Analisi 1

Luca Fagaraz

27 dicembre 2025

Indice

1 Logica **7**
- 1.1 Relazioni . . . 7
- 1.5 Insiemi numerici . . . 7
- 1.9 Strutture algebriche . . . 7
- 1.15 Sommatorie e produttorie . . . 8
- 1.17 Principio di induzione . . . 8
  - 1.17.1 Disuguaglianza di Bernoulli . . . 9
  - 1.17.2 Fattoriale . . . 9
- 1.21 Cardinalità infinite . . . 10

2 Trigonometria iperbolica **13**

3 Numeri complessi **15**
- 3.1 Introduzione . . . 15
- 3.10 Forma trigonometrica . . . 16
- 3.14 Radici n-esime . . . 17
- 3.21 Struttura algebrica di $\mathbb{C}$ . . . 20

4 Successioni **21**
- 4.1 Introduzione . . . 21
- 4.8 Unicità del limite . . . 23
- 4.9 Permanenza del segno . . . 23
- 4.10 Teorema del confronto . . . 24
- 4.11 Monotonia . . . 24
- 4.13 Numero di Eulero . . . 25
- 4.16 Sottosuccessioni . . . 26
- 4.21 Limite superiore e limite inferiore . . . 27
- 4.26 Proprietà dei limiti . . . 27
- 4.28 Aritmetica estesa . . . 28
  - 4.28.1 Forme indeterminate . . . 28
- 4.29 Limiti notevoli . . . 29
- 4.31 Gerarchie di infinito . . . 32
- 4.32 Asintoticità . . . 33
  - 4.41.1 Formula di De Moivre-Stirling . . . 34
- 4.42 Continuità per successioni di alcune funzioni . . . 34
  - 4.42.1 Formula di Cesaro . . . 35
- 4.43 Asintotici di esponenziali e logaritmi . . . 36
- 4.44 Successioni di Cauchy . . . 37
- 4.47 Spazi metrici . . . 39

5 Serie numeriche **41**
5.1 Introduzione . . . 41
5.8 Serie telescopiche . . . 43
5.8.1 Serie di Mengoli . . . 43
5.9 Serie a termini positivi . . . 43
5.13 Serie geometrica . . . 44
5.14 Rappresentazione decimale dei reali . . . 44
5.17 Serie armonica . . . 45
5.19 Formula di Eulero-Mascheroni . . . 46
5.21 Serie armonica generalizzata . . . 46
5.22 Criterio del confronto asintotico . . . 47
5.23 Serie campione . . . 47
5.24 Criteri del rapporto e della radice . . . 47
5.25 Serie fattoriale . . . 48
5.27 Criterio di Leibniz . . . 49
5.29 Criterio di Dirichlet . . . 49
5.30 Convergenza assoluta . . . 50
5.33 Riordinamenti . . . 50
5.38 Funzione Zeta di Riemann . . . 50

6 Funzioni Reali **51**
6.1 Topologia . . . 51
6.14 Limiti . . . 53
6.14.1 Introduzione . . . 53
6.16.1 Teoremi sui limiti . . . 54
6.22.1 Continuità . . . 54
6.36.1 Prolungamento per continuità . . . 58
6.37 Teoremi sulle funzioni continue . . . 58
6.44 Continuità uniforme . . . 61
6.48 Continuità di Lipschitz . . . 61

7 Derivate **63**
7.1 Introduzione . . . 63
7.4 Differenziabilità . . . 63
7.7 Operazioni con le derivate . . . 65
7.12 Teorema di Fermat . . . 66
7.15 La funzione derivata . . . 66
7.20 Derivate successive . . . 67
7.24 Teoremi sulle funzioni derivabili . . . 67
7.27 Funzioni convesse . . . 70
7.38 Sviluppi di Taylor . . . 74
7.38.1 Approssimazione di una funzione . . . 74
7.38.2 Polinomio di Taylor . . . 75
7.42 Teorema di de l'Hôpital . . . 77
7.43 Algebra degli o-piccoli . . . 77

8 Integrali **79**
8.1 L'integrale di Riemann . . . 79
8.2 Costruzione dell'integrale di Riemann . . . 79
8.29 Classi di funzioni integrabili . . . 84
8.31 Integrale definito . . . 85
8.36 Primitiva . . . 86
8.45 Teorema fondamentale del calcolo integrale . . . 86
8.46 Media integrale . . . 87
8.48 Integrazione per parti . . . 87

8.49 Funzione integrale 88

8.54 Cambio di variabili 89

8.55 Integrale indefinito 90

8.61 Applicazione degli integrali allo studio delle serie numeriche 91

8.61.1 Esercizi svolti 94

8.67 Integrale improprio (generalizzato) 95

8.84.1 Esercizi svolti 98

9 Successioni e serie di funzioni 101

9.1 Successioni di funzioni 101

9.12.1 Convergenza uniforme 103

9.16 Serie di funzioni 105

9.17.1 Convergenza totale 105

9.18.1 Serie di potenze 106

Capitolo 1

Logica

1.1 Relazioni

Definizione 1.2 (Prodotto cartesiano)**.** *Siano A e B due insiemi. Si definisce* ***prodotto cartesiano*** *di A e B l'insieme di coppie ordinate:*

$$A \times B = \{(a, b) \ : \ a \in A \land b \in B\}$$

Definizione 1.3 (Relazione)**.** *Dati due insiemi A e B si definisce* ***relazione*** *$\mathfrak{R}$ tra A e B un sottoinsieme del prodotto cartesiano $A \times B$. Diciamo che $\mathfrak{R}$* ***associa*** *un elemento $a \in A$ a $b \in B$ se $(a, b) \in \mathfrak{R}$.*

Notazione 1. $A\mathfrak{R}B$

Definizione 1.4 (Funzione)**.** *Dati due insiemi A e B, una funzione f è una relazione che a un elemento di A associa al più un elemento di B.*

Notazione 2. $f : A \to B$

1.5 Insiemi numerici

Definizione 1.6 (Estremo superiore)**.** *Sia $A \subset \mathbb{R}$, si definisce estremo superiore di A:*

- $\sup_A := l \in \mathbb{R} \iff l \geqslant a \ \forall a \in A \ \land \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists a \in A \ : \ a \geqslant l - \varepsilon$
- $\sup_A := +\infty \iff \forall M > 0 \ \exists a \in A \ : \ a > M$

Definizione 1.7 (Massimo)**.** *Sia $A \subset \mathbb{R}$, si definisce massimo di A:*

$$\max A = M \in \mathbb{A} \ : \ M \geqslant a \ \forall a \in \mathbb{A}$$

Osservazione 1.8. *Se $\sup_A \in \mathbb{A}, \sup_A = \max A$.*

Assioma 1 (Assioma di completezza)**.** *Sia $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, con A superiormente limitato. A ammette estremo superiore in $\mathbb{R}$.*

1.9 Strutture algebriche

Definizione 1.10 (Campo)**.**

Definizione 1.11 (Relazione d'equivalenza)**.**

Definizione 1.12 (Relazione d'ordine)**.**

Definizione 1.13 (Campo ordinato)**.**

Definizione 1.14 (Campo ordinato completo)**.**

1.15 Sommatorie e produttorie

Notazione 3. *Sia* $n \in \mathbb{N}_0$*:*

- $\displaystyle\sum_{n=1}^{m} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_m$
- $\displaystyle\prod_{n=1}^{m} b_n = b_1 \cdot b_2 \cdot \cdots \cdot b_m$

Proposizione 1.16.

(I) $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} ca_j = c\sum_{j=1}^{n} a_n \ \forall c \in \mathbb{C}$

(II) $\displaystyle\prod_{j=1}^{n} cb_j = c^n \prod_{j=1}^{n} b_j \ \forall c \in \mathbb{C}$

(III) $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_j + \sum_{j=1}^{n} b_j = \sum_{j=1}^{n}(a_j + b_j)$

(IV) $\displaystyle\left(\prod_{j=1}^{n} a_j\right) \cdot \left(\prod_{j=1}^{n} b_j\right) = \prod_{j=1}^{n}(a_j \cdot b_j)$

(V) $\displaystyle\sum_{j=1}^{n+1} a_j = a_{n+1} + \sum_{j=1}^{n} a_j$

(VI) $\displaystyle\prod_{j=1}^{n+1} b_j = b_{n+1} \cdot \prod_{j=1}^{n} b_j$

(VII) $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_j = \sum_{j=1+m}^{n+m} a_{j-m} \ \forall m \in \mathbb{N}$

(VIII) $\displaystyle\prod_{j=1}^{n} b_j = \prod_{j=1+m}^{n+m} b_{j-m} \ \forall m \in \mathbb{N}$

(IX) $\displaystyle\sum_{j=0}^{n} a_j = \sum_{j=0}^{n} a_{n-j}$

(X) $\displaystyle\prod_{j=0}^{n} b_j = \prod_{j=0}^{n} b_{n-j}$

1.17 Principio di induzione

Principio 1 (Principio di induzione)**.** *Sia* $p(n)$ *una proposizione, con* $n \in \mathbb{N}$*. Se:*

- $p(n_0)$ *è verificata, con* $n_0 \in \mathbb{N}$
- *se* $p(n)$ *è vera, allora* $p(n+1)$ *è vera*

allora $p(n)$ *è vera* $\forall n \geqslant n_0$*.*

1.17.1 Disuguaglianza di Bernoulli

Teorema 1 (Disuguaglianza di Bernoulli). *Sia $x \in \mathbb{R}$ con $x > -1$, allora:*

$$(1+x)^n \geqslant 1 + nx \ \forall n \geqslant 1$$

Dimostrazione. Si proceda per induzione:

- $n = 1$: $(1+x) \geqslant 1 + x$
- si supponga ora vera $P(n)$:

$$\begin{aligned}(1+x)^{n+1} = (1+x)(1+x)^n \geqslant (1+x)(1+nx) &= 1 + x(n+1) + \underset{\overset{\geqslant}{0}}{nx^2} \\ &\geqslant 1 + x(n+1)\end{aligned}$$

□

1.17.2 Fattoriale

Definizione 1.18. *Sia $n \in \mathbb{N}$, si definisce **fattoriale** di n:*

$$n! := \begin{cases} 1 \ \text{se } n = 0 \\ n(n-1) \ \text{se } n > 0 \end{cases}$$

Definizione 1.19. *Siano $k, m \in \mathbb{N}$ t.che $0 \leqslant k \leqslant n$, si definisce **coefficiente binomiale**:*

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Proposizione 1.20. *Siano $0 \leqslant k \leqslant m$:*

(I) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ *(simmetria)*

(II) $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$ *(formula di Stiffer)*

Dimostrazione. □

Teorema 2 (Formula del binomio di Newton). *Sia $n \in \mathbb{N}_0$ e $a, b \in \mathbb{C}$, allora:*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Dimostrazione. Si proceda per induzione:

- $(a+b)^0 = 1 \cdot a^0 b^0 = 1$

- Si supponga ora vera $P(n)$:

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} = (a+b)(a+b)^n &= (a+b)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{k+1}b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n+1-k} \\
&= \sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k-1}a^k b^{n+1-k} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n+1-k} \\
&= \binom{n+1}{n}a^{n+1}b^0 + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k-1}a^k b^{n+1-k} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n+1-k} + \binom{n}{0}a^0 b^{n+1} = \\
&= \binom{n+1}{n+1}a^{n+1}b^0 + \sum_{k=1}^{n}\left[\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}\right]a^k b^{n+1-k} + \binom{n}{0}a^0 b^{n+1} = \\
&= \binom{n+1}{n+1}a^{n+1}b^0 + \sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k}a^k b^{n+1-k} + \binom{n}{0}a^0 b^{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}a^k b^{n+1-k}
\end{aligned}$$

□

1.21 Cardinalità infinite

Definizione 1.22. *Due insiemi A e B sono **equipotenti** (o hanno la stessa cardinalità) se esiste una funzione $f : A \to B$ biunivoca.*

Notazione 4. $A \sim B$

Osservazione 1.23. *L'equipotenza è una relazione di equivalenza.*

Notazione 5. $P_n := \{1, 2, 3, \ldots, n\}$,

Definizione 1.24. *Sia $P_n = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$, un insieme A si dice **finito** se $\exists n_0 \in \mathbb{N} \ : \ A \sim P_{n_0}$*

Osservazione 1.25. *Se n_0 esiste, è unico.*

Definizione 1.26. *Si definisce n il **cardinale** di P_n.*

Notazione 6. $|P_n| = n$, $\#P_n = n$

Proposizione 1.27. *Siano A e B due insiemi, $|A| < |B|$ se non esiste una biezione tra A e B e $\exists C \subset B \ : \ A \sim C$.*

Teorema 3. *Ogni insieme infinito contiene una copia di $\mathbb{N}$, dove per copia si intende un sottoinsieme $C \sim \mathbb{N}$.*

Osservazione 1.28. *$|\mathbb{N}|$ è la più piccola cardinalità non finita.*

Definizione 1.29. *Si definisce la cardinalità di $\mathbb{N}$ **cardinalità numerabile**.*

Notazione 7. $|\mathbb{N}| = \aleph_0$

Teorema 4. $\mathbb{N} \sim \mathbb{Z}$

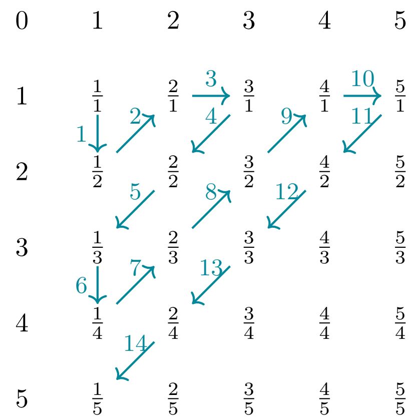
Dimostrazione. È sufficiente associare ogni intero a un naturale ordinandoli in tal modo:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & 1 & -1 & 2 & -2 & 3 & -3 & 4 & -4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{array}$$

□

Teorema 5. $|\mathbb{Q}| = \aleph_0$

Dimostrazione.



□

Teorema 6. $\mathbb{R}$ *non è numerabile.*

Dimostrazione (Diagonalizzazione di Cantor). Si dimostrerà che $[0,1]$ non è numerabile. Si supponga di aver trovato un'enumerazione del suddetto insieme. È possibile comunque trovare un nuovo numero nel seguente modo:

$$\begin{array}{l} 0.3\,7\,8\,2\,0\,2\,\cdots \\ \quad\searrow{+1} \\ 0.4\,4\,7\,9\,2\,6\,\cdots \\ \quad\searrow{+1} \\ 0.2\,2\,0\,4\,4\,8\,\cdots \\ \quad\searrow{+1} \\ 0.1\,5\,7\,6\,0\,2\,\cdots \\ \quad\searrow{+1} \\ 0.6\,2\,2\,0\,2\,9\,\cdots \\ \quad\searrow{+1} \\ 0.8\,1\,1\,2\,3\,1\,\cdots \\ \hline 0.4\,5\,1\,7\,3\,2\,\cdots \end{array}$$

□

Teorema 7 (Teorema di Cantor)**.** *Dato un qualsiasi insieme A si ha che $|A| < |\wp(A)|$.*

Osservazione 1.30. $|\wp(\mathbb{N})| = |\mathbb{R}|$. *In particolare, $|\mathbb{R}|$ è detta* ***cardinalità del continuo****.*

Notazione 8. $|\mathbb{R}| = \mathfrak{C}$

Dimostrazione. P.A. si supponga che esista $f : A \to \wp(A)$ biunivoca. Allora sia B il sottoinsieme di A così definito:

$$B := \{a \in A \ : \ a \notin f(a)\}$$

dato che f è biunivoca, $\exists b \in A \ : \ f(b) = B$. È facilmente verificabile che b non può né appartenere né non appartenere a B, il che è un assurdo. $\square$

Capitolo 2

Trigonometria iperbolica

Definizione 2.1 (Coseno iperbolico)**.** *Si definisce* ***coseno iperbolico*** *la funzione* $\cosh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*:*

$$\cos x := \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Definizione 2.2 (Seno iperbolico)**.** *Si definisce* ***seno iperbolico*** *la funzione* $\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*:*

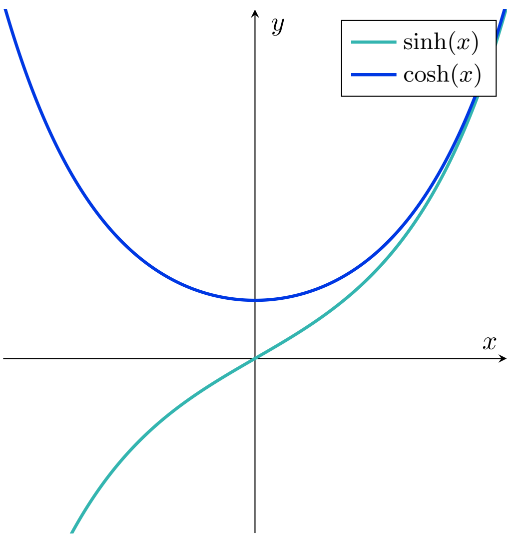
$$\sinh x := \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

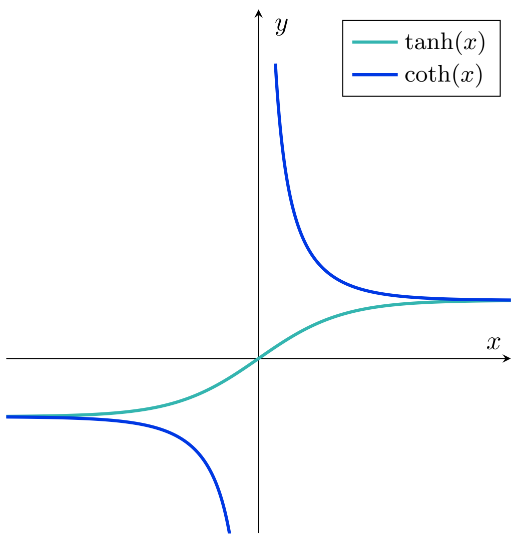
Definizione 2.3 (Tangente iperbolica)**.** *Si definisce* ***tangente iperbolica*** *la funzione* $\tanh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*:*

$$\tanh x := \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

Definizione 2.4 (Cotangente iperbolica)**.** *Si definisce* ***cotangente iperbolica*** *la funzione* $\tanh : \mathbb{R}_0 \to \mathbb{R}$*:*

$$\coth x := \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$





Proposizione 2.5.

