned}$$

# matrici

## • Definizione

- insieme omogeneo di elementi matematici ordinato per righe e colonne, dove ogni elemento viene individuato con la notazione  $a_{ij}$ , dove  $i$  indica il numero della riga e  $j$  il numero della colonna
- DEF: matrice rettangolare, di ordine  $n \times m$  ( $n$  righe ed  $m$  colonne)
- DEF: matrice quadrata, di ordine  $n$  (numero righe=numero colonne= $n$ )
- DEF: matrice trasposta di  $\mathbf{A}_{nm} = (a_{ij})$  è  $\mathbf{A}^T_{mn} = (b_{ij})$  tale che  $b_{ij} = a_{ji}$

$$\mathbf{T}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Matrice generica  $m \times n$

$$\mathbf{T}_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Matrice simmetrica  
(solo x quadrate)

$$\mathbf{T}_3 = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Matrice diagonale  
(solo x quadrate)

$$\mathbf{T}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Matrice identità  
(solo x quadrate)

- **Caso particolare:** vettori in  $\mathbb{R}^n$ : sono matrici di tipo  $n \times 1$  (definizione “per colonna”)

# matrici

- **Somma di due matrici**

- DEF: la somma (differenza) di due matrici **A** e **B** mxn è data dalla somma (differenza) degli elementi di posto corrispondenti di **A** e **B**
- Proprietà: commutativa, associativa; esistenza elemento neutro (matrice nulla: **0**), esistenza elemento opposto (data matrice **A**: matrice opposta **-A**)

- **Prodotto di una matrice per uno scalare**

- DEF: matrice ottenuta moltiplicando ogni singolo elemento della matrice per lo scalare (o la funzione)
- Proprietà: simili a prodotto vettore per uno scalare

- **Prodotto di due matrici**

- DEF: date due matrici **A** mxn e **B** nxp il loro prodotto è una matrice **C** mpx i cui elementi vengono calcolati dagli elementi di **A** e **B** come:

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk}$$

- Proprietà: associativa  
commutativa: NO!  
distributiva del prodotto rispetto alla somma/differenza

# matrici

- Determinante
  - DEF: scalare associato a una matrice quadrata, indicato con  $\det(\mathbf{A})$  o  $|\mathbf{A}|$ , definito come:
$$\det(\mathbf{A}) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det(\mathbf{A}_{ij})$$
 $\mathbf{A}_{ij}$  matrice di ordine  $n-1$  ottenuta da  $\mathbf{A}$  togliendo i-ma riga e j-ma colonna
  - Casi particolari:
    - $\det(a) = a$
    - Determinante di una matrice  $2 \times 2$ :
$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$$
    - Determinante di una matrice  $3 \times 3$ :
$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$
  - Proprietà:  $\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{A}) \det(\mathbf{B})$        $\det(\mathbf{I}) = 1$   
 $\det(\mathbf{A}) = 0$  sse una riga(colonna) è combinazione lineare delle altre

# matrici

- **Matrice invertibile, matrice inversa**
  - DEF: matrice quadrata  $A$  di ordine  $n$  è invertibile se esiste matrice indicata con  $A^{-1}$  di ordine  $n$  tale che  $AA^{-1}=I$
  - $A$  invertibile sse  $\det(A)$  diverso da 0
  - Proprietà:  $\det(A^{-1})=1/\det(A)$

$$(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$$

# matrici

- **Matrice trasposta**

$$[A^T]_{ij} = [A]_{ji}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 3 & 2 & 0 \\ 5 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad A^T = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 0 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \\ 7 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Proprietà

$$(A^T)^T = A$$

$$(A + B)^T = A^T + B^T$$

$$(AB)^T = B^T A^T$$

# Rappresentazioni geometriche

## Sistemi di Coordinazione

- Coordinate cartesiane:

  - nel piano:  $\mathbf{P}_{xy} = (x, y)$

  - nello spazio:  $\mathbf{P} = (x, y, z)$

- Coordinate polari (sferiche):

  - nel piano:  $\mathbf{P}_{xy} = (r, \theta)$

$$x = r \cos \theta$$
$$y = r \sin \theta$$

  - nello spazio:  $\mathbf{P} = (\rho, \theta, \phi)$

$$x = \rho \sin \phi \cos \theta$$
$$y = \rho \sin \phi \sin \theta$$
$$z = \rho \cos \phi$$

- Coordinate cilindriche:

  - nello spazio:  $\mathbf{P} = (r, \theta, z)$

$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta$$

$$z = h.$$

