Modellazione per Curve e Superfici

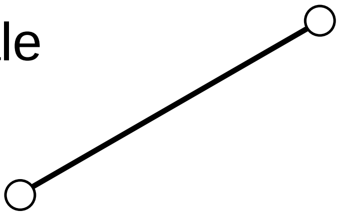
Curve Parametriche

Descrizione parametrica di una linea

Rappresentazione parametrica

più utile in grafica computazionale

$P_1\ (X_1, Y_1, Z_1)$



- **Linea definita da 2 punti**

$P_0\ (X_0, Y_0, Z_0)$

$$X = X_0 + t\,(X_1 - X_0) = (1 - t)\,X_0 + t\,X_1$$
$$Y = Y_0 + t\,(Y_1 - Y_0) = (1 - t)\,Y_0 + t\,Y_1$$
$$Z = Z_0 + t\,(Z_1 - Z_0) = (1 - t)\,Z_0 + t\,Z_1$$

calcolato per un valore della variabile reale t

In forma matriciale: $\mathbf{P} = \mathbf{P}_0 + t\,(\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_0)$

Descrizione parametrica di un piano

- Equazione **cartesiana del piano definito da un punto P_1 sul piano e dalla normale al piano n**=(A, B, C)
  - Equazione del piano: Ax + By + Cz + D = 0

    dove $D = -\mathbf{n} \cdot P_1$
- **Regioni limitate dal piano**
  - Detta f(x,y,z) = Ax + By + Cz + D, si ha:
    - per f(x,y,z) = 0 il punto giace sul piano
    - per f(x,y,z) > 0 il punto giace nel semi-spazio positivo del piano
    - per f(x,y,z) < 0 il punto giace nel semi-spazio negativo del piano

Descrizione parametrica di un piano

- **Equazione parametrica del piano passante per tre punti P_1, P_2, P_3**
  - calcoliamo **r** e **s** vettori sul piano:
    - $\mathbf{r} = P_2 - P_1$
    - $\mathbf{s} = P_3 - P_1$
  - La posizione del punto P rispetto all'origine si esprime:
    - $P(u,v) = P_1 + u\mathbf{r} + v\mathbf{s}$ per qualsiasi valore di *u* e *v*

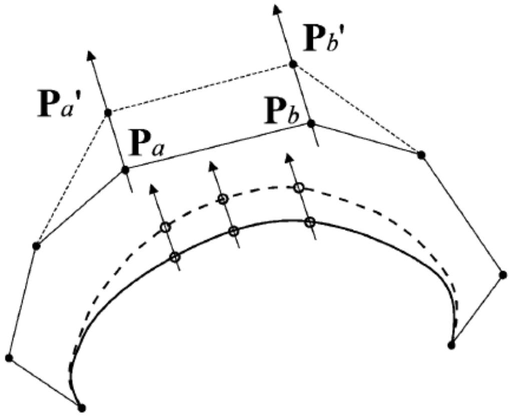
Superfici a triangoli

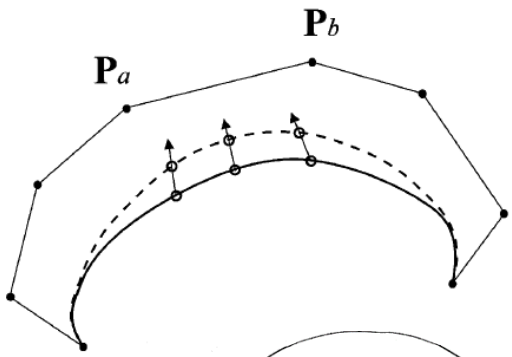
- **I poligoni usati dai sistemi grafici sono tipicamente *triangoli***
- **Coordinate di un punto sul triangolo**
  - Dati 3 punti P_1, P_2, P_3 non allineati, la posizione del generico punto nel triangolo è:

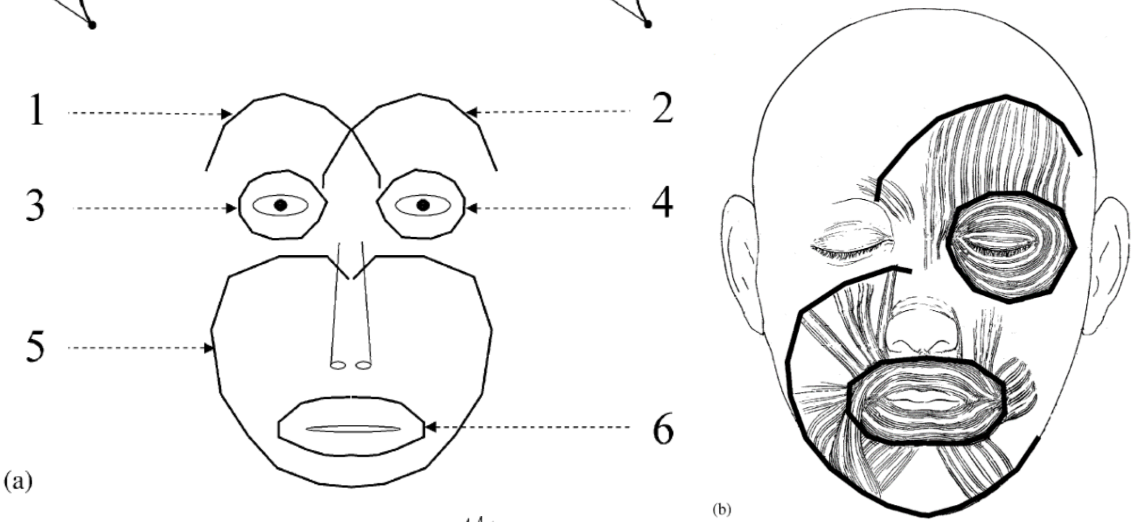
    $P=P_1 + u\ (P_2-P_1) + v\ (P_3-P_1)$

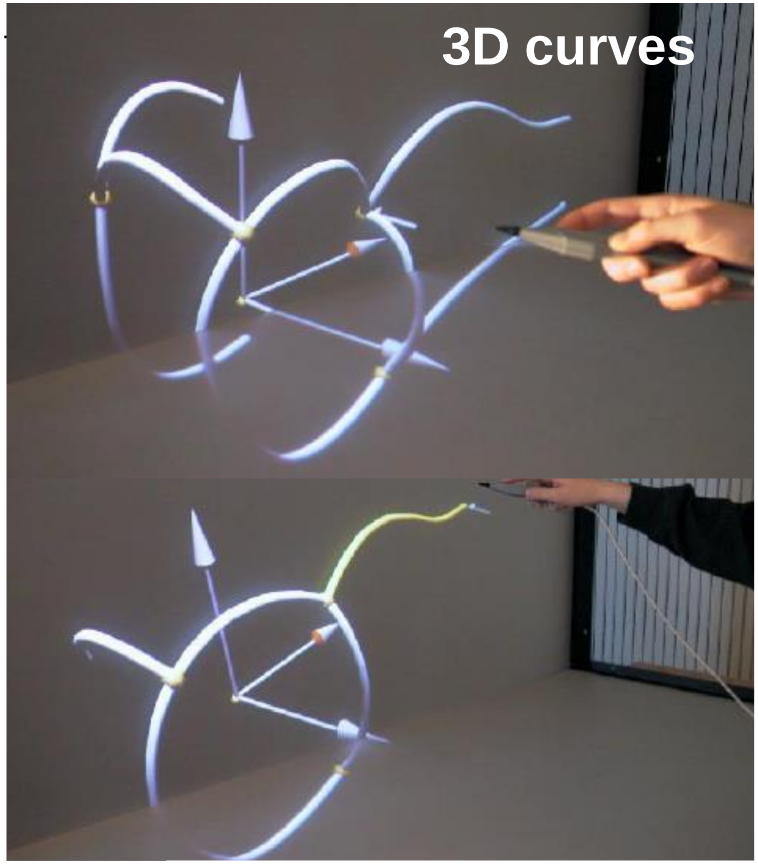
    simile alla notazione in coordinate baricentriche
  - I vertici si ottengono nei casi seguenti:
    - P_1 quando u = 0 e v = 0
    - P_2 quando u = 1 e v = 0
    - P_3 quando u = 0 e v = 1
  - Quindi l'intero triangolo si ottiene variando u e w con le condizioni:
    - u >= 0, v >= 0, u+v <= 1

Esempi: Curve….

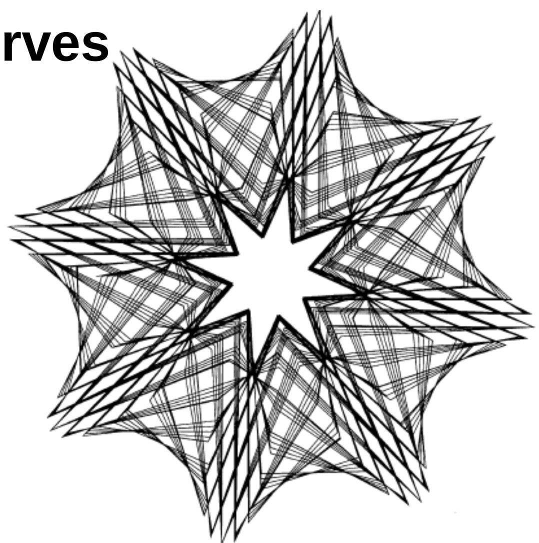


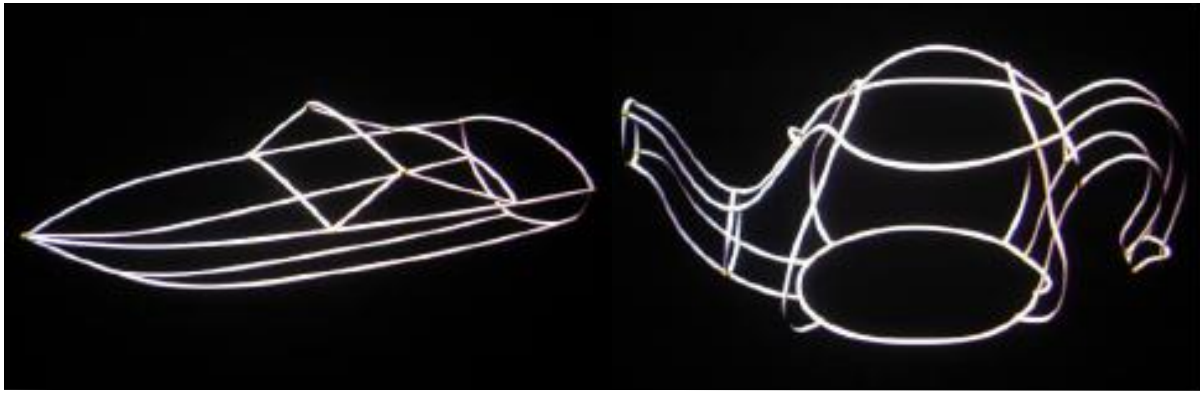






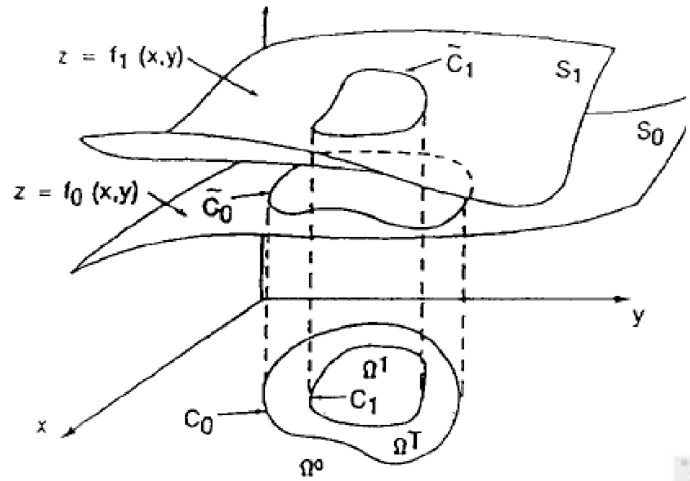
2D curves

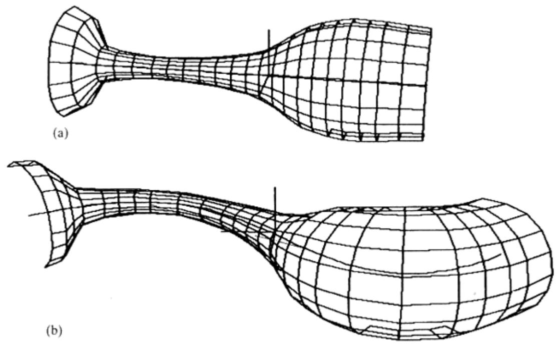


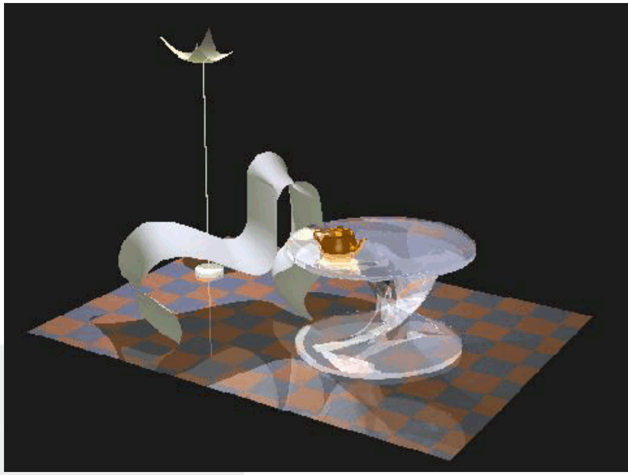


Esempi: Superfici…

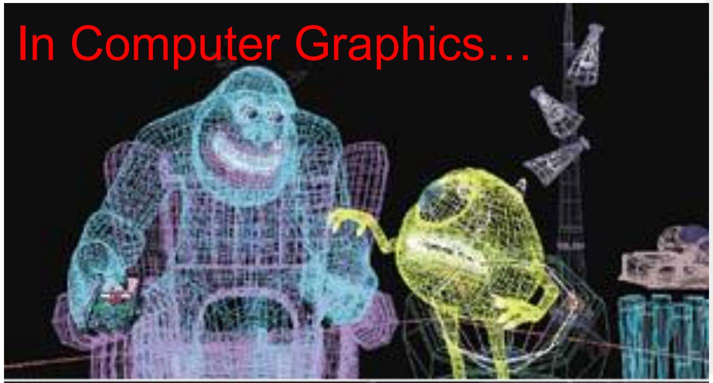
Cartesian surfaces



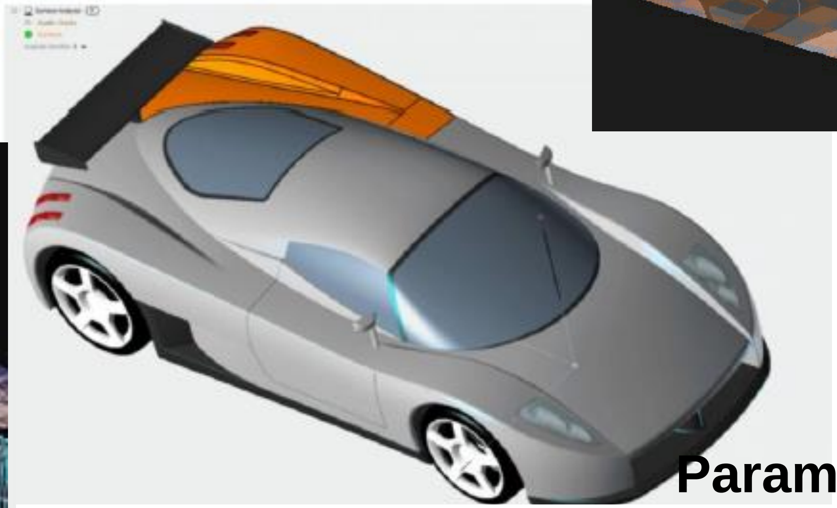




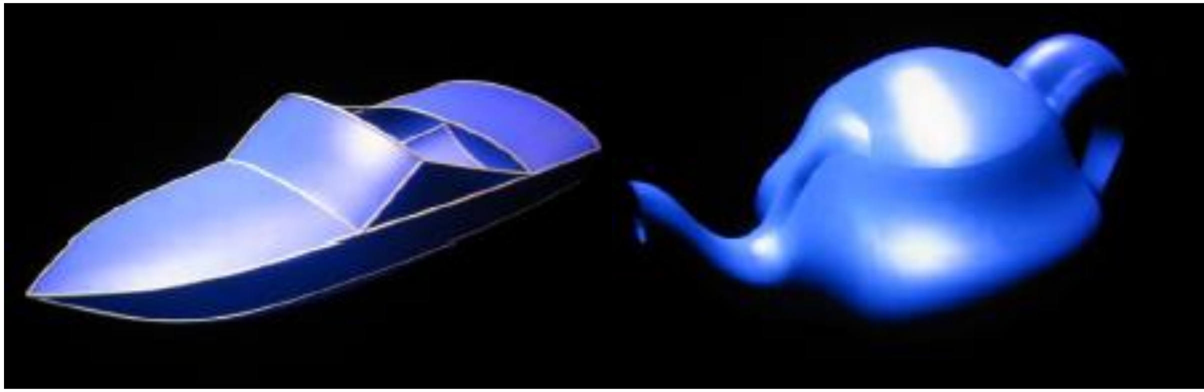
In Computer Graphics…



In Design…



Parametric surfaces



Modelli di curve e superfici

Tipi di curve e superfici usate in informatica grafica

- **Curve e superfici parametriche:**
  - Curve e superfici interpolanti:
    - Polinomi globali di Lagrange, Hermite
    - Spline etc…
  - Curve e superfici approssimanti:
    - Bézier
    - B-spline
    - NURBS etc…

Applicazioni

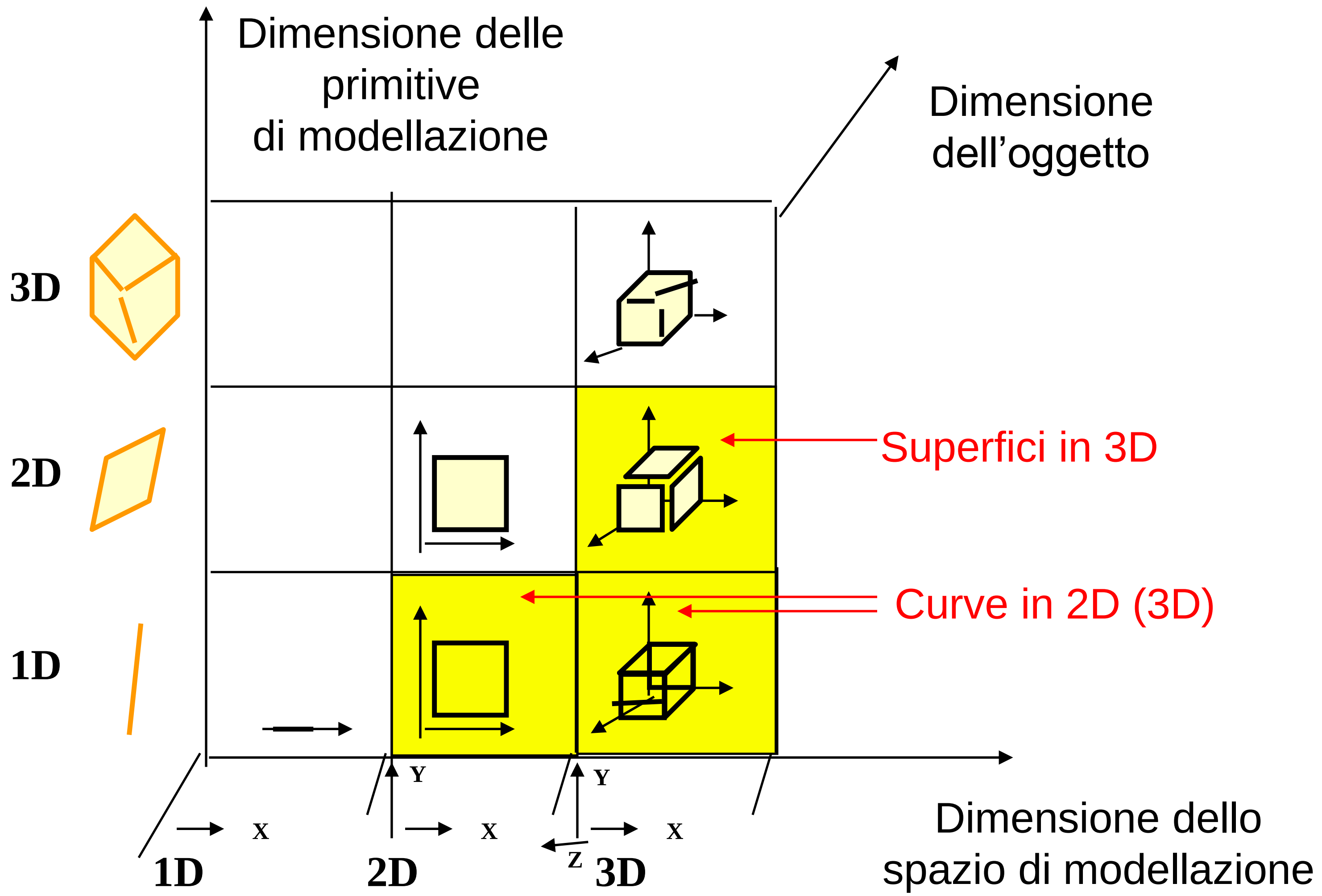
- **Uso:**
  - Visualizzazione di oggetti free-form
  - Tracciamento di movimenti complessi
  - Progettazione di prodotti free-form
- **Principali settori interessati:**
  - ***Settore meccanico***

    ES: aereonautico, navale, automobilistico, motociclistico, macchinari
  - ***Settore civile/strutturale di esterni***

    ES: costruzione architetture/dighe/ponti
  - ***Settore design oggettistica e arredo d’interni***

    ES: oggetti domestici, d’ufficio, mobili e arredi
  - ***Computer animation***
- **Ruolo:**
  - Funzionale, estetico

… nello schema di riferimento



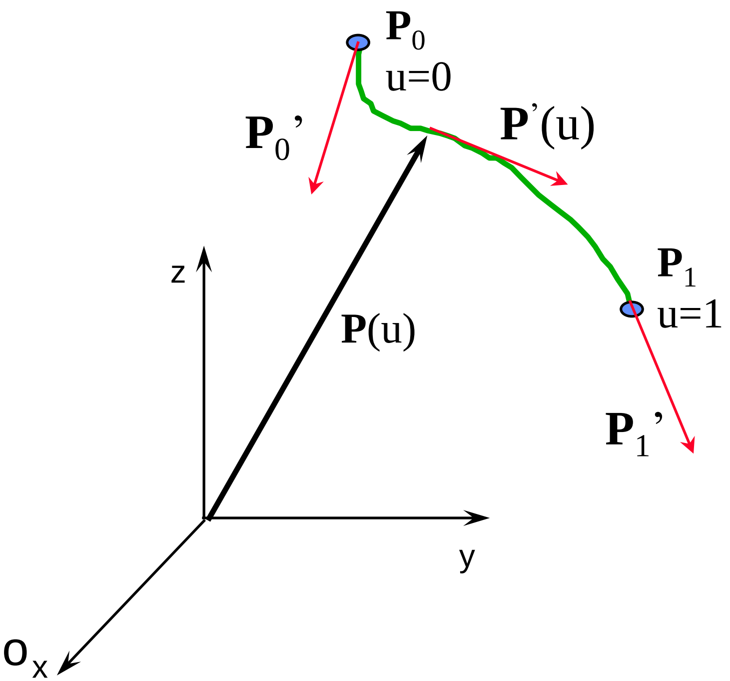
Curve Parametriche

Rappresentazione parametrica

Rappresentazione parametrica

$x = x(u)$
$y = y(u)$ $\quad u \in [t_0, t_1]$
$z = z(u)$

NB: Possiamo ricondurci a: $u \in [0,1]$



Curva in 2D o in 3D

- punto appartenente ad una curva nel piano

  P=**P**(u) = [x(u), y(u)]

- punto appartenente ad una curva nello spazio

  P=**P**(u) = [x(u), y(u), z(u)]

… una rappresentazione parametrica speciale: CANONICA o NATURALE

P=**P**(s) = [x(s), y(s), z(s)], s = ascissa curvilinea

Tecniche di costruzione

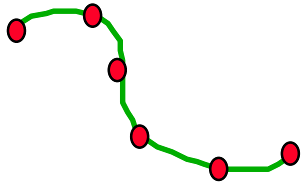
Curva:

- definita come luogo di infiniti punti nel piano o nello spazio ad 1 grado di libertà…
- …ma "operativamente" costruita attraverso un numero finito di punti,

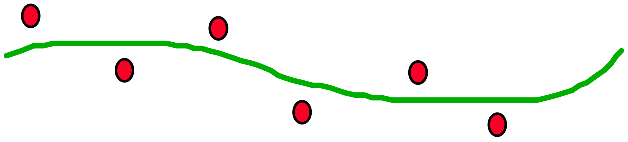
detti **PUNTI DI CONTROLLO**, che mediante differenti criteri / formule permettono di generare la forma generale della curva

Tipo di costruzione

- **Interpolazione**
  - Curve polinomiali "globali"
  - Curve Spline

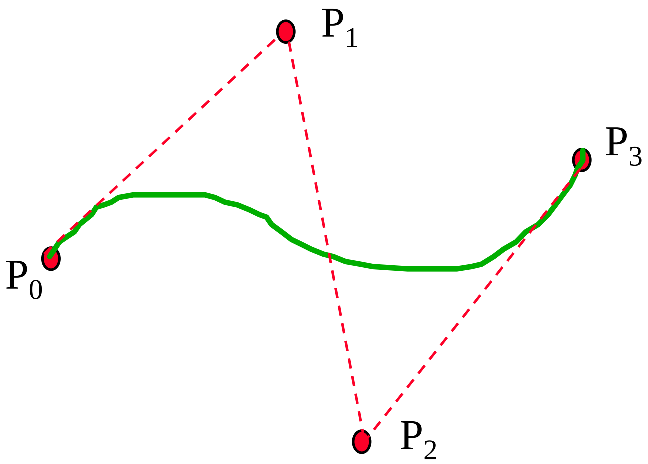


- **Approssimazione**
  - Curve di Bezier
  - Curve B-splines
  - Curve NURBS

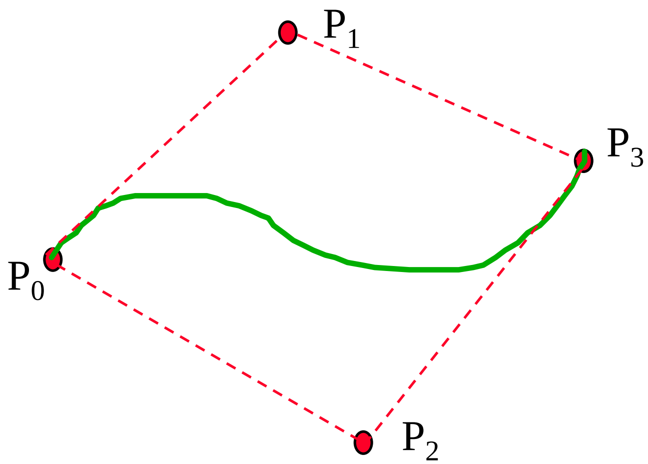


Entità associate

- **POLIGONO DI CONTROLLO**
  - poligonale (aperta o chiusa) i cui vertici sono (nello stesso ordine) i punti di controllo dati



- **INVOLUCRO CONVESSO (CONVEX HULL)**
  - poligono (2D) o poliedro (3D) convesso minimale che contiene tutti i punti di controllo



Curve parametriche polinomiali

- **Curve polinomiali di grado n**

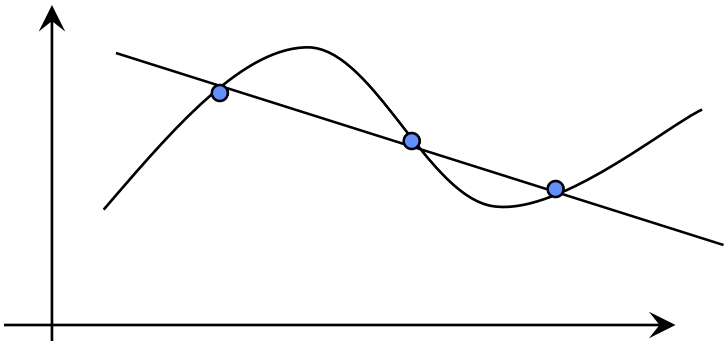
$$x(u) = a_{n,1}\, u^n + a_{n-1,1}\, u^{n-1} + \ldots + a_{1,1}\, u + d_1$$

$$y(u) = a_{n,2}\, u^n + a_{n-1,2}\, u^{n-1} + \ldots + a_{1,2}\, u + d_2$$

$$z(u) = a_{n,3}\, u^n + a_{n-1,3}\, u^{n-1} + \ldots + a_{1,3}\, u + d_3$$

→ In forma vettoriale compatta: $\mathbf{p}(u) = \mathbf{a_n}\, u^n + \mathbf{a_{n-1}}\, u^{n-1} + \ldots + \mathbf{a_1}\, u + \mathbf{d}$

- **Caso particolare: Curve cubiche**



$$x(u) = a_x\, u^3 + b_x\, u^2 + c_x\, u + d_x$$

$$y(u) = a_y\, u^3 + b_y\, u^2 + c_y\, u + d_y$$

$$z(u) = a_z\, u^3 + b_z\, u^2 + c_z\, u + d_z$$

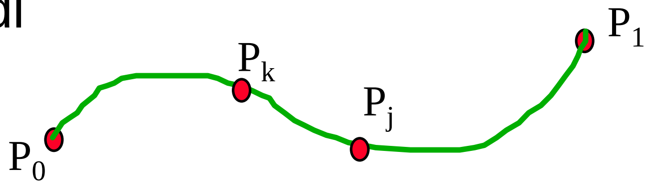
→ In forma vettoriale compatta: $\mathbf{p}(u) = \mathbf{a}\, u^3 + \mathbf{b}\, u^2 + \mathbf{c}\, u + \mathbf{d}$

Curve cubiche: costruzione

- **3D: Fissando 4 condizioni vettoriali = 12 scalari**
- **2D: Fissando 4 condizioni vettoriali = 8 scalari**

→ INTERPOLAZIONI DI LAGRANGE:

2 punti estremi + 2 punti intermedi



→ INTERPOLAZIONI DI HERMITE:

2 punti estremi + vettori tangenti in questi 2 punti

Interpolazione di Hermite (1/3)

- **IN GENERALE: Individua curva polinomiale passante per un certo numero di punti, con noti vettori tangenti in quei punti**
- **CASO CUBICO:** Descritto dalla equazione:

$P(u) = a\,u^3 + b\,u^2 + c\,u + d, \quad u \text{ in } [0,1]$

→ i coefficienti a, b, c, d determinati in funzione dei valori di $P(u)$ e $P'(u)$ negli estremi P_0 e P_1 del segmento cubico parametrico

PROCEDIMENTO → imponendo le condizioni al contorno

$P(0) = P_0 = d$

$P(1) = P_1 = a + b + c + d$

$P'(0) = P_0' = c$

$P'(1) = P_1' = 3a + 2b + c$

Da ora in poi… convenzione “veloce”: vettori non in grassetto

→ da cui si ricava

$a = 2P_0 - 2P_1 + P_0' + P_1'$ $\qquad$ $b = -3P_0 + 3P_1 - 2P_0' - P_1'$

$c = P_0'$ $\qquad$ $d = P_0$

Interpolazione di Hermite (2/3)

→ **quindi…**

Funzioni di miscelamento
(blending functions)

$$P(u) = P_0\,\overbrace{(2u^3 - 3u^2 + 1)}^{H_0} + P_1\,\overbrace{(-2u^3 + 3u^2)}^{H_1} + P_0'\,\overbrace{(u^3 - 2u^2 + u)}^{H_2} + P_1'\,\overbrace{(u^3 - u^2)}^{H_3}$$

$$P(u) = P_0\, H_0(u) + P_1\, H_1(u) + P_0'\, H_2(u) + P_1'\, H_3(u)$$

P_0, P_1, P_0', P_1': coefficienti geometrici

Notazione matriciale

$$P(u) = \begin{bmatrix} P_0 & P_1 & P_0' & P_1' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u^3 \\ u^2 \\ u \\ 1 \end{bmatrix} \quad \leftrightarrow \quad P(u) = P\, M_H\, u$$

Matrice di Hermite

3x1 = 3x4 x 4x4 x 4x1

Interpolazione di Hermite (3/3)

Le funzioni di miscelamento

$P(u) = P_0 H_0(u) + P_1 H_1(u) + P_0' H_2(u) + P_1' H_3(u)$

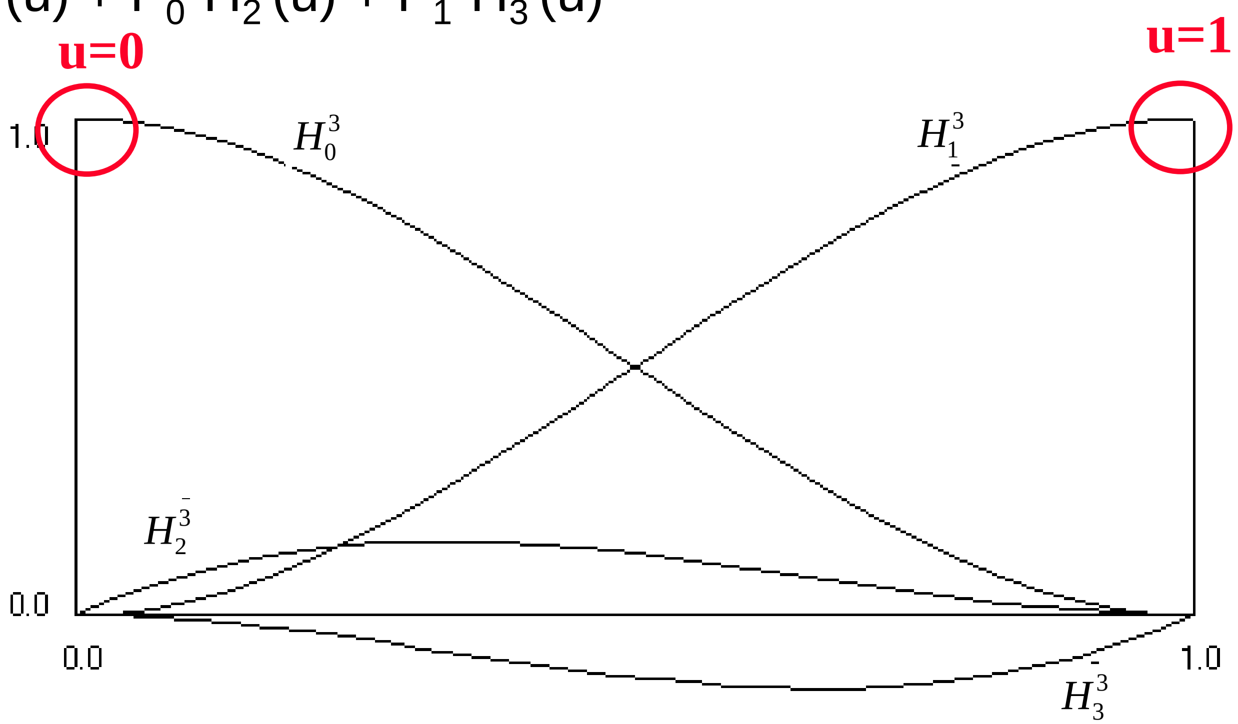
dove

$H_0(u) = 2u^3 - 3u^2 + 1$

$H_1(u) = -2u^3 + 3u^2$

$H_2(u) = u^3 - 2u^2 + u$

$H_3(u) = u^3 - u^2$

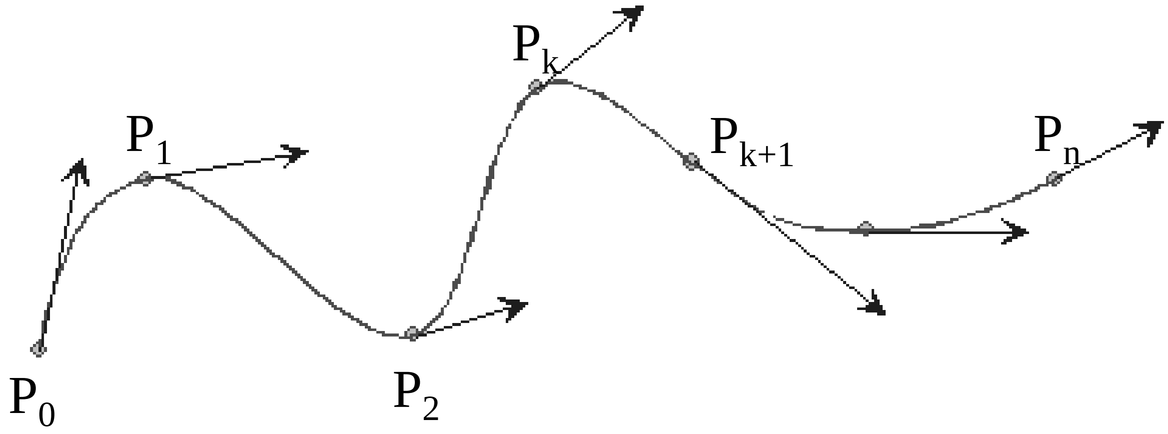


$P(u) = P_0 (2u^3 - 3u^2 + 1) + P_1 (-2u^3 + 3u^2) + P_0' (u^3 - 2u^2 + u) + P_1' (u^3 - u^2)$

$P'(u) = P_0 (6u^2 - 6u) + P_1 (-6u^2 + 6u) + P_0' (3u^2 - 4u + 1) + P_1' (3u^2 - 2u)$

Curve Spline (1/9)

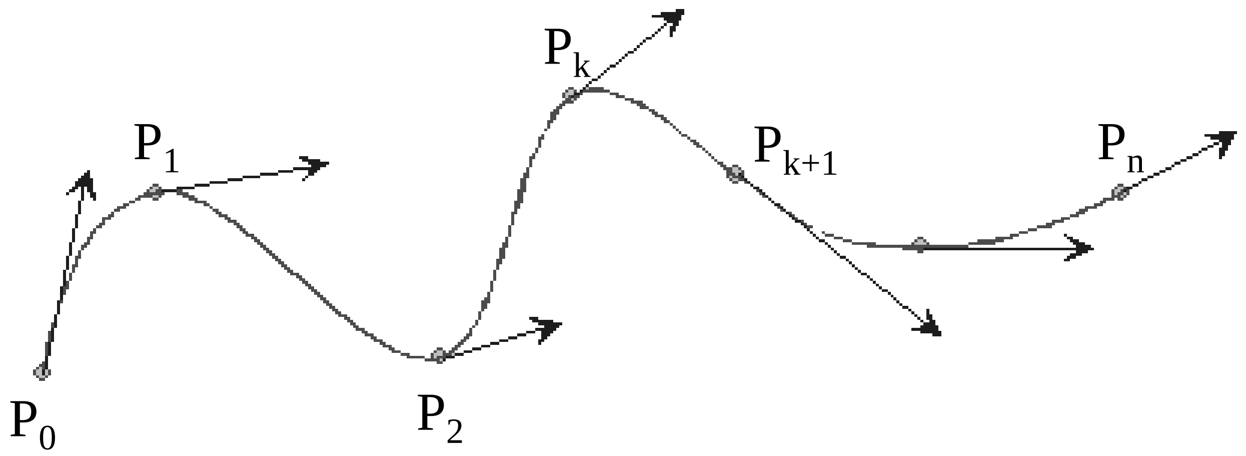
- Curve ottenute dall'unione di n archi cubici parametrici continui…
- …che interpolano n+1 punti di controllo P_k
- …che nei punti di unione rispettano la continuità di derivata prima e seconda



- Sono le spline cubiche di tipo C^2 (si possono generalizzare)

Curve Spline (2/9)

- **Usate in industria automobilistica/aeronautica/navale**
- **VANTAGGI:**
  - Flessibili, si prestano per approssimare curve di “sinuosità” elevata
  - Curve con raccordo smooth
  - Facilità di calcolo
  - Possono modellare anche curve chiuse



Curve Spline (3/9)

Come si ottengono

L’equazione

$$P(u) = a\,u^3 + b\,u^2 + c\,u + d$$

descrive il k-mo arco di curva fra 2 punti successivi $P_{k-1} \rightarrow P_k$

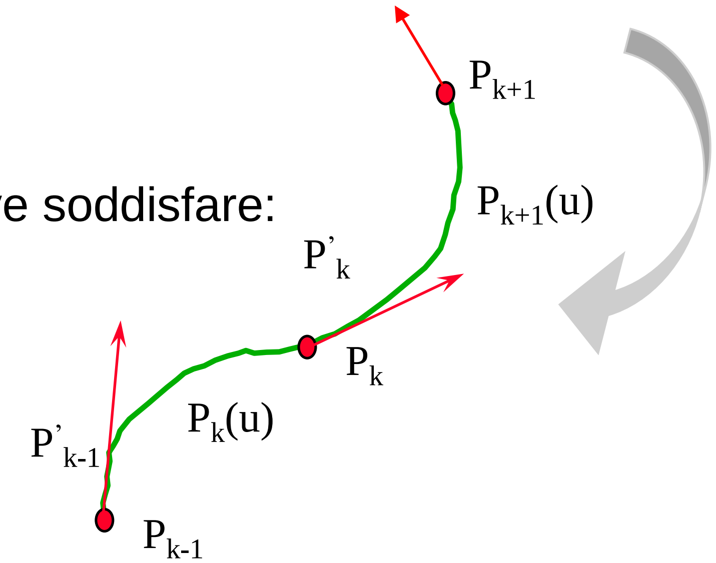
- Si determinano i 4 coefficienti polinomiali vettoriali per ciascuna delle n curve che interpolano gli n+1 punti di controllo

  → 4n coefficienti polinomiali vettoriali
- Si pongono le condizioni “di contorno” sui punti di giunzione dei segmenti di curva
  - passaggio per punti
  - continuità di derivata prima e seconda al passaggio da un arco all’altro
  - informazioni aggiuntive tangenza/curvatura agli estremi iniziale e finale

Curve Spline (4/9)

Date le coppie di punti P_{k-1}, P_k e P_k ,P_{k+1} per (k=1,2, …, n-1)

INTERPOLAZIONE “HERMITE” mediante due successive curve cubiche C1



Sia P (u) = a u^3 + b u^2 + c u + d

la 1a curva cubica che passa per P_{k-1} e P_k : essa deve soddisfare:

$P(0) = P_{k-1}$

$P(1) = P_k$

$P'(0) = P'_{k-1}$

$P'(1) = P'_k$

sostituendo otteniamo:

$P_{k-1} = d$

$P_k \;= a + b + c + d$

$P'_{k-1} = c$

$P'_k \;= 3a + 2b + c$

$a = 2\,(P_{k-1} - P_k) + P'_{k-1} + P'_k$

$b = 3\,(P_k - P_{k-1}) - 2P'_{k-1} - P'_k$

$c = P'_{k-1}$

$d = P_{k-1}$

Curve Spline (5/9)

... quindi la curva cubica che passa per P_{k-1} e P_k :

$P(u) =$

$= P_{k-1} + P'_{k-1}\, u + [3\,(P_k - P_{k-1}) - 2P'_{k-1} + P'_k]\, u^2 + [2\,(P_{k-1} - P_k) + P'_{k-1} + P'_k]\, u^3$

analogamente la 2a curva per P_k, P_{k+1}

$P(u) =$

$= P_k + P'_k u + [3\,(P_{k+1} - P_k) - 2P'_k + P'_{k+1}]\, u^2 + [2\,(P_k - P_{k+1}) + P'_k + P'_{k+1}]\, u^3$

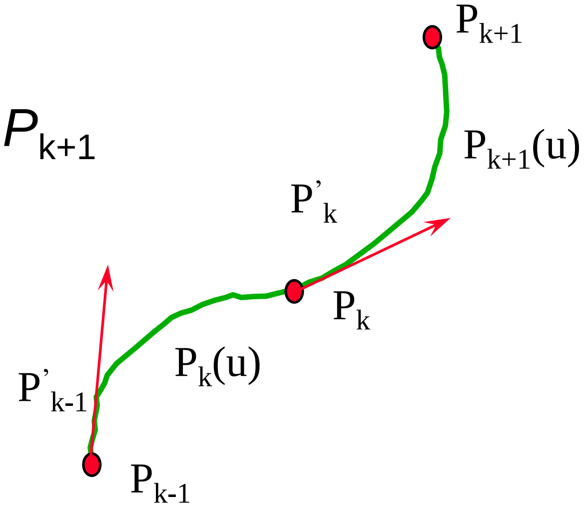
(in cui: $P_k(0) = P_{k-1}$ $P_k(1) = P_k$ $P'_k(0) = P'_{k-1}$ $P'_k(1) = P'_k$)

(in cui: $P_{k+1}(0) = P_k$ $P_{k+1}(1) = P_{k+1}$ $P'_{k+1}(0) = P'_k$ $P'_{k+1}(1) = P'_{k+1}$)

Curve Spline (6/9)

CONDIZIONI IMPOSTE

- Condizioni “al contorno” in n-1 intermedi P_{k+1}



- dall’arco $P_k(u)$ si ha $P_k(1) = P_k$
- dall’arco $P_{k+1}(u)$ si ha $P_{k+1}(0) = P_k$

$P'_k(1) = P'_{k+1}(0)$ → Continuità di derivata prima in P_k

$P''_k(1) = P''_{k+1}(0)$ → Continuità di derivata seconda in P_k

n-1 punti di controllo interni

4 condizioni al contorno per ciascun punto interno

→ 4(n-1) equazioni vettoriali

Curve Spline (7/9)

- **2 condizioni di passaggio per punto iniziale e finale**

  $P_1(0) = P_0$

  $P_n(1) = P_n$

4(n-1) + 2 equazioni

- **2 condizioni ulteriori**
  - per esempio, nota curvatura (e.g., nulla) nel punto iniziale e finale:

    $P''_1(0) = K_0$ (es. =0)

    $P''_n(1) = K_n$ (es. =0)

4(n-1) + 2 +2 equazioni

→ Abbiamo ora **4n** equazioni per **4n** coefficienti da determinare

Curve Spline (8/9)

Tipi di condizioni al contorno sui punti estremi

- **Tangenti imposte**

  $P'_1(0) = t_0$

  $P'_n(1) = t_n$

- **Curvature imposte**

  $P''_1(0) = k_0$

  $P''_n(1) = k_n$

  Più specifiche…

- **Rilassamento**

  Curvatura nulla: $P''_1(0) = P''_n(1) = 0$

- **Cicliche**

  Stessa tangenza: $P'_1(0) = P'_n(1) = t$

- **Anticicliche**

  Tangenza opposta: $P'_1(0) = t = - P'_n(1)$

Curve Spline (9/9)

Riassumendo…

- **Dati necessari**
  - punti da interpolare
  - 2 condizioni aggiuntive negli estremi (su tangenza e/o curvatura)
- **Caratteristiche**
  - schema a carattere globale: una modifica locale comporta una modifica dell’andamento di *tutta* la curva
  - non consente un controllo intuitivo della forma della curva senza dover agire sul modello matematico

Curve interpolanti: ricapitolando….

- **Tipi di curve interpolanti**
  - Interpolazione classica di Lagrange
  - Interpolazione di Hermite
  - Spline cubiche
  - Generalizzazione:
    - Spline di ordine più elevato
    - …
- **Sono tutte curve a carattere globale:**
  - Modifica ad un punto /condizione (tangenza, continuità, etc.) comporta modifica della forma dell’intera curva
- **Rientrano negli schemi di fitting**
- **NECESSITA’ di curve a controllo più intuitivo**

Curve di Bezier

- **Definizione**
- **Funzioni di blending di Bezier: Polinomi di Bernstein**
- **Proprietà delle curve di Bezier**
- **Curve di Bezier cubiche**
- **… in forma matriciale**
- **Tecniche di disegno di curve di Bezier**
- **Composizione di curve di Bezier**
- **Algoritmo di De Casteljau**

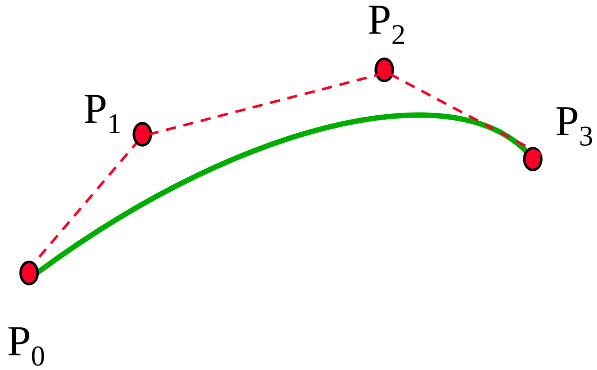
Curve di Bezier

Definizione

Dati n+1 punti di controllo P_i , una **curva di Bezier di ordine *n*** è descritta da:

$$P(u) = \sum_{i=0}^{n} P_i B_{i,n}(u), \quad 0 \leq u \leq 1$$

Funzioni di miscelamento di Bezier



n+1 punti di controllo

n = grado del polinomio

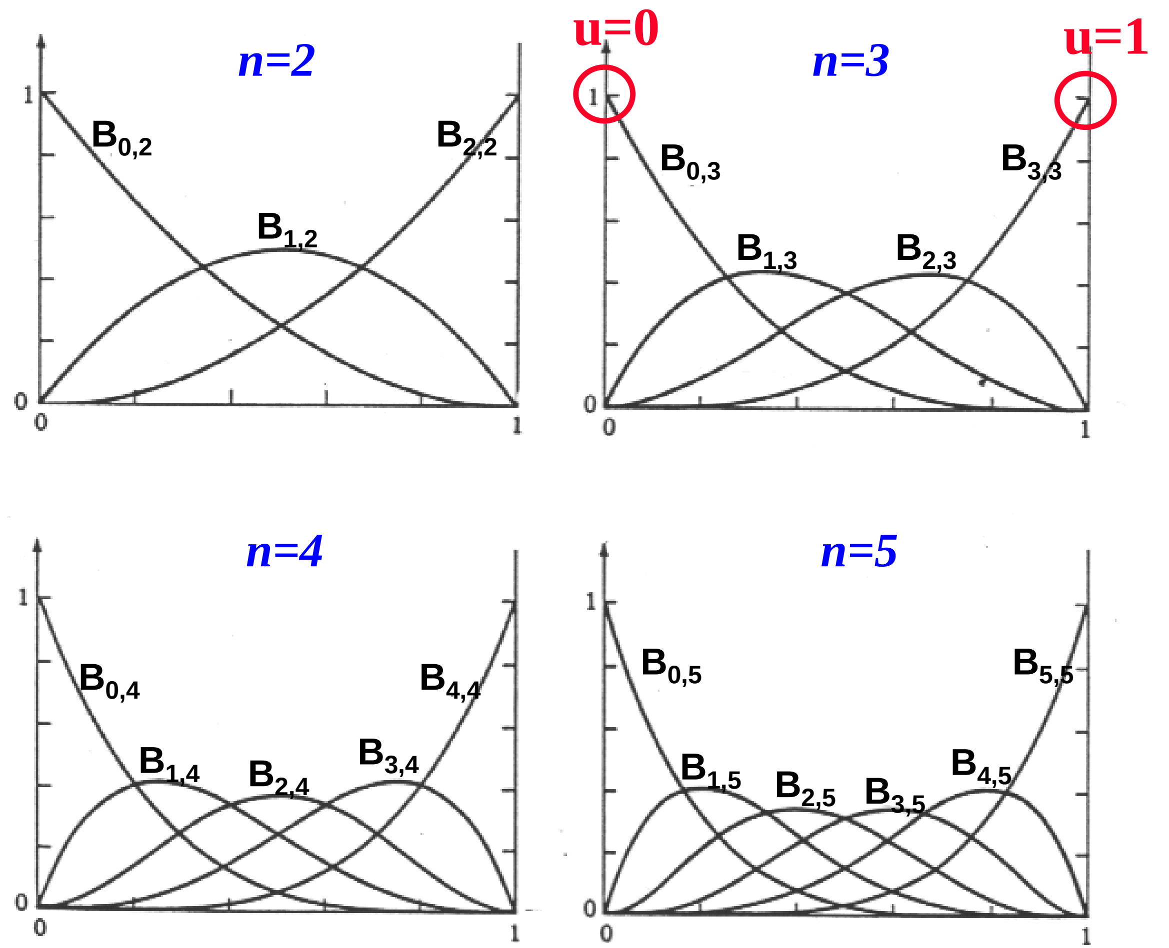
Curve di Bezier

Funzioni di miscelamento: Polinomi di Bernstein

Forma parametrica: $$B_{i,n}(u) = C(n,i)u^i(1-u)^{n-i}$$

$$C(n,i) = \frac{n!}{i!(n-i)!}$$

(coefficiente binomiale)



→La curva è un polinomio di grado n

Curve di Bezier

Proprietà delle curve di Bezier (1/2)

- **Interpolazione con punti estremi**
  - la curva passa per il primo e l'ultimo punto del poligono di controllo
- **Condizioni di tangenza**
  - la tangente nel punto P_0 è parallela al segmento (P_1 - P_0) e la tangente nel punto P_n al segmento (P_n - P_{n-1})
- **Convex Hull**
  - la curva di Bezier è contenuta nel Convex Hull dei suoi punti di controllo per u in [0,1]

Curve di Bezier

Proprietà delle curve di Bezier (2/2)

- **Precisione lineare**
  - se tutti i punti di controllo formano una linea retta, anche la curva forma una linea
- **Simmetria delle funzioni di Bernstein:**
  - È possibile invertire la sequenza dei vertici che definiscono la curva senza modificarne la forma.
- **Additività delle funzioni di Bernstein:**

$$\sum_{i=0}^{n} B_{i,n}(u) = 1, \quad 0 \le u \le 1$$

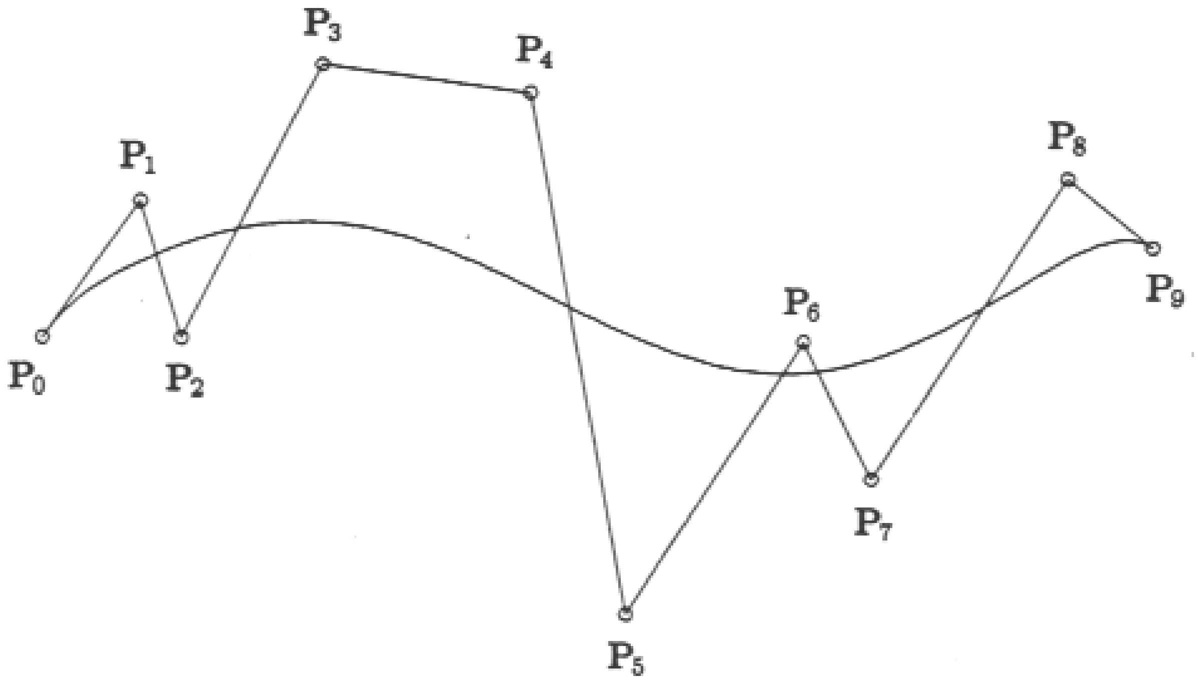
- **Invarianza per trasformazioni affini**
  - qualsiasi trasformazione lineare o traslazione/rotazione dei punti di controllo definiscono una nuova curva che è la trasformazione lineare o traslazione o rotazione della curva originaria

Curve di Bezier

Esempio di curva di Bezier

10 punti di controllo

→ polinomio di 9° grado



Curve di Bezier

Curve di Bezier cubiche

Richiedono 4 punti di controllo: $P_0 , P_1 , P_2 , P_3 \Rightarrow n = 3$

quindi:

$$P(u) = P_0 \; B_{0,3} + P_1 \; B_{1,3} + P_2 \; B_{2,3} + P_3 \; B_{3,3}$$

Polinomi di Bernstein:

$$B_{0,3} = \frac{3!}{0!3!} u^0 (1-u)^3 = (1-u)^3$$

$$B_{1,3} = \frac{3!}{1!2!} u^1 (1-u)^2 = 3u(1-u)^2$$

$$B_{2,3} = \frac{3!}{2!1!} u^2 (1-u) = 3u^2 (1-u)$$

$$B_{3,3} = \frac{3!}{3!0!} u^3 (1-u)^0 = u^3$$

$$\Rightarrow P(u) = (1-u)^3 P_0 + 3u(1-u)^2 P_1 + 3u^2 (1-u) P_2 + u^3 P_3$$

Curve di Bezier

... in forma matriciale

$$P(u) = \begin{bmatrix} P_0 & P_1 & P_2 & P_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u^3 \\ u^2 \\ u \\ 1 \end{bmatrix}$$

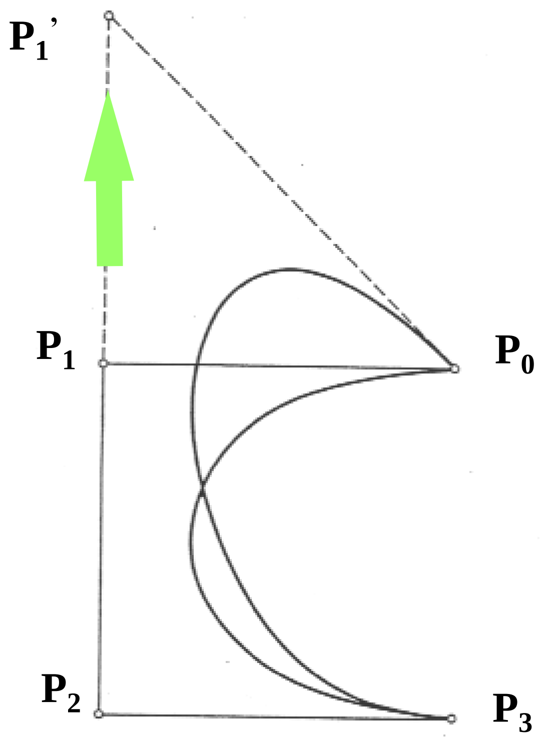
Punti di controllo

Matrice di Bezier

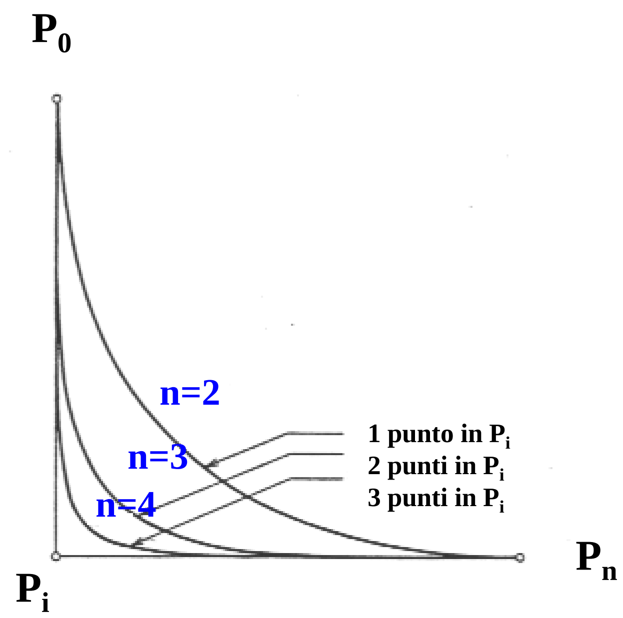
Differenza tra il segmento cubico parametrico e la curva cubica di Bezier è che la seconda è limitata da quattro vertici mentre il primo dipendeva da due vertici e dalle due derivate prime

Curve di Bezier

Tecniche di disegno di curve di Bezier (1/2)



…spostando un punto la curva viene attirata dal punto di controllo

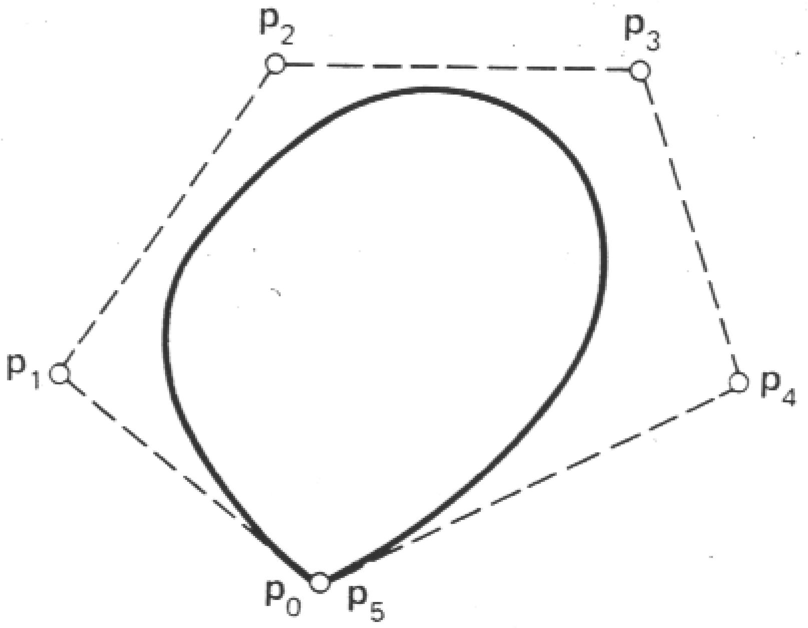


…aggiungendo punti di controllo identici la curva si avvicina al punto

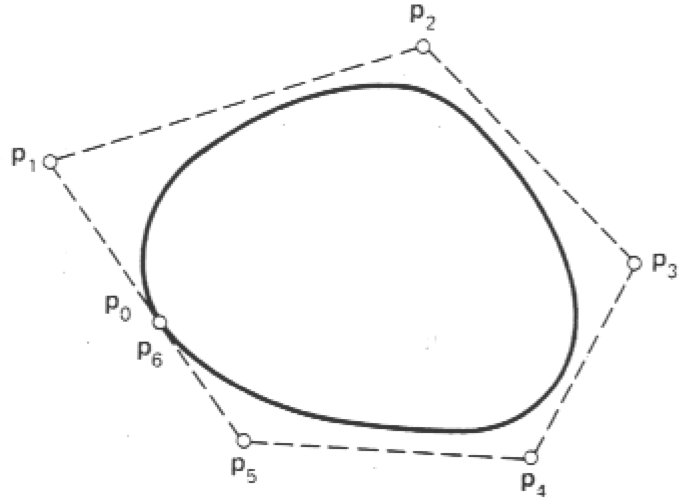
Curve di Bezier

Tecniche di disegno di curve di Bezier (2/2)

- **Curve chiuse:** il primo e l'ultimo punto di controllo sono definiti nella stessa posizione



cuspide



smooth con primi 2 punti allineati con gli ultimi due

Curve di Bezier

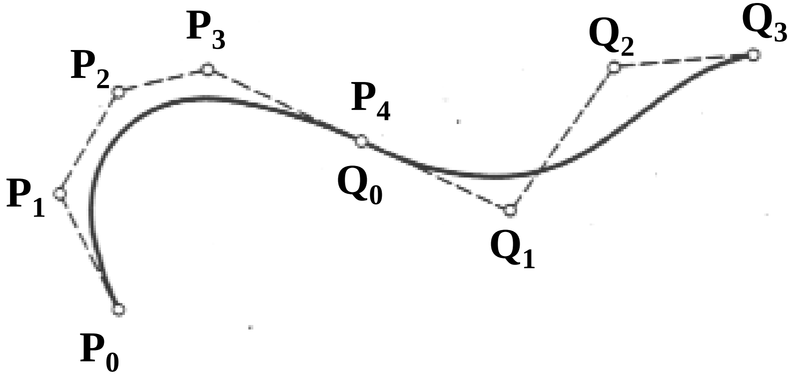
Composizione di curve di Bezier

Curve complesse possono essere generate componendo pezzi di curve di Bezier di grado inferiore.

Indicando con P_i i vertici della prima curva e con Q_i quelli della seconda

- **Continuità di tangenza:** P_{n-1}, $P_n = Q_o$, Q_1 sono allineati

- Si possono imporre condizioni più forti con curve di grado maggiore: es. **Continuità di curvatura**

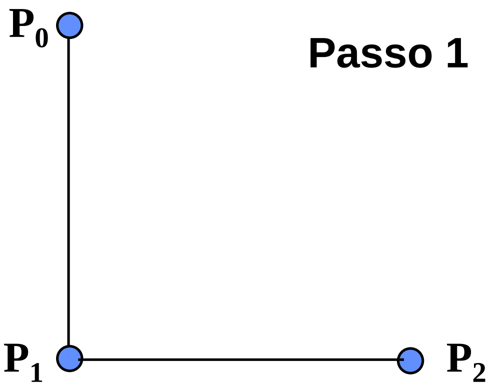


Curve di Bezier

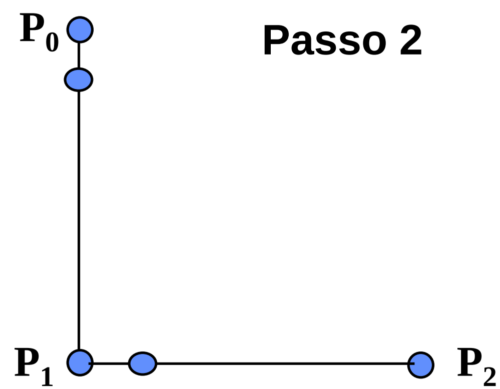
Algoritmo di De Casteljau (1/4)

Esempio con una
curva di Bezier
di grado 2

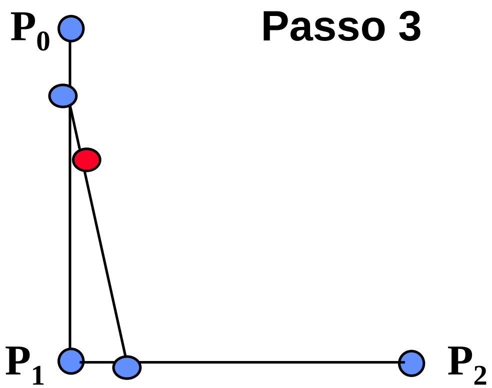
Passo 1

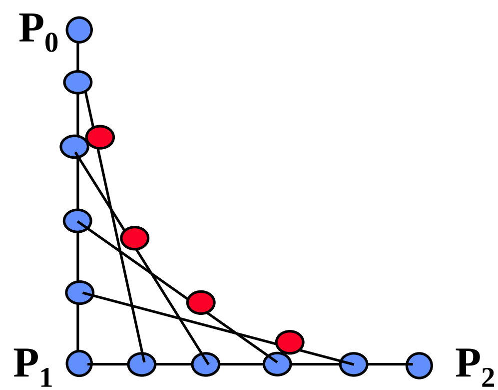


Passo 2



Passo 3





Curve di Bezier

Algoritmo di De Casteljau (2/4)

- **Obiettivo:** calcolare per un valore u il punto P(u) di una curva di Bezier
- **Passi:**
  - Curva di Bezier di grado n → punti di controllo P_0, P_1,…,P_n
  - Creazione “ricorsiva” di nuovi punti:
    - (livello 1) sui segmenti del poligono di controllo
    - (livello r) sui segmenti che congiungono punti costruiti al livello r-1
  - Formula di costruzione dei punti

$$P_i^{(r)}(u) = (1-u)P_i^{(r-1)} + uP_{i+1}^{(r-1)} \qquad r = 1,\dots,n \qquad i = 0,\dots,n\text{-}r$$

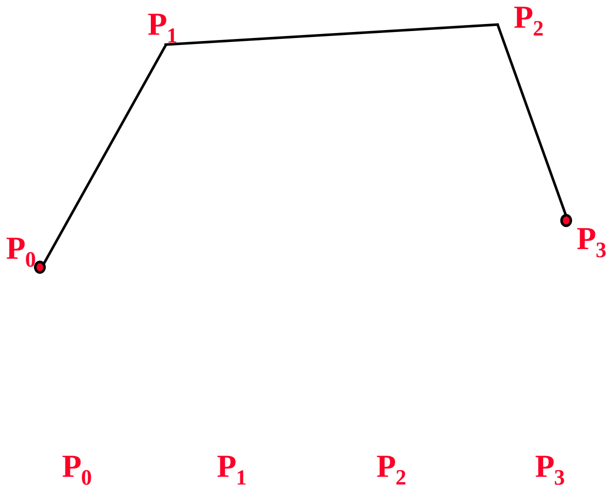
  - Livello di ricorsione *r* ha un punto in meno rispetto al livello *r-1*
  - Livello finale n: dà $P_0^n(u) = f(u)$ → punto sulla curva di Bezier cercato!

Curve di Bezier

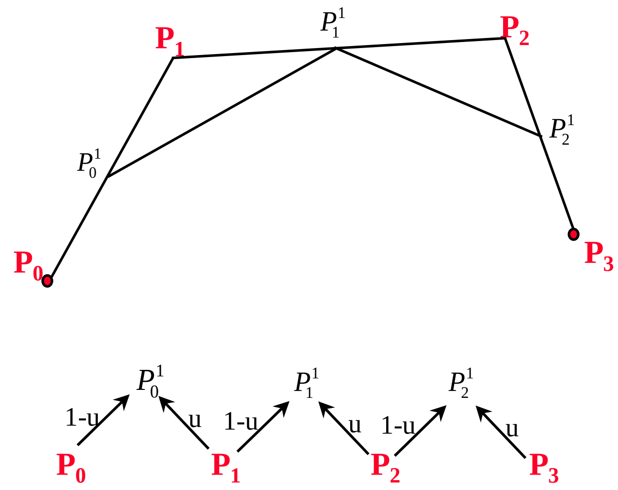
Algoritmo di De Casteljau (3/4)

- **Systolic Array:** vettore organizzato a triangolo in cui ciascuna riga riflette i livelli di ricorsione dell'algoritmo

Passo 1



Passo 2

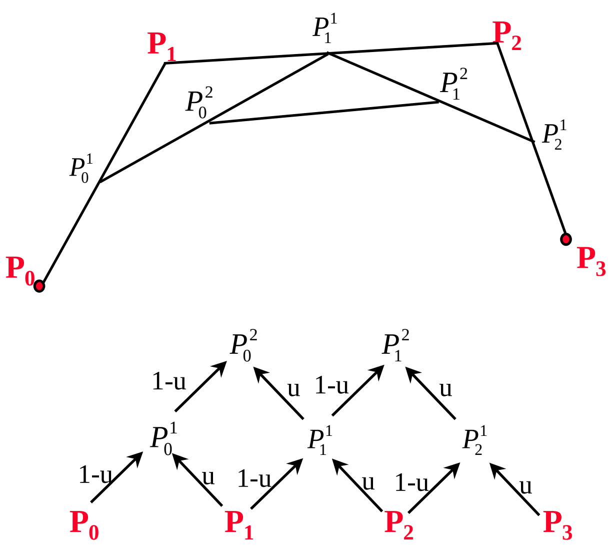


Curve di Bezier

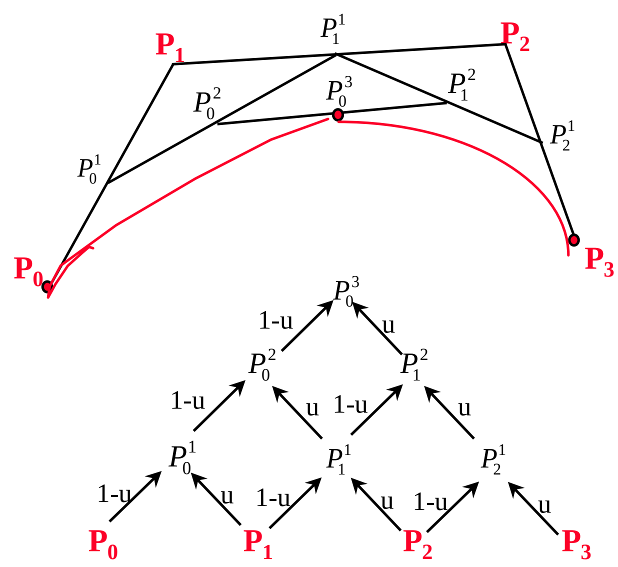
Algoritmo di De Casteljau (4/4)

- **Systolic Array:** vettore organizzato a triangolo in cui ciascuna riga riflette i livelli di ricorsione dell'algoritmo

Passo 3



Passo 4



$$P_0^3 = P_0^2(1-u) + P_1^2 u$$

Curve di Bezier

Riassumendo…

- **Dati necessari**
  - i punti che devono essere **approssimati** dalla curva e che definiscono il poligono caratteristico
- **Caratteristiche**
  - solo gli estremi del poligono appartengono alla curva
  - le tangenti agli estremi sono parallele al primo ed ultimo segmento del poligono
  - la curvatura negli estremi dipende rispettivamente dai primi e ultimi tre vertici del poligono
  - se il poligono è convesso la curva è sempre contenuta nella convessità del poligono (convex hull)
  - minimizza le oscillazioni, cioè non presentano ondulazioni distanti dai punti di controllo
  - è invariante per trasformazioni affini
  - carattere globale

Curve di Bezier

Osservazioni

- Il numero di punti di controllo determina il grado del polinomio, se voglio diminuire il grado devo ridurre il numero di punti di controllo

- La base di Bernstein ha natura globale → la modifica di un punto di controllo influisce su tutta la curva

→ Necessità di altre curve che danno la possibilità di modifica locale ma che mantenengono le buone proprietà delle curve di Bezier

Curve *B*-spline

- **Definizione**
- **Vettore dei nodi**
- **Caratteristiche**
- **Curve uniformi periodiche**
- **Curve uniformi non periodiche**
- **Curve non uniformi**
- **Riepilogo**

Curve *B*-spline

Definizione

Dati n+1 punti di controllo P_i , e un intero k, una curva B-spline è descritta da:

$$P(u) = \sum_{i=0}^{n} P_i N_{i,k}(u), \qquad 0 \le u \le (n+1) - (k-1) \ ,$$

Basi B-spline

dove:

- k (con $2 \le k \le n+1$) controlla il grado (k-1) delle funzioni polinomiali $N_{i,k}$(u)
- $N_{i,k}$(u) sono definite ricorsivamente dalla formula di Cox-deBoor:

$$N_{i,1}(u) = 1, \quad \text{se} \quad u_i \le u \le u_{i+1}$$
$$= 0, \quad \text{altrimenti}$$

u_i sono detti **nodi** (knots) e correlano il parametro u ai punti di controllo

$$N_{i.k}(u) = \frac{(u - u_i) N_{i,k-1}(u)}{u_{i+k-1} - u_i} + \frac{(u_{i+k} - u) N_{i+1,k-1}(u)}{u_{i+k} - u_{i+1}}$$

Curve *B*-spline

Caratteristiche

- L’intervallo del parametro u è diviso in n+k sottointervalli definiti da n+k+1 valori specificati nel vettore dei nodi $[u_0, u_1, \ldots, u_{n+k}]$
- n+1 punti di controllo ➡ la curva è descritta con n+1 funzioni di miscelamento
- Curva polinomiale a tratti, ogni tratto di grado k-1
- Ciascuna $N_{i,k}(u)$ è definita su k sottointervalli dell’intervallo u, iniziando dal valore u_i:

$$u_i \leq u \leq u_{i+k}$$

- Ciascun intervallo (u_i, u_{i+1}) è influenzato da al più k punti di controllo
- Ciascun punto di controllo può influenzare la forma di al più k segmenti di curva

Curve *B*-spline

Il vettore dei nodi caratterizza la curva B-spline

$U=\{u_0, u_1, u_2, \ldots, u_{n+k}\}$ n+k+1 nodi

- **Tre classificazioni generali per i vettori dei nodi:**
  - **uniforme periodico**
    - i valori dei nodi sono equamente spaziati
  - **uniforme non periodico (o aperto)**
    - i valori dei nodi intermedi sono equispaziati e agli estremi i valori dei nodi si ripetono con molteplicità uguale all’ordine k della curva
  - **non uniforme**
    - i valori dei nodi possono essere non equispaziati e ripetersi con molteplicità (anche internamente)

Curve *B*-spline

Uniformi periodiche

Curve B-spline uniformi periodiche

- **I valori dei nodi sono equamente spaziati**
- **Le curve non passano per i punti estremi di controllo**
- **Le funzioni di miscelamento si ripetono su intervalli successivi del parametro u**

Curve *B*-spline

Uniformi periodiche

Curve B-spline uniformi periodiche

Nodi e funzioni di miscelamento

- Spesso i nodi sono definiti con passo 1, iniziando dal valore 0

Esempio: n=3; k=3 → vettore dei nodi è [0 1 2 3 4 5 6].

- Ogni funzione di miscelamento successiva è una versione traslata della precedente, secondo:

$$N_{i,k}(u) = N_{i+1,k}(u + \Delta u) = N_{i+2,k}(u + 2\Delta u)$$

dove Δu = intervallo fra nodi adiacenti

Curve *B*-spline

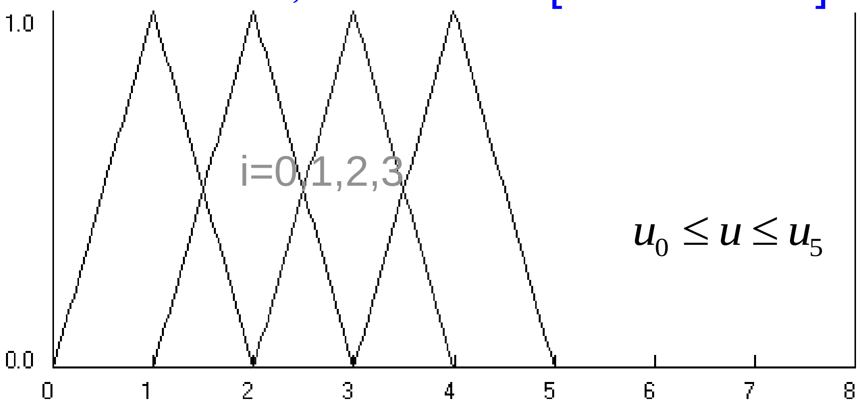
Uniformi periodiche

Funzioni base uniformi: esempi

n = 3

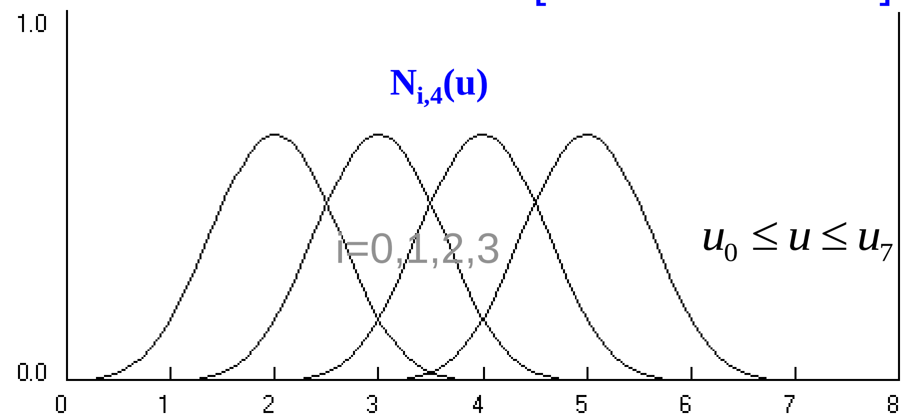
k=2

$N_{i,2}(u)$ nodi: [0 1 2 3 4 5]



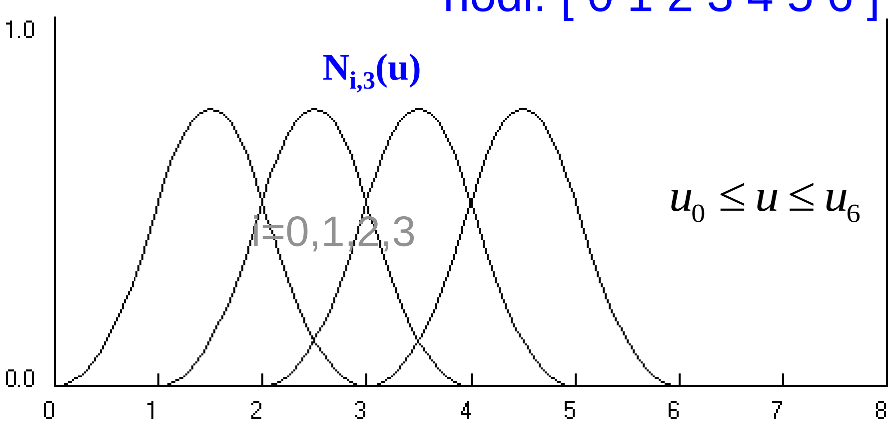
k=4

nodi: [0 1 2 3 4 5 6 7]



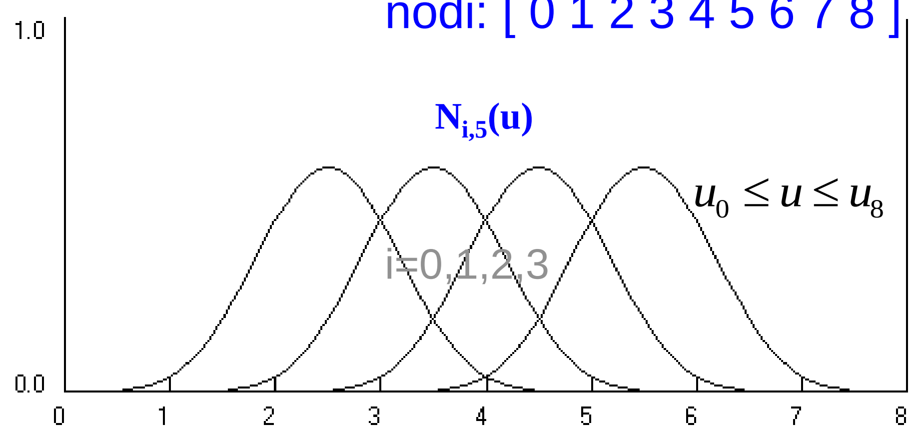
k=3

nodi: [0 1 2 3 4 5 6]



k=5

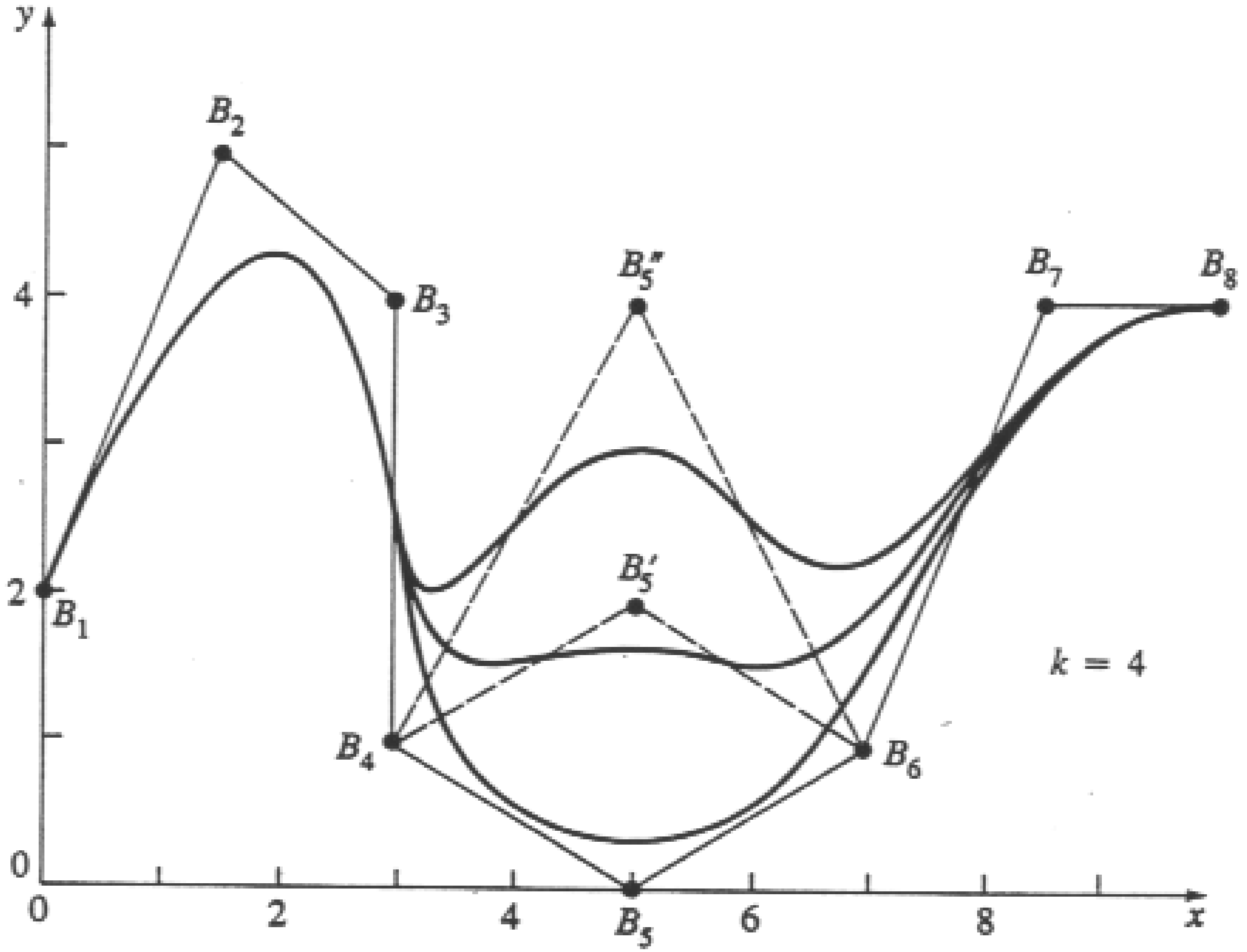
nodi: [0 1 2 3 4 5 6 7 8]



Curve *B*-spline

Uniformi non periodiche

Esempi: B-spline uniforme non periodica



Curve *B*-spline

Riassumendo…

- **Dati necessari**
  - punti che devono essere approssimati dalla curva e che definiscono il poligono caratteristico
  - grado della curva
  - Tipo, o per non uniformi: vettore nodale
- **Caratteristiche**
  - Se uniforme non periodica:
    - gli estremi del poligono appartengono alla curva
    - le tangenti agli estremi sono parallele al primo ed ultimo segmento del poligono
  - minimizza le oscillazioni, cioè non presentano ondulazioni distanti dai punti di controllo
  - è invariante per trasformazioni affini
  - carattere locale
  - indipendenza del grado della curva dal numero dei punti di controllo
  - contengono le Bezier come caso particolare (unif. non periodica con $k=n+1$)

Curve NURBS

- Non Uniform Rational B-Spline
- Hanno le caratteristiche analitiche e geometriche delle B-spline non razionali
- Forniscono una rappresentazione esatta di curve quadratiche (coniche) → notazione compatta
- In aggiunta, la curva è invariante rispetto a trasformazione prospettica

Curve NURBS

Definizione

Dati *n+1* punti di controllo P_i , una curva NURBS di ordine k è descritta da:

$$P(u) = \sum_{i=0}^{n} P_i R_{i,k}(u) \qquad\qquad 0 \leq u \leq n+2-k$$

dove:

- i P_i definiscono i PUNTI DI CONTROLLO
- $R_{i,k}(u)$ sono le funzioni base razionali e sono date da:

$$R_{i,k}(u) = \frac{N_{i,k}(u) w_i}{\sum_{i=0}^{n} N_{i,k}(u) w_i} \qquad \forall i \qquad w_i > 0$$

w_i sono i pesi (weights)

Le $N_{i,k}(u)$ sono le funzioni base B-spline definite su una base non uniforme

Modellazione per Curve e Superfici

Superfici Parametriche

Superfici

- **Superfici implicite – calcolo del vettore normale**
- **Superfici parametriche**
  - Calcolo del vettore normale
  - Sfera, ellissoide
  - Concetto di Patch
  - Superfici bicubiche
  - Superfici di Bezier
  - Superfici B-spline
  - Superfici NURBS

Superfici implicite

- **Definite da equazioni del tipo**

$$f(x, y, z) = 0$$

- **Calcolo del vettore normale (vettore gradiente):**

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} \partial f / \partial x \\ \partial f / \partial y \\ \partial f / \partial z \end{pmatrix}$$

Superfici parametriche

- **Definite da tre equazioni che dipendono da 2 parametri *0<u<1,0<v<1***

$$x = \phi_x(u, v),$$
$$y = \phi_y(u, v),$$
$$z = \phi_z(u, v).$$

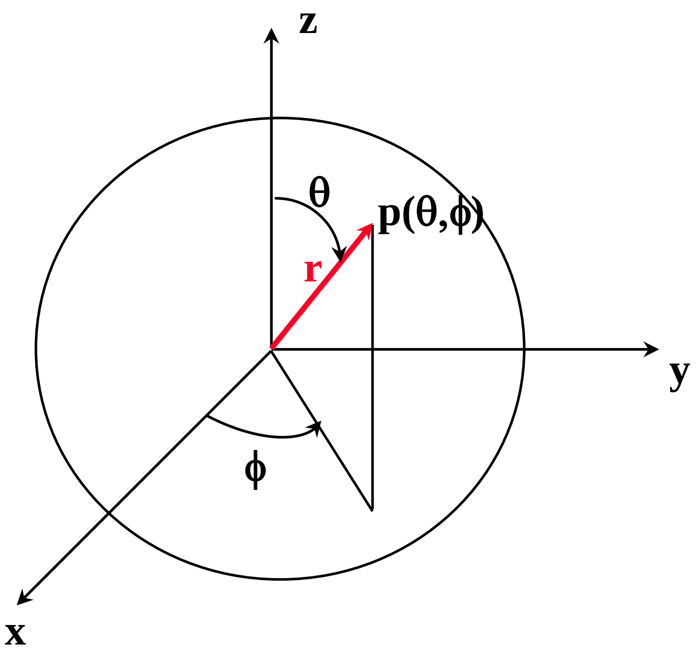
- **Calcolo del vettore normale:**

$$\vec{n} = \frac{\partial \phi}{\partial u} \times \frac{\partial \phi}{\partial v}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial u} = \begin{pmatrix} \partial \phi_x / \partial u \\ \partial \phi_y / \partial u \\ \partial \phi_z / \partial u \end{pmatrix} \qquad \frac{\partial \phi}{\partial v} = \begin{pmatrix} \partial \phi_x / \partial v \\ \partial \phi_y / \partial v \\ \partial \phi_z / \partial v \end{pmatrix}$$

Superfici quadriche: Sfera

- **Superficie quadrica**
- **Vari tipi di rappresentazione:**
  - Rappresentazione cartesiana implicita
  - Rappresentazione in coordinate polari
    ←→ rappresentazione parametrica
    Parametri: 2 angoli



- **Rappresentazione parametrica:**

$$x = r\sin\theta\cos\phi, \qquad 0 \le \theta \le \pi$$

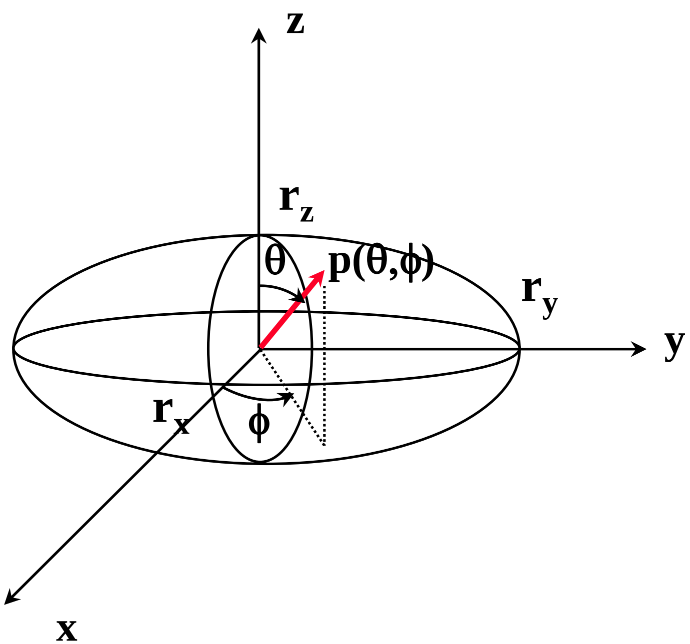
$$y = r\sin\theta\sin\phi, \qquad -\pi < \phi \le \pi$$

$$z = r\cos\theta$$

Superfici quadriche: Ellissoide

- **Superficie quadrica**
- **Vari tipi di rappresentazione:**
  - – Rappresentazione cartesiana implicita
  - – Rappresentazione in coordinate polari ←→ rappresentazione parametrica

    Parametri: 2 angoli



- **Rappresentazione parametrica:**

$$x = r_x \sin\theta \cos\phi, \qquad 0 \le \theta \le \pi$$

$$y = r_y \sin\theta \sin\phi, \qquad -\pi < \phi \le \pi$$

$$z = r_z \cos\theta$$

θ colatitudine (π/2-θ latitudine)

ϕ longitudine

Concetto di “patch”

- **Porzione di superficie delimitata da 4 curve, dette curve di contorno (boundary curves) definite in modo parametrico**

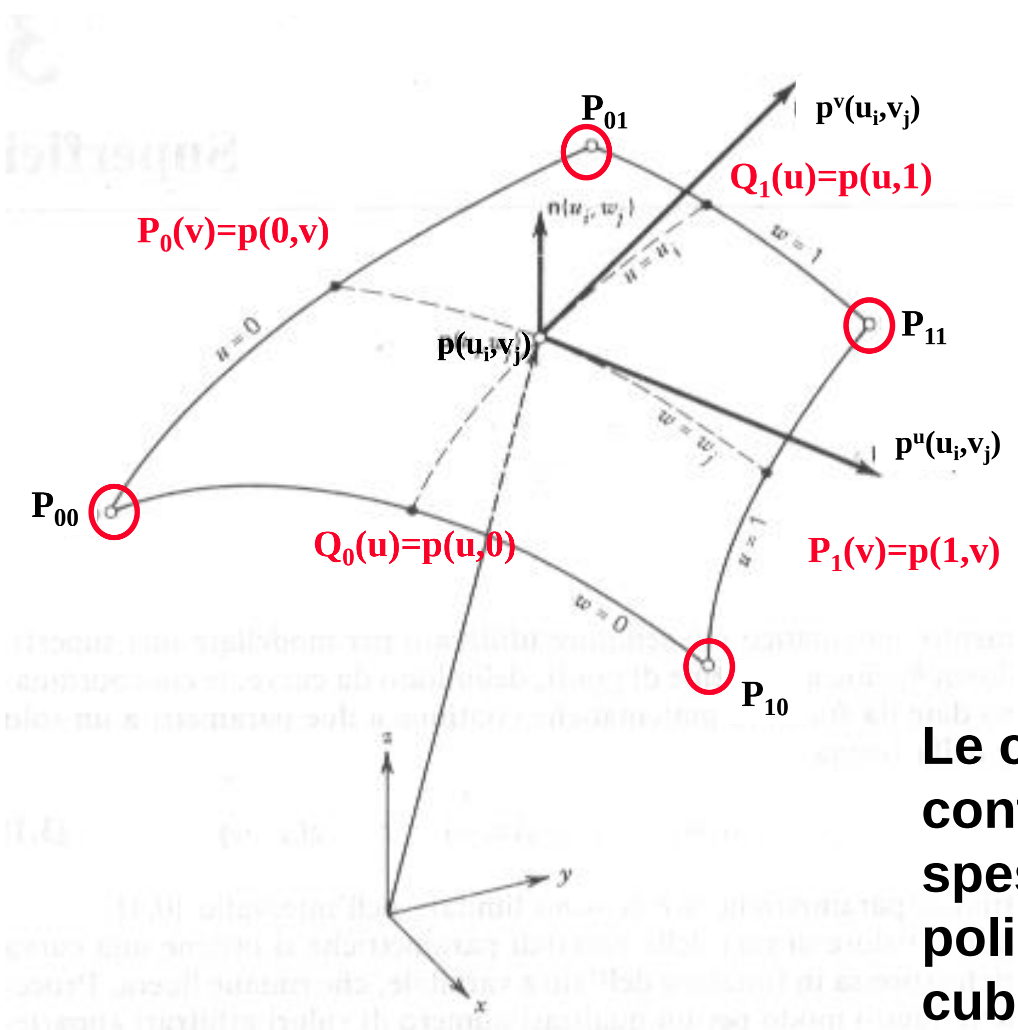
- **Rappresentazione parametrica:**

$$P=P(u,v) \Leftrightarrow \begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \\ z = z(u,v) \end{cases} \qquad 0 \le u,v \le 1$$

- **Condizioni al contorno**
  – punti angolari ⇒ p(0,0), p(0,1), p(1,0) p(1,1)
  – curve di contorno ⇒ p(u,0), p(u,1), p(0,v), p(1,v)

- **Superficie complessa vista come unione di patch su domini parametrici “rettangolari”**

Patch parametrico



Le curve di contorno sono spesso curve polinomiali (es. cubiche)

Superfici bicubiche

- **Forma parametrica di un patch bicubico**

$$p(u,v) = \sum_{i=0}^{3}\sum_{j=0}^{3} a_{ij}\, u^i v^j \qquad u,v \in [0,\ 1]$$

coefficienti algebrici

16 coefficienti vettoriali
←→ 48 coeff. scalari

- **… per esteso**

$$\begin{aligned} p(u,v) = {} & a_{33}u^3v^3 + a_{32}u^3v^2 + a_{31}u^3v + a_{30}u^3 + \\ & a_{23}u^2v^3 + a_{22}u^2v^2 + a_{21}u^2v + a_{20}u^2 + \\ & a_{13}uv^3 + a_{12}uv^2 + a_{11}uv + a_{10}u + \\ & a_{03}v^3 + a_{02}v^2 + a_{01}v + a_{00} \end{aligned}$$

Superfici di Bezier

- **Una superficie di Bezier è definita dalla rappresentazione parametrica:**

$$P(u,v) = \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} P_{i,j} B_{i,m}(u) B_{j,n}(v) \qquad u,v \in [0,1]$$

dove:

  – i $\boldsymbol{P}_{i,j}$ sono i vertici del poliedro caratteristico (detto **poliedro di controllo**) e formano una matrice (m+1) x (n+1)

  – $B_{i,m}(u)$ e $B_{j,n}(v)$ sono le funzioni base di Bernstein

Superfici di Bezier

Ricordiamo ...

- **Polinomi di Bernstein:** grado m in u, grado n in v

$$B_{i,m}(u) = C(m,i)u^i(1-u)^{m-i}$$ **i=0,1,…m**

$$C(m,i) = \frac{m!}{i!(m-i)!}$$ **coefficiente binomiale**

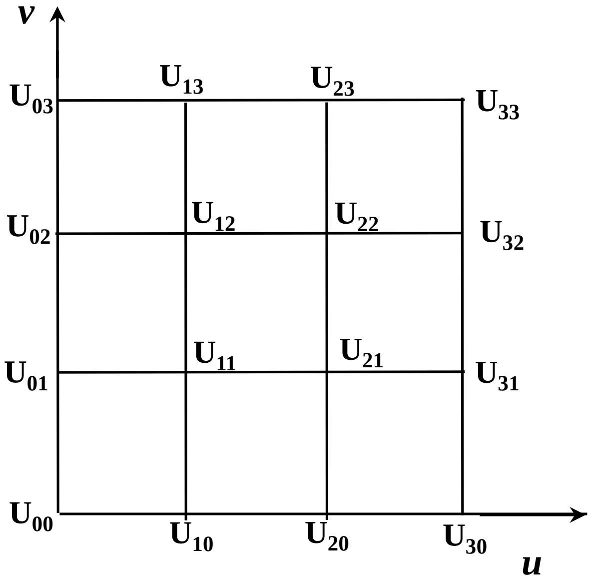
$$B_{j,n}(v) = C(n,j)v^j(1-v)^{n-j}$$ **j=0,1,…n**

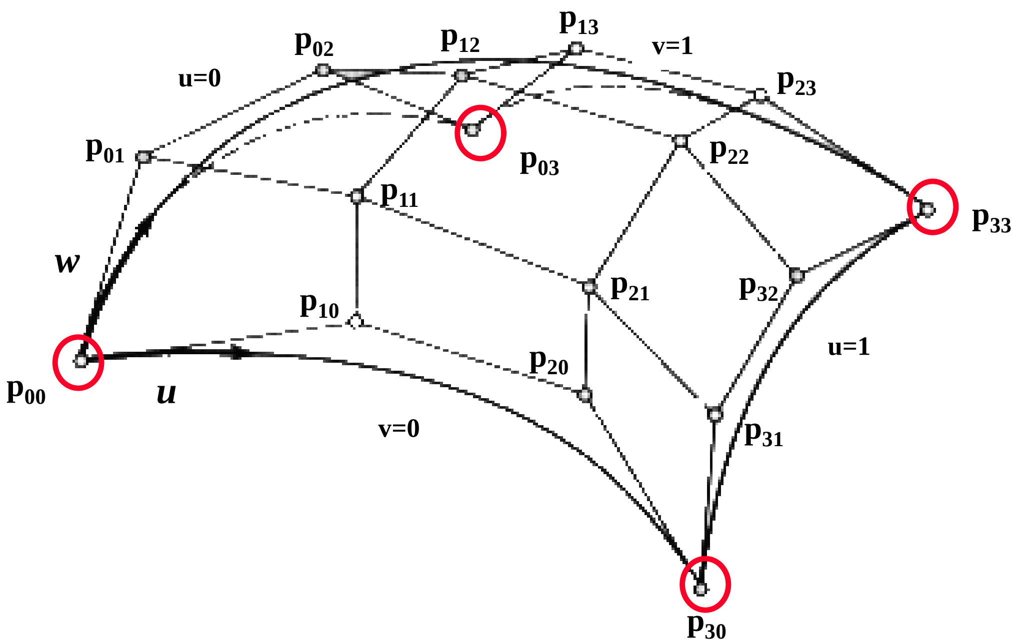
$$C(n,j) = \frac{n!}{j!(n-j)!}$$ **coefficiente binomiale**

Superfici di Bezier

Esempio

Superficie bicubica di Bezier
n=3
m=3





Superfici di Bezier

Proprietà delle superfici di Bezier (1/2)

- **Interpolazione con i punti estremi**
  - la superficie passa per i 4 punti agli angoli del poliedro di controllo
- **Condizioni di tangenza**
  - le 4 curve sui bordi della superficie sono cotangenti al primo e ultimo segmento di ciascun poligono di controllo per ciascuna curva, nel primo ed ultimo punto di controllo.
- **Convex Hull**
  - la superficie di Bezier è contenuta nel Convex Hull del suo poliedro di controllo per

$$0 \le u \le 1 \text{ e } 0 \le v \le 1$$

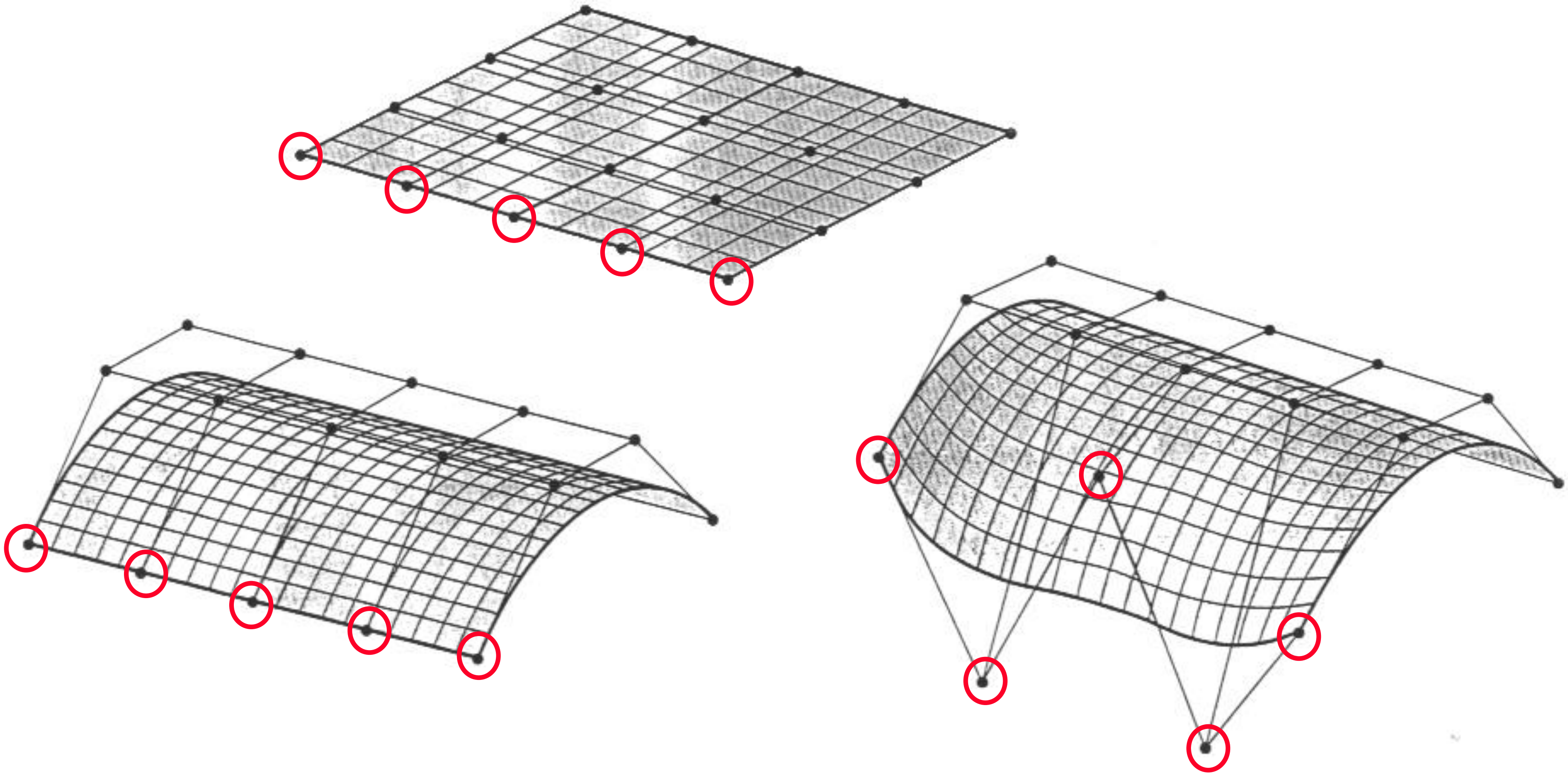
Superfici di Bezier

Proprietà delle superfici di Bezier (2/2)

- **Precisione planare**
  - se tutti i punti del poliedro di controllo giacciono in un piano, la superficie giace nello stesso piano
  - se tutti i punti del poliedro di controllo formano una linea retta, la superficie si riduce ad una linea retta
- **Invarianza per trasformazioni affini**
  - qualsiasi trasformazione affine del poliedro di controllo definisce una nuova superficie che è la trasformazione affine della superficie originale

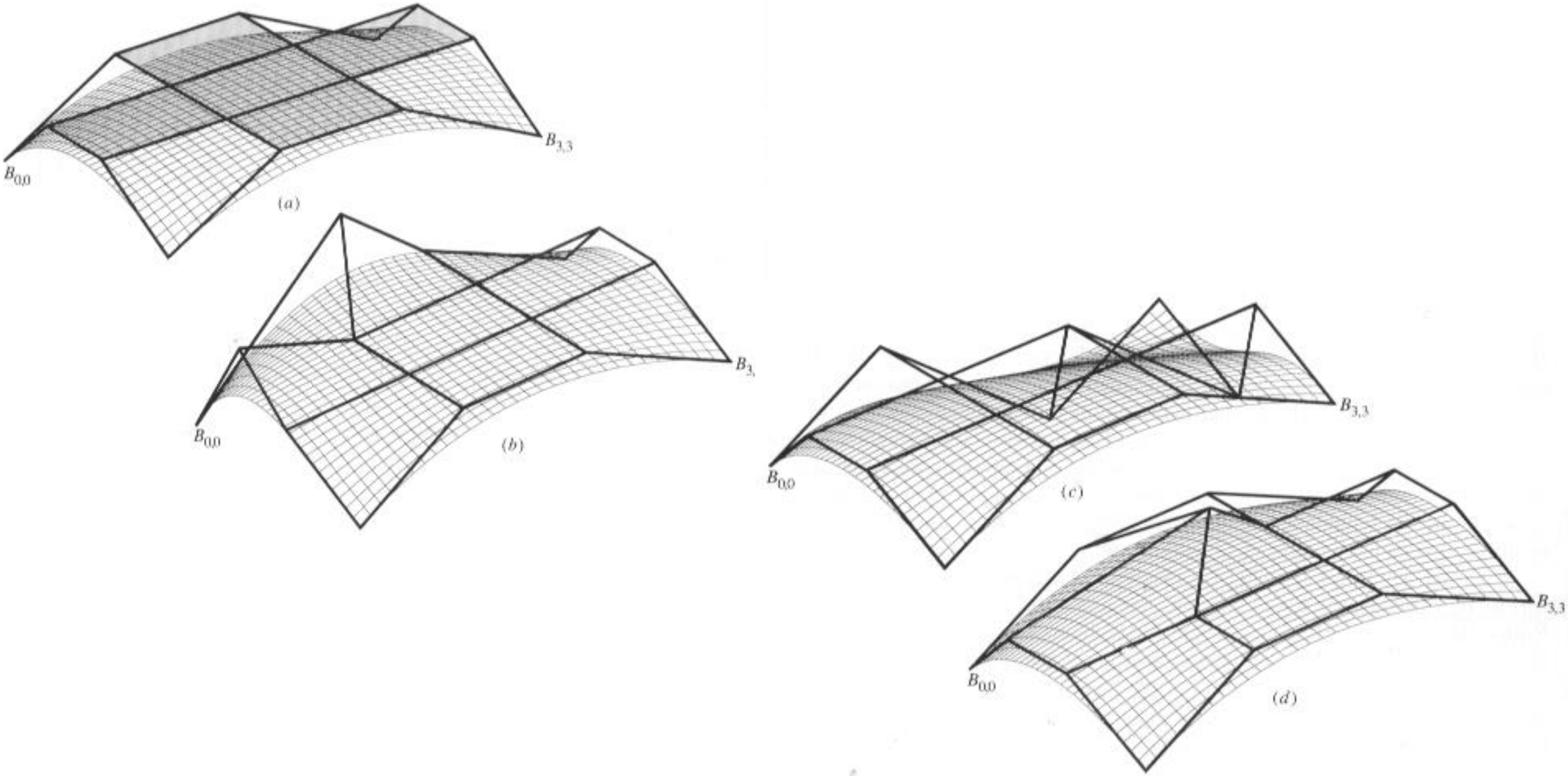
Superfici di Bezier

Esempi: modifica dei punti di controllo (1/2)



Superfici di Bezier

Esempi: modifica dei punti di controllo (2/2)



Superfici B-spline

- **Una superficie B-spline è definita dalla rappresentazione parametrica:**

$$p(u,v)=\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} p_{ij} N_{i,k}(u) N_{j,l}(v) \qquad \begin{array}{l} 0 \le u < m+2-k \\ 0 \le v < n+2-l \end{array}$$

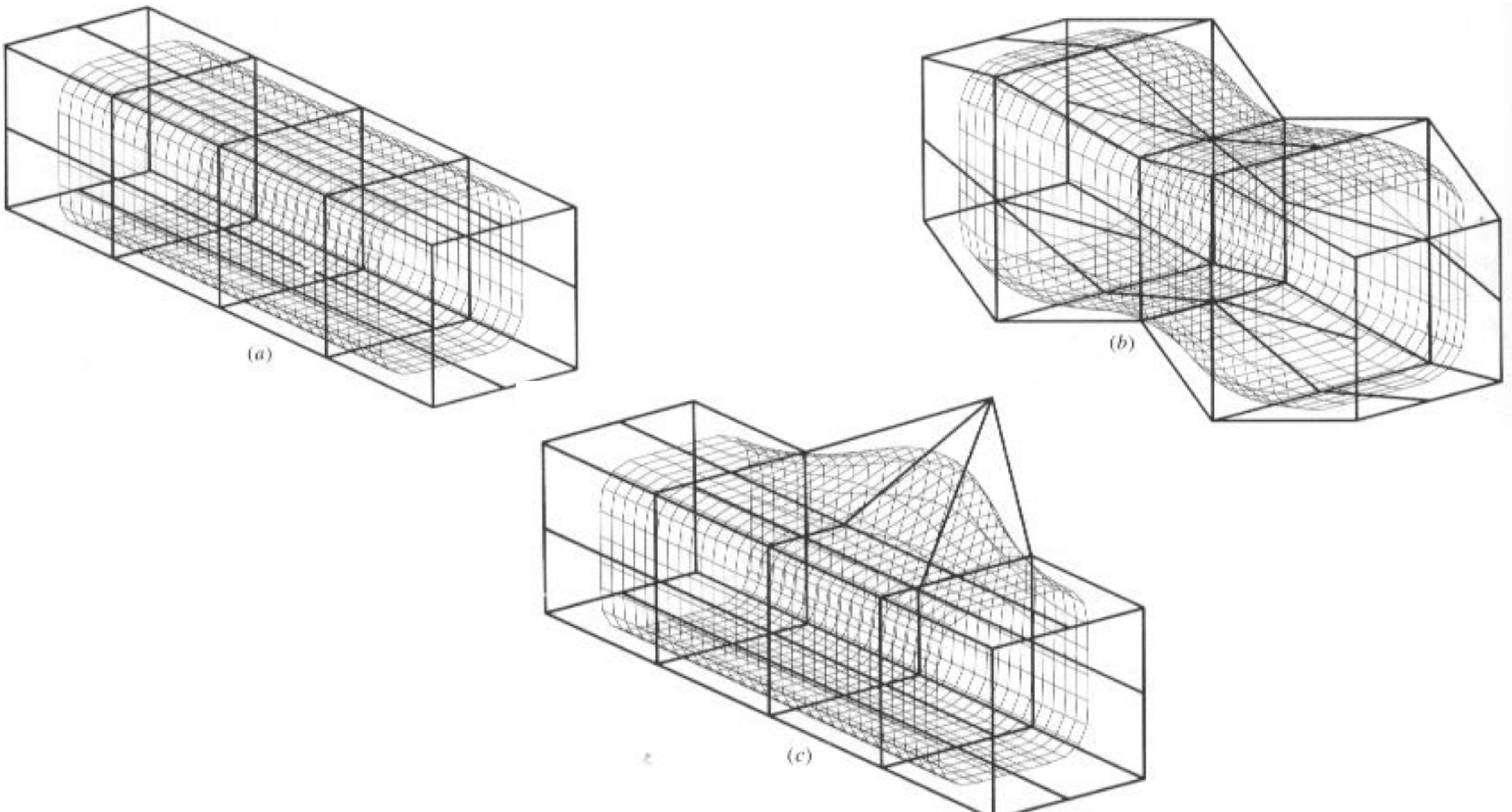
dove:

- i $\mathbf{P}_{i,j}$ sono i vertici del poliedro caratteristico e formano un array rettangolare (m+1) x (n+1)
- $N_{i,k}(u)$ e $N_{j,l}(v)$ sono le funzioni base B-spline
- $N_{i,k}(u)$ e $N_{j,l}(v)$ polinomiali a tratti,

  ogni tratto di grado rispettivamente *k-1* e *l-1*

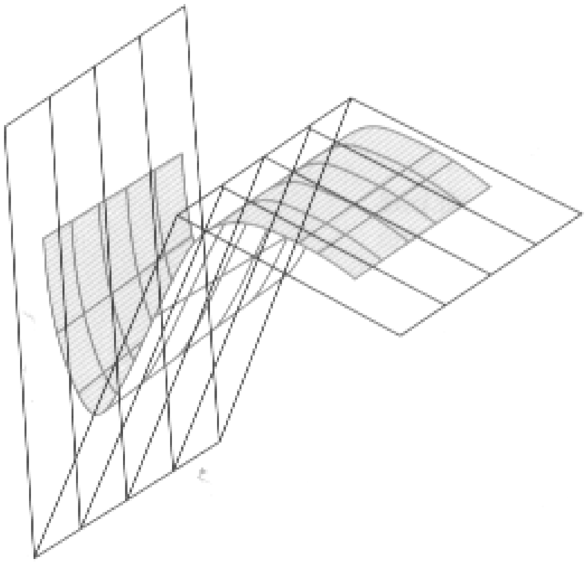
Superfici B-spline

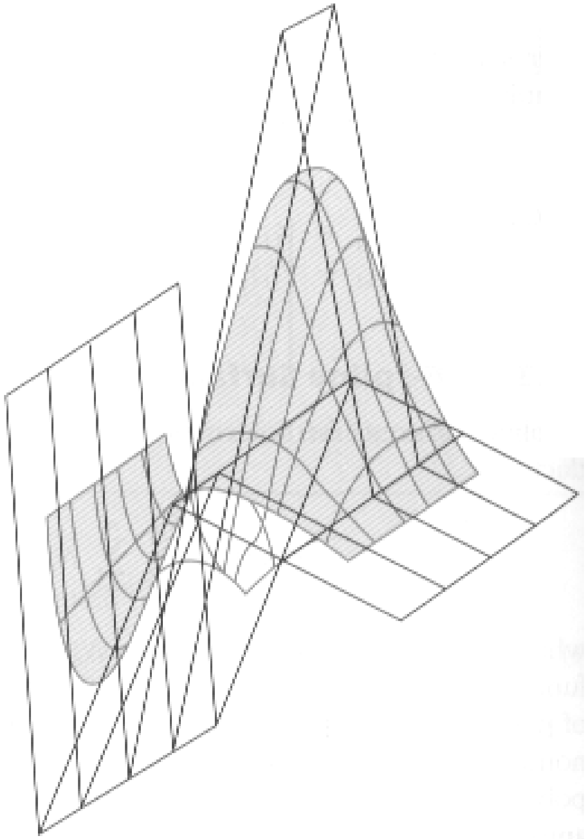
Superfici B-spline uniformi periodiche chiuse



Superfici B-spline

B-spline: controllo locale





Superfici NURBS

- **Una superficie NURBS è definita dalla rappresentazione parametrica:**

$$\mathbf{P}(u,v) = \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} \mathbf{P}_{ij} R_{i,j}(u,v) \qquad \begin{aligned} 0 \le u < m+2-k \\ 0 \le v < n+2-l \end{aligned}$$

dove:

- i $\mathbf{P}_{i,j}$ sono i vertici del poliedro caratteristico e formano un array rettangolare (m+1) x (n+1)
- $R_{i,j}$ (u,v) sono le *funzioni base razionali* e sono date da:

$$R_{i,j}(u,v) = \frac{w_{i,j} N_{i,k}(u) N_{j,l}(v)}{\sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} w_{i,j} N_{i,k}(u) N_{j,l}(v)} \qquad \forall i,j \quad w_{i,j} > 0$$

- Il grado di $N_{i,k}$ (u) e $N_{j,l}$ (v) è controllato da *k* e *l*

Superfici NURBS

Esempi