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1 \ \forall x \in \mathbb{R}$$

Proposizione 2.6. *Siano* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$*:*

- $\sinh(\alpha + \beta) = \sinh\alpha \cosh\beta + \sinh\beta \cosh\alpha$
- $\cosh(\alpha + \beta) = \cosh\alpha \cosh\beta + \sinh\alpha \sinh\beta$

Dimostrazione. □

Corollario 1. *Siano* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$*:*

- $\sinh(\alpha - \beta) = \sinh\alpha \cosh\beta - \sinh\beta \cosh\alpha$
- $\cosh(\alpha - \beta) = \cosh\alpha \cosh\beta - \sinh\alpha \sinh\beta$

Corollario 2. *Sia* $\alpha \in \mathbb{R}$*:*

- $\sinh(2\alpha) = 2\sinh\alpha \cosh\alpha$
- $\cosh(2\alpha) = \cosh^2\alpha + \sinh^2\alpha$

Proposizione 2.7. *Sia* $\alpha \in \mathbb{R}$*:*

- $\sinh\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \mathrm{sgn}(\alpha)\sqrt{\frac{\cosh\alpha - 1}{2}}$
- $\cosh\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\frac{\cosh\alpha + 1}{2}}$

Dimostrazione. □

Proposizione 2.8. *La funzione* $\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *è invertibile e l'inversa è data da:*

Capitolo 3

Numeri complessi

3.1 Introduzione

Definizione 3.2. *Definiamo l'insieme dei numeri complessi* $\mathbb{C}$ *come:*

$$\mathbb{C} := \{x + iy \ : \ x, y \in \mathbb{R}\}$$

con $i \in \mathbb{C}$ *t.che* $i^2 = -1$

Definizione 3.3. *Dato* $z = a+ib \in \mathbb{C}$*, definiamo* ***parte reale*** *e* ***parte immaginaria*** *di* z *rispettivamente i numeri:*

$$\Re(z) = a$$
$$\Im(z) = b$$

Osservazione 3.4.

$$z = w \iff \begin{cases} \Re(z) = \Re(w) \\ \Im(z) = \Im(w) \end{cases}$$

Definizione 3.5. *Dati* $z = a + ib$*,* $w = c + id$ *con* $a, b, c, d \in \mathbb{R}$*,*

1. $z + w = (a + b) + i(c + d)$
2. $z \cdot w = (ac - bd) + i(bc + ad)$
3. $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$
4. $\overline{z} = a - ib$

Proprietà 3.6. *Siano* $z, w \in \mathbb{C}$*,*

1. $|z| \geqslant 0$ *e* $|z| = 0 \iff z = 0$
2. $|z|^2 = |\overline{z}|^2 = z \cdot \overline{z}$
3. $|z \cdot w| = |z||w|$
4. $\Re(z) \leqslant |z|$, $\Im(z) \leqslant |z|$

Dimostrazione. (3)

$$\begin{aligned} |z \cdot w|^2 &= (ac - bd)^2 + (bc + ad)^2 = \\ &= (a^2c^2 + b^2d^2 - \cancel{2abcd}) + (a^2d^2 + b^2c^2 + \cancel{2abcd}) = \\ &= a^2(c^2 + d^2) + b^2(c^2 + d^2) = \\ &= (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = |z||w| \end{aligned}$$

□

Teorema 8 (Disuguaglianza triangolare)**.**

$$|z| + |w| \geqslant |z + w| \ \forall z, w \in \mathbb{C}$$

Dimostrazione. Siano $z = a + ib$ e $w = c + id$, con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}|z + w|^2 &= (a + c)^2 + (b + d)^2 = a^2 + c^2 + 2ac + b^2 + d^2 + 2bd = \\ &= a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2(ac + bd) = \\ &= |z|^2 + |w|^2 + 2(\Re(z \cdot \overline{w})) \leqslant \\ &\leqslant |z|^2 + |w|^2 + 2(|z \cdot \overline{w}|) = \\ &= |z|^2 + |w|^2 + 2|z||w| = (|z| + |w|)^2\end{aligned}$$

□

Proposizione 3.7. *Sia* $z \in \mathbb{C}$*,* $\exists z^* \in \mathbb{C}$ *t.che* $z \cdot z^* = 1$

Dimostrazione. Sia $z = a + ib$,

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a + ib} = \frac{1}{a + ib} \cdot \frac{a - ib}{a - ib} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} - i\frac{b}{a^2 + b^2} = \frac{\overline{z}}{|z|^2} = z^*$$

□

Osservazione 3.8. *Se* $|z| = 1$*,* $z^* = \overline{z}$

Proprietà 3.9. *Siano* $z, w \in \mathbb{C}$*,*

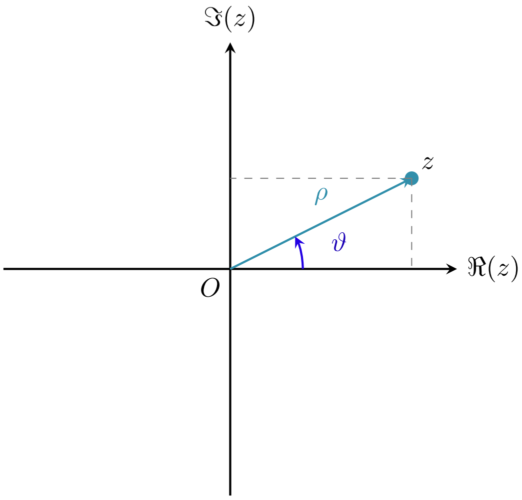
1. $\overline{\overline{z}} = z$
2. $z = \overline{z} \iff z \in \mathbb{R}$
3. $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$
4. $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$
5. $\overline{\dfrac{1}{z}} = \dfrac{z}{|z|^2}$
6. $\Re(z) = \dfrac{z + \overline{z}}{2}$, $\Im(z) = \dfrac{z - \overline{z}}{2i}$

3.10 Forma trigonometrica

Un numero complesso può essere scritto in forma trigonometrica come:

$$z = \rho(\cos\vartheta + i \sin\vartheta)$$

con $\rho \in [0, +\infty)$, $\vartheta \in [-\pi, \pi)$



Lemma 3.11. *Siano $\vartheta, \varphi \in \mathbb{R}$,*

$$(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)(\cos\varphi + i\sin\varphi) = \cos(\vartheta+\varphi) + + \sin(\vartheta+\varphi)$$

Dimostrazione. □

Osservazione 3.12. *Siano $z, w \in \mathbb{C}$ con $|w| = 1$, allora geometricamente $z \cdot w$ equivale a ruotare z di* $\arg w$*.*

Teorema 9 (Formula di De Moivre)**.** *Siano $z \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}$, si ha che, detti $\rho = |z|$ e $\vartheta = \arg z$:*

$$z^n = \rho^n(\cos n\vartheta + i\sin n\vartheta)$$

Dimostrazione. Per il lemma 3.11:

$$z^n = \underbrace{z \cdot z \cdot \cdots \cdot z}_{n \text{ volte}} = \rho^n(\cos n\vartheta + i\sin n\vartheta)$$

□

Proposizione 3.13. *Sia $z \in \mathbb{C}$ e $\arg z \in [-\pi, \pi)$:*

$$\arg z = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} \ \textit{se}\ \Re(z) = 0, \Im(z) > 0 \\ -\dfrac{\pi}{2} \ \textit{se}\ \Re(z) = 0, \Im(z) < 0 \\ \arctan\left[\dfrac{\Im(z)}{\Re(z)}\right] \ \textit{se}\ \Re(z) > 0 \\ \arctan\left[\dfrac{\Im(z)}{\Re(z)}\right] + \pi \ \textit{se}\ \Re(z) < 0, \Im(z) \geqslant 0 \\ \arctan\left[\dfrac{\Im(z)}{\Re(z)}\right] - \pi \ \textit{se}\ \Re(z) < 0, \Im(z) < 0 \end{cases}$$

3.14 Radici n-esime

Definizione 3.15 (Esponenziale complesso)**.** *Sia $\lambda \in \mathbb{R}$, si definisce:*

$$e^{\lambda} := \cos\lambda + i\sin\lambda$$

Sia $z \in \mathbb{C}$, si definisce:

$$e^z := e^{\Re(z)}[\cos \Im(z) + i \sin \Im(z)]$$

Definizione 3.16. *Sia $z \in \mathbb{C}$, $w \in \mathbb{C}$ è una* ***radice n-esima*** *di z, con $n \in \mathbb{N}$ se:*

$$w^n = z$$

Osservazione 3.17. $e^{i\pi} = -1$, $e^{2\pi i} = 1$

Osservazione 3.18 (Forma esponenziale di un numero complesso)**.**

$$z = \rho(\cos\vartheta + i \sin\vartheta) = \rho e^{i\vartheta}$$

Teorema 10 (Radici n-esime)**.** *Sia $n \in \mathbb{N}_0$ e $z = \rho e^{i\vartheta} \in \mathbb{C}_0$, z ammette n radici distinte date da:*

$$w_k = \rho^{\frac{1}{n}} e^{i\vartheta_k}, \quad \vartheta_k = \frac{\vartheta + 2k\pi}{n}, \quad k \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$$

Dimostrazione. Si provi prima che w_k è una radice di z:

$$w_k^n = (\rho^{\frac{1}{n}})^n e^{i\vartheta_k n} = \rho e^{i\vartheta}$$

si mostri ora che w_k sono le sole radici di z.

$$t = \sqrt[n]{z} = z^{\frac{1}{n}} = \rho^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\vartheta}{n}}$$

$$t = \rho^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\vartheta}{n}} \iff \begin{cases} |t| = \rho^{\frac{1}{n}} \\ \arg t = \frac{\vartheta}{n} + \frac{2k\pi}{n} \end{cases}$$

Sia:

- $k \in \{n, n+1, \dots\}$, allora:

  $$k = n \cdot q + r$$

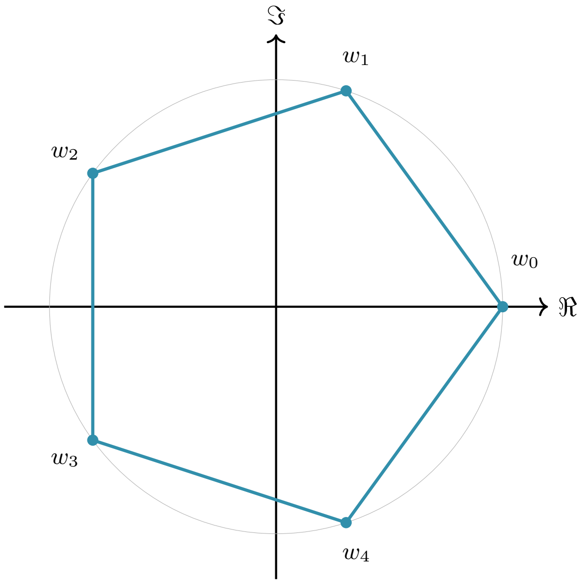
  con $r \in \{0, 1, \dots, n-1\}$. Quindi:

  $$\arg t = \frac{\vartheta + 2\pi(nq + r)}{n}$$

  $$t = \rho^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\vartheta}{n}} e^{\frac{2\pi r}{n}} e^{2\pi q} = \rho^{\frac{1}{n}} e^{\frac{\vartheta + 2\pi r}{n}}$$

- $k \in \{-1, -2, \dots, -n+1\}$

$\square$



Definizione 3.19 (Molteplicità)**.** *Sia $p_n(z)$ un polinomio, con $n \in \mathbb{N}$, $z \in \mathbb{C}$ e sia $\alpha \in \mathbb{C}\ :\ p_n(\alpha) = 0$. Si dice **molteplicità** di α l'esponente di $(z-\alpha)$ nella fattorizzazione di $p_n(z)$.*

Proposizione 3.20. *L'equazione a coefficienti reali:*

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n = 0, \quad a_i \in \mathbb{R}$$

soddisfa le seguenti proprietà:

- *Se z è soluzione se e solo se $\overline{z}$ è soluzione*
- *Se z è soluzione, z e $\overline{z}$ hanno la stessa molteplicità*

Dimostrazione.

- Sia $\alpha \in \mathbb{C}$ soluzione, allora:

$$a_0 + a_1\alpha + a_2\alpha^2 + \cdots + a_n\alpha^n = 0, \quad a_i \in \mathbb{R}$$
$$\overline{a_0 + a_1\alpha + a_2\alpha^2 + \cdots + a_n\alpha^n} = \overline{0}$$
$$a_0 + a_1\overline{\alpha} + a_2\overline{\alpha}^2 + \cdots + a_n\overline{\alpha}^n = 0$$

- Supponiamo che α sia soluzione, ma $\underset{\substack{\parallel \\ s}}{m(\alpha)} > \underset{\substack{\parallel \\ t}}{m(\overline{\alpha})}$. Allora il polinomio associato può essere scritto come:

$$p_n(z) = (z-\alpha)^s (z-\overline{\alpha})^t q_n(z)$$

Sia:

$$\widetilde{p}(z) = \frac{p_n(z)}{(z-\alpha)^t (z-\overline{\alpha})^t} = (z-\alpha)^{s-t} q_n(z)$$

allora $\widetilde{p}(z)$ è un polinomio a coefficienti reali ed ha α come radice, ma non $\overline{\alpha}$. Ciò contraddice il punto precedente.

$\square$

Teorema 11 (Teorema fondamentale dell'algebra)**.** *Siano $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ con $a_n \neq 0$, l'equazione:*

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n = 0$$

ha esattamente n soluzioni in $\mathbb{C}$, contate con le loro molteplicità. Si dice che $\mathbb{C}$ è un campo ***algebricamente chiuso****.*

3.21 Struttura algebrica di $\mathbb{C}$

Capitolo 4

Successioni

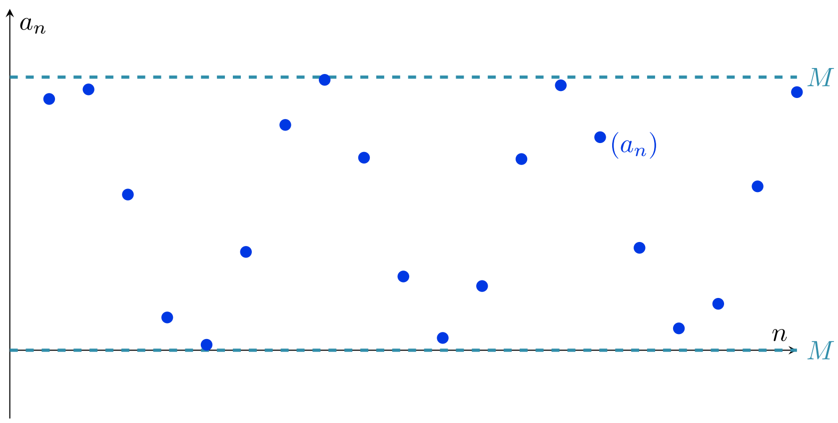
4.1 Introduzione

♣ **Definizione 4.2.** Si definisce una **successione** $\{a_n\}$ una funzione $a\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

Definizione 4.3. *Una successione a_n è* ***positiva*** *se $a_n \geqslant 0 \ \forall n$*

Definizione 4.4. *Una successione a_n è* ***limitata*** *se:*

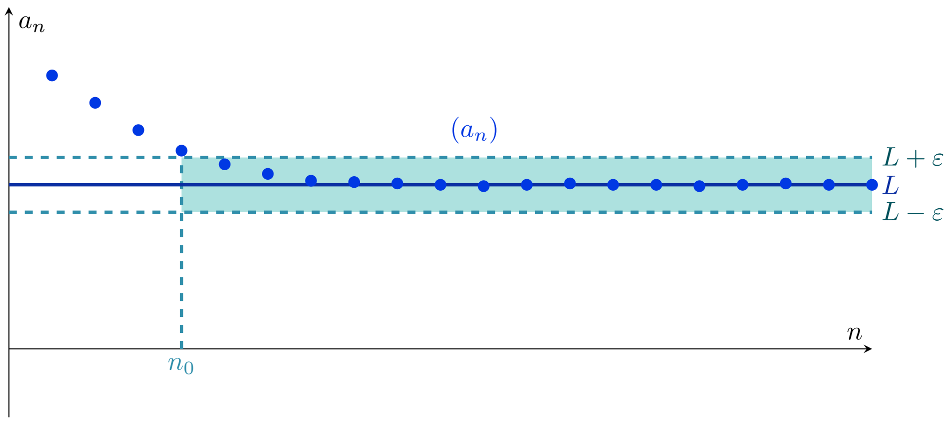
$$\exists M > 0 \ : \ |a_n| \leqslant M \ \forall n$$



Definizione 4.5. *Data una proposizione $P(n)$, con $n \in \mathbb{N}$, è vera* ***definitivamente*** *se è vera $\forall n \geqslant n_0$, con $n_0 \in \mathbb{N}$.*

♣ **Definizione 4.6.** Data una successione a_n, si dice che a_n **converge**, oppure tende a, oppure ha limite $l \in \mathbb{R}$ se $\exists l \in \mathbb{R}$ t.che:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ : \ |a_n - l| < \varepsilon \ \forall n \geqslant n_0$$



Teorema 12. $a_n \to l \in \mathbb{R} \iff |a_n - l| \to 0$.

Dimostrazione. Dato che $|a_n - l| \to 0$, si ha che:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \; : \; ||a_n - l| - 0| < \varepsilon \; \forall n \geqslant n_0$$

ne segue che

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \; : \; |a_n - l| < \varepsilon \; \forall n \geqslant n_0$$

quindi $a_n \to l$ □

Teorema 13. *Sia $\{a_n\}$ definitivamente positiva. Se $a_n \to a \in \mathbb{R}$, $\sqrt{a_n} \to \sqrt{a}$.*

Dimostrazione. Si noti che dati $x, y \in \mathbb{R}^+$, si ha:

$$|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leqslant \sqrt{|x - y|}$$

quindi:

$$|\sqrt{a_n} - \sqrt{a}| \leqslant \sqrt{|a_n - a|}$$

dato che $a_n \to a$, si ha che, fissato $\varepsilon > 0$:

$$|a_n - a| < \varepsilon \text{ Definit.} \implies \sqrt{|a_n - a|} < \sqrt{\varepsilon} \text{ Definit.}$$

preso $\varepsilon' = \sqrt{\varepsilon}$, ciò dimostra la tesi.

$$|\sqrt{a_n} - \sqrt{a}| < \varepsilon' \text{ Definit.}$$

□

Teorema 14. *Sia $\{a_n\}$. Se $a_n \to a \in \mathbb{R}$, $|a_n| \to |a|$.*

Dimostrazione. Si noti che dati $a, b \in \mathbb{R}$, si ha:

$$||a| - |b|| \leqslant |a - b|$$

quindi:

$$||a_n| - |a|| \leqslant |a_n - a|$$

dato che $a_n \to a$, si ha che, fissato $\varepsilon > 0$:

$$|a_n - a| < \varepsilon \text{ Definit.} \implies ||a_n| - |a|| < \varepsilon \text{ Definit.}$$

□

Definizione 4.7. *Data una successione a_n, diciamo che a_n **diverge**, oppure tende a, oppure ha limite $+\infty$ se:*

$$\forall M > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ :\ \ a_n > M\ \forall n \geqslant n_0$$

4.8 Unicità del limite

♣ **Teorema 15.** Se $a_n \to l \in \mathbb{R}$, l è unico.

Dimostrazione. P.A. supponiamo che esistano due numeri reali l_1 e l_2, tali che $l_1 \neq l_2$ e tali che:

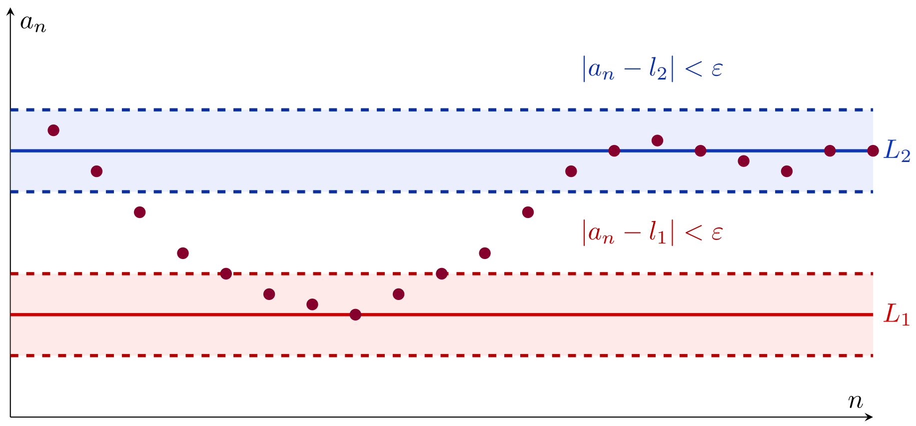
$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_1 \in \mathbb{N}\ :\ \ |a_n - l_1| < \varepsilon\ \forall n \geqslant n_1$$
$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_2 \in \mathbb{N}\ :\ \ |a_n - l_2| < \varepsilon\ \forall n \geqslant n_2$$

Sia $\varepsilon = \dfrac{|l_1 - l_2|}{3}$, si ha che:

$$|l_1 - l_2| = |l_1 - a_n + a_n - l_2| \leqslant |l_1 - a_n| + |l_2 - a_n| < 2\varepsilon \text{ Definit.}$$

$$\implies\ |l_1 - l_2| < 2\varepsilon = 2\frac{|l_1 - l_2|}{3}\ \implies\ 1 < \frac{2}{3}$$

il che è un assurdo.



□

4.9 Permanenza del segno

♣ **Teorema 16.** Sia $a_n \to l$, si ha che:

- Se $l > 0$, $a_n > 0$ Definit.
- Se $a_n \geqslant 0$ Definit., allora $l \geqslant 0$;

Dimostrazione.

- Sia $\varepsilon = \dfrac{l}{2}$. Si ha che:

$$0 < |a_n - l| < \frac{l}{2}\ \implies\ 0 < \frac{l}{2} < a_n < \frac{3l}{2}$$

- In modo analogo, se $l < 0$, $a_n < 0$, quindi se $a_n \geqslant 0$, $l \geqslant 0$.

□

4.10 Teorema del confronto

♣ **Teorema 17 (Primo teorema del confronto).** Siano $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ e $\{c_n\}$ tre successioni tali che:

$$a_n \leqslant c_n \leqslant b_n \text{ Definit.}$$

se $a_n \to l$, $b_n \to l$ con $l \in \mathbb{R}$, allora $c_n \to l$.

Dimostrazione. Dato che a_n e b_n convergono allo stesso l:

$$\forall \varepsilon' > 0 \; \exists n_0' \; : \; -\varepsilon' + l < a_n < \varepsilon' + l \; \forall n \geqslant n_0'$$
$$\forall \varepsilon'' > 0 \; \exists n_0'' \; : \; -\varepsilon'' + l < b_n < \varepsilon'' + l \; \forall n \geqslant n_0''$$

sia ora $n_0 = \max\{n_0', n_0''\}$, dato che $a_n \leqslant b_n$:

$$\forall \varepsilon' \; \forall \varepsilon'' \; \exists n_0 \; : \; -\varepsilon' + l < a_n \leqslant b_n < \varepsilon'' + l \; \forall n \geqslant n_0$$
$$\forall \varepsilon' \; \forall \varepsilon'' \; \exists n_0 \; : \; -\varepsilon' + l < a_n \leqslant c_n \leqslant b_n < \varepsilon'' + l \; \forall n \geqslant n_0$$

per giungere a $c_n \to l$, basta prendere $\varepsilon = \min\{\varepsilon', \varepsilon''\}$. □

Teorema 18 (Secondo teorema del confronto). *Siano $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ due successioni tali che:*

$$a_n \leqslant b_n \text{ Definit.}$$

se $a_n \to \infty$, allora $b_n \to \infty$.

Dimostrazione. Dato che $a_n \to \infty$, si ha che:

$$\forall M > 0 \; \exists n_0 \; : \; a_n > M \; \forall n \geqslant n_0$$

avendo $b_n \geqslant a_n$:

$$\forall M > 0 \; \exists n_0 \; : \; M < a_n \leqslant b_n \; \forall n \geqslant n_0$$

□

Corollario 3. *Se $\{a_n\}$ è una successione limitata e $\{\varepsilon_n\}$ è una successione infinitesima,* $a_n \cdot \varepsilon_n \to 0$

Dimostrazione. Dato che a_n è limitata:

$$\exists M > 0 \; : \; -M \leqslant a_n \leqslant M \; \forall n$$

si supponga $\varepsilon_n > 0$ Definit. (ciò tuttavia non fa perdere di generalità). Allora:

$$\exists M > 0 \; : \; -M \cdot \varepsilon_n \leqslant a_n \cdot \varepsilon_n \leqslant M \cdot \varepsilon_n \; \forall n$$

Quindi $a_n \cdot \varepsilon_n \to 0$ per il teorema del confronto. □

4.11 Monotonia

Definizione 4.12. *Data una successione $\{a_n\}$, diciamo che essa è* ***monotona****:*

- ***crescente*** *se $a_{n+1} \geqslant a_n \; \forall n$;*
- ***strettamente crescente*** *se $a_{n+1} > a_n \; \forall n$;*
- ***decrescente*** *se $a_{n+1} \leqslant a_n \; \forall n$;*
- ***strettamente decrescente*** *se $a_{n+1} < a_n \; \forall n$.*

Teorema 19. *Se una successione $\{a_n\}$ è definitivamente monotona, allora è regolare. In particolare:*

- *Se* $\{a_n\}$ *è illimitata,* $\{a_n\}$ *diverge.*
- *Se* $\{a_n\}$ *è limitata,* $\{a_n\}$ *converge;*

Dimostrazione.

- Consideriamo il caso in cui $\{a_n\}$ sia monotona crescente. Dato che non è limitata, si ha che:
$$\forall M > 0 \ \exists a_{n_0} \ : \ |a_{n_0}| > M$$
dato che $\{a_n\}$ è crescente, $a_n \geqslant a_{n_0} \ \forall n \geqslant n_0$. Quindi:
$$\forall M > 0 \ \exists n_0 \ : \ a_n > M \ \forall n \geqslant n_0$$
- Consideriamo nuovamente il caso in cui $\{a_n\}$ sia crescente. Sia:
$$A = \{a_0, a_1, \dots\}$$
per la completezza di $\mathbb{R}$, A ammette estremo superiore. Sia $\gamma = \sup_A$. Per la definizione di estremo superiore:
$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists a_{n_0} \in A \ : \ \gamma - \varepsilon < a_{n_0}$$
Dato che $\{a_n\}$ è crescente:
$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \ : \ \gamma - a_n < \varepsilon \ \forall n \geqslant n_0$$
$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \ : \ \gamma - \varepsilon < a_n \leqslant \gamma \ \forall n \geqslant n_0$$

□

Notazione 9. *$a_n \uparrow \gamma$, $b_n \downarrow \gamma$ (a_n tende a γ dal basso, b_n tende a γ dall'alto)*

4.13 Numero di Eulero

Definizione 4.14.
$$e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Teorema 20. *e_n converge.*

Dimostrazione. Dimostriamo che e_n è monotona crescente:

$$\begin{aligned}
a_{n+1} \geqslant a_n &\iff \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \geqslant \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \\
&\iff \left[\frac{1 + \frac{1}{n+1}}{1 + \frac{1}{n}}\right]^{n+1} \geqslant \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} \\
&\iff \left[\frac{\frac{n+2}{n+1}}{\frac{n+1}{n}}\right]^{n+1} \geqslant \frac{n}{n+1} \\
&\iff \left[\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right]^{n+1} \geqslant 1 - \frac{1}{n+1} \\
&\iff \left[\frac{n^2 + 2n + 1 - 1}{n^2 + 2n + 1}\right]^{n+1} \geqslant 1 - \frac{1}{n+1} \\
&\iff \left[1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right]^{n+1} \geqslant 1 - \frac{1}{n+1}
\end{aligned}$$

che è la disuguaglianza di Bernoulli con $x = -\frac{1}{(n+1)^2}$.

In modo analogo si dimostra che $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ è decrescente.

Dato che $e_n < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ $\forall n$, e_n è superiormente limitata. Dato che e_n è monotona, ne segue che e_n converge. □

Definizione 4.15 (Numero di Eulero)**.** $e := \lim e_n$

4.16 Sottosuccessioni

♣ **Definizione 4.17.** Data una successione a_n e una successione $n_k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, si dice **sottosuccessione** di a_n la funzione composta $a_{n_k} = a_n \circ n_k$

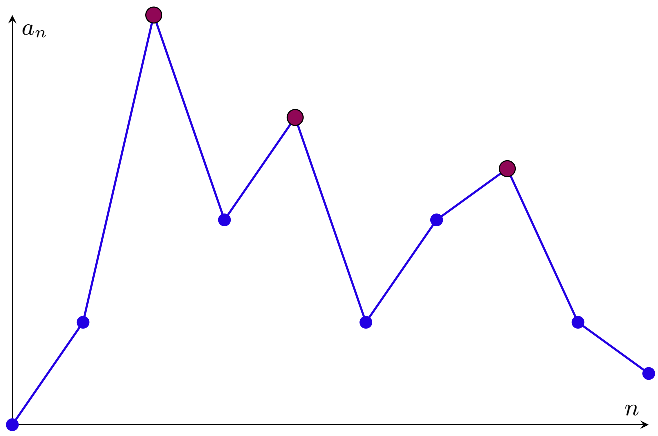
Osservazione 4.18. *Le possibili Sottosuccessioni di una data successione a_n sono infinite di cardinalità $\mathfrak{C}$*

Teorema 21. *Se una successione $a_n \to l \in \overline{\mathbb{R}}$, allora ogni sottosuccessione $a_{n_k} \to l$.*

Osservazione 4.19. *Se una successione a_n ammette due Sottosuccessioni che hanno limite diverso, a_n è oscillante.*

Lemma 4.20 (Lemma dei picchi)**.** *Ogni successione ammette una sottosuccessione monotona.*

Dimostrazione. Sia $\{a_n\}$ una generica successione. Definiamo *picco* una coppia (n_0, a_{n_0}) se $a_{n_0} \geqslant a_n \ \forall n \geqslant n_0$.



La successione a_n può quindi avere:

- Un numero infinito di picchi. In tal caso, si costruisca una sottosuccessione di a_n che abbia come elementi i picchi. In tal modo, la sottosuccessione sarà decrescente (per la definizione di picco) e quindi monotona.
- Un numero finito di picchi. In tal caso si prenda l'ultimo picco (quello con n_0 maggiore). Si ha che $\exists n_1 > n_0 + 1 \ : \ a_{n_1} > a_{n_0+1}$ (altrimenti (n_0+1, a_{n_0+1}) sarebbe un picco). Si può così iterare la procedura e costruire una sottosuccessione crescente.

□

♣ **Teorema 22 (Teorema di Bolzano-Weierstrass).** Ogni successione limitata ammette una sottosuccessione convergente.

Dimostrazione. Per il *lemma dei picchi* ogni successione a_n ammette una sottosuccessione a_{n_k} monotona. Per un teorema precedentemente dimostrato, se a_{n_k} è monotona è limitata, allora converge. □

4.21 Limite superiore e limite inferiore

Definizione 4.22. *Sia a_n una successione, si definisce **limite superiore** di a_n:*

$$\lim_{m\to\infty}\left(\sup_{m\geqslant n} a_n\right)$$

Definizione 4.23. *Sia a_n una successione, si definisce **limite inferiore** di a_n:*

$$\lim_{m\to\infty}\left(\inf_{m\geqslant n} a_n\right)$$

Notazione 10. $\limsup a_n$, $\liminf a_n$, $\overline{\lim}\, a_n$, $\underline{\lim}\, a_n$

Definizione 4.24. *Sia a_n una successione, $l \in \overline{\mathbb{R}}$ è **limite sottosuccesionale** di a_n se $\exists a_{n_k} \to l$.*

Proprietà 4.25.

$$\underline{\lim}\, a_n \leqslant \overline{\lim}\, a_n$$

In particolare, se $\underline{\lim}\, a_n = \overline{\lim}\, a_n$, $a_n \to \underline{\lim}\, a_n = \overline{\lim}\, a_n$.

Teorema 23. *Il limite superiore è il più grande limite sottosuccesionale possibile di una successione.*

4.26 Proprietà dei limiti

Teorema 24 (Operazioni con i limiti)**.** *Siano $a_n \to a \in \mathbb{R}$, $b_n \to b \in \mathbb{R}$:*

1. $a_n + b_n \to a + b$
2. $a_n \cdot b_n \to a \cdot b$
3. *Se* $b \neq 0$, $\dfrac{a_n}{b_n} \to \dfrac{a}{b}$

Dimostrazione.

1. $$|a_n + b_n - (a+b)| = |a_n - a + b_n - b| \leqslant |a_n - a| + |b_n - b| < 2\varepsilon \ \forall\varepsilon \text{ Definit.}$$

2. $$\begin{aligned}|a_n \cdot b_n - a\cdot b| &= |a_n b_n - a_n b + a_n b - ab| = |a_n(b_n - b) + b(a_n - a)| \leqslant \\ &\leqslant |a_n||b_n - b| + |b||a_n - a|\end{aligned}$$

   dato che $a_n \to a$, $|b||a_n - a| \to 0$. Dato che a_n converge, $|a_n|$ converge ed è limitata. Quindi $|a_n||b_n - b| \to 0$. Quindi $|a_n - ab| \to 0$ per confronto $\implies a_n b_n \to ab$.

3. Per il terzo punto, basta provare che $\dfrac{1}{b_n} \to \dfrac{1}{b}$:

   $$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| = \left|\frac{b - b_n}{b_n b}\right| = |b_n - b|\frac{1}{|b_n||b|} \leqslant \frac{2}{|b^2|}|b_n - b| \to 0$$

   dove nell'utlimo passaggio si è utilizzato il fatto che se $|b_n| \to |b|$ allora $|b_n| \geqslant \dfrac{|b|}{2}$ Definit.

□

Proposizione 4.27. $\sin n$ *non converge.*

Dimostrazione. P.A. si supponga che $\sin n \to l \in [-1,1]$ (se $\sin n$ converge ad l, per il teorema della permanenza del segno si deve avere $-1 \leqslant l \leqslant 1$).

Si considerino:

$$\sin(n+1) = \sin n \cdot \cos 1 + \sin 1 \cdot \cos n \to l \sin(n-1) = \sin n \cdot \cos 1 - \sin 1 \cdot \cos n \to l$$

entrambe convergono ad l poiché sottosuccessioni di $\sin n$. Quindi:

$$\sin(n+1) + \sin(n-1) = 2 \sin n \cdot \cos 1 \implies l + l = 2l \cdot \cos 1$$

dato che $\cos 1 \neq 1$, $l = 0$. Si consideri ora:

$$\sin(n+1) - \sin(n-1) = 2 \sin 1 \cdot \cos n \to l - l = 0$$

dato che $\sin 1 \neq 0$, $\cos n \to 0$. Ma si ha che:

$$\sin^2 n + \cos^2 n \to 0 + 0 \neq 1$$

ciò è un assurdo. □

4.28 Aritmetica estesa

- $+\infty + \infty = +\infty$
- $+\infty \cdot c = +\infty \; c \in \mathbb{R}^+$
- $+\infty \cdot (-c) = -\infty \; c \in \mathbb{R}^+$
- $\dfrac{c}{+\infty} = 0^+ \; c \in \mathbb{R}^+$
- $\dfrac{c}{0^+} = +\infty \; c \in \mathbb{R}^+$
- [...]

4.28.1 Forme indeterminate

1. $+\infty \cdot 0$
2. $+\infty - \infty$
3. $\dfrac{+\infty}{+\infty}$
4. $\dfrac{0}{0}$
5. 1^∞
6. ∞^0
7. 0^0

Si noti che le ultime tre possono essere ricondotte alle 2., 3. e 4., che a loro volta possono essere ricondotte alla prima.

4.29 Limiti notevoli

Sia $\varepsilon_n \to 0$ una successione infinitesima, con $\varepsilon \neq 0$ Definit., valgono i seguenti limiti notevoli:

Limite notevole I. *Sia $a \in \mathbb{R}$:*

$$a^n = \begin{cases} +\infty \ \textit{se} \ a > 1 \\ 1 \ \textit{se} \ a = 1 \\ 0 \ \textit{se} \ |a| < 1 \\ \nexists \ \textit{se} \ a \leqslant -1 \end{cases}$$

Dimostrazione. Se $a > 1$, $a = 1 + b$, con $b > 0$. Quindi, per la disuguaglianza di Bernoulli:

$$a^n = (1+b)^n \geqslant 1 + nb \to \infty$$

Se $a = 1$, la successione è costante.
Se $|a| < 1$, $a = \dfrac{1}{b}$, con $|b| > 1$. Quindi:

$$a^n = \frac{1}{b^n} \to 0$$

Se $a \leqslant 1$, allora può essere scritta come:

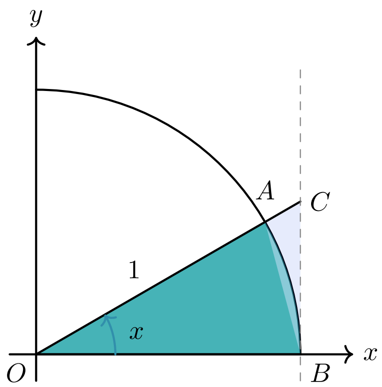
$$a^n = (-1)^n b$$

con $b = |a|$. □

Lemma 4.30. *Sia $x \in \mathbb{R} \cap \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right)$:*

$$\sin x \leqslant x \leqslant \tan x$$

Dimostrazione. Si ha che:



$$\mathfrak{A}_{O\overset{\triangle}{A}B} \leqslant \mathfrak{A}_{OAB} \leqslant \mathfrak{A}_{O\overset{\triangle}{C}B}$$
$$\frac{1}{2}\sin x \leqslant \frac{1}{2}x \leqslant \frac{1}{2}\tan x$$

□

Limite notevole II.

$$\frac{\sin \varepsilon_n}{\varepsilon_n}$$

Dimostrazione. Mostriamo che se $\delta_n \to 0$, $\sin \delta_n \to 0$. Dato che $\delta_n \to 0$, $\delta_n \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ Definit.. Allora, per il lemma 4.30 si ha che:

$$0 \leqslant |\sin \delta_n| = \sin |\delta_n| \leqslant |\delta_n|$$

quindi $\sin|\delta_n| \to 0$ per confronto.
Dimostriamo ora che se $\delta_n \to 0$, $\cos\delta_n \to 0$:

$$\cos\delta_n = \sqrt{1-\sin^2\delta_n} \to \sqrt{1} = 1$$

Infatti $a_n \to a \implies \sqrt{a_n} \to \sqrt{a}$.
Si può supporre, senza perdita di generalità, che $\varepsilon_n \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ Definit.. Per il lemma 4.30:

$$\sin\varepsilon_n < \varepsilon_n < \frac{\sin\varepsilon_n}{\cos\varepsilon_n} \implies 1 < \frac{\varepsilon_n}{\sin\varepsilon_n} < \frac{1}{\cos\varepsilon_n}$$

di conseguenza:

$$\cos\varepsilon_n < \frac{\sin\varepsilon_n}{\varepsilon_n} < 1$$

quindi $\frac{\sin\varepsilon_n}{\varepsilon_n} \to 1$ per confronto. □

Limite notevole III.

$$\frac{\arcsin\varepsilon_n}{\varepsilon_n} \to 1$$

Dimostrazione. Si supponga, senza perdere di generalità, che $\varepsilon_n \in (0,1)$. Sia $\delta_n = \arcsin\varepsilon_n \implies \varepsilon_n = \sin\delta_n$. Si vuole mostrare che $\delta_n \to 0$. Si ha che:

$$0 \leqslant \sin\delta_n \leqslant \delta_n \leqslant \frac{\sin\delta_n}{\cos\delta_n} = \frac{\varepsilon_n}{\sqrt{1-\varepsilon_n^2}} \to 0$$

quindi $\delta_n \to 0$ per confronto. Di conseguenza:

$$\frac{\arcsin\varepsilon_n}{\varepsilon_n} = \frac{\delta_n}{\sin\delta_n} = \frac{1}{\frac{\sin\delta_n}{\delta_n}} \to 1$$

□

Limite notevole IV.

$$\frac{\tan\varepsilon_n}{\varepsilon_n} \to 1$$

Dimostrazione.

$$\frac{\tan\varepsilon_n}{\varepsilon_n} = \frac{\sin\varepsilon_n}{\varepsilon_n} \cdot \frac{1}{\cos\varepsilon_n} \to 1$$

□

Limite notevole V.

$$\frac{\arctan\varepsilon_n}{\varepsilon_n} \to 1$$

Dimostrazione. Senza perdità di generalità, sia $0 < \varepsilon_n < 1$ Definit.. Sia $\delta_n = \arctan\varepsilon_n \implies \varepsilon_n = \tan\delta_n$. Si vuole mostrare che $\delta_n \to 0$. Si ha che:

$$0 \leqslant \sin\delta_n \leqslant \delta_n \leqslant \tan\delta_n = \varepsilon_n \to 0$$

quindi $\delta_n \to 0$ per confronto. Dunque:

$$\frac{\arctan\varepsilon_n}{\varepsilon_n} = \frac{\delta_n}{\tan\delta_n} = \frac{1}{\frac{\tan\delta_n}{\delta_n}} \to 1$$

□

Limite notevole VI.

$$\frac{1-\cos\varepsilon_n}{\varepsilon_n^2} \to \frac{1}{2}$$

Dimostrazione.

$$\frac{1-\cos\varepsilon_n}{\varepsilon_n^2} = \frac{1-\cos\varepsilon_n}{\varepsilon_n^2}\frac{1+\cos\varepsilon_n}{1+\cos\varepsilon_n} = \frac{1-\cos^2\varepsilon_n}{\varepsilon_n^2}\frac{1}{1+\cos\varepsilon_n} = \left(\frac{\sin\varepsilon_n}{\varepsilon_n}\right)^2\frac{1}{1+\cos\varepsilon_n} \to \frac{1}{2}$$

□

Limite notevole VII.

$$(1+\varepsilon_n)^{\frac{1}{\varepsilon_n}} \to e$$

Limite notevole VIII.

$$\frac{\log(1+\varepsilon_n)}{\varepsilon_n} \to 1$$

Dimostrazione. Per il limite notevole precedente:

$$(1+\varepsilon_n)^{\frac{1}{\varepsilon_n}} \to e$$

quindi:

$$\exp\left(\frac{\log(1+\varepsilon_n)}{\varepsilon_n}\right) \to e \implies \frac{\log(1+\varepsilon_n)}{\varepsilon_n} \to 1$$

□

Limite notevole IX.

$$\frac{e^{\varepsilon_n}-1}{\varepsilon_n} \to 1$$

Dimostrazione. Sia $\delta_n = e^{\varepsilon_n} - 1 \implies \varepsilon_n = \log(\delta_n + 1)$. Dato che $e^{\varepsilon_n} \to 1$, $\delta_n \to 0$. Quindi:

$$\frac{e^{\varepsilon_n}-1}{\varepsilon_n} = \frac{\delta_n}{\log(\delta_n+1)} \to 1$$

□

Limite notevole X.

$$\frac{\sinh\varepsilon_n}{\varepsilon_n} \to 1$$

Dimostrazione.

$$\frac{\sinh\varepsilon_n}{\varepsilon_n} = \frac{e^{\varepsilon_n}-e^{-\varepsilon_n}}{2\varepsilon_n} = \frac{1}{e^{\varepsilon_n}}\frac{e^{2\varepsilon_n}-1}{2\varepsilon_n} \to 1$$

□

Limite notevole XI.

$$\frac{\tanh\varepsilon_n}{\varepsilon_n} \to 1$$

Dimostrazione.

$$\frac{\tanh\varepsilon_n}{\varepsilon_n} = \frac{\sinh\varepsilon_n}{\varepsilon_n}\frac{1}{\cosh\varepsilon_n} \to 1$$

□

Limite notevole XII.

$$\frac{\cosh\varepsilon_n - 1}{\varepsilon_n^2} \to \frac{1}{2}$$

Dimostrazione.

$$\frac{\cosh\varepsilon_n - 1}{\varepsilon_n^2} = \frac{\cosh\varepsilon_n - 1}{\varepsilon_n^2} \cdot \frac{\cosh\varepsilon_n + 1}{\cosh\varepsilon_n + 1} = \frac{\cosh^2\varepsilon_n - 1}{\varepsilon_n^2} \frac{1}{\cosh\varepsilon_n + 1} = \left(\frac{\sinh\varepsilon_n}{\varepsilon_n}\right)^2 \frac{1}{\cosh\varepsilon_n + 1} \to \frac{1}{2}$$

□

Limite notevole XIII. *Sia* $a \in \mathbb{R}$*:*

$$\frac{(1+\varepsilon_n)^a - 1}{\varepsilon_n} \to a$$

Dimostrazione.

$$\frac{(1+\varepsilon_n)^a - 1}{\varepsilon_n} = \frac{e^{a\log(1+\varepsilon_n)} - 1}{a\log(1+\varepsilon_n)} \frac{\log(1+\varepsilon_n)}{\varepsilon_n} a \to a$$

□

Limite notevole XIV. *Sia* a_n *una successione tale che* $a_n\varepsilon_n \to 0$*:*

$$\frac{(1+\varepsilon_n)^{a_n} - 1}{a_n\varepsilon_n} \to 1$$

Dimostrazione.

$$\frac{(1+\varepsilon_n)^{a_n} - 1}{a_n\varepsilon_n} = \frac{e^{a_n\log(1+\varepsilon_n)} - 1}{a_n\log(1+\varepsilon_n)} \frac{\log(1+\varepsilon_n)}{\varepsilon_n} \to 1 \text{ se } a_n\log(1+\varepsilon_n) \to 0 \implies a_n\varepsilon_n \to 0$$

□

4.31 Gerarchie di infinito

Teorema 25 (Teorema del confronto per le successioni)**.** *Sia* a_n *una successione definitivamente positiva. Sia* $l = \lim \frac{a_{n+1}}{a_n}$*, si ha che:*

- *Se* $l > 1$*,* a_n *diverge;*
- *Se* $0 \leqslant l < 1$*,* a_n *converge;*
- *Se* $l = 1$*, il criterio è inconcludente.*

Dimostrazione.

- Se $l < 1$, $\exists\beta$ t.che $l < \beta < 1$. Si ha che:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \beta \text{ Definit.}$$

$$a_{n+1} \leqslant \beta a_n \text{ Definit.}$$

$$a_{n+2} \leqslant \beta a_{n+1} \leqslant \beta^2 a_n \text{ Definit.}$$

$$0 < a_{n+k} \leqslant \beta^k a_n \to 0 \text{ Definit.}$$

  quindi $a_{n+k} \to 0$ per confronto.

- Se $l > 1$, $\exists\beta$ t.che $1 < \beta < l$. Si ha che:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant \beta \text{ Definit.}$$

$$a_{n+k} \geqslant \beta^k a_n \to +\infty \text{ Definit.}$$

  quindi $a_{n+k} \to +\infty$ per confronto.

□

Notazione 11. $a_n \ll b_n \iff \dfrac{a_n}{b_n} \to 0$

Teorema 26 (Gerarchie di infinito)**.** *Siano $p, q, r > 0$, si ha che:*

$$(\log n)^p \ll n^q \ll e^r \ll n! \ll n^n$$

Dimostrazione. Dimostriamo il primo, in particolare che:

$$\frac{\log n}{n} \to 0$$

Sia $q_n = \log n \implies n = e^{q_n} \implies \dfrac{\log n}{n} = \dfrac{q_n}{e^{q_n}}$. Si ha che, fissato n:

$$\exists k \in \mathbb{Z}^+ \ : \ 0 < k \leqslant q_n \leqslant k+1$$
$$e^k \leqslant e^{q_n} \leqslant e^{k+1} \implies \frac{1}{e^k} \geqslant \frac{1}{e^{q_n}}$$

Quindi:

$$\frac{\log n}{n} = \frac{q_n}{e^{q_n}} < \frac{k+1}{e^k} = \frac{k}{e^k} + \frac{1}{e^k}$$

dato che se $n \to \infty$, $k \to \infty$, $\dfrac{\log n}{n} \to 0$ per confronto. □

4.32 Asintoticità

♣ **Definizione 4.33.** Due successioni a_n e b_n si dicono **asintotiche** se:

$$\frac{a_n}{b_n} \to 1$$

Notazione 12. $a_n \sim b_n$

Osservazione 4.34. *Se $a_n \sim b_n$, $a_n \neq 0$ Definit., $b_n \neq 0$ Definit..*

Proposizione 4.35. *Sia A l'insieme delle successioni diverse da 0 definitivamente. Allora l'asintoticità è una relazione d'equivalenza.*

Osservazione 4.36.

$$a_n \sim b_n \iff a_n = b_n(1 + \varepsilon_n)$$

Dimostrazione.

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{b_n(1+\varepsilon_n)}{b_n} = 1 + \varepsilon_n \to 1$$

□

Proposizione 4.37. *Sia $a_n \sim b_n$ e c_n una successione diversa da 0 definitivamente. Allora:*

- $a_n \cdot c_n \sim b_n \cdot c_n$
- $\dfrac{a_n}{c_n} \sim \dfrac{b_n}{c_n}$

Proposizione 4.38. *Sia $a_n \sim b_n$ e c_n una successione limitata. Allora:*

$$a_n^{c_n} \sim b_n^{c_n}$$

Proposizione 4.39. $a_n \sim b_n \not\Longrightarrow a_n + c_n \sim b_n + c_n$

Proposizione 4.40 (Polinomio in n)**.** *Sia* $p_n = a_1 n^{\alpha_1} + a_2 n^{\alpha_2} + \cdots + a_k n^{\alpha_k}$*, con* $a_1, a_2, \ldots, a_k \in \mathbb{R}_0$ *e* $\alpha_1 > \alpha_2 > \cdots > \alpha_k$*, si ha che:*

$$p_n \sim a_1 n^{\alpha_1}$$

Dimostrazione.

$$p_n = a_1 n^{\alpha_1} \left(1 + \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{\frac{a_2}{a_1 n^{\alpha_1 - \alpha_2}}} + \cdots + \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{\frac{a_k}{a_1 n^{\alpha_1 - \alpha_k}}} \right) = a_1 n^{\alpha_1}(1 + \varepsilon_n)$$

□

Osservazione 4.41. *I coefficienti* a_k *possono essere anche successioni limitate.*

4.41.1 Formula di De Moivre-Stirling

Teorema 27 (Formula di De Moivre-Stirling)**.**

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \cdot n^n e^{-n}$$

Corollario 4.

$$\log n! \sim n \log n$$

Dimostrazione. $n! \to +\infty$, quindi, usando la formula di Stirling:

$$\begin{aligned} \log n! &\sim \log\left(\sqrt{2\pi n} \cdot n^n e^{-n}\right) = \\ &= \log \sqrt{2\pi n} + n \log n - n \sim n \log n \end{aligned}$$

□

4.42 Continuità per successioni di alcune funzioni

Teorema 28 (Continuità del logaritmo per successioni)**.** *Sia* $\{a_n\}$ *una successione t.che* $a_n > 0$ *e* $a_n \to a \in [0, +\infty]$*, allora:*

$$\log a_n \to l = \begin{cases} \log a & se\ a \in (0, +\infty) \\ +\infty & se\ a = +\infty \\ -\infty & se\ a = 0 \end{cases}$$

Il logaritmo si dice continuo per successioni.

Dimostrazione. Sia $a \in (0, +\infty)$

$$\begin{aligned} |\log a_n - \log a| = \left|\log\left(\frac{a_n}{a}\right)\right| < \varepsilon &\iff -\varepsilon < \log\left(\frac{a_n}{a}\right) < \varepsilon \\ &\iff e^{-\varepsilon} < \frac{a_n}{a} < e^{\varepsilon} \\ &\iff a e^{-\varepsilon} < a_n < a e^{\varepsilon} \\ &\iff \underset{\substack{\parallel \\ -\beta, \beta > 0}}{a(e^{-\varepsilon} - 1)} < a_n - a < \underset{\substack{\parallel \\ \alpha, \alpha > 0}}{a(e^{\varepsilon} + 1)} \end{aligned}$$

dato che $a_n \to a$:
$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0\ :\ |a_n - a| < \varepsilon\ \forall n \geqslant n_0$$
Sia $\delta = \min(\beta, \alpha)$, allora $|a_n - a| < \delta \implies |\log a_n - \log a| < \varepsilon$ □

Teorema 29 (Continuità dell'esponenziale per successioni)**.** *Sia* $\{a_n\}$ *una successione t.che e* $a_n \to a \in \overline{\mathbb{R}}$*, allora:*

$$e^{a_n} \to l = \begin{cases} e^a \ \textit{se}\ a \in \mathbb{R} \\ +\infty \ \textit{se}\ a = +\infty \\ 0 \ \textit{se}\ a = -\infty \end{cases}$$

Dimostrazione. Sia $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} |e^{a_n} - e^a| < \varepsilon &\iff -\varepsilon < e^{a_n} - e^a < \varepsilon \\ &\iff -\varepsilon + e^a < e^{a_n} < \varepsilon + e^a \end{aligned}$$

senza perdità di generalità, si supponga $-\varepsilon + e^a > 0 \implies \varepsilon < e^a$:

$$\begin{aligned} |e^{a_n} - e^a| < \varepsilon &\iff \log(-\varepsilon + e^a) < a_n < \log(\varepsilon + e^a) \\ &\iff \log(-\varepsilon + e^a) - a < a_n - a < \log(\varepsilon + e^a) - a \\ &\iff \underset{-\beta,\beta>0}{\underset{\parallel}{\log(-\varepsilon e^{-a} + 1)}} < a_n - a < \underset{\alpha,\alpha>0}{\underset{\parallel}{\log(\varepsilon e^{-1} + 1)}} \end{aligned}$$

dato che $a_n \to a$:
$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0\ :\ |a_n - a| < \varepsilon\ \forall n \geqslant n_0$$
Sia $\delta = \min(\beta, \alpha)$, allora $|a_n - a| < \delta \implies |e^{a_n} - e^a| < \varepsilon$ □

Teorema 30 (Continuità per successioni dell'arcotangente)**.** *Sia* $a_n \to a \in \overline{\mathbb{R}}$*:*

$$\arctan a_n \to l = \begin{cases} \arctan a \ \textit{se}\ a \in \mathbb{R} \\ \dfrac{\pi}{2} \ \textit{se}\ a \to +\infty \\ -\dfrac{\pi}{2} \ \textit{se}\ a \to -\infty \end{cases}$$

4.42.1 Formula di Cesaro

Teorema 31 (Formula di Cesaro)**.** *Sia* $\{a_n\}$ *una successione e* $\sigma_n := \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$ *la successione delle medie di* a_n*. Se* $a_n \to \overline{a} \in \mathbb{R}$*,* $\sigma_n \to \overline{a}$*.*

Dimostrazione.

$$\begin{aligned} |\sigma_n - \overline{a}| &= \left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k - \overline{a}\right| = \\ &= \left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \overline{a}\right| = \\ &= \frac{1}{n}\left|\sum_{k=1}^{n}(a_k - \overline{a})\right| \leqslant \\ &\leqslant \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n}|a_k - \overline{a}|\right) \end{aligned}$$

Dato che $a_n \to \overline{a}$:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} : \ |a_n - \overline{a}| < \varepsilon \ \forall n \geqslant n_0$$

quindi, fissato $\varepsilon > 0$:

$$\begin{aligned} |\sigma_n - \overline{a}| \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|a_k - \overline{a}| = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n_0}|a_k - \overline{a}| + \frac{1}{n}\sum_{k=n_0+1}^{n}|a_k - \overline{a}| \leqslant \\ \leqslant \frac{1}{n}C + \frac{1}{n}\varepsilon(n - n_0) \end{aligned}$$

con $C \in \mathbb{R}$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 : \ |\sigma_n - \overline{a}| \leqslant \frac{C}{n} + \varepsilon\frac{n - n_0}{n} \leqslant \frac{C}{n} + \varepsilon \ \forall n \geqslant n_0$$

$$\frac{C}{n} \to 0 \implies \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_1 \in \mathbb{N} : \ \frac{C}{n} \leqslant \varepsilon \ \forall n \geqslant n_1$$

$$|\sigma_n - \overline{a}| \leqslant 2\varepsilon \ \forall n \geqslant \max(n_0, n_1)$$

□

4.43 Asintotici di esponenziali e logaritmi

Teorema 32. *Siano a_n e b_n due successioni tali che $a_n \sim b_n$, allora:*

$$e^{a_n} \sim e^{b_n}$$

se a_n e b_n sono limitate.

Dimostrazione. Si ha che:

$$\frac{e^{a_n}}{e^{b_n}} = e^{a_n - b_n} \to 1 \iff a_n - b_n \to 0$$

dato che $\dfrac{a_n}{b_n} \to 1$:

$$a_n - b_n = b_n\underbrace{\left(\frac{a_n}{b_n} - 1\right)}_{= \varepsilon_n} \to 0 \iff b_n \text{ è limitata}$$

si può concludere lo stesso per a_n. □

Teorema 33. *Siano a_n e b_n due successioni tali che $a_n \sim b_n$, allora:*

$$\log a_n \sim \log b_n$$

se $a_n \not\to 1$, $b_n \not\to 1$.

Dimostrazione. Si ha che:

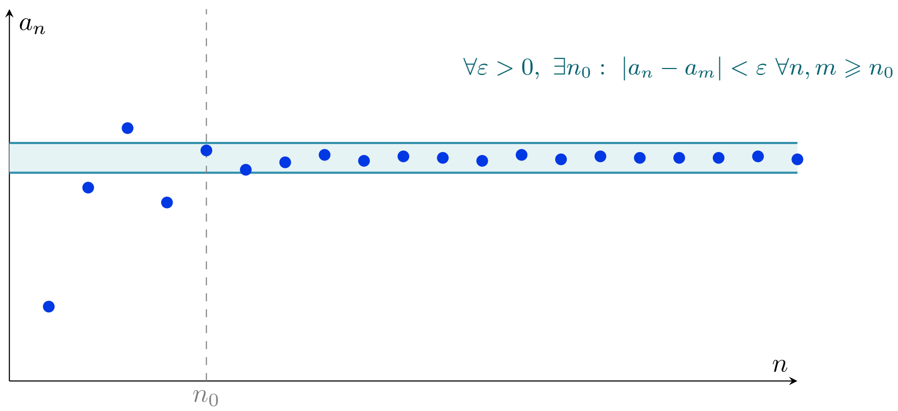
$$\frac{\log a_n}{\log b_n} = \frac{\log\left(\frac{a_n}{b_n}b_n\right)}{\log b_n} = \frac{\log\frac{a_n}{b_n} + \log b_n}{\log b_n} = 1 + \frac{\log\frac{a_n}{b_n}}{\log b_n} \to 1 \iff \frac{\log\frac{a_n}{b_n}}{\log b_n} \to 0$$

dato che $\dfrac{a_n}{b_n} \to 1$, $\log a_n \sim \log b_n$ se $\log b_n \not\to 0$, $b_n \not\to 1$. Lo stesso si può dire per a_n. □

4.44 Successioni di Cauchy

Definizione 4.45. *Sia $\{a_n\}$ una successione, $\{a_n\}$ è* ***di Cauchy*** *se:*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \ : \ |a_m - a_n| < \varepsilon \ \forall m, n \geqslant n_0$$



Teorema 34. *Se $a_n \to l \in \mathbb{R}$, a_n è di Cauchy.*

Dimostrazione. Dato che $a_n \to \mathbb{R}$, si ha che:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \ : \ |a_n - l| < \varepsilon \ \forall n \geqslant n_0$$

quindi, se $n, m \geqslant n_0$:

$$|a_n - a_m| = |a_n - l + l - a_m| \leqslant |a_n - l| + |a_m - l| < 2\varepsilon \ \forall n, m \geqslant n_0$$

□

Osservazione 4.46. *Il viceversa è vero ed equivale alla completezza di $\mathbb{R}$.*

Teorema 35. *Se a_n è di Cauchy, a_n è convergente.*

Dimostrazione. Si inizi dal dimostrare che se a_n è di Cauchy, a_n è limitata. Si vuole mostrare quindi che:

$$\exists M > 0 \ |a_n| \leqslant M \ \forall n \in \mathbb{N}$$

dato che a_n è di Cauchy:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ : \ |a_n - a_m| < \varepsilon \ \forall n, m \geqslant n_0$$

si fissi $\varepsilon > 0$ e quindi n_0. $\{a_0, a_1, \ldots, a_{n_0}\}$ è un insieme finito, quindi ammette massimo. Sia $M = \max\{a_0, a_1, \ldots, a_n\}$, senza perdità di generalità si supponga $n > m$ e si fissi m:

$$-\varepsilon < a_n - a_m < \varepsilon \implies -\varepsilon + a_n < a_n < \varepsilon + a_m$$

dato che m dipende da n_0 e n_0 dipende da ε, m dipende da ε. Quindi:

$$a_n < \max\left(M, \varepsilon + a_m\right)$$

ossia a_n è superiormente limitata. Si può procedere in modo analogo dimostrando che è inferiormente limitata.

Dato che a_n è limitata, per il teorema di Bolzano-Weierstrass ammette una sottosuccessione a_{n_k} convergente. Sia $a_{n_k} \to l \in \mathbb{R}$, allora:

$$|a_n - l| = |a_n - a_{n_k} + a_{n_k} - l| \leqslant |a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k} - l|$$

dato che $a_{n_k} \to l$:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} : \; |a_{n_k} - l| < \varepsilon \; \forall n \geqslant n_0$$

e dato che a_n è di Cauchy:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} : \; |a_n - a_m| < \varepsilon \; \forall n, m \geqslant n_0$$

detto $m = n_k$:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} : \; |a_n - a_{n_k}| < \varepsilon \; \forall n, n_k \geqslant n_0$$

quindi:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} : \; |a_n - l| < \varepsilon \; \forall n \geqslant n_0$$

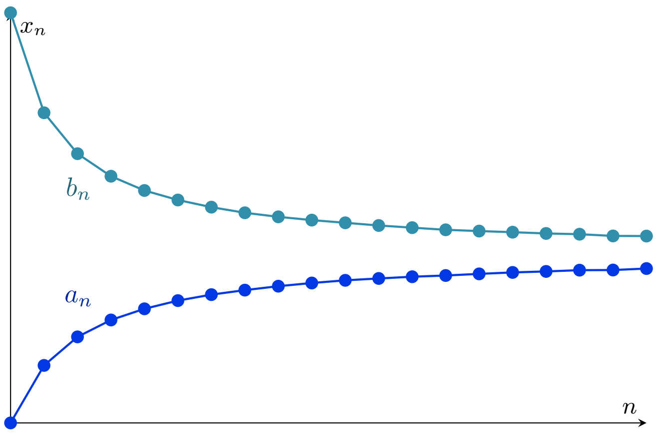
□

Teorema 36. *Siano $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ due successioni tali che:*

- $a_n \leqslant b_n$
- $a_n \uparrow$, $b_n \downarrow$
- $0 \leqslant b_n - a_n \to 0$

allora $a_n \to l \in \mathbb{R}$, $b_n \to l$ e:

$$|a_n - l| \leqslant |a_n - b_k| \; \forall k \in \mathbb{N}$$
$$|b_n - l| \leqslant |a_k - b_n| \; \forall k \in \mathbb{N}$$



Dimostrazione. Dato che $a_n \leqslant b_n$, a_n è superiormente limitata e b_n è inferiormente limitata. Inoltre, dato che a_n è crescente, a_n è inferiormente limitata, mentre b_n è superiormente limitata. Dato che a_n e b_n sono monotone e limitate, convergono. Sia $a_n \to a$ e $b_n \to b$ e $a \neq b$, allora:

$$0 \leqslant |a - b| = |a - a_n + a_n - b_n + b_n - b| \leqslant |a - a_n| + |a_n - b_n| + |b_n - b|$$

ma, dato che $a_n \to a$, $b_n \to b$ e $|a_n - b_n| \to 0$, i tre termini tendono a zero, quindi:

$$0 \leqslant \lim |a - b| \leqslant 0$$

quindi $a - b = 0$, $a = b := l$.
Dato che $b_n \downarrow l$, $b_k \geqslant l \; \forall k$. Allo stesso modo $a_n \leqslant l \; \forall n$. Dunque:

$$|a_n - b_k| = |a_n - l| + |b_k - l| \geqslant |a_n - l|$$

□

4.47 Spazi metrici

Definizione 4.48. *Siano* X *un insieme e* $d : X \times X \to [0, +\infty)$. (X, d) *è uno spazio metrico se:*

- $d(x, y) = 0 \iff x = y \ \forall x, y \in X$
- $d(x, y) = d(y, x) \ \forall x, y \in X$ *(simmetria)*
- $d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(z, y) \ \forall x, y, z \in X$ *(disuguaglianza triangolare)*

Esempio 4.49. $X = \mathbb{R}$, $d(x, y) = |x - y|$

Definizione 4.50. *Uno spazio metrico* (X, d) *è* ***completo*** *se le successioni di Cauchy in* (X, d) *sono convergenti.*

Capitolo 5

Serie numeriche

5.1 Introduzione

♣ **Definizione 5.2.** Data una successione $\{a_n\}$, si construisca la successione $\{s_n\}$ (detta delle somme parziali):

$$s_n := a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$$

Definiamo **serie** di termine generale a_n il limite $\sum_{n=0}^{\infty} a_n := \lim s_n$.

- Se $\lim s_n = s \in \mathbb{R}$, diciamo che la serie **converge**;
- Se $\lim s_n = \pm\infty$, diciamo che la serie **diverge**;
- Se $\nexists \lim s_n$, diciamo che la serie è **oscillante**.

Notazione 13. $\lim s_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum_n a_n$, $\sum a_n$

Proposizione 5.3 (Problema di Basilea)**.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ *converge. In particolare:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Proposizione 5.4. *Sia* $k \in \mathbb{R}$, $\sum ka_n = k \sum a_n$

Dimostrazione.

$$\sigma_n = ka_0 + ka_1 + \cdots + ka_n = k(a_0 + a_1 + \cdots + a_n) = ks_n$$

□

Proposizione 5.5. *Siano* $\sum a_n$ *e* $\sum b_n$ *due serie convergenti* $\implies$ $\sum(a_n + b_n)$ *converge e* $\sum(a_n + b_n) = \sum a_n + \sum b_n$

Dimostrazione. Sia $s_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$ e $\sigma_n = b_0 + b_1 + \cdots + b_n$.

$$s_n + \sigma_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n + b_0 + b_1 + \cdots + b_n$$
$$\sum(a_n + b_n) = \lim(s_n + \sigma_n) = \lim s_n + \lim \sigma_n = \sum a_n + \sum b_n$$

□

Osservazione 5.6. *Lo stesso si può estendere a serie divergenti utilizzando l'aritmetica estesa.*

Teorema 37. *Il carattere di una serie non cambia se si modificano un numero finito di termini.*

Dimostrazione. Siano $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ due successioni tali che $a_n = b_n \ \forall n \geqslant n_0 \in \mathbb{N}$.

$$s_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_{n_0} + \cdots + a_n$$

$$\sigma_n = b_0 + b_1 + \cdots + b_{n_0} + \cdots + b_n$$

$$s_n - \sigma_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_{n_0} - b_0 - b_1 - \cdots - b_{n_0} = k \in \mathbb{R}$$

$$s_n = k + \sigma_n \implies \lim s_n = \lim \sigma_n + \lim k = \lim \sigma_n + k$$

□

Teorema 38 (Criterio di Cauchy)**.** *Una serie* $\sum a_n$ *converge se e solo se:*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ : \ \left| \sum_{k=n}^{n+p} a_k \right| < \epsilon \ \forall n \geqslant n_0 \ \forall p \geqslant 0$$

Dimostrazione. Sia s_n la successione delle somme parziali. s_n converge $\iff$ s_n è di Cauchy $\implies$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ : \ |s_m - s_n| < \varepsilon \ \forall m, n \geqslant n_0$$

equivalentemente:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ : \ |s_{n+p} - s_{n-1}| < \varepsilon \ \forall n \geqslant n_0 \ \forall p \geqslant 0$$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ : \ \left| \sum_{k=0}^{n+p} a_k - \sum_{k=0}^{n-1} \right| < \varepsilon \ \forall n \geqslant n_0 \ \forall p \geqslant 0$$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ : \ \left| \sum_{k=n}^{n+p} a_k \right| < \varepsilon \ \forall n \geqslant n_0 \ \forall p \geqslant 0$$

□

Teorema 39 (Condizione necessaria di convergenza)**.** *Se* $\sum a_n$ *converge, allora* $a_n \to 0$.

Dimostrazione. Sia $s_n = a_0 + a_1 + \ldots a_n$:

$$s_n - s_{n-1} = a_n$$

Se $s_n \to s \in \mathbb{R}$, $s_{n-1} \to s$ (sottosuccessione di una successione convergente). Quindi:

$$\lim(s_n - s_{n-1}) = \lim s_n - \lim s_{n-1} = s - s = 0 = \lim a_n \implies a_n \to 0$$

□

Osservazione 5.7. *L'inverso non vale.*

5.8 Serie telescopiche

Sia $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$, con $a_n = b_n - b_{n+1}$, la serie $\sum a_n$ è detta serie telescopica
Sia $s_n = a_{n_0} + a_{n_0+1} + \cdots + a_n$, si ha che:

$$\begin{aligned} s_n &= b_{n_0} - \cancel{b_{n_0+1}} + \cancel{b_{n_0+1}} - \cancel{b_{n_0+2}} + \cancel{b_{n_0+2}} - \cdots - b_{n+1} = \\ &= b_{n_0} - b_{n+1} \end{aligned}$$

quindi:

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n = \lim s_n = \lim (b_{n_0} - b_{n+1}) = b_{n_0} - \lim b_n$$

5.8.1 Serie di Mengoli

Caso particolare di una serie telescopica è la serie di Mengoli, il cui termine generale è $a_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$

5.9 Serie a termini positivi

Definizione 5.10. *Una serie $\sum a_n$ si dice a **termini positivi** se $a_n \geqslant 0$ $\forall n$*

Teorema 40. *Una serie a termini positivi è regolare (o diverge o converge).*

Dimostrazione. Dato che $a_n \geqslant 0$ $\forall n$, s_n è una successione monotona crescente (somma di termini positivi o nulli). Quindi la successione s_n è regolare. □

Osservazione 5.11. *Se $\sum a_n$ è a termini positivi e $a_n \not\to 0$, $\sum a_n = +\infty$*

♣ **Teorema 41 (Teorema del confronto).** Siano $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ due successioni tali che $0 \leqslant a_n \leqslant b_n$ $\forall n$. Si ha che:

- Se $\sum a_n$ diverge, $\sum b_n$ diverge;
- Se $\sum b_n$ converge, $\sum a_n$ converge.

Dimostrazione. Siano $s_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$ e $\sigma_n = b_0 + b_1 + \ldots b_n$, si ha che:

$$0 \leqslant s_n \leqslant \sigma_n \ \forall n$$

- Se $s_n \to +\infty$, $\sigma_n \to +\infty$ per il teorema del confronto per le successioni;
- Se $\sigma_n \to \sigma \in \mathbb{R}$, allora:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} : \ -\varepsilon + \sigma < \sigma_n < \varepsilon + \sigma \ \forall n \geqslant n_0$$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} : \ 0 < s_n \leqslant \sigma_n < \varepsilon + \sigma \ \forall n \geqslant n_0$$

  Quindi s_n è limitata e monotona e dunque converge.

□

Osservazione 5.12. *Se $0 \leqslant a_n \leqslant b_n$ e $\sum b_n$ converge $\implies$ $\sum a_n \leqslant \sum b_n$ (teorema della permanenza del segno).*

Corollario 5 (Teorema del panino imbottito)**.** *Siano $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ due successioni positive. Se $\exists M, N \in \mathbb{R}$, con $N \leqslant M$: $Na_n \leqslant b_n \leqslant Ma_n$, allora*

$$\sum a_n \, Conv. \iff \sum b_n \, Conv.$$

5.13 Serie geometrica

Si definisce serie geometrica la serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n$$

con $q \in \mathbb{R}$. Detta s_n la successione delle somme parziali, si ha che:

$$\begin{aligned} s_n &= q^0 + q^1 + \cdots + q^n \\ q \cdot s_n &= q^1 + q^2 + \cdots + q^{n+1} \\ s_n - q \cdot s_n &= q^0 + \cancel{q^1} - \cancel{q^1} + \cancel{q^2} - \cancel{q^2} + \cdots - q^{n+1} \\ s_n &= \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}, \quad q \neq 1 \end{aligned}$$

Di conseguenza, si ottiene che:

$$s_n = \begin{cases} n + 1 \text{ se } q = 1 \\ \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \text{ se } q \neq 1 \end{cases}$$

quindi:

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \lim s_n = \begin{cases} +\infty \text{ se } q \geqslant 1 \\ \dfrac{1}{1 - q} \text{ se } |q| < 1 \\ \nexists \text{ se } q \leqslant -1 \end{cases}$$

5.14 Rappresentazione decimale dei reali

Sia $a \in \mathbb{R} \cap (0, 1)$, a può essere scritto come:

$$a = 0.a_1a_2a_3\ldots$$

dove a_i è una cifra tra 0 e 9. Quindi a_n (a troncato all'n-esima cifra) può essere scritto come:

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \frac{1}{10^k}$$

Proposizione 5.15. *a_n converge.*

Dimostrazione. Sia $\alpha_k := a_k \frac{1}{10^k}$. Si ha che:

$$0 \leqslant a_k \leqslant 9 \implies 0 \leqslant \alpha_k \leqslant 9 \frac{1}{10^k}$$

quindi $\sum \alpha_k$ converge per confronto con una serie geometrica di ragione $\frac{1}{10}$. □

Proposizione 5.16. $0.\overline{9} = 1$

Dimostrazione. Si ha che:

$$0.\overline{9} = \sum_{n=1}^{+\infty} 9\frac{1}{10^n} = 9\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{10}\right)^n - 9 =$$
$$= 9\frac{1}{1-\frac{1}{10}} - 9 =$$
$$= 9\frac{10}{10-1} - 9 = 1$$

□

5.17 Serie armonica

Si definisce serie armonica la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$

♣ **Teorema 42.**

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = +\infty$$

Dim. I. P.A. si supponga che $\sum\frac{1}{n} = l \in \mathbb{R}$. Sia s_n la successione delle somme parziali:

$$s_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \to l$$

si consideri s_{2n}

$$s_{2n} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n}$$

a sua volta, $s_{2n} \to l$. Quindi:

$$s_{2n} - s_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \geqslant n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$$

Quindi $s_{2n} - s_n \geqslant \frac{1}{2}$, ma $s_{2n} - s_n \to 0$, quindi $s_{2n} - s_n < \frac{1}{2}$ definitivamente. □

Lemma 5.18.

$$\sum_{k=1}^{n}\log\left(1+\frac{1}{k}\right) = \log(1+n)$$

Dim. II.

$$\log\left(1+\frac{1}{k}\right) = \log\left(\frac{k+1}{k}\right) = \log(k+1) - \log(k)$$

tale è il termine generale di una serie telescopica. Quindi si ha che:

$$\sum_{k=1}^{n}\log\left(1+\frac{1}{k}\right) = -\log(1) + \cancel{\log(2)} - \cancel{\log(2)} + \cdots + \log(n+1) = \log(n+1)$$

□

Dim. II. Per la monotonia della successione e_n, si ha che:

$$\left(1+\frac{1}{k}\right)^k < e \ \forall k \in \mathbb{N}_0$$

Dato che $a \leqslant b \implies \log(a) \leqslant \log(b)$, si trova:

$$k \log\left(1+\frac{1}{k}\right) < 1 \implies \log\left(1+\frac{1}{k}\right) < \frac{1}{k} \ \forall k \in \mathbb{N}_0$$

quindi $\sum \frac{1}{n} = +\infty$ per il teorema del confronto. □

5.19 Formula di Eulero-Mascheroni

Proposizione 5.20. *Sia s_n la successione delle somme parziali della serie armonica:*

$$s_n - \log n \to \gamma$$

dove γ è la costante di Eulero-Mascheroni:

$$\gamma = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n} - \log\left(1+\frac{1}{n}\right)\right] \simeq 0.5772$$

Teorema 43 (Formula di Eulero-Mascheroni)**.**

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \log n$$

5.21 Serie armonica generalizzata

Chiamiamo serie armonica generalizzata la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$$

con $\alpha \in \mathbb{R}$.

Teorema 44. *La serie armonica:*

- *Converge se $\alpha > 1$;*
- *Diverge se $\alpha \leqslant 1$.*

Dimostrazione.

- Si consideri il caso $\alpha \geqslant 2$. Si ha che:
$$\frac{1}{n^\alpha} \leqslant \frac{1}{n^2}$$
quindi $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge per confronto con una serie convergente.
- Si consideri ora il caso $\alpha \leqslant 1$. In tal caso si ha che:
$$\frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{n^\alpha}$$
quindi $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ diverge per confronto.
- Il caso $1 < \alpha < 2$ non sarà trattato.

□

5.22 Criterio del confronto asintotico

♣ **Teorema 45.** Siano $\sum a_n$ e $\sum b_n$ due serie a termini positivi. Se $a_n \sim b_n$, $\sum a_n$ e $\sum b_n$ hanno lo stesso carattere.

Dimostrazione. Dato che $a_n \sim b_n$, si ha che:

$$\begin{aligned}\lim \frac{a_n}{b_n} = 1 &\implies \forall \varepsilon > 0 \ -\varepsilon + 1 < \frac{a_n}{b_n} < \varepsilon + 1 \text{ Definit.} \\ &\implies b_n(-\varepsilon + 1) < a_n < b_n(\varepsilon + 1) \text{ Definit.} \\ &\implies -\varepsilon + 1 > 0 \text{ Definit.} \ \wedge \ -\varepsilon + 1 < \varepsilon + 1\end{aligned}$$

Quindi $\sum a_n$ e $\sum b_n$ hanno lo stesso carattere per il *teorema del panino imbottito*. □

5.23 Serie campione

Definiamo serie campione la serie:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha} (\log n)^{\beta}}$$

con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

♣ **Teorema 46.** La serie campione:

- Se $\alpha > 1$, converge $\forall \beta$
- Se $\alpha < 1$, diverge $\forall \beta$
- Se $\alpha = 1$, converge se $\beta > 1$
- Se $\alpha = 1$, diverge se $\beta \leqslant 1$

5.24 Criteri del rapporto e della radice

Teorema 47 (Criterio del rapporto per le serie)**.** *Sia $\sum a_n$ una serie a termini positivi e sia $l = \lim \frac{a_{n+1}}{a_n}$:*

- *Se $l > 1$, $\sum a_n$ diverge;*
- *Se $l < 1$, $\sum a_n$ converge;*
- *Se $l = 1$, il criterio è inconcludente.*

Teorema 48 (Criterio della radice per le serie)**.** *Sia $\sum a_n$ una serie a termini positivi e sia $l = \limsup \sqrt[n]{a_n}$:*

- *Se $l > 1$, $\sum a_n$ diverge;*
- *Se $l < 1$, $\sum a_n$ converge;*
- *Se $l = 1$, il criterio è inconcludente.*

Dimostrazione.

- Se $l < 1$, sia $l < \beta < 1$. Si ha che:

$$\begin{aligned}\sqrt[n]{a_n} &< \beta \text{ Definit.} \\ a_n &< \beta^n \text{ Definit.}\end{aligned}$$

dato che $\beta < 1$, $\sum \beta^n$ converge, quindi $\sum a_n$ a sua volta converge per il criterio del confronto.

- Se $l > 1$:

$$\sqrt[n]{a_n} > 1 \text{ Definit.}$$
$$a_n > 1 \text{ Definit.}$$

dato che $a_n > 1$ Definit., $a_n \not\to 0$, quindi diverge.

□

5.25 Serie fattoriale

Si definisce serie fattoriale la serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

Teorema 49. *La serie fattoriale converge.*

Dimostrazione. $\frac{1}{n!} < \frac{1}{n^2}$ Definit. $\implies$ la serie converge per confronto. □

Si ha inoltre che:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x \ \forall x \in \mathbb{R}$$

♣ **Teorema 50.** Sia $e_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$, allora:

$$0 < e - e_n < \frac{1}{n \cdot n!} \ \forall n \in \mathbb{N}_0$$

Dimostrazione. Dato che $e_n \uparrow e$, $e_n < e \implies 0 < e - e_n$

$$\begin{aligned}
e - e_n &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!} = \\
&= \left[\frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \frac{1}{(n+3)!} + \dots\right] = \\
&= \frac{1}{(n+1)!}\left[1 + \frac{1}{(n+2)} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \dots\right] < \\
&< \frac{1}{(n+1)!}\left[1 + \frac{1}{(n+1)} + \frac{1}{(n+1)^2} + \dots\right] = \\
&= \frac{1}{(n+1)!} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n+1}\right)^j = \frac{1}{(n+1)!} \frac{1}{1 - \frac{1}{n+1}} = \\
&= \frac{1}{(n+1)n!} \frac{n+1}{n+1-1} = \frac{1}{n \cdot n!}
\end{aligned}$$

□

Osservazione 5.26.

$$n! \cdot e_n \in \mathbb{N} \ \forall n \in \mathbb{N}_0$$

Dimostrazione.

$$n! \cdot e_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!}$$

$\frac{n!}{k!}$ è un intero (dato che $n \geqslant k$). □

Teorema 51. $e \notin \mathbb{Q}$

Dimostrazione. P.A. si supponga che $e \in \mathbb{Q}$ e che quindi $e = \frac{m}{k}$, con $m, k \in \mathbb{Z}^+$ coprimi. Per la disuguaglianza precedentemente dimostrata, si ha che:

$$0 < e - e_k < \frac{1}{k \cdot k!} \implies 0 < \frac{m}{k} - e_k < \frac{1}{k \cdot k!}$$

quindi, moltiplicando per $n!$:

$$0 < m(k-1)! - e_k \cdot k! < \frac{1}{k} \leqslant 1$$

detto $p = m(k-1)! - e_k \cdot k!$, si ha che $p \in \mathbb{Z}$ (differenza di due interi). Quindi $0 < p < 1$, $p \in \mathbb{Z}$, che è un assurdo. □

5.27 Criterio di Leibniz

♣ **Teorema 52.** Sia $\sum a_n = \sum (-1)^n \cdot b_n$ una serie a segno alterno, se:

- $b_n \geqslant 0$
- $b_{n+1} \leqslant b_n$
- $b_n \to 0$

o, equivalentemente $b_n \downarrow 0$, allora $\sum a_n$ converge.

Dimostrazione. Si considerino i termini della successione delle somme parziali con n pari o nullo:

$$s_0 = b_0, \quad s_2 = b_0 - b_1 + b_2 = b_0 - (b_1 - b_2), \quad s_4 = b_0 - (b_1 - b_2) - (b_3 - b_4)$$

dato che b_n è decrescente, i termini $b_1 - b_2$, $b_3 - b_4$ ecc. sono negativi, e quindi s_{2n} è decrescente. Si considerino ora i termini ad indice dispari:

$$s_1 = b_0 - b_1, \quad s_3 = (b_0 - b_1) + (b_2 - b_3), \quad s_5 = (b_0 - b_1) + (b_2 - b_3) + (b_4 - b_5)$$

nuovamente, dato che b_n è decrescente, i termini $b_0 - b_1$, $b_2 - b_3$, $b_4 - b_5$ ecc. sono positivi, quindi s_{2n+1} è crescente.
Inoltre, si ha che $s_{2n} \geqslant s_{2n+1}$ e $s_{2n} - s_{2n+1} \to 0$. Quindi, per un teorema noto si ha che $\exists l \in \mathbb{R}$:

$$s_{2n} \to l, \quad s_{2n+1} \to l$$

e di conseguenza:

$$s_n \to l$$

□

Osservazione 5.28. *È sufficiente che $b_n \downarrow$ Definit.*

5.29 Criterio di Dirichlet

Teorema 53. *Sia $\sum c_n = \sum a_n \cdot b_n$. Detta A_n la successione delle somme parziali di a_n, se $b_n \downarrow 0$ e A_n è limitata, $\sum c_n$ converge.*

5.30 Convergenza assoluta

♣ **Definizione 5.31.** Data una serie $\sum a_n$, diciamo che essa converge **assolutamente** se la serie $\sum |a_n|$ converge

♣ **Teorema 54.** Se una serie converge assolutamente, allora converge.

Dimostrazione. Sia $\sum a_n$ t.che $\sum |a_n|$ converge. Sia $b_n = a_n + |a_n|$, si ha che:

$$0 \leqslant b_n \leqslant 2|a_n|$$

quindi b_n converge per confronto. Inoltre:

$$a_n = b_n - |a_n| \implies \sum a_n = \sum (b_n - |a_n|) = \sum b_n + \sum -|a_n|$$

Dato che $\sum b_n$ e $\sum -|a_n|$ convergono, $\sum a_n$ converge. □

Osservazione 5.32. *Il viceversa è falso. Infatti* $\sum \frac{1}{n}$ *diverge, mentre* $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ *converge.*

5.33 Riordinamenti

Definizione 5.34. *Sia* $\{a_n\}$ *una successione,* b_n *è un* ***riordinamento*** *di* a_n *se* $b_n = a_{k(n)}$, *dove* $k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *è una funzione biunivoca.*

Definizione 5.35. *Sia* $\sum a_n$ *una serie,* $\sum b_n$ *è un* ***riordinamento della serie*** $\sum a_n$ *se* b_n *è un riordinamento di* a_n.

Definizione 5.36. *Una serie* $\sum a_n$ *converge* ***incondizionatamente*** *se tutti i riordinamenti di* $\sum a_n$ *convergono.*

Teorema 55 (Riemann-Dini)**.**

- *Se* $\sum a_n$ *converge assolutamente, allora* $\sum a_n$ *converge incondizionatamente.*
- *Se* $\sum a_n$ *converge, ma non converge assolutamente, allora* $\forall l \in \overline{\mathbb{R}}$ *esiste un riordinamento* $\sum b_n$ *t.che* $\sum b_n = l$.

Osservazione 5.37. *Sia* $\sum a_n$ *una serie a termini positivi. Se* $\sum a_n$ *converge, converge incondizionatamente.*

5.38 Funzione Zeta di Riemann

Definizione 5.39 (Funzione Zeta di Riemann)**.** *Si definisce la funzione* ***Zeta di Riemann****:*

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

Osservazione 5.40.

$$\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Proposizione 5.41.

$$\zeta(2n) = 2^{2n-1} \frac{\pi^{2n}|B_{2n}|}{(2n)!}$$

dove B_n *è l'n-esimo numero di Bernoulli.*

Capitolo 6

Funzioni Reali

6.1 Topologia

Definizione 6.2. *Sia $x \in \overline{\mathbb{R}}$, si definisce* ***intorno*** $\mathcal{U}(x)$ *di x:*

$$\mathcal{U}(x) = \begin{cases} (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \ (\varepsilon > 0) \ \textit{se } x \in \mathbb{R} \\ (M, +\infty) \ (M > 0) \ \textit{se } x = +\infty \\ (-\infty, -M) \ (M > 0) \ \textit{se } x = -\infty \end{cases}$$

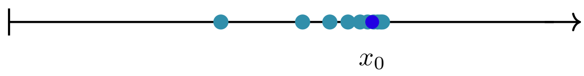
Definizione 6.3. *Sia $x \in \overline{\mathbb{R}}$, si definisce* ***intorno bucato*** $\dot{\mathcal{U}}(x)$ *di x:*

$$\dot{\mathcal{U}}(x) = \begin{cases} \mathcal{U}(x) \setminus \{x\} \ \textit{se } x \in \mathbb{R} \\ \mathcal{U}(x) \ \textit{se } x = \pm\infty \end{cases}$$

Osservazione 6.4. $x_n \to x \iff \forall \mathcal{U}(x)$ *si ha che* $x_n \in \mathcal{U}(x)$ *Definit.*

♣ **Definizione 6.5 (Punto di accumulazione).** Un punto $x \in \overline{\mathbb{R}}$ è detto **punto di accumulazione** di un insieme $A \subset \mathbb{R}$ se:

$$\forall \mathcal{U}(x) \quad \dot{\mathcal{U}}(x) \cap A \neq \emptyset$$



Teorema 56. $x \in \overline{\mathbb{R}}$ *è un punto di accumulazione di A* $\iff \exists \{a_n\}$, $a_n \neq x \ \forall n \in \mathbb{R} : \ a_n \to x$.

Dimostrazione.

- ($\Leftarrow$, $x \in \mathbb{R}$): per ipotesi, si ha che $a_n \to x$. Quindi, per definizione di limite,

  $$\forall \mathcal{U}(x) \ \exists n_0 \in \mathbb{N} : \ a_n \in \mathcal{U}(x) \ \forall n \geqslant n_0$$

  quindi:

  $$\forall \mathcal{U}(x) \quad \dot{\mathcal{U}}(x) \cap A \neq \emptyset$$

- ($\Rightarrow$, $x \in \mathbb{R}$): per ipotesi, si ha che, fissato $\mathcal{U}(x)$:

  $$\dot{\mathcal{U}}(x) \cap A \neq \emptyset$$

  Sia:

  $$\mathcal{U}(x) = \left(x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}\right)$$

allora:

$$\exists a_n \in A : \ a_n \neq x \ \wedge a_n \in \mathcal{U}(x)$$
$$0 < |a_n - x| < \frac{1}{n}$$

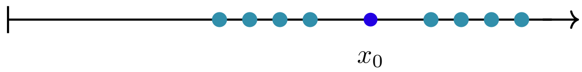
quindi $a_n \to x$ per confronto.

$\square$

Corollario 6. *Se x è un punto di accumulazione di A, si ha che $\dot{\mathcal{U}}(x) \cap A$ contiene infiniti elementi.*

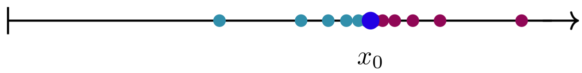
Definizione 6.6 (Punto isolato)**.** *Dato un insieme $A \subset \mathbb{R}$, $x \in A$ è un **punto isolato** di A se:*

$$\exists \mathcal{U}(x) \ : \ \mathcal{U}(x) \cap A = \{x\}$$



Definizione 6.7 (Punto di frontiera)**.** *Dato $x \in \mathbb{R}$ e $A \subset \mathbb{R}$, x è un **punto di frontiera** di A se:*

$$\forall \mathcal{U}(x) \quad \mathcal{U}(x) \cap A \neq \emptyset \quad \wedge \quad \mathcal{U}(x) \cap A^C \neq \emptyset$$



Osservazione 6.8. *I punti isolati sono punti di frontiera banali*

Definizione 6.9 (Punto interno)**.** *Sia $A \subset \mathbb{R}$, $x \in A$ è un **punto interno** di A se:*

$$\exists \mathcal{U}(x) \ : \ \mathcal{U}(x) \subset A$$

Definizione 6.10 (Insieme aperto)**.** *$A \subset \mathbb{R}$ si definisce **aperto** se ogni $a \in A$ è punto interno di A.*

Definizione 6.11 (Insieme chiuso)**.** *$A \subset \mathbb{R}$ si definisce **chiuso** contiene tutti i suoi punti di accumulazione finiti.*

Esempio 6.12.

- *$\{a\}$ è chiuso*
- *$\mathbb{R}$ e $\emptyset$ sono sia aperti che chiusi*

Teorema 57. *Un insieme A è aperto $\iff$ A^C è chiuso.*

Dimostrazione. $\square$

Teorema 58. *Un insieme A è chiuso $\iff$ Se $\forall a_n \in A$ t.che $a_n \to x$ $x \in A$.*

Dimostrazione. $\square$

Definizione 6.13 (Compattezza sequenziale)**.** *Un insieme $A \subset \mathbb{R}$ si definisce **compatto** se $\forall a_n \in A \ \exists x \in A$ ed esiste una sottosuccessione $a_{n_k} \to x$*

Teorema 59 (Heine-Borel)**.** *Un insieme $A \subset$ è compatto $\iff$ A è chiuso e limitato.*

Dimostrazione.

- ($\Leftarrow$): Sia $x_n \in A$. Dato che A è limitato, x_n è limitata. Quindi per il teorema di Bolzano-Weierstrass, $\exists x_{n_k} \ : \ x_{n_k} \to x \in \mathbb{R}$. Quindi x è un punto di accumulazione di A. Dato che A è chiuso, contiene tutti i suoi punti di accumulazione, quindi $x \in A$.
- ($\Rightarrow$):

$\square$

6.14 Limiti

6.14.1 Introduzione

♣ **Definizione 6.15 (Limite).** Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ di dominio $\mathfrak{D}$ e sia $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ un punto di accumulazione di $\mathfrak{D}$, si dice che f ammette **limite** uguale a $l \in \overline{\mathbb{R}}$ per x che tende a x_0 se:

$$\forall \mathcal{U}(l)\ \exists \mathcal{U}(x_0)\ :\quad \text{se } x \in \mathfrak{D} \cap \dot{\mathcal{U}}(x_0) \implies f(x) \in \mathcal{U}(l)$$

Notazione 14. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l,\ f(x) \underset{x\to x_0}{\to} l$

Definizione 6.16 (Limite successionale)**.** *Data $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ di dominio $\mathfrak{D}$, si dice che f ammette **limite successionale** uguale a $l \in \overline{\mathbb{R}}$ per x che tende a x_0 se:*

$$\forall a_n \in \mathfrak{D}\ :\ a_n \neq x_0,\ a_n \to x_0 \quad f(a_n) \to l$$

Notazione 15. $\text{s} - \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l$

Teorema 60 (Teorema traghettatore)**.** $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l \iff \text{s} - \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l$

Dimostrazione.

- ($\Rightarrow$): per ipotesi, fissato $\mathcal{U}(l)$:

  $$\exists \mathcal{U}(x_0)\ :\quad \text{se } x \in \mathfrak{D} \cap \dot{\mathcal{U}}(x_0) \implies f(x) \in \mathcal{U}(l)$$

  sia $a_n \in \mathfrak{D}$ t.che $a_n \neq x_0$, $a_n \to x_0$, si ha che:

  $$a_n \in \dot{\mathcal{U}}(x_0) \text{ Definit.}$$

  quindi:

  $$f(a_n) \in \mathcal{U}(l) \text{ Definit.}$$

- ($\Leftarrow$): per l'implicazione inversa si mostrerà che $\neg\text{Th.} \implies \neg\text{Hp.}$
  La negazione della tesi è:

  $$\exists \mathcal{U}(l)\ :\ \forall \mathcal{U}(x_0)\ \exists x \in \mathfrak{D} \cap \dot{\mathcal{U}}(x_0)\ :\ f(x) \notin \mathcal{U}(l)$$

  mentre la negazione dell'ipotesi è:

  $$\exists a_n \in \mathfrak{D},\ a_n \neq x_0,\ a_n \to x_0\ :\ f(a_n) \not\to l$$

  sia $\mathcal{U}(x_0) = \left(x_0 - \frac{1}{n}, x_0 + \frac{1}{n}\right)$, fissato $n \in \mathbb{N}$ $\exists a_n \in \mathfrak{D} \cap \dot{\mathcal{U}}(x_0)$: $f(a_n) \notin \mathcal{U}(l) \implies f(a_n) \not\to l$. La possibilità di costruire a_n è garantita dall'assioma della scelta.

$\square$

6.16.1 Teoremi sui limiti

Molti dei teoremi sui limiti di successioni hanno una "controparte" per i limiti di funzioni reali ottenibili tramite il teorema traghettatore.

Teorema 61 (Unicità del limite)**.** *Sia $f : \mathfrak{D}(f) \to \mathbb{R}$ una funzione reale e sia x_0 un punto di accumulazione di $\mathfrak{D}(f)$. Se $\exists l \in \mathbb{R}$ t.che $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$, l è unico.*

Dimostrazione. Dato che $\exists \lim_{x\to x_0} f(x) = l$, allora $\text{s} - \lim_{x\to x_0} f(x) = l$. Quindi:

$$\forall a_n \neq x_0,\ a_n \to x_0 \quad f(a_n) \to l$$

la tesi segue dal teorema di unicità del limite per le successioni. □

Teorema 62 (Permanenza del segno)**.** *Sia $f : \mathfrak{D}(f) \to \mathbb{R}$ una funzione reale e sia x_0 un punto di accumulazione di $\mathfrak{D}(f)$. Sia inoltre $l := \lim_{x\to x_0} f(x) \in \mathbb{R}$*
Se $f \geqslant 0$ in un $\dot{\mathcal{U}}(x_0) \implies l \geqslant 0$.
Se $l > 0 \implies \exists \mathcal{U}(x_0)$ t.che $f(x) > 0\ \forall x \in \dot{\mathcal{U}}(x_0) \cap \mathfrak{D}(f)$

Teorema 63 (Teorema del confronto)**.** *Siano $f, g, h : \dot{\mathcal{U}}(x_0) \to \mathbb{R}$ t.che $f \leqslant h \leqslant g \quad \forall x \in \dot{\mathcal{U}}(x_0)$, allora, se $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = l \in \mathbb{R}$:*

$$\lim_{x\to x_0} h(x) = l$$

Teorema 64 (Operazioni con i limiti)**.** *Siano f, g due funzioni reali e x_0 un punto di accumulazione del dominio di entrambe, le stesse proprietà che valgono per i limiti delle successioni valgono per i limiti di f e g.*

Osservazione 6.17. *Siano f e g due funzioni reali, se x_0 è punto di accumulazione di $\mathfrak{D}(f)$ e $\mathfrak{D}(g)$, non è detto che sia punto di accumulazione di $\mathfrak{D}(f+g)$.*

Esempio 6.18. $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = \sqrt{-x}$, $x_0 = 0$

Definizione 6.19 ($\diamondsuit$)**.** *Dato $A \subset \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$ è* ***punto di accumulazione destro*** *di A se:*

$$\forall \mathcal{U}(x)\ \dot{\mathcal{U}}(x) \cap A \cap (x, +\infty) \neq \emptyset$$

Definizione 6.20 ($\diamondsuit$)**.** *Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ di dominio $\mathfrak{D}$ e x_0 un punto di accumulazione destro di $\mathfrak{D}$, f ha* ***limite destro*** *l per x che tende a x_0 se:*

$$\forall a_n \in \mathfrak{D}\ :\ a_n > x_0\ \wedge\ a_n \to x_0 \implies f(a_n) \to l$$

Notazione 16 ($\diamondsuit$)**.** $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = l$

Definizione 6.21. *x_0 è un* ***punto di accumulazione bilatero*** *di A se è un sia un punto di accumulazione destro che un punto di accumulazione sinistro di A.*

Osservazione 6.22. *Se x_0 è un punto di accumulazione bilatero:*

$$\exists \lim_{x\to x_0} f(x) \iff \lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x)$$

6.22.1 Continuità

♣ **Definizione 6.23 (Continuità).** Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione di dominio $\mathfrak{D}$ e sia $x_0 \in \mathfrak{D}$, f è **continua** in x_0 se:

$$\forall \mathcal{U}(f(x_0))\ \exists \mathcal{U}(x_0) :\quad \text{se } x \in \mathfrak{D} \cap \mathcal{U}(x_0) \implies f(x) \in \mathcal{U}(f(x_0))$$

Osservazione 6.24. *La definizione è equivalente a dire che:*

- *Se* x_0 *è un punto di accumulazione di* $\mathfrak{D}$*, allora* $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$
- *Se* x_0 *è un punto isoltato di* $\mathfrak{D}$*, allora* f *è continua in* x_0

Definizione 6.25 (Continuità successionale)**.** *Sia* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *una funzione di dominio* $\mathfrak{D}$ *e sia* $x_0 \in \mathfrak{D}$*,* f *è* ***continua per successioni*** *in* x_0 *se:*

$$\forall a_n \in \mathfrak{D},\ a_n \to x_0 \quad f(a_n) \to f(x_0)$$

Teorema 65. f *è continua in* $x_0 \iff f$ *è continua per successioni in* x_0

Dimostrazione.

- Se x_0 è un punto isolato si prenda $a_n = x_0$ Definit.. Allora $f(a_n) \to f(x_0)$
- Se x_0 è un punto di accumulazione, si ha che $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \iff \mathrm{s} - \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

□

Definizione 6.26 (◇)**.** *Sia* $x_0 \in \mathfrak{D}(f)$ *t.che* x_0 *è un punto di accumulazione destro di* $\mathfrak{D}(f)$*,* f *è* ***continua da destra*** *in* x_0 *se:*

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$$

Proposizione 6.27. *Se* $x_0 \in \mathfrak{D}(f)$ *è un punto di accumulazione bilatero, allora* f *è continua in* $x_0 \iff f$ *è continua sia da destra che da sinistra in* x_0*.*

Dimostrazione. □

Teorema 66 (Permanenza del segno per funzioni continue)**.** *Sia* f *continua in* x_0 *e* $f(x_0) > 0$*, allora:*

$$\exists \mathcal{U}(x_0) : \quad se\ x \in \mathfrak{D} \cap \mathcal{U}(x_0) \implies f(x) > 0$$

Dimostrazione.

- Se x_0 è un punto isolato, sia $\mathcal{U}(x_0) = \{x_0\}$
- Se x_0 è un punto di accumulazione, segue dal teorema della permanenza del segno

□

Teorema 67 (Continuità per le operazioni)**.** *Siano* f *e* g *continue in* x_0*, allora:*

I $[f + g]$ *è continua in* x_0

II $[f \cdot g]$ *è continua in* x_0

III se $g(x_0) \neq 0$, $\left[\frac{f}{g}\right]$ *è continua in* x_0

Dimostrazione. Sia $a_n \in \mathfrak{D}(f + g)$, con $a_n \to x_0$. Dato che f e g sono continue in x_0:

$$f(a_n) \to f(x_0)$$
$$g(a_n) \to g(x_0)$$

quindi:

$$[f + g](a_n) = f(a_n) + g(a_n) \to f(x_0) + g(x_0) = [f + g](x_0)$$

In modo analogo si dimostrano i punti II e III. □

Teorema 68 (Continuità della composta)**.** *Sia f continua in x_0 e g continua in $y_0 = f(x_0)$, allora la funzione composta $h = g \circ f$ è continua in x_0*

Dimostrazione. Sia $a_n \in \mathfrak{D}(h)$, $a_n \to x_0$ ($a_n \in \mathfrak{D}(f)$, $f(a_n) \in \mathfrak{D}(g)$).
Dato che f è continua in x_0:

$$f(a_n) \to f(x_0)$$

dato che g è continua in $f(x_0)$

$$g(f(a_n)) \to g(f(x_0))$$

quindi:

$$h(a_n) = g(f(a_n)) \to g(f(x_0)) = h(x_0)$$

□

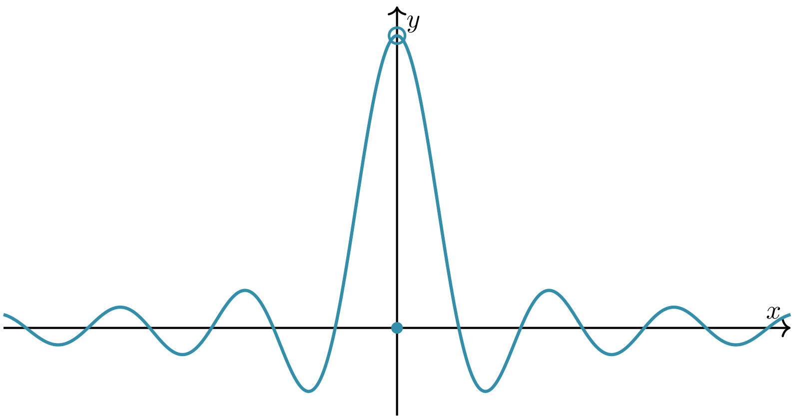
Definizione 6.28. *Una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è* ***globalmente continua*** *se è continua in ogni $x \in \mathfrak{D}(f)$.*

Definizione 6.29 (Punto di discontinuità)**.** *$x_0 \in \mathfrak{D}(f)$ è un* ***punto di discontinuità*** *di f se f non è continua in x_0*

Definizione 6.30 (Discontinuità eliminabile (III specie))**.** *x_0 è un punto di* ***discontinuità eliminabile*** *di f se:*

$$\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = l \in \mathbb{R} \quad ma \quad l \neq f(x_0)$$

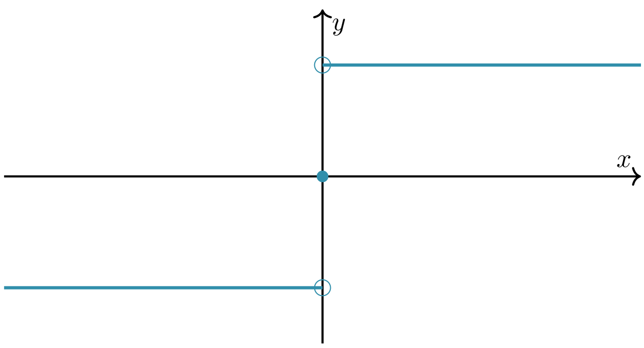
Esempio 6.31.



Definizione 6.32 (Discontinuità salto (I specie))**.** *x_0 è un punto di* ***discontinuità salto*** *di f se:*

$$\exists \lim_{x \to x_0^-} f(x) = l_1 \in \mathbb{R} \quad \exists \lim_{x \to x_0^+} f(x) = l_2 \in \mathbb{R} \quad ma \quad l_1 \neq l_2$$

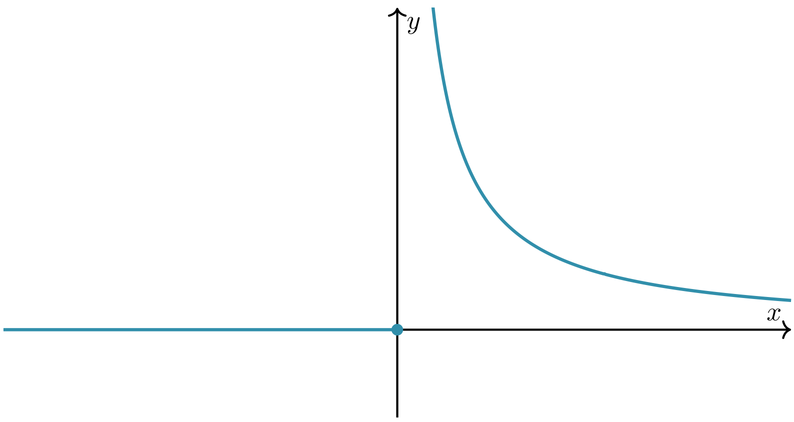
Esempio 6.33.



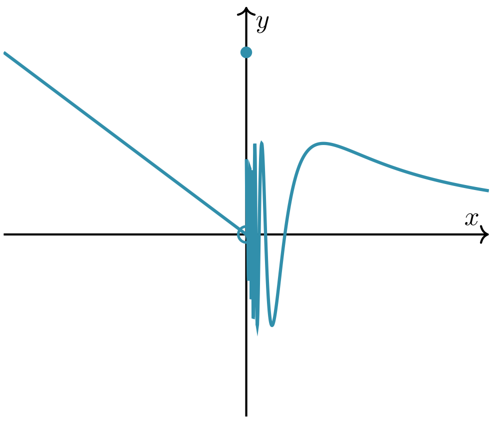
Definizione 6.34 (Discontinuità di II specie)**.** *x_0 è un punto di **discontinuità di II specie** di f se:*

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \pm\infty \ (o \ \nexists) \qquad \lim_{x\to x_0^+} f(x) = \pm\infty \ (o \ \nexists)$$

Esempio 6.35.

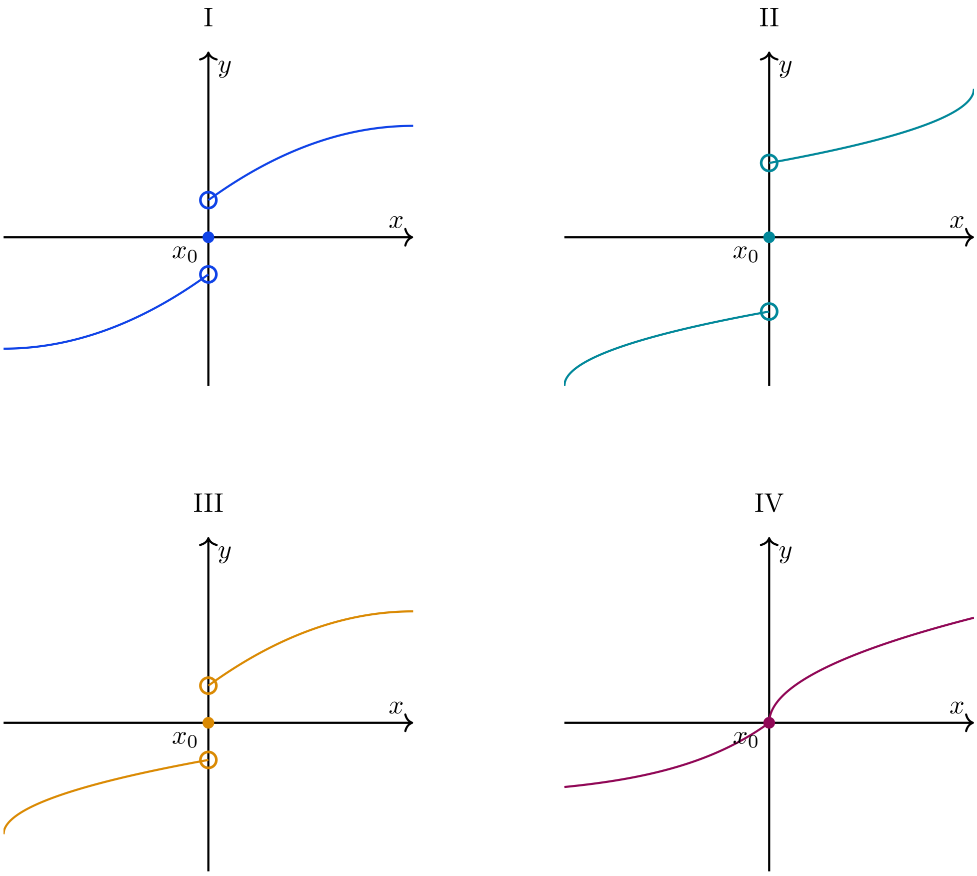


Esempio 6.36.



Teorema 69 ($\diamondsuit$)**.** *Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ una funzione monotona crescente e sia $c \in (a, b)$, allora esistono in c entrambi i limiti destro e sinistro e:*

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) \leqslant f(x_0) \leqslant \lim_{x\to x_0^+} f(x)$$



6.36.1 Prolungamento per continuità

Sia $f : \mathfrak{D}(f) \to \mathbb{R}$ e sia $x_0 \notin \mathfrak{D}(f)$ un punto di accumulazione di $\mathfrak{D}(f)$. Non essendo definita in x_0, non ha senso porsi domande sulla continuità di f in x_0. È tuttavia lecito domandarsi se sia possibile definire una funzione $\hat{f} : \mathfrak{D}(f) \cup \{x_0\} \to \mathbb{R}$ t.che $\hat{f}(x) = f(x)\ \forall x \neq x_0$ e t.che $\hat{f}$ è continua in x_0. Tale funzione, se esiste, si dice **estensione per continuità** di f in x_0.
Perché $\hat{f}$ sia continua in x_0, si deve avere:

$$\lim_{x \to x_0^-} \hat{f}(x) = \lim_{x \to x_0^+} \hat{f}(x) = \hat{f}(x_0)$$

dunque, dato che $\hat{f}$ è uguale a f in un qualsiasi intorno bucato di x_0:

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \hat{f}(x_0) \in \mathbb{R}$$

quindi, detto $l := \lim_{x \to x_0} f(x)$, è sufficiente definire $\hat{f}$ come segue:

$$\hat{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \neq x_0 \\ l & \text{se } x = x_0 \end{cases}$$

Si noti che è possibile definire $\hat{f}$ solo se l esiste ed è finito.

6.37 Teoremi sulle funzioni continue

♣ **Teorema 70 (Teorema degli zeri).** Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Se $f(a) \cdot f(b) < 0$, allora

$$\exists c \in [a, b] \ : \ f(c) = 0$$

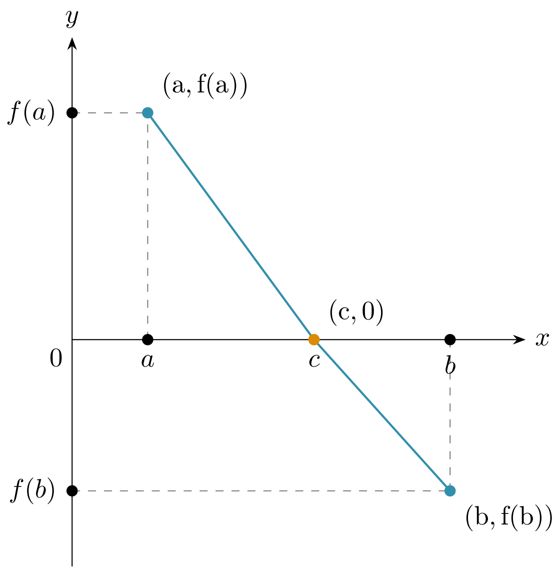
Dimostrazione. Si supponga che sia $f(a) > 0$ e $f(b) < 0$. Sia $P := \{x \in [a, b] \ : \ f(x) > 0\}$. Dato che P è limitato e non vuoto (a appartiene a P), ammette estremo superiore. Sia $c := \sup_P$, esiste $x_n \in P$ t.che $x_n \to c$. Si ha inoltre che $f(x_n) > 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$. Dato che f è continua:

$$f(x_n) \to f(c) \geqslant 0 \text{ (per il th. della perm. del segno)}$$

Sia ora $x'_n := c + \frac{1}{n}$. Si ha che $f(x'_n) < 0$ e $x'_n \to c$, quindi:

$$f(x'_n) \to f(c) \leqslant 0 \text{ (per il th. della perm. del segno)}$$

quindi si conclude che $f(c) = 0$. □



Osservazione 6.38. *Sia $A \subset \mathbb{R}$ t.che $\forall x, y \in A, \ x < y \implies [x, y] \subset A \iff A$ è un intervallo*

Definizione 6.39 (Proprietà di Darboux)**.** *Sia $\mathfrak{I}$ un intervallo non banale, $f : \mathfrak{I} \to \mathbb{R}$ ha la* ***proprietà di Darboux*** *(o è di Darboux, o ha la proprietà dei valori intermedi) se:*

$$\forall x, y \in \mathfrak{I}, \ x < y \quad f \text{ assume tutti i valori tra } f(x) \text{ e } f(y) \text{ nell'intervallo } [x, y]$$

Osservazione 6.40. *Se $f : \mathfrak{I} \to \mathbb{R}$ è di Darboux:*

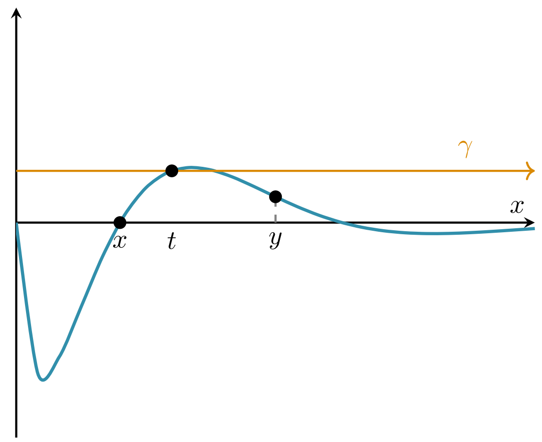
$$\forall \mathfrak{I} \subset \mathfrak{I} \text{ si ha che } f(\mathfrak{I}) \text{ è un intervallo}$$

Osservazione 6.41. *Se $f : \mathfrak{I} \to \mathbb{R}$ è di Darboux, non può avere discontinuità eliminabili.*

♣ **Teorema 71 (Teorema di Darboux).** Sia $f : \mathfrak{I} \to \mathbb{R}$, se f è continua allora è di Darboux.

Dimostrazione. Si vuole mostrare che, fissati $x, y \in \mathfrak{I}, \ x < y$:

$$\forall \gamma \ : \ f(x) < \gamma < f(y) \ \exists c \in [x, y] \ : \ f(c) = \gamma$$



- Se $f(x) = f(y)$, la tesi è verificata
- Se $f(x) \neq f(y)$, si supponga $f(x) < f(y)$. Si fissi γ t.che $f(x) < \gamma < f(y)$. Sia $g(t) = f(t) - \gamma$. Si ha che g è continua (somma tra una funzione continua e una costante). Inoltre:

$$g(x) = f(x) - \gamma < 0$$
$$g(y) = f(y) - \gamma > 0$$

quindi per il teorema degli zeri si ha che:

$$\exists c \in [x, y] \ : \ g(c) = 0 \implies f(c) - \gamma = 0 \implies f(c) = \gamma$$

□

Lemma 6.42. *Presa $x_n \in [a, b]$, $\exists x \in [a, b]$ ed una sottosuccessione x_{n_k} t.che $x_{n_k} \to x$.*

Dimostrazione. Sia $x_n \in [a, b]$, dato che $[a, b]$ è limitato, x_n è limitata. Quindi per il teorema di Bolzano-Weierstrass, $\exists x_{n_k} \ : \ x_{n_k} \to x \in \mathbb{R}$. Dato che $x_n \in [a, b]$, per il teorema della permanenza del segno si ha che:

$$x_{n_k} \geqslant a \implies x \geqslant a$$
$$x_{n_k} \leqslant b \implies x \leqslant b$$

quindi $x \in [a, b]$. □

♣ **Teorema 72 (Teorema di Weierstrass).** Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua, f ammette massimo e minimo.

Dimostrazione. Sia $M := \sup_f$ (o $+\infty$ se f è illimitata). Si ha che:

$$\exists x_n \in [a, b] \ : \ f(x_n) \to M$$

Per il lemma precedentemente dimostrato, $\exists x \in [a, b]$ e $\exists x_{n_k} \to x \in [a, b]$

$$f(x_n) \to M \implies f(x_{n_k}) \to M$$

ma $x_{n_k} \to x$ e, dato che f è continua:

$$f(x_{n_k}) \to f(x) = M = \max f$$

si può procedere in modo analogo per il minimo. □

Corollario 7. $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *continua* $\implies f([a, b]) = [m, M] \quad m = \min_f, \ M = \max_f$

Dimostrazione. Per il teorema di Weierstrass, $m, M \in f([a,b])$. Per il teorema di Darboux, $f([a,b]) = [m, M]$. □

Teorema 73. *Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ monotona, allora:*

$$f \text{ è continua} \iff f([a,b]) = [m, M] \quad m = \min_n, \ M = \max_f$$

Dimostrazione. ($\Leftarrow$): Se f non fosse continua, f avrebbe un salto (poiché monotona), quindi $[m, M]$ avrebbe un "buco". □

Corollario 8. *Sia $f : [a,b] \to [c,d]$ strettamente monotona, allora f è invertibile e $f^{-1} : [c,d] \to [a,b]$ è continua.*

Dimostrazione. La dimostrazione segue dal fatto che f^{-1} è monotona. □

Proposizione 6.43. *Sia $f : [a,b] \to [m, M]$ continua e invertibile $\implies$ f è strettamente monotona.*

6.44 Continuità uniforme

Definizione 6.45 (Continuità uniforme)**.** *Sia $f : \mathfrak{I} \to \mathbb{R}$ una funzione reale, f è* ***uniformemente continua*** *se:*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \quad \text{se} \ \ |x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon \ \forall x, y \in \mathfrak{I}$$

Osservazione 6.46. *Tale definizione non è equivalente a richiedere che, fissato $x \in \mathfrak{I}$:*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \quad \text{se} \ \ |x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon \ \forall y \in \mathfrak{I}$$

in tal caso infatti, la scelta di $\delta = \delta(x)$ può dipendere da x.

Esempio 6.47. $f : (0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{x}$ *non è uniformemente continua.*

Teorema 74 (Teorema di Heine-Cantor)**.** *Sia $f : \mathfrak{I} \to \mathbb{R}$, se f è continua $\implies$ f è uniformemente continua.*

Dimostrazione. □

6.48 Continuità di Lipschitz

Definizione 6.49 (Funzione Lipschitz continua)**.** *Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione reale, f si dice* ***Lipschitz continua*** *se:*

$$\exists L \in \mathbb{R}^+ : \ \forall x, y \in [a,b] \quad |f(x) - f(y)| \leqslant L|x - y|$$

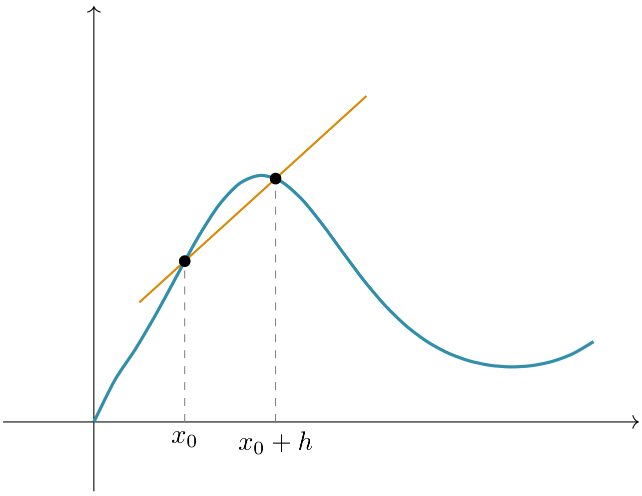
Capitolo 7

Derivate

7.1 Introduzione

Definizione 7.2 (Rapporto incrementale)**.** *Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in (a, b)$, sia $h \neq 0$, si definisce **rapporto incrementale** di f in x_0:*

$$R(f, x_0, h) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$



♣ **Definizione 7.3 (Derivata).** Una funzione reale f è **derivabile** in x_0 se:

$$\lim_{h \to 0} R(f, x_0, h) = l \in \mathbb{R}$$

l è detto **derivata** di f in x_0.

Notazione 17. $\frac{df}{dx}(x_0),\ f'(x_0),\ \dot{f}(x_0),\ Df(x_0)$

7.4 Differenziabilità

Notazione 18. $\omega(h)$: $\omega(h) \to 0 \iff h \to 0$

♣ **Definizione 7.5 (Differenziabilità).** Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in (a, b)$, f è **differenziabile** in x_0 se:

$$\exists L \in \mathbb{R} :\ f(x_0 + h) = f(x_0) + L \cdot h + h\omega(h)$$

Osservazione 7.6. *Sia* $x_0 + h := x$*, allora:*

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + L(x - x_0)}_{retta} + \underbrace{(x - x_0)\omega(x - x_0)}_{errore}$$

Teorema 75. *Sia* f *una funzione reale, allora* f *è differenziabile in* $x_0 \iff f$ *è derivabile in* x_0*. In particolare:*

$$L = f'(x_0)$$

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + (x - x_0)\omega(x - x_0)$$

Dimostrazione.

- ($\Rightarrow$): Dato che f è differenziabile, $\exists L \in \mathbb{R}$ t.che:

  $$f(x_0 + h) = f(x_0) + L \cdot h + h\omega(h) \iff f(x_0 + h) - f(x_0) = h(L + \omega(h))$$

  dato che $h \neq 0$:

  $$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = L + \omega(h) \iff f'(x_0) = L \in \mathbb{R}$$

- ($\Leftarrow$): Dato che f è derivabile:

  $$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \underset{h\to 0}{\to} f'(x_0) \iff \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - f'(x_0) \underset{h\to 0}{\to} 0$$

  quindi:

  $$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - f'(x_0) = \omega(h) \implies f(x_0 + h) = f(x_0) + h\underset{\substack{\parallel \\ L}}{f'(x_0)} + h\omega(h)$$

$\square$

Teorema 76. *Se* f *è derivabile in* x_0*, allora è continua in* x_0*.*

Dimostrazione. Dato che f è derivabile in x_0, è differenziabile in x_0. Quindi:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + (x - x_0)\omega(x - x_0)$$

si ha che (dato che $f'(x_0)$ è finito):

$$f'(x_0)(x - x_0) \underset{x\to x_0}{\to} 0$$

$$(x - x_0)\omega(x - x_0) \underset{x\to x_0}{\to} 0$$

quindi:

$$f(x) \underset{x\to x_0}{\to} f(x_0)$$

che è la definizione di continuità in x_0. $\square$

7.7 Operazioni con le derivate

Proposizione 7.8 (Derivata della somma)**.** *Siano f e g due funzioni derivabili in x_0, la loro somma è derivabile in x_0 e:*

$$[f+g]'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$

Proposizione 7.9 (Derivata del prodotto)**.** *Siano f e g due funzioni derivabili in x_0, il loro prodotto è derivabile in x_0 e:*

$$[f \cdot g]'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$$

Proposizione 7.10 (Derivata della composta)**.** *Sia $f : \mathfrak{D}(f) \to \mathfrak{D}(g)$ una funzione derivabile in x_0 e $g : \mathfrak{D}(g) \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile in $f(x_0)$. Allora la funzione composta $\eta := g \circ f$ è derivabile in x_0 e:*

$$\eta'(x_0) = g'(f(x_0))f(x_0)$$

Dimostrazione. Si utilizzerà l'equivalente nozione di differenziabilità al posto di quella di derivabilità. Si ha dunque che:

$$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)h + h\omega_f(h)$$
$$g(y_0+k) = g(y_0) + g'(y_0)k + k\omega_g(k)$$

di conseguenza:

$$\eta(x_0+h) = g(f(x_0+h)) = g(\underset{\substack{\| \\ y_0}}{f(x_0)} + \underbrace{f'(x_0)h + h\omega_f(h)}_{k\to 0}) =$$
$$= g(y_0) + g'(y_0)\left[f'(x_0)h + h\omega_f(h)\right] + \left[f'(x_0)h + h\omega_f(h)\right]\omega_g(k)$$

$$\eta(x_0+h) = g(y_0) + g'(y_0)f'(x_0)h + h\omega(h) = \eta(x_0) + \eta'(x_0)h + h\omega(h)$$

□

Proposizione 7.11 (Derivata dell'inversa)**.** *Sia $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ una funzione continua e strettamente monotona. Se f è derivabile in $x_0 \in (a,b)$ e $f'(x_0) \neq 0$ allora f^{-1} è derivabile in $y_0 = f(x_0)$ e:*

$$\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Dimostrazione. Si ha che:

$$R\left(f^{-1}, y_0, k\right) = \frac{f^{-1}(y_0+k) - f^{-1}(y_0)}{k}$$

Sia $h = f^{-1}(y_0+k) - f^{-1}(y_0)$.
Dato che f^{-1} è continua, $h \underset{k\to 0}{\to} 0$. Quindi:

$$x_0 + h = f^{-1}(y_0+k)$$

$$f(x_0+h) = y_0 + k = f(x_0) + k \implies k = f(x_0+h) - f(x_0)$$

quindi:

$$R\left(f^{-1}, y_0, k\right) = \frac{h}{f(x_0+h) - f(x_0)} = \frac{1}{\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}} \underset{k\to 0}{\to} \frac{1}{f'(x_0)}$$

□

7.12 Teorema di Fermat

Definizione 7.13 (Massimo locale)**.** *Sia $f : \mathfrak{D}(f) \to \mathbb{R}$ una funzione e sia $x_0 \in \mathfrak{D}(f)$. x_0 si dice* ***massimo locale*** *di f se $\exists \mathcal{U}(x_0)$ t.che:*

$$f(x) \leqslant f(x_0)\ \forall x \in \mathcal{U}(x_0) \cap \mathfrak{D}(f)$$

Definizione 7.14 (Minimo locale)**.** *Sia $f : \mathfrak{D}(f) \to \mathbb{R}$ una funzione e sia $x_0 \in \mathfrak{D}(f)$. x_0 si dice* ***minimo locale*** *di f se $\exists \mathcal{U}(x_0)$ t.che:*

$$f(x) \geqslant f(x_0)\ \forall x \in \mathcal{U}(x_0) \cap \mathfrak{D}(f)$$

Se x_0 è un minimo o un massimo locale, si dice **estremante locale**.

Teorema 77 (Teorema di Fermat)**.** *Sia $f : \mathfrak{D}(f) \to \mathbb{R}$ una funzione e sia $x_0 \in \mathfrak{D}(f)$ un estremante locale di f. Se f è derivabile in x_0, si ha che:*

$$f'(x_0) = 0$$

Dimostrazione. Si supponga che x_0 sia un massimo locale. Per definizione, esiste un intorno $\mathcal{U}(x_0) = (x_0 - h, x_0 + h)$, con $h > 0$, t.che:

$$f(x) \leqslant f(x_0)\ \forall x \in (x_0 - h, x_0 + h)$$

dato che f è derivabile in x_0:

$$f'(x_0) = L \in \mathbb{R} \implies f'_-(x_0) = f'_+(x_0) = f'(x_0)$$

ma si ha che, per il teorema della permanenza del segno:

$$f'_-(x_0) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \geqslant 0$$

$$f'_+(x_0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \leqslant 0$$

quindi:

$$f'(x_0) = 0$$

□

7.15 La funzione derivata

Definizione 7.16 (Funzione derivata)**.** *Sia $f : \mathfrak{I} \to \mathbb{R}$, si definisce* ***funzione derivata*** *di f la funzione $f' : \mathfrak{D}(f') \to \mathbb{R}$ così definita:*

$$x \mapsto f'(x)$$

dove $\mathfrak{D}(f') := \{x \in \mathfrak{I} \ :\ f \text{ è derivabile in } x\} \subset \mathfrak{I}$

Osservazione 7.17. *Può essere che $\mathfrak{D}(f') = \emptyset$*

Osservazione 7.18 ($\diamondsuit$)**.** *Se $\mathfrak{I} = [a, b]$, derivabile in a significa che $\exists f'_+(a)$*

Teorema 78. *Sia $f : \mathfrak{I} \to \mathbb{R}$ derivabile in $\mathfrak{I}$, la funzione derivata $f' : \mathfrak{I} \to \mathbb{R}$ ha la proprietà di Darboux.*

Dimostrazione. Siano $x, y \in \mathfrak{I}$ con $x < y$. Allora:

- Se $f'(x) = f'(y)$, la proprietà è verificata

- Se $f'(x) \neq f'(y)$, si supponga $f'(x) < f'(y)$ e sia $\gamma \in \mathbb{R}\ :\ f'(x) < \gamma < f'(y)$, si vuole mostrare che $\exists c \in [x, y]\ :\ f'(c) = \gamma$.

  Sia $g : [x, y] \to \mathbb{R}$ così definita:

  $$g(t) = f(t) - \gamma t$$

  si ha che g è derivabile in $[x, y]$ (poiché f lo è). Inoltre:

  $$g'(t) = f'(t) - \gamma$$

  si ha che $g'(y) = f'(y) - \gamma > 0$, mentre $g'(x) = f'(x) - \gamma < 0$. Dato che g è continua, ammette massimo e minimo in $[x, y]$ (per il teorema di Weierstrass). Inoltre, si ha che non può assumere il minimo in x. Infatti, se così fosse, si avrebbe che:

  $$g(x) \leqslant g(t)\ \forall t \in [x, y]$$
  $$g'(x) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \geqslant 0 \quad \text{Th. della perm. del segno}$$

  che contraddice l'osservazione precedente. Lo stesso si può dire per y. Si può quindi concludere che:

  $$\exists c \in [x, y]\ :\ g'(c) = 0 \implies f'(c) = \gamma$$

  $\square$

Definizione 7.19. $\mathcal{C}'(\mathfrak{I}) := \{f : \mathfrak{I} \to \mathbb{R}\ :\ f$ *è derivabile e* f' *è continua*$\}$

7.20 Derivate successive

Definizione 7.21 (Derivata n-esima)**.** *Sia $f : \mathfrak{I} \to \mathbb{R}$ derivabile in $\mathcal{U}(x_0)$. Detta $f^{(0)}$ la funzione stessa, se $f^{(n-1)}$ è definita in $\mathcal{U}(x_0)$, si definisce* ***derivata n-esima*** *di f in x_0 $f^{(n)}(x_0)$ la derivata di $f^{(n-1)}$ in x_0.*

Definizione 7.22. $\mathcal{C}^n(\mathfrak{I}) := \{f : \mathfrak{I} \to \mathbb{R}\ :\ f$ *è derivabile n volte e* $f^{(n)}$ *è continua* $\}$

Definizione 7.23. $\mathcal{C}^\infty(\mathfrak{I}) := \{f : \mathfrak{I} \to \mathbb{R}\ :\ \exists f^{(n)}\ \forall n \in \mathbb{N}\}$

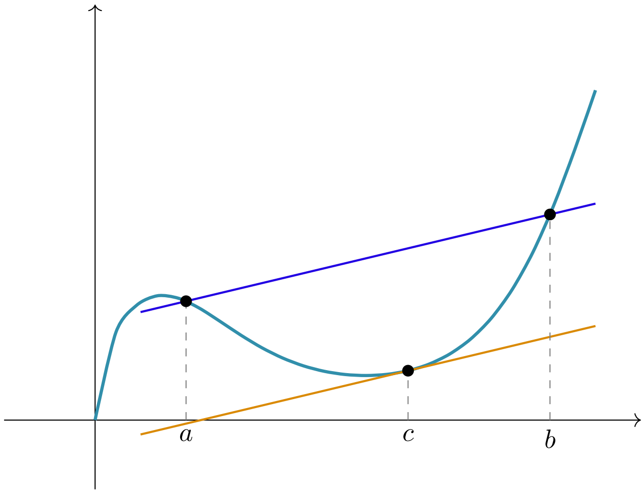
7.24 Teoremi sulle funzioni derivabili

♣ **Teorema 79 (Teorema di Lagrange).** Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ t.che:

- f è continua in $[a, b]$
- f è derivabile in (a, b)

allora:

$$\exists c \in (a, b)\ :\ f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$



Corollario 9 (Teorema di Rolle)**.** *Sia* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *t.che:*

- f *è continua in* $[a, b]$
- f *è derivabile in* (a, b)
- $f(a) = f(b)$

allora:

$$\exists c \in (a, b) \ : \ f'(c) = 0$$

Dimostrazione. Si dimostrerà prima il caso in cui $f(a) = f(b)$ (quindi $f'(c) = 0$).
Dato che f è continua, per il teorema di Weierstrass ammette massimo e minimo in $[a, b]$. I possibili casi sono che:

- f assume sia il massimo che il minimo agli estremi. In tal caso f è costante, quindi $f'(x) = 0 \ \forall x \in (a, b)$
- f assume almeno uno tra il massimo e il minimo in un punto interno. In tal caso, detto c l'ascissa del minimo o del massimo interno, per il teorema di Fermat, $f'(c) = 0$

si consideri ora $f(a) \neq f(b)$. Sia $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ t.che:

$$g(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) - f(x)$$

si ha che:

$$g(a) = -f(a) = g(b)$$

quindi g soddisfa le ipotesi del teorema di Rolle. Quindi:

$$\exists c \in (a, b) \ : \ f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

□

Teorema 80 (Teorema di Cauchy)**.** *Siano* $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ *due funzioni t.che:*

- f *e* g *sono continue in* $[a, b]$
- f *e* g *sono derivabili in* (a, b)

allora:

$$\exists c \in (a, b) \; : \; f'(c)[g(b) - g(a)] = g'(c)[f(b) - f(a)]$$

Dimostrazione. Sia $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ t.che:

$$h(x) = [f(b) - f(a)]g(x) - [g(b) - g(a)]f(x)$$

si ha che $h(x)$ soddisfa le ipotesi di Rolle. Quindi:

$$\exists c \in (a, b) \; : \; f'(c)[g(b) - g(a)] - g'(c)[f(b) - f(a)] = 0$$

□

Teorema 81. *Sia $f \in \mathcal{C}'(\mathcal{U}(a))$, con $a \in \mathbb{R}$ t.che $f'(a) \neq 0$. Siano a_n e b_n due successioni t.che $a_n \neq b_n$, $a_n \to a$, $b_n \to b$, allora:*

$$f(a_n) - f(b_n) \sim f'(a)(a_n - b_n)$$

Corollario 10. *Se $b_n = a$, si ha che:*

$$f(a_n) - f(a) \sim f'(a)(a_n - a)$$

Dimostrazione. Sia $a_n \to a$, con $a_n \neq a$, si ha che:

$$a_n = a + \varepsilon_n$$

quindi, dato che f è differenziabile:

$$f(a_n) = f(a + \varepsilon_n) = f(a) + f'(a)\varepsilon_n + \varepsilon_n \omega(\varepsilon_n)$$

$$f(a_n) - f(a) = f'(a)\varepsilon_n + \varepsilon_n \omega(\varepsilon_n) \sim f'(a)(a_n - a)$$

□

♣ **Teorema 82 (Condizione sufficiente di derivabilità).** Sia $f : \mathcal{U}(x_0) \to \mathbb{R}$ t.che:

- f sia derivabile in $\dot{\mathcal{U}}(x_0)$
- f sia continua in x_0
- $\exists l \in \mathbb{R} \; : \; \lim_{x \to x_0} f'(x) = l$

allora f è derivabile in x_0 e $f'(x_0) = l$.

Dimostrazione. Si dimostrerà che $f'_+(x_0) = l$. Si consideri, per $h > 0$, l'intervallo $[x_0, x_0 + h]$. Si ha che f soddisfