

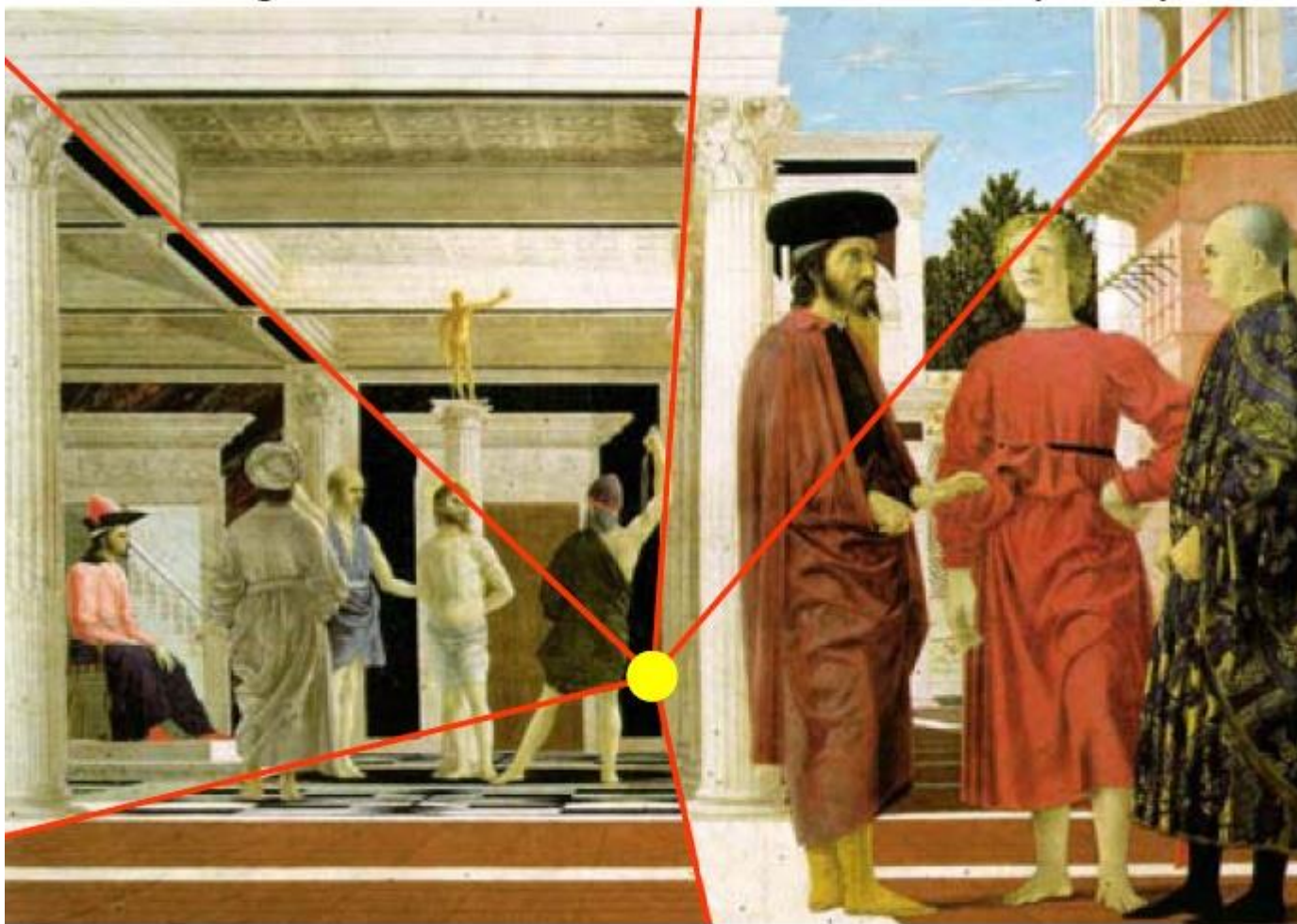
-
- **Introduzione alle proiezioni**
 - **Matematica delle proiezioni**
 - **Schema completo tradizionale della pipeline grafica (fissa)**
 - **Dettagli sulle trasformazioni che avvengono negli stadi della pipeline**
 - **Grafici di scena (scene graph)**



Proiezioni

Prospettiva in Arte...

La flagellazione di Piero della Francesca (1469)



Introduzione alle proiezioni

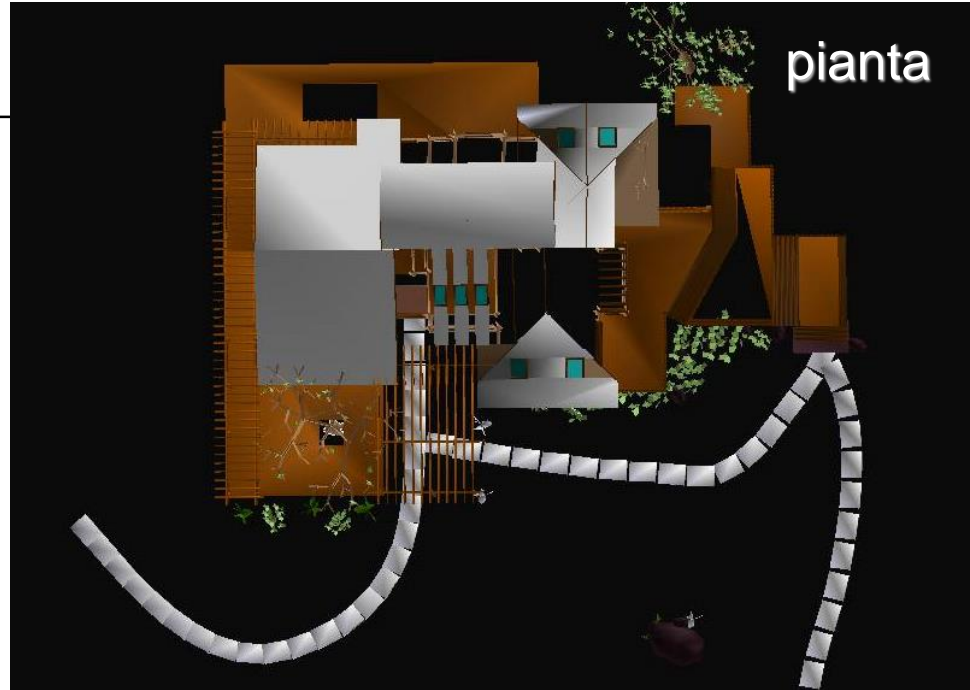
- **Tipi di proiezioni**
- **Proiezioni parallele, tipi**
- **Proiezioni prospettiche, tipi**
- **Termini: View plane, view point, view volume, etc.**
- **Esempi**

Esempi di viste....

frontale



pianta



prospettiva dx



prospettiva sx

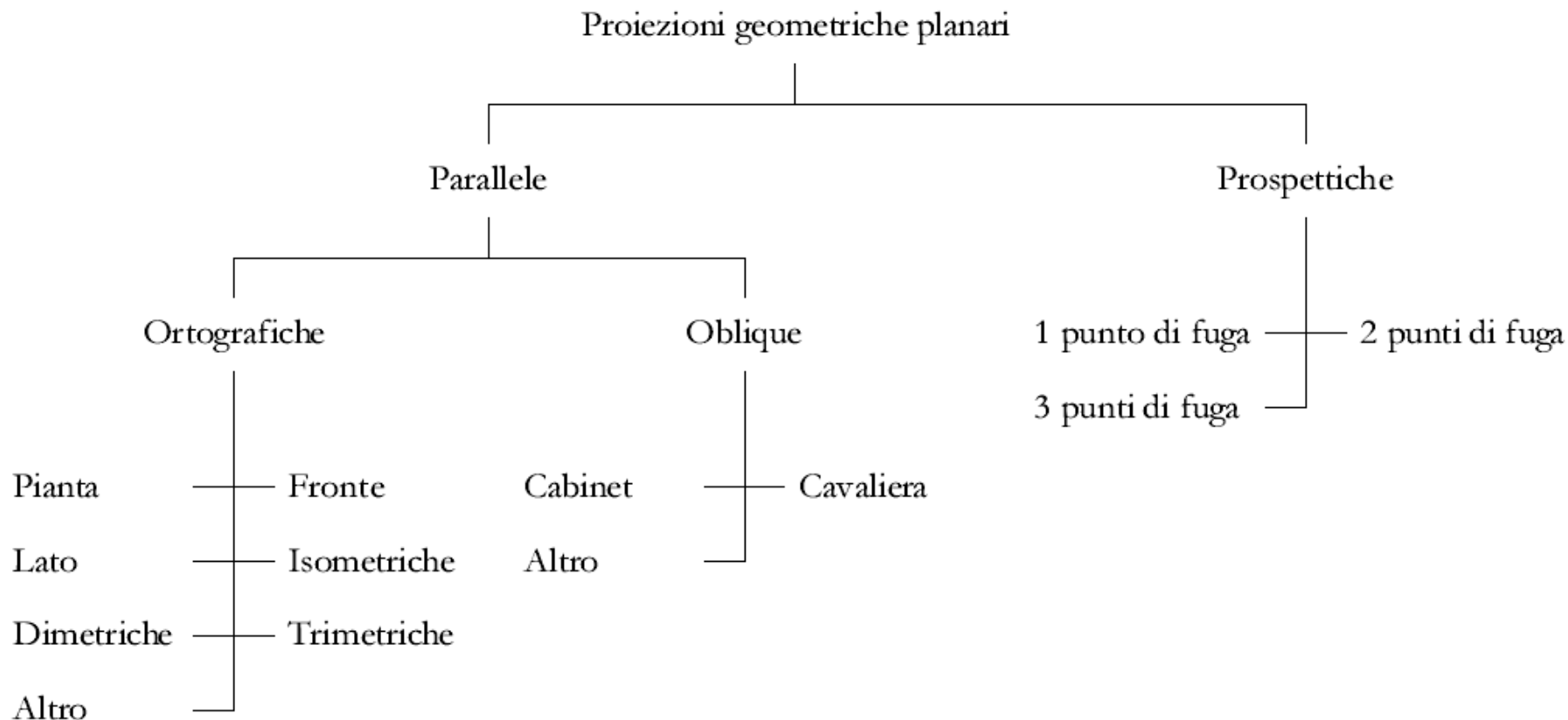


Proiezioni per la visualizzazione

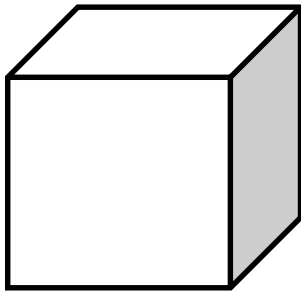
- **TRASFORMAZIONI $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$:** Trasformano punti in un *sistema di coordinate 3D*, in punti in un *sistema di coordinate 2D*
- **PROIEZIONI GEOMETRICHE PIANE:** La proiezione di un oggetto 3D si ottiene tramite delle *rette di proiezione* (proiettori) che partono da un *centro di proiezione* (può essere all'infinito), passano attraverso ciascun punto dell'oggetto, e intersecano un *piano di proiezione* (*view-plane*) generando la proiezione.

in computer grafica si specifica il tipo di proiezione e un volume di vista (*view volume*), cioè la parte di spazio che contiene gli oggetti che si vogliono vedere. La proiezione degli oggetti avviene su una finestra (*window*) sul piano di proiezione. La *window* viene poi mappata su una sul dispositivo di uscita (schermo).

Classificazione di proiezioni planari

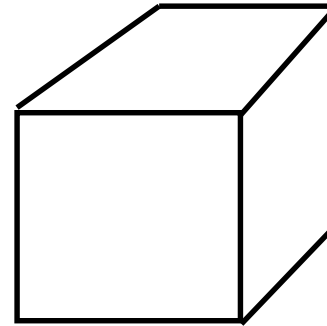


Tipi di proiezione



Parallela

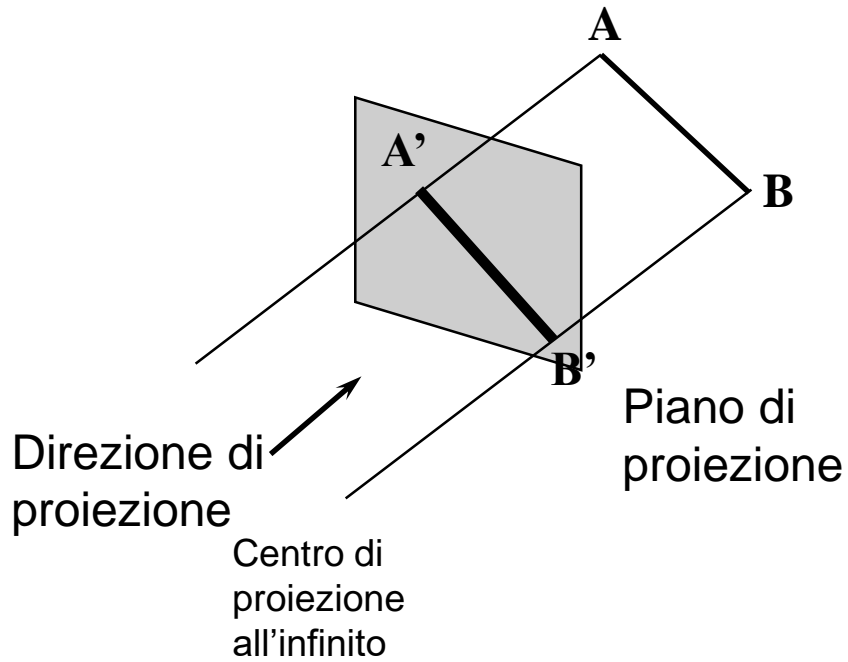
Centro di proiezione all'infinito
rette di proiezione parallele
si parla di “direzione di proiezione”



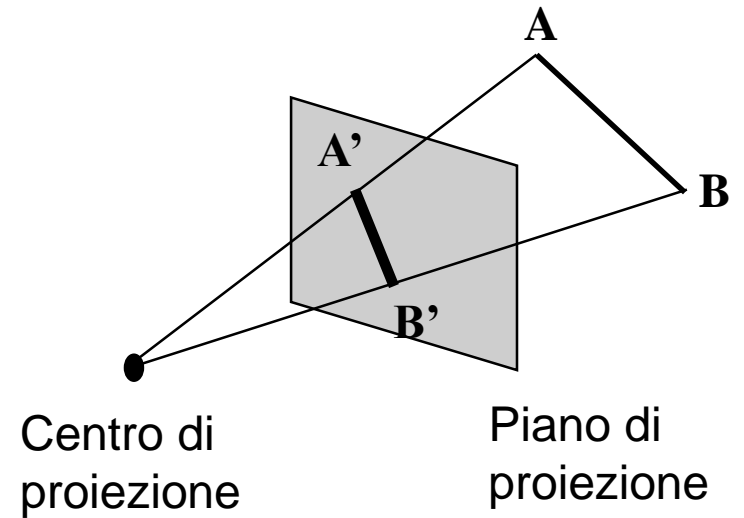
Prospettica

Distanza tra centro di proiezione e
piano di proiezione **finita**

Tipi di proiezione

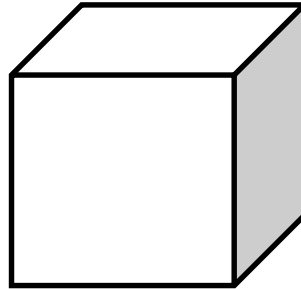


Parallela



Prospettica

Proiezioni parallele



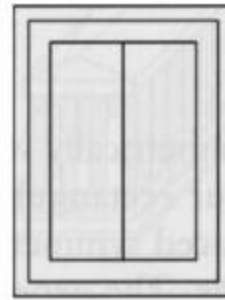
- **Le linee parallele rimangono parallele**
- **Gli oggetti non cambiano dimensione quando si avvicinano**
- **Utile per verificare gli allineamenti e le dimensioni (e.g., disegno meccanico)**
- **Si specifica un viewing volume a forma di parallelepipedo**

Proiezioni parallele

(1) Proiezioni ortografiche

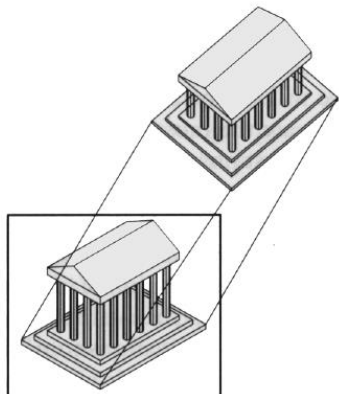
Si classificano sulla base della relazione tra direzione proiezione e normale al piano di proiezione

- direzione delle rette di proiezione è **ortogonale** al piano di proiezione

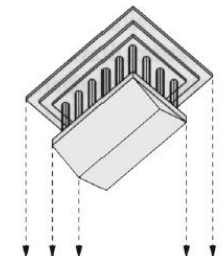


Particolari viste ortografiche: **proiezioni assonometriche ortografiche** usano un piano di proiezione che non è normale ad alcuno degli assi principali, e quindi visualizzano più lati di un oggetto insieme.

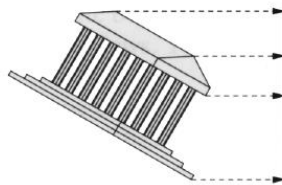
Costruzione di viste assonometriche



Piano di proiezione



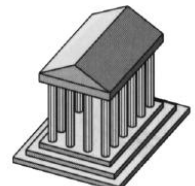
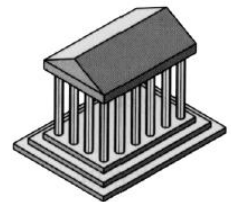
Piano di proiezione



Piano di proiezione

Tipi di viste assonometriche:

- (1) isometriche
- (2) dimetriche
- (3) trimetriche

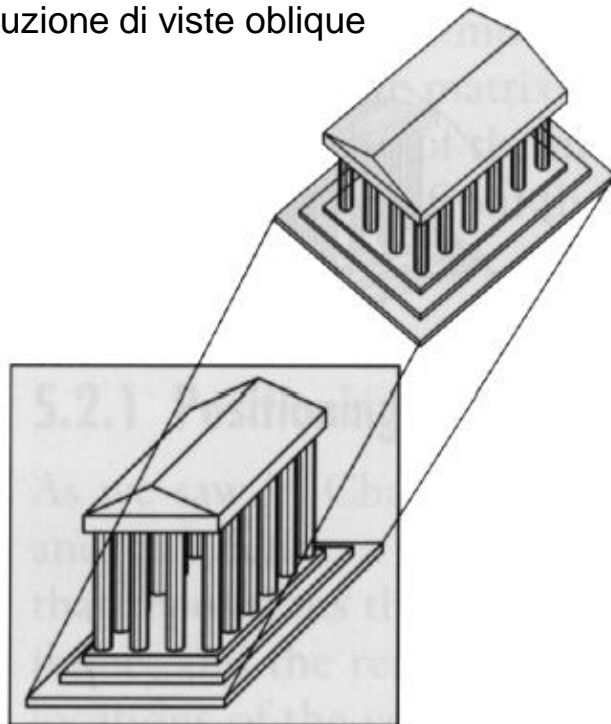


Proiezioni parallele

(2) Proiezioni oblique

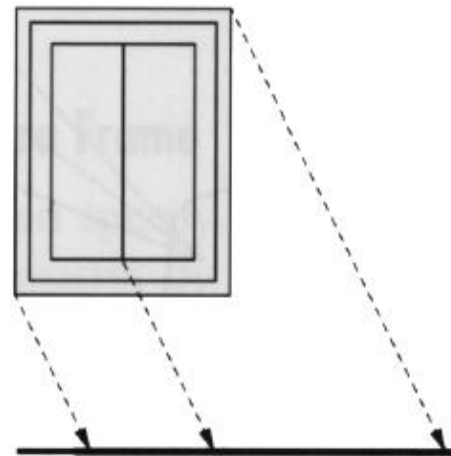
- direzione delle rette di proiezione è **obliqua** rispetto al piano di proiezione

Costruzione di viste oblique

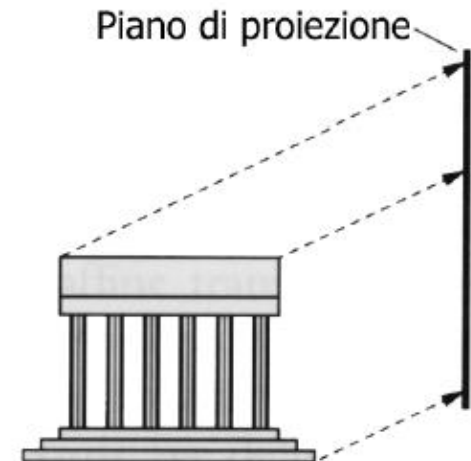


Piano di proiezione

Particolari viste oblique: **proiezione cavaliere**
proiezione cabinet

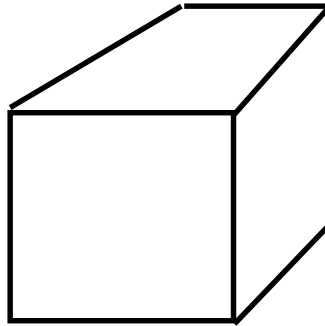


Piano di proiezione



Piano di proiezione

Proiezioni prospettiche

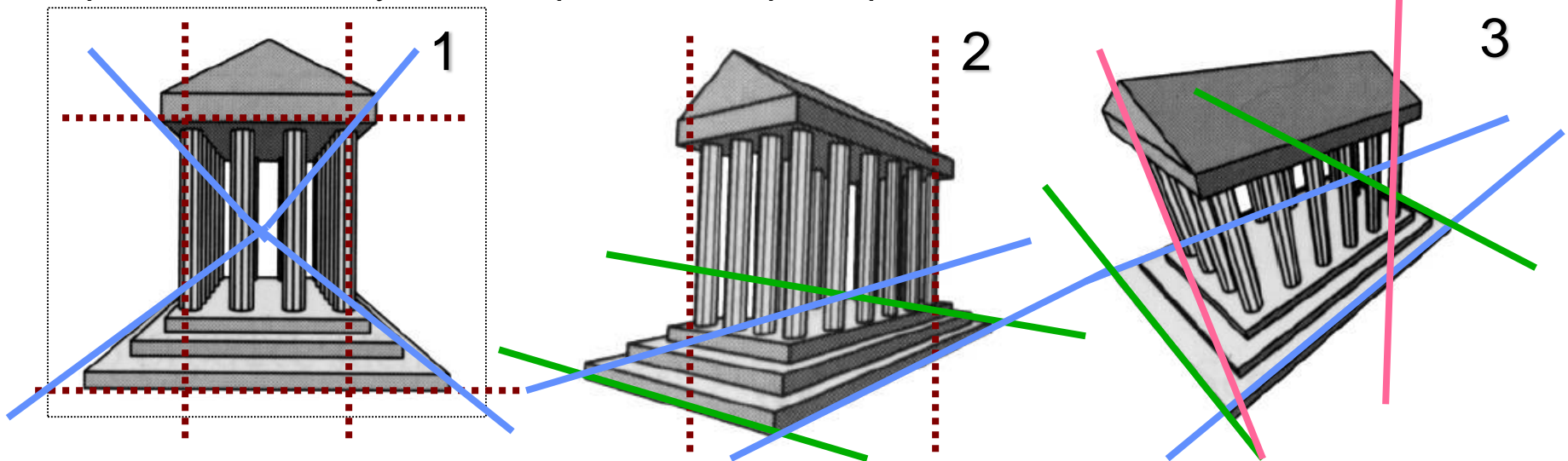


- **Le linee parallele non rimangono necessariamente parallele**
- **Gli oggetti più vicini sono più grandi, gli oggetti più lontani sono più piccoli (maggiore realismo)**
- **Si specifica un viewing volume 3D a forma di tronco di piramide**
- **In disegno tecnico si usa catalogare le proiezioni prospettiche a seconda del numero di punti di fuga principali, da uno a tre, ovvero, in modo equivalente, a seconda del numero di assi principali intersecati dal piano di proiezione.**

Proiezioni prospettiche

Si classificano sulla base del numero di punti di fuga

- Ogni insieme di linee parallele della scena 3D (non parallele al piano di proiezione) converge verso un punto (punto di fuga o **vanishing point**)
- Infiniti punti di fuga
- **Punti di fuga principali:** quelli di fasci di rette parallele agli assi X, Y, Z del sistema di riferimento XYZ della scena
- N. punti di fuga principali = N. assi coordinati che intersecano piano di proiezione
- Ad esempio se il piano di proiezione interseca solo l'asse z, ed è quindi perpendicolare ad esso, solo l'asse z ha punto di fuga principale, mentre le linee parallele ad x o y restano parallele dopo la proiezione.



Prospettive con 1, 2 o 3 punti di fuga (poco usata)

matematica delle proiezioni

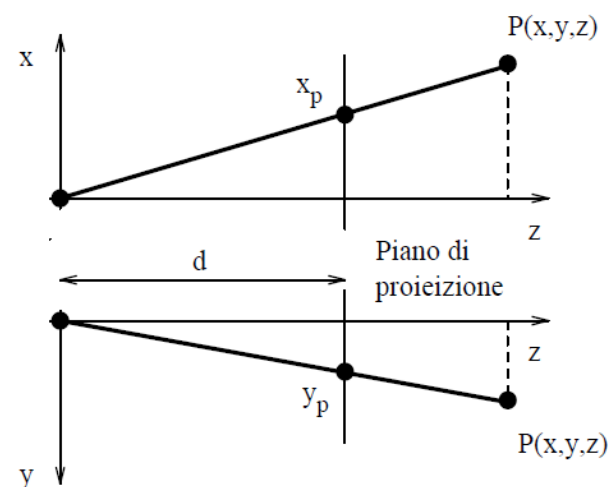
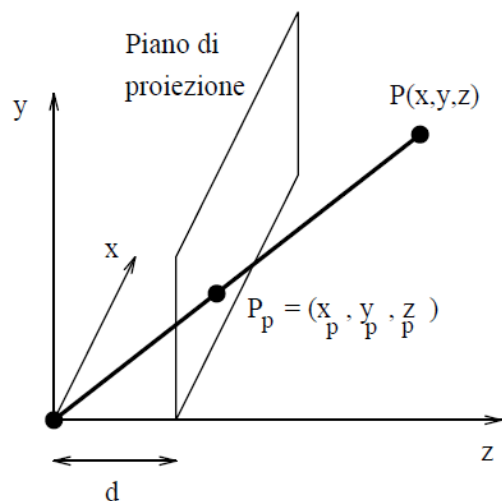
Proiezioni prospettiche

proiezioni prospettiche aventi il piano di proiezione normale all'asse z a distanza d dall'origine con centro di proiezione coincidente con l'origine

Sia $P(x, y, z)$ il generico punto da proiettare. Per calcolare $P_p = (x_p, y_p, z_p)$, cioè la proiezione di P sul piano di proiezione, si possono usare le relazioni di similarità fra i triangoli

$$\frac{x_p}{d} = \frac{x}{z}, \quad \frac{y_p}{d} = \frac{y}{z}$$

$$x_p = \frac{d \cdot x}{z} = \frac{x}{z/d}, \quad y_p = \frac{d \cdot y}{z} = \frac{y}{z/d}$$



Proiezioni prospettiche

proiezioni prospettiche aventi il piano di proiezione normale all'asse z a distanza d dall'origine con centro di proiezione coincidente con l'origine

La distanza d corrisponde quindi ad un semplice fattore di scala per x_p e y_p . La divisione per z rende la proiezione degli oggetti lontani più piccola di quella degli oggetti vicini. Tutti i valori di z sono accettabili, a parte lo zero.

La trasformazione prospettica può essere espressa in coordinate omogenee mediante una matrice 4x4

$$M_{per} \cdot P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/d & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & z & z/d \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} x/z & y/z & d & 1 \end{bmatrix}^T$$

Proiezioni parallele

proiezione ortografica sul piano $z = 0$

la direzione di proiezione è la perpendicolare al piano di proiezione, cioè l'asse z in questo caso.

$$x_p = x, \quad y_p = y$$

$$M_{ort} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Proiezioni prospettiche

Proiezione prospettica sul piano xy con centro di proiezione (x_c, y_c, z_c)

Dato un punto $P(x, y, z)$, determinare la sua proiezione (x_p, y_p, z_p)

Equazione della retta passante per il centro di proiezione e per il punto P:

$$x_p = x_c + (x - x_c) t$$

$$y_p = y_c + (y - y_c) t$$

$$z_p = z_c + (z - z_c) t$$

Si pone $z_p = 0$, si ottiene $t = -\frac{z_c}{z - z_c}$

Poi si sostituisce t nelle espressioni di x_p e y_p

$$x_p = x_c - z_c \left(\frac{x - x_c}{z - z_c} \right) \quad y_p = y_c - z_c \left(\frac{y - y_c}{z - z_c} \right)$$

In forma matriciale, in coordinate omogenee:

$$\begin{bmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -z_c & 0 & x_c & 0 \\ 0 & -z_c & y_c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -z_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -z_c x + x_c z \\ -z_c y + y_c z \\ 0 \\ z - z_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-z_c x + x_c z}{z - z_c} \\ \frac{-z_c y + y_c z}{z - z_c} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Proiezioni parallele

Proiezione parallela sul piano xy lungo un vettore direzione $[x_D, y_D, z_D]$

Dato un punto $P(x, y, z)$, determinare la sua proiezione (x_p, y_p, z_p)

Equazione della retta passante per un punto (x, y, z) , con direzione parallela a quella di proiezione:

$$x_p = x + x_D t$$

$$y_p = y + y_D t$$

$$z_p = z + z_D t$$

Ponendo $z_p = 0$, si ottiene $t = -\frac{z}{z_D}$

Sostituendo nelle prime due equazioni risulta:

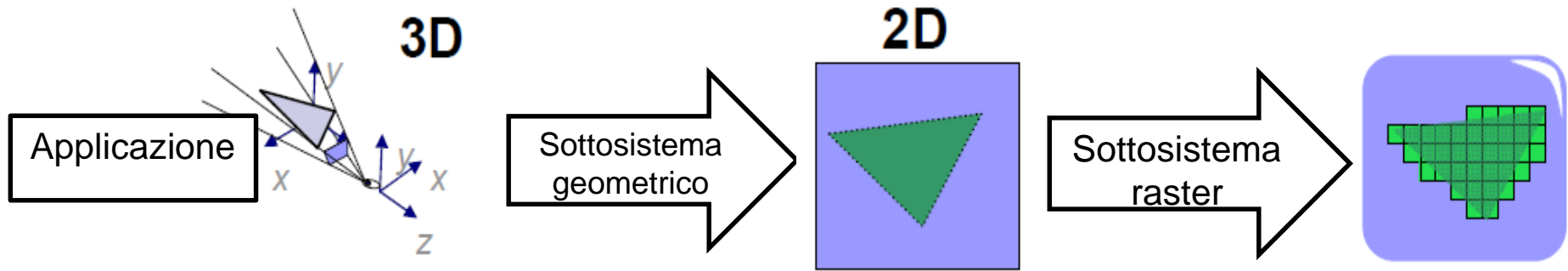
$$x_p = x - z \left(\frac{x_D}{z_D} \right) \quad y_p = y - z \left(\frac{y_D}{z_D} \right)$$

In forma matriciale in coordinate omogenee:

$$\begin{bmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{x_D}{z_D} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{y_D}{z_D} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x - \frac{x_D}{z_D} z \\ y - \frac{y_D}{z_D} z \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Schema completo della pipeline grafica

Abbiamo visto uno schema semplificato della pipeline grafica.

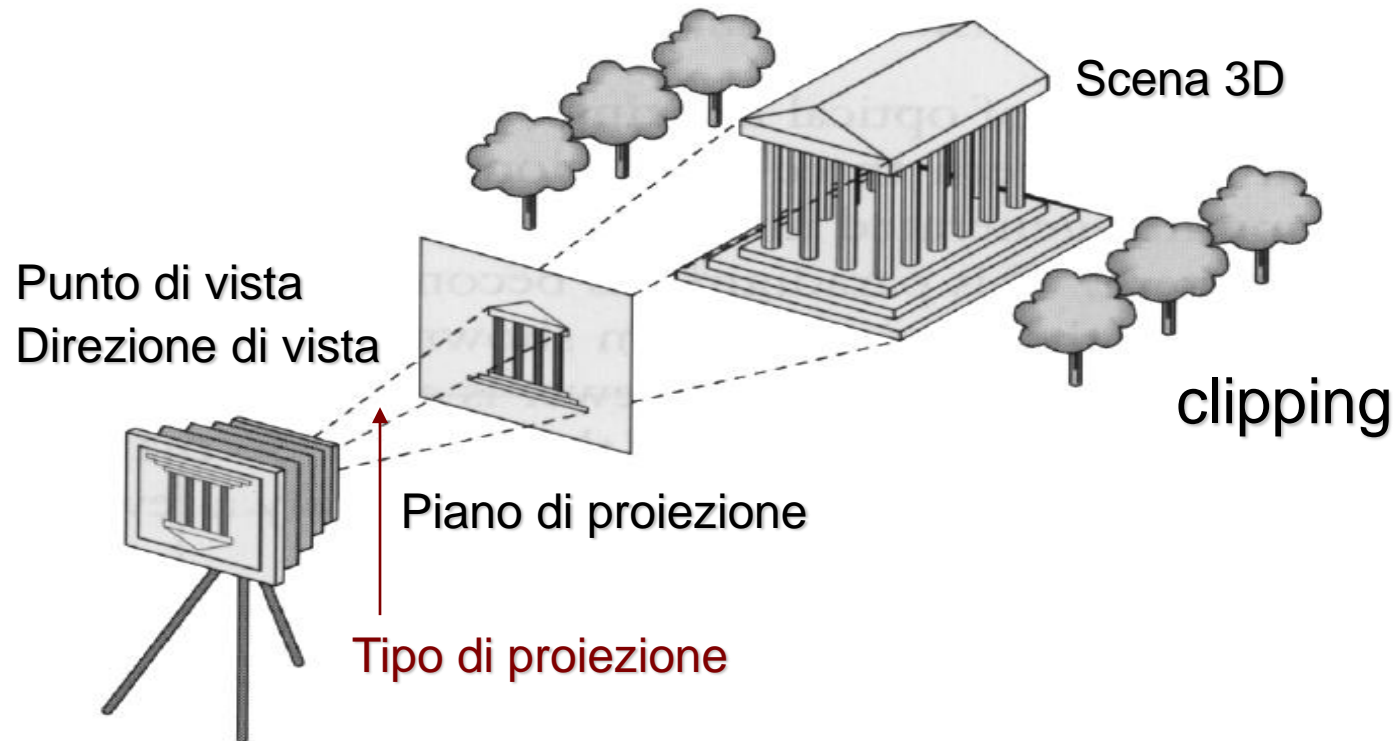


La pipeline grafica nella realtà è molto più complessa.

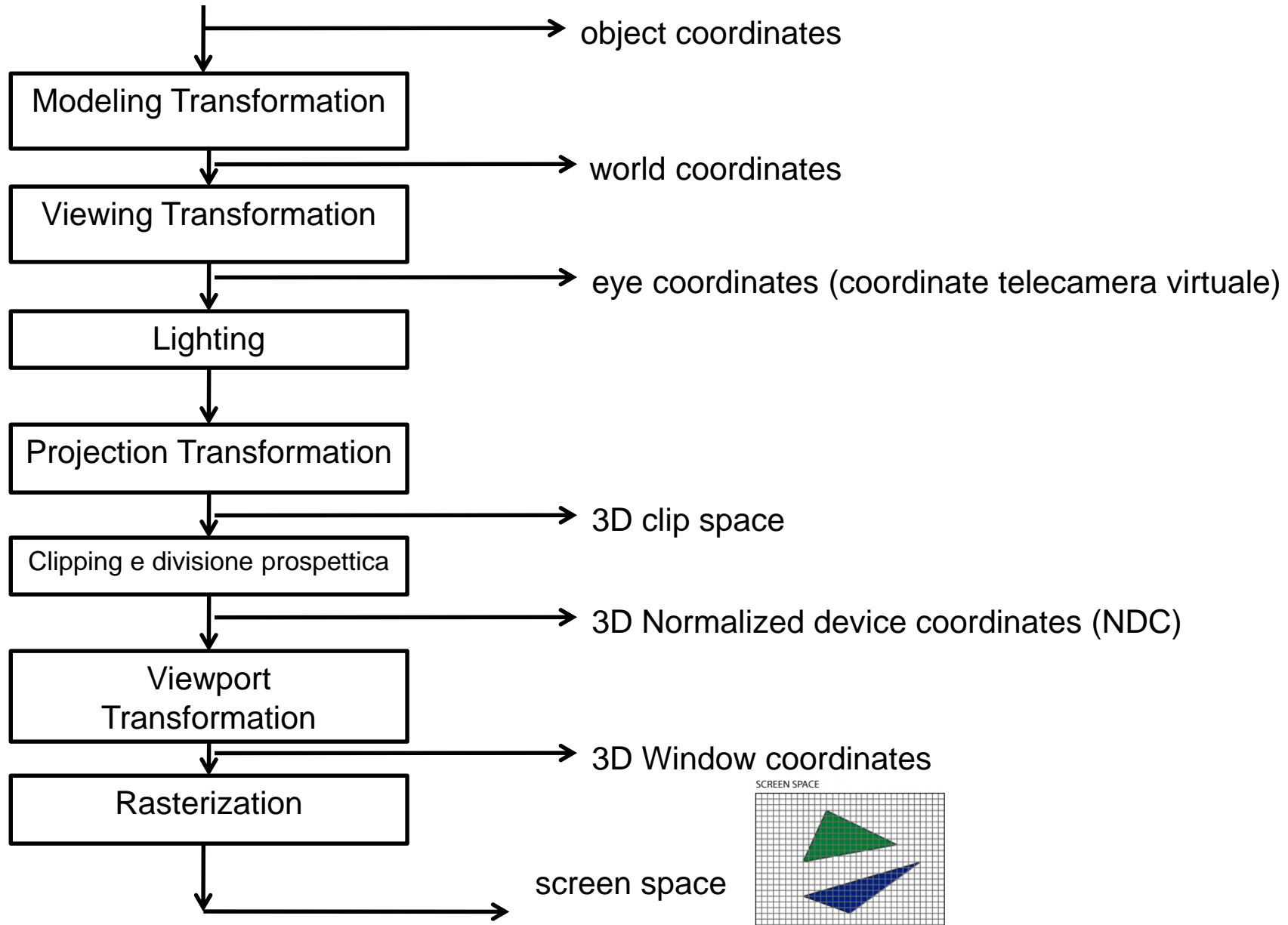
Vediamo ora uno schema più approfondito

Schema completo della pipeline grafica

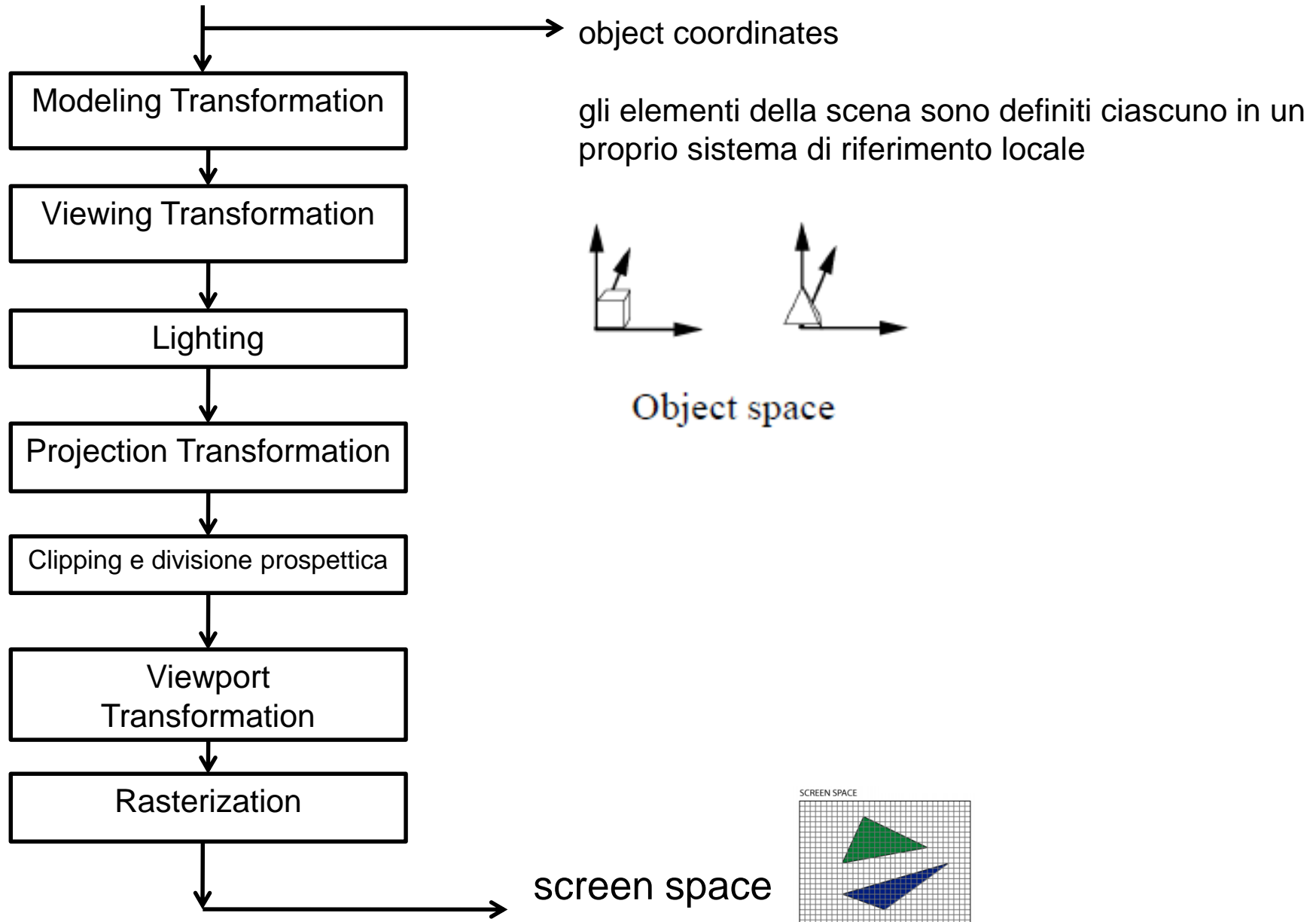
Analogia tra un sistema grafico e la fotografia



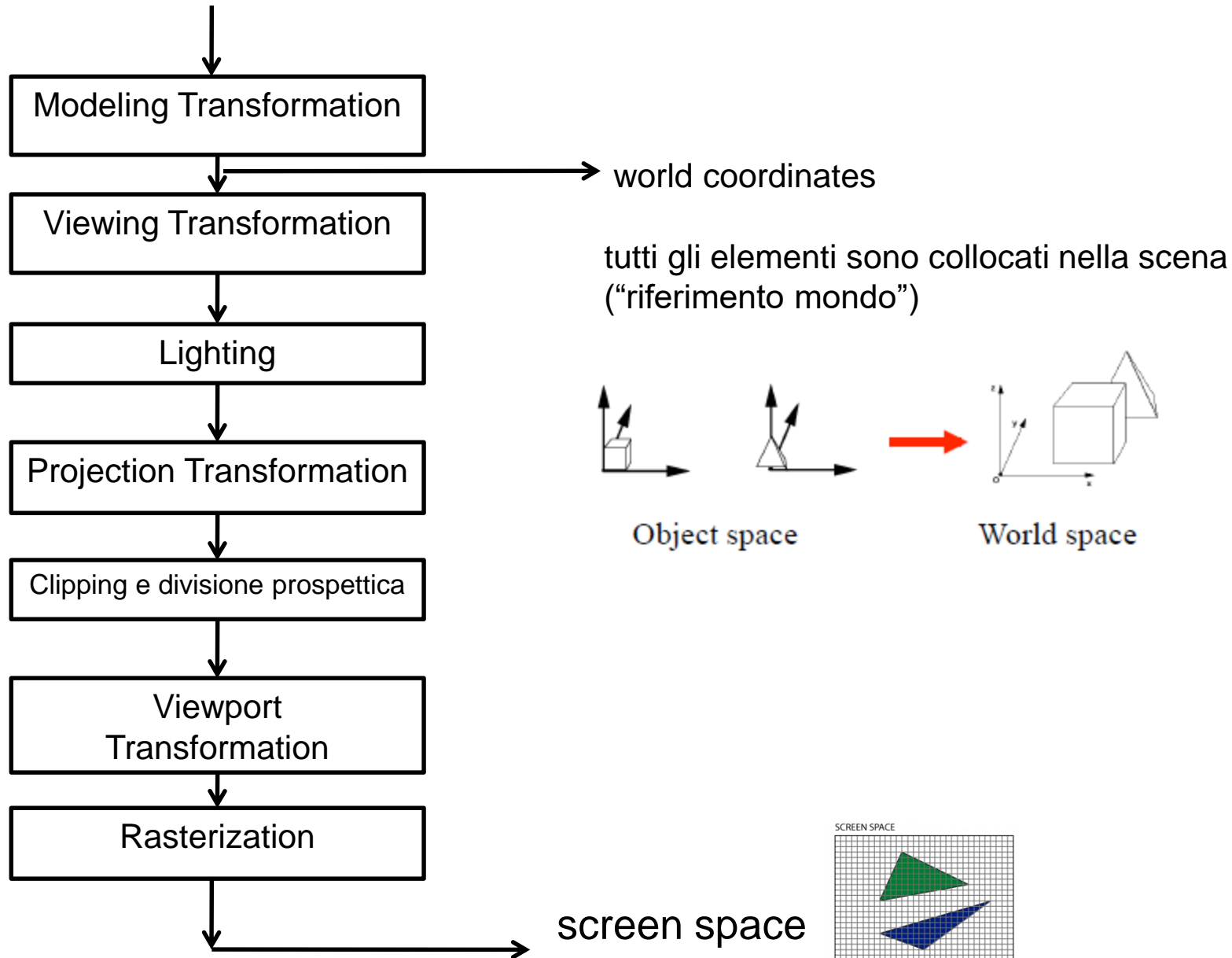
Schema completo della pipeline grafica



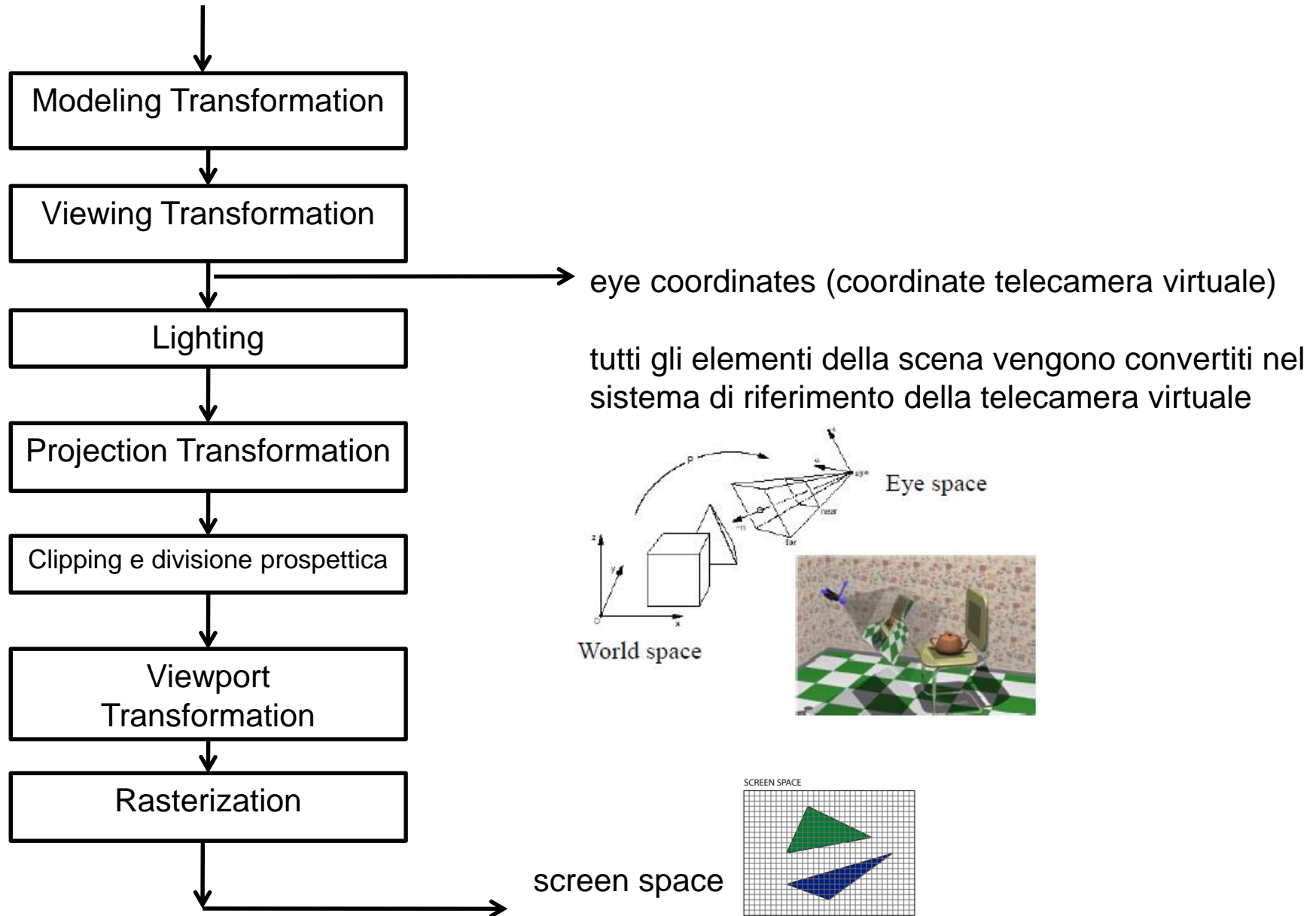
Schema completo della pipeline grafica



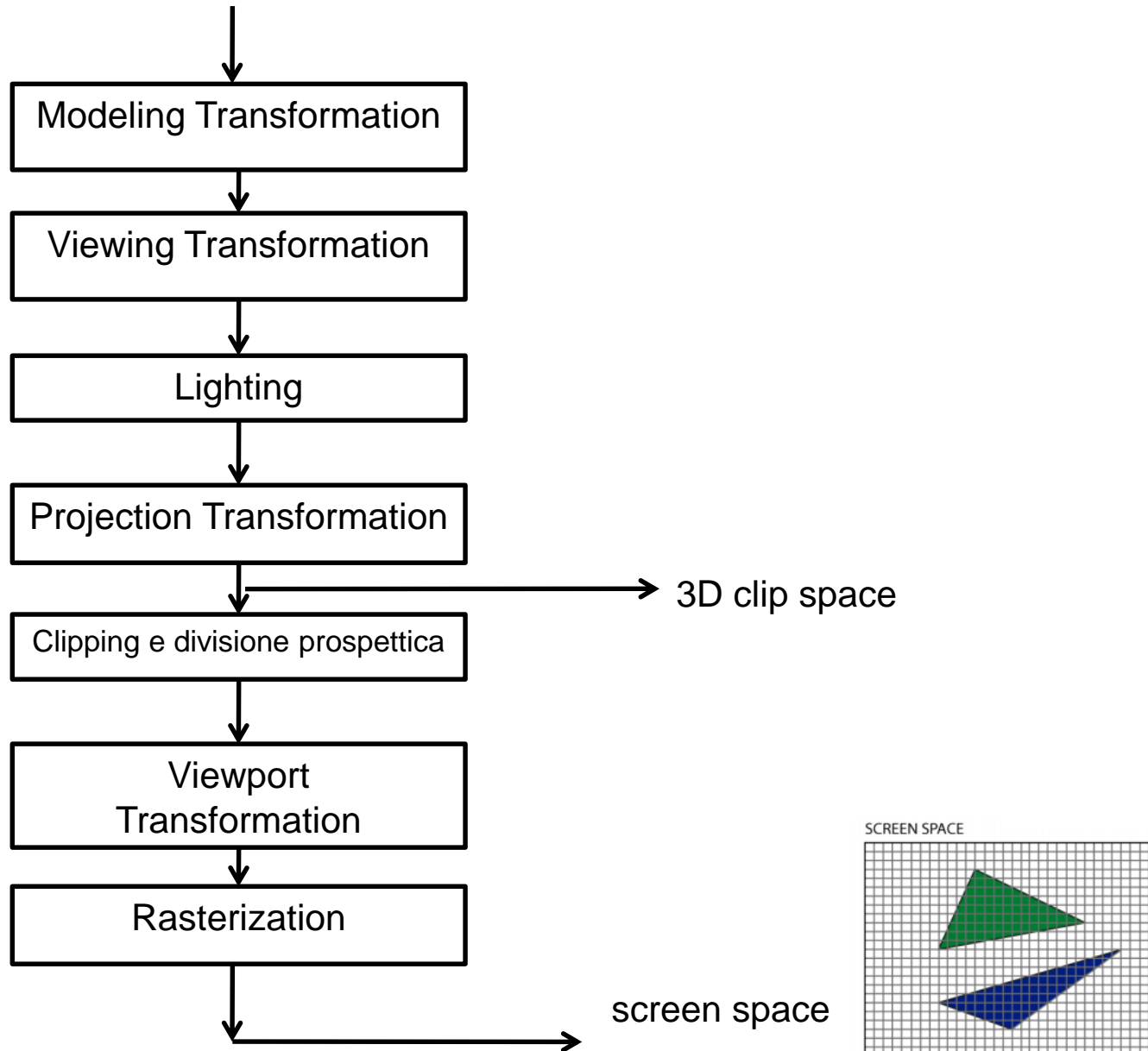
Schema completo della pipeline grafica



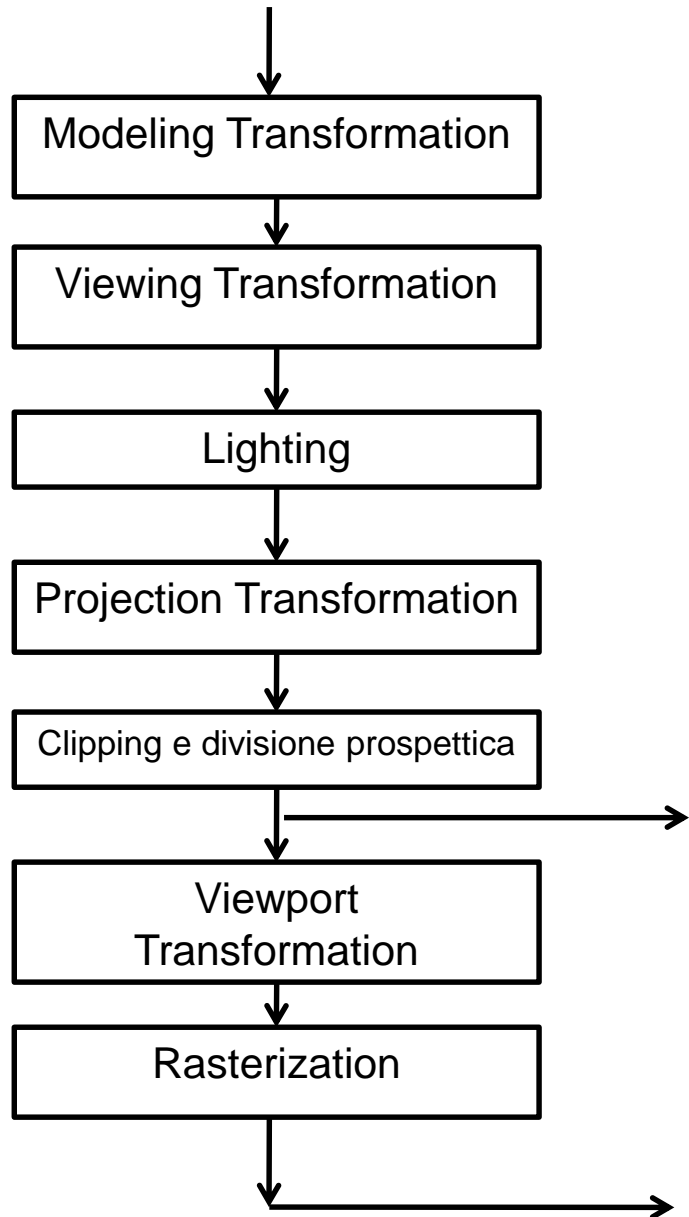
Schema completo della pipeline grafica



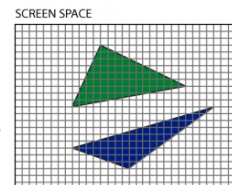
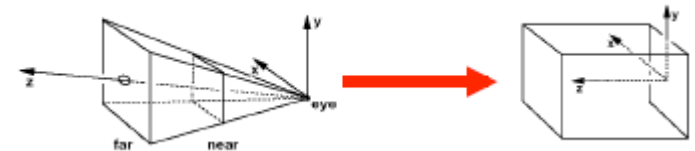
Schema completo della pipeline grafica



Schema completo della pipeline grafica

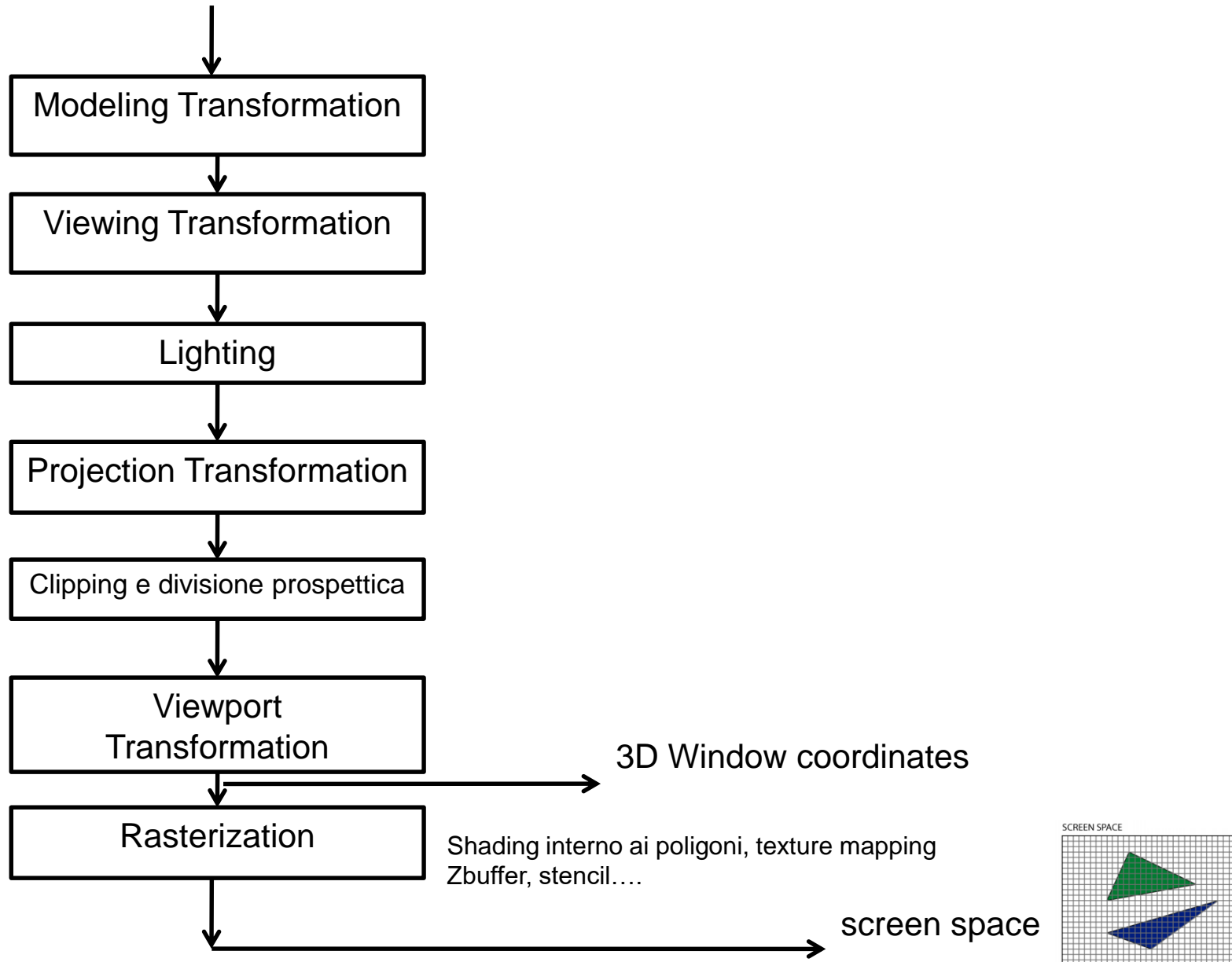


il clipping avviene nel 3D clip space in coordinate omogenee. Successivamente avviene la divisione prospettica e si ottengono le 3D Normalized device coordinates (NDC) in un volume di vista canonico (cubo con x,y,z comprese tra -1 e +1)



screen space

Schema completo della pipeline grafica



Una differenza importante.....

- **Trasformazioni di modellazione (modeling)**
 - Trasformazione della scena:
oggetti della scena cambiano posizione/orientazione/forma rispetto al sistema di riferimento del “mondo”
- **Trasformazioni di vista
(viewing transformation chiamato anche ‘camera transformation’)**
 - Cambiamento del “punto di osservazione” della scena:
ma gli oggetti della scena restano immutati, è un cambiamento di sistema di riferimento

View volume

- Il view volume rappresenta la porzione di spazio visibile in computer grafica
- E' delimitato da 6 piani:

left plane

right plane

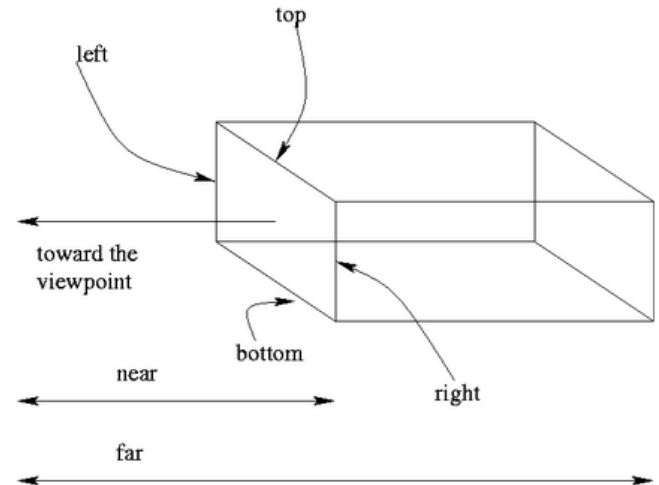
top plane

bottom plane

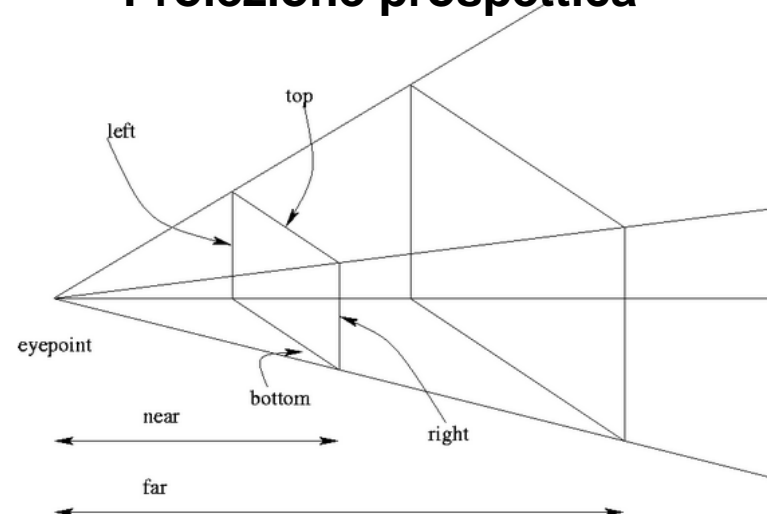
near plane

far plane

Proiezione parallela

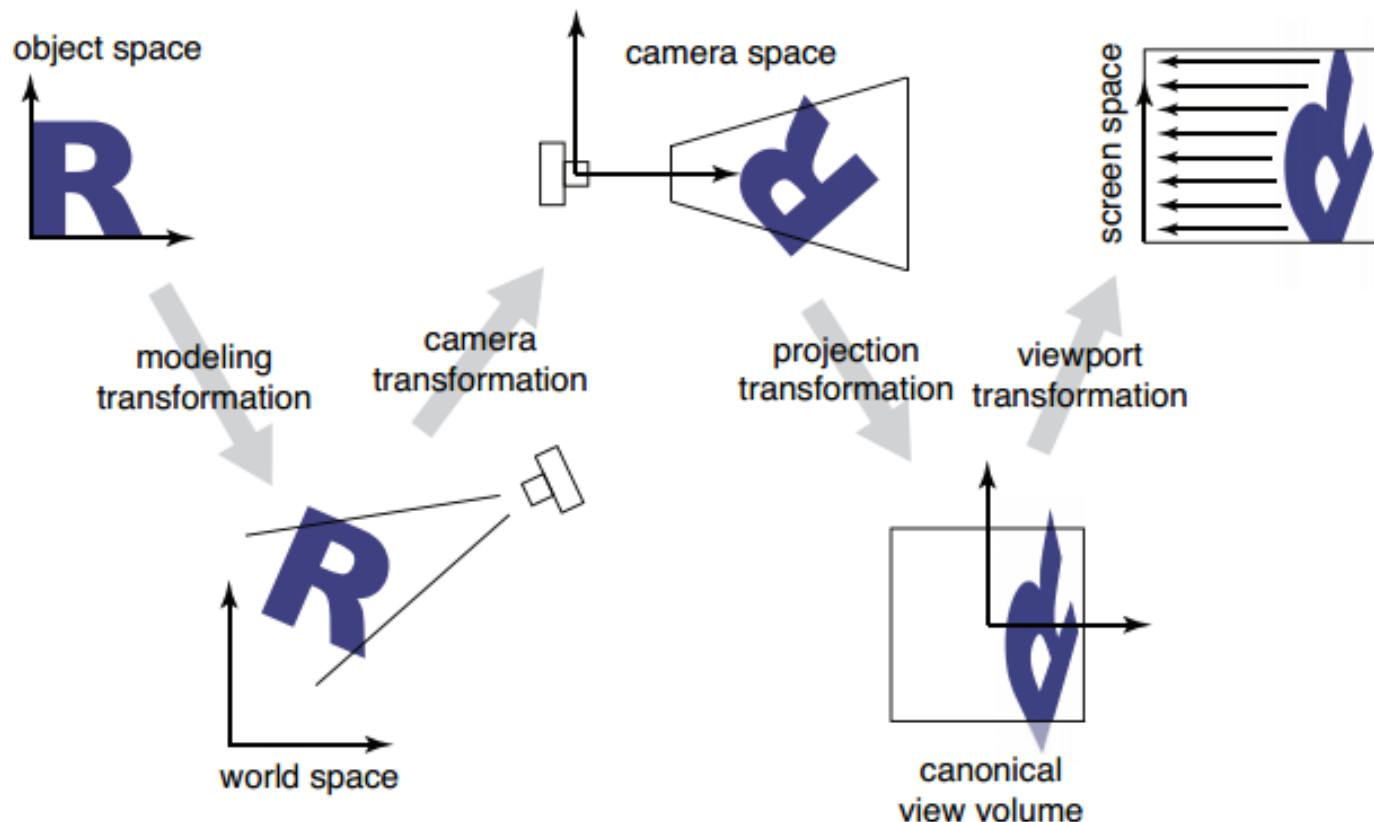


Proiezione prospettica



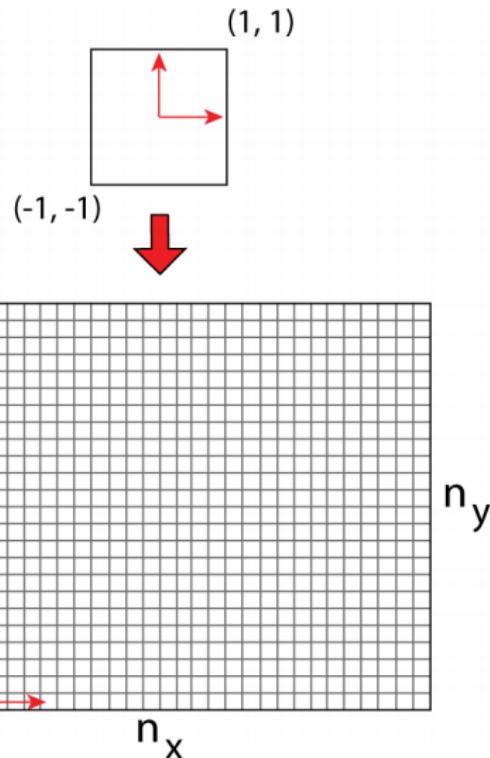
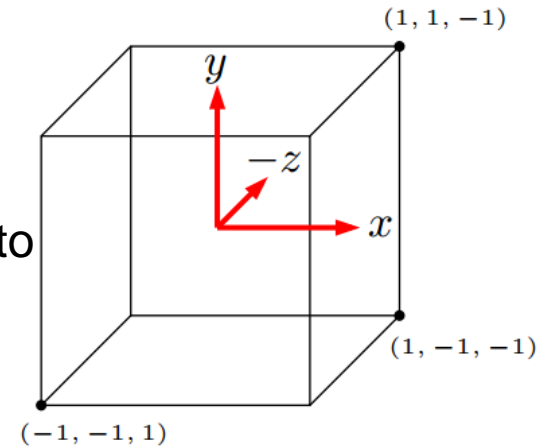
trasformazioni negli stadi della pipeline

Lo schema seguente riassume le trasformazioni che avvengono negli stadi della pipeline. Nelle prossime slides vedremo i dettagli di ciascuna trasformazione partendo dalla fine e risalendo nella pipeline.

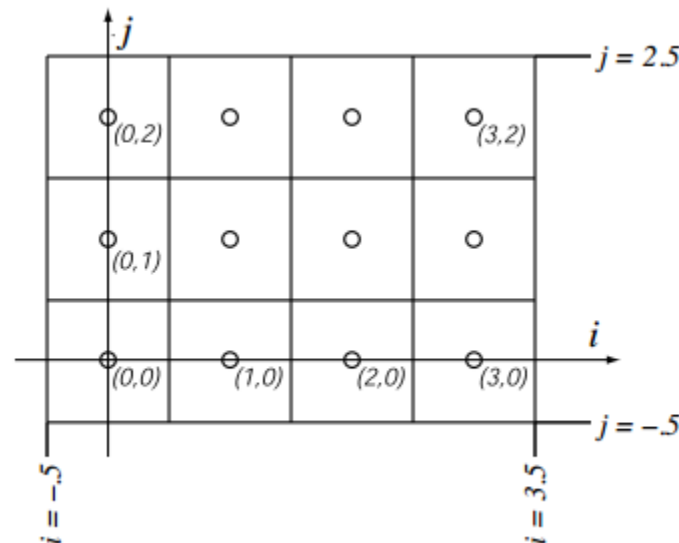


Viewport transformation

- il volume di vista canonico è un cubo $[-1,+1] \times [-1,+1] \times [-1,+1]$
- la viewport transformation trasforma le 3D Normalized device coordinates (NDC) nelle 3D Window coordinates
- in pratica la viewport transformation lascia il valore di z inalterato e mappa la faccia del cubo sul near plane $[-1,+1] \times [-1,+1]$ su una immagine di dimensione $n_x \times n_y$ pixel



Ma per definizione i pixel di una immagine sono quadrati di lato 1 centrati in coordinate intere



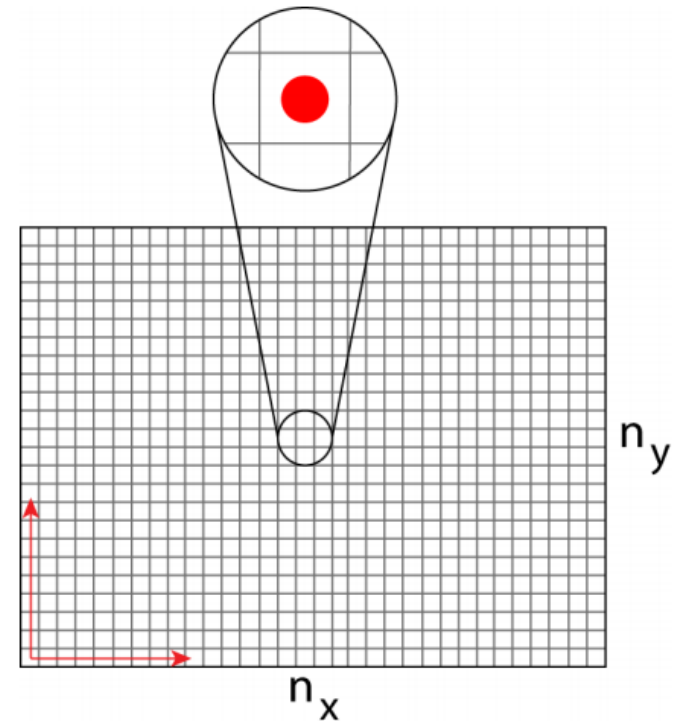
quindi....

Viewport transformation

... quindi la matrice che svolge questa trasformazione è la seguente (si tratta di una operazione di scala seguita da una traslazione):

$$M_{vp} = \begin{pmatrix} \frac{n_x}{2} & 0 & 0 & \frac{n_x}{2} - \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{n_y}{2} & 0 & \frac{n_y}{2} - \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

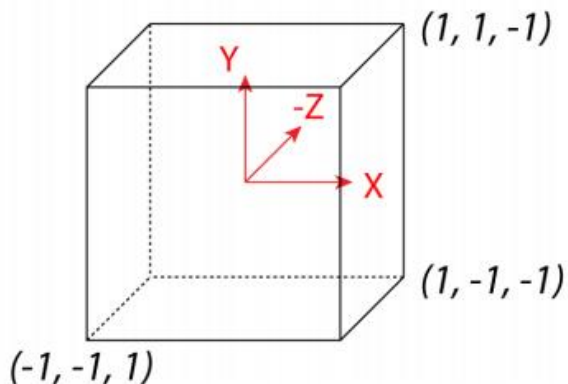
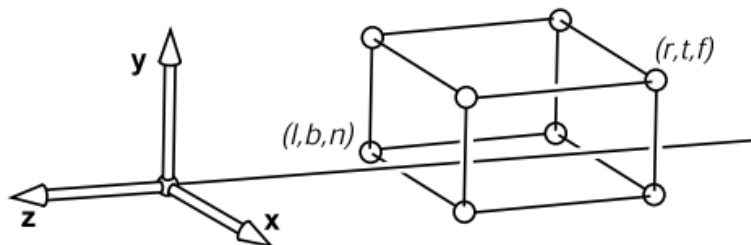
osservazione: l'immagine così ottenuta dovrà essere ulteriormente traslata nella sua posizione finale sullo schermo del computer



projection transformation

PROIEZIONI PARALLELE (orthographic projection)

- si tratta di una trasformazione che mappa il viewing volume di una generica proiezione parallela $[l, r] \times [b, t] \times [n, f]$ nel volume di vista canonico $[-1, +1] \times [-1, +1] \times [-1, +1]$
- si ottiene come composizione di una traslazione, per portare il centro del parallelepipedo nell'origine, seguita da una operazione di scala:



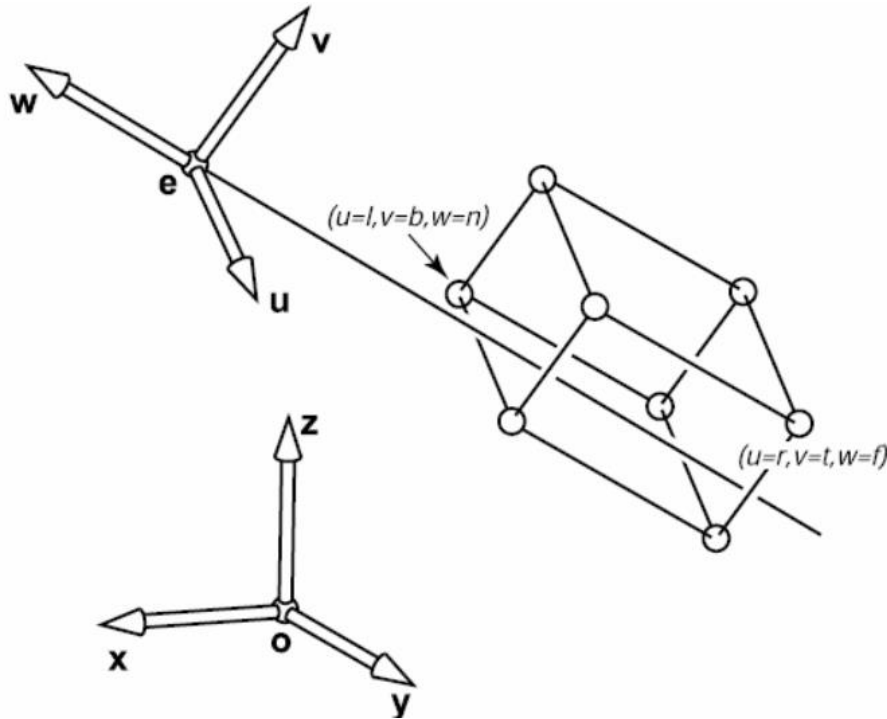
$$M_{orth} = \begin{pmatrix} \frac{2}{r-l} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{t-b} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{n-f} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{l+r}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{b+t}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{n+f}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{2}{r-l} & 0 & 0 & -\frac{r+l}{r-l} \\ 0 & \frac{2}{t-b} & 0 & -\frac{t+b}{t-b} \\ 0 & 0 & \frac{2}{n-f} & -\frac{n+f}{n-f} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

camera transformation (o viewing transformation)

si tratta di una trasformazione che esegue un cambiamento di coordinate:
da **world coordinates** ad **eye coordinates**

Come si esprime questa trasformazione?



$$M_{cam} = \begin{bmatrix} \mathbf{u} & \mathbf{v} & \mathbf{w} & \mathbf{e} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

Composizione complessiva di trasformazioni nella pipeline grafica

PROIEZIONI PARALLELE (orthographic projection)

$$\begin{pmatrix} x_{pixel} \\ y_{pixel} \\ z_{canonical} \\ 1 \end{pmatrix} = M_{vp} M_{orth} M_{cam} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

se inseriamo anche la modeling trasformation M_m che mappa le **object coordinates** in **world coordinates** si ottiene:

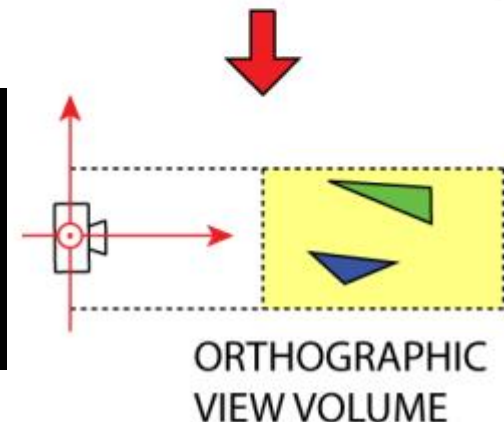
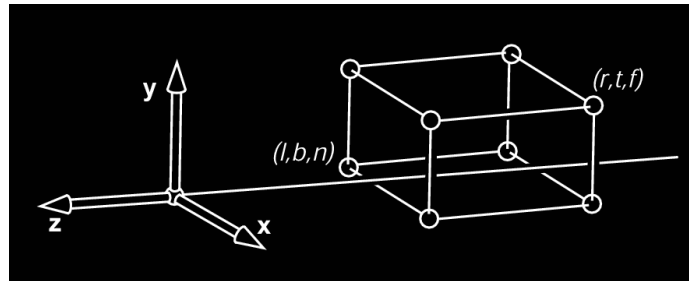
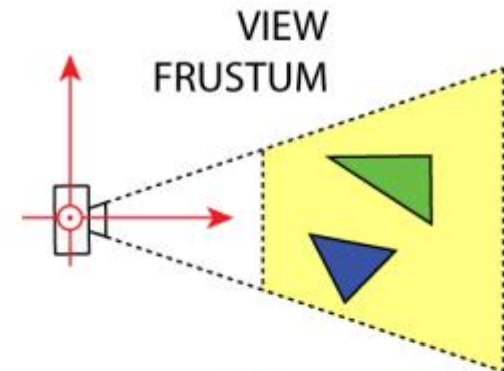
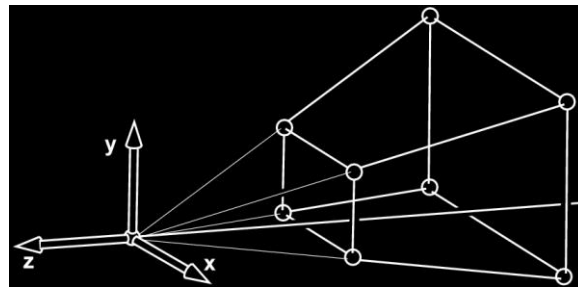
$$\mathbf{p}_s = \mathbf{M}_{vp} \mathbf{M}_{orth} \mathbf{M}_{cam} \mathbf{M}_m \mathbf{p}_o$$

$$\begin{bmatrix} x_s \\ y_s \\ z_s \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{n_x}{2} & 0 & 0 & \frac{n_x-1}{2} \\ 0 & \frac{n_y}{2} & 0 & \frac{n_y-1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{r-l} & 0 & 0 & -\frac{r+l}{r-l} \\ 0 & \frac{2}{t-b} & 0 & -\frac{t+b}{t-b} \\ 0 & 0 & \frac{2}{n-f} & -\frac{n+f}{n-f} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} & \mathbf{v} & \mathbf{w} & \mathbf{e} \end{bmatrix}^{-1} \mathbf{M}_m \begin{bmatrix} x_o \\ y_o \\ z_o \\ 1 \end{bmatrix}$$

projection transformation

PROIEZIONI PROSPETTICHE

Occorre una trasformazione aggiuntiva che mappa (distorce) il view volume in un volume di vista ortografico in modo tale che il risultato della successiva proiezione ortografica sia identico a quello che si avrebbe applicando la sola proiezione prospettica. il vantaggio di questa operazione è che la successiva fase di clipping è più semplice perché avviene rispetto al volume di vista canonico.



projection transformation

PROIEZIONI PROSPETTICHE

La trasformazione che svolge questo compito è la seguente:

$$\begin{pmatrix} n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n+f & -fn \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n+f & -fn \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \frac{n+f}{n} - f \\ \frac{z}{n} \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{homogenize}} \begin{pmatrix} \frac{nx}{z} \\ \frac{ny}{z} \\ n + f - \frac{fn}{z} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Osservazioni:

- è necessaria una operazione di divisione prospettica
- il clipping viene eseguito dopo la projection transformation perché si hanno equazioni più semplici
- la divisione prospettica viene eseguita dopo il clipping, ciò consente di evitare alcuni casi particolari di clipping scorretto
- il modello non gestisce proiezioni oblique

Composizione complessiva di trasformazioni nella pipeline grafica

PROIEZIONI PROSPETTICHE

$$M_{\text{per}} = M_{\text{orth}} P$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{2}{r-l} & 0 & 0 & -\frac{r+l}{r-l} \\ 0 & \frac{2}{t-b} & 0 & -\frac{t+b}{t-b} \\ 0 & 0 & \frac{2}{n-f} & -\frac{n+f}{n-f} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n+f & -fn \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

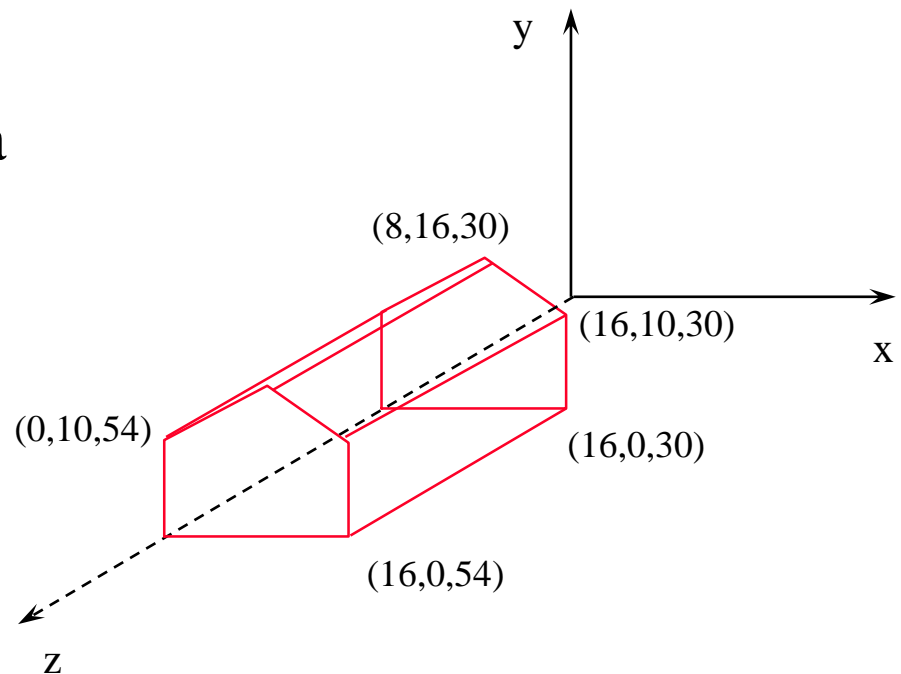
$$= \begin{bmatrix} \frac{2n}{r-l} & 0 & \frac{l+r}{l-r} & 0 \\ 0 & \frac{2n}{t-b} & \frac{b+t}{b-t} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{f+n}{n-f} & \frac{2fn}{f-n} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

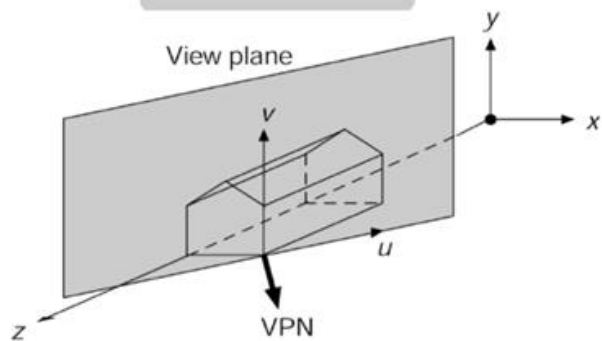
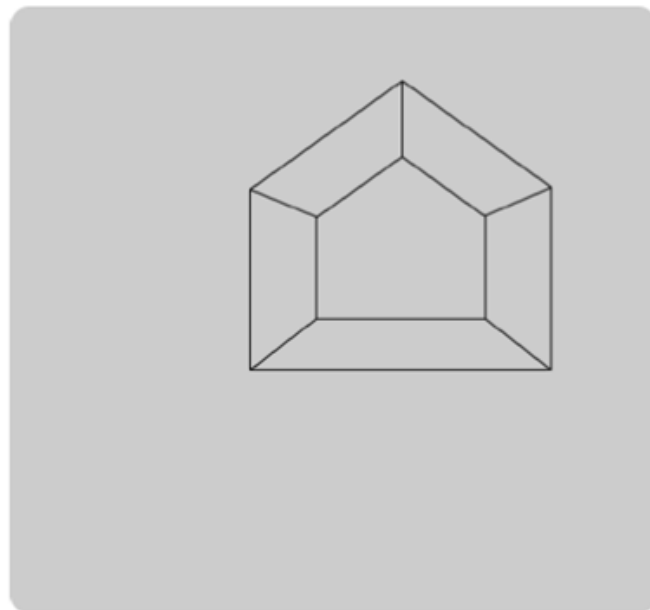
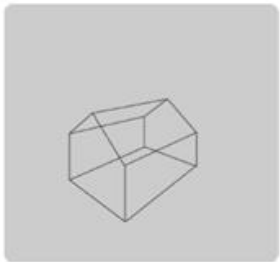
$$\begin{pmatrix} x_{\text{pixel}} \\ y_{\text{pixel}} \\ z_{\text{canonical}} \\ 1 \end{pmatrix} = M_{vp} M_{per} M_{cam} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

L'espressione ottenuta si può completare inserendo la modeling trasformazione M_m che mappa le **object coordinates** in **world coordinates**

3D viewing: esempi

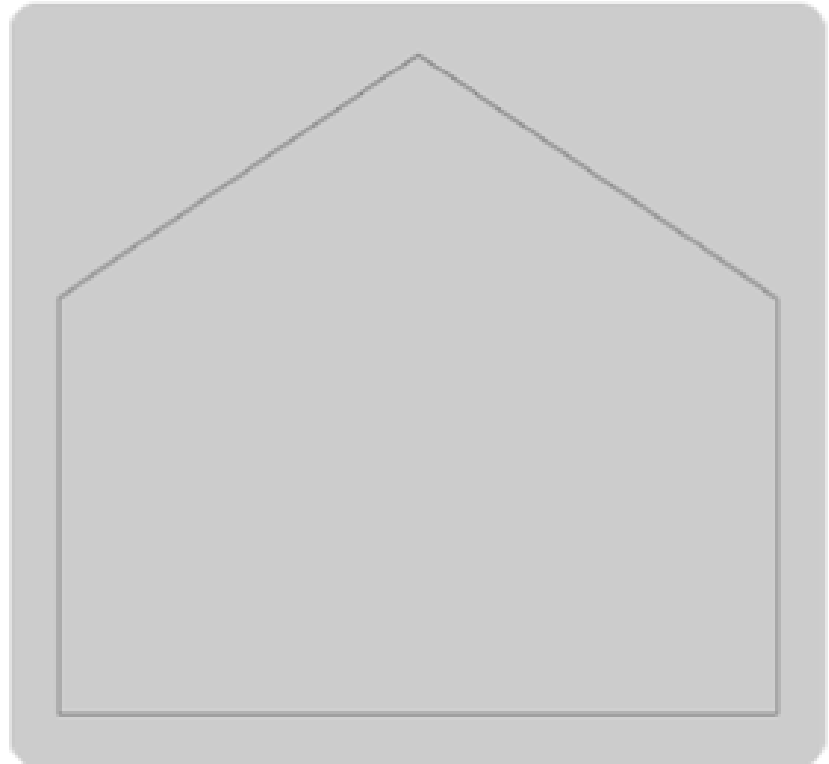
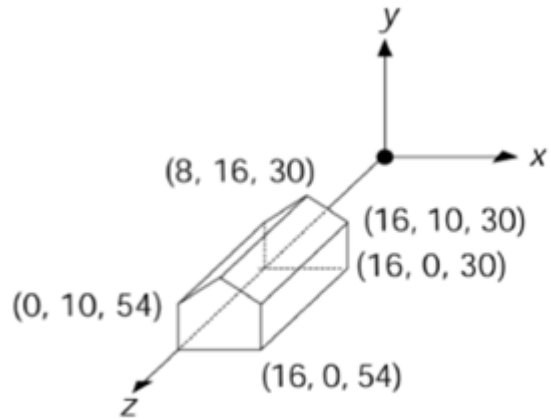
Consideriamo questa semplice scena 3D costituita da una casetta e vediamo alcuni esempi di proiezioni





1994 Foley/VanDam/Finer/Huges/Phillips ICG

Esempi: parallela



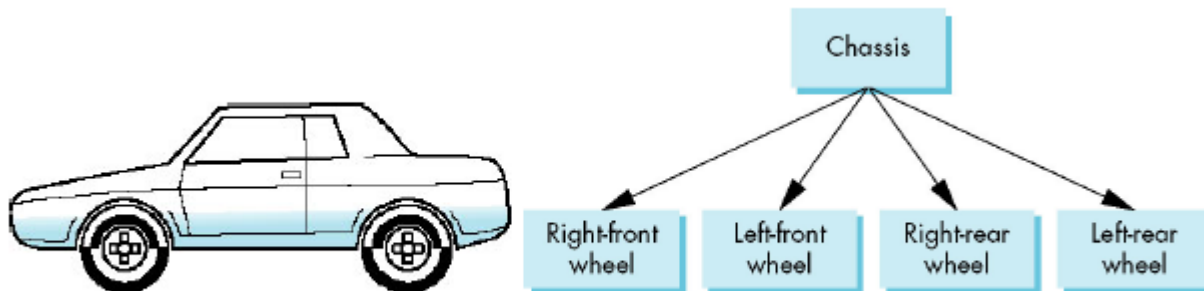
Alcune applicazioni delle trasformazioni geometriche

- Grafi di scena

Grafi di scena (scene graph)

Una tecnica avanzata (supportata dai principali engine/sdk grafici) per la rappresentazione gerarchica di una scena costituita da un insieme di oggetti

- Lo scene graph è una struttura dati ad albero aciclico
- I nodi rappresentano gli elementi della scena
- Ciascun ramo rappresenta una relazione gerarchica tra un nodo “padre” e un nodo “figlio”



Grafi di scena (scene graph)

- I rami rappresentano vincoli di trasformazione tra i nodi
- Ciascun nodo figlio è definito dalla sua geometria e dalla matrice di trasformazione che lo lega al nodo padre
- Nell'esempio il nodo radice è rappresentato dal "torso" del modello umano
- Il nodo radice ha 5 figli. Per calcolare la matrice di trasformazione complessiva da applicare ad un nodo occorre attraversare l'albero partendo dal nodo radice e moltiplicare le matrici di trasformazione
- Quando si cambia la posa di un oggetto nella gerarchia, automaticamente tutti gli oggetti nel sottoalbero generato da tale oggetto subiscono la stessa trasformazione
- I nodi del grafo possono anche contenere informazioni aggiuntive sull'aspetto degli oggetti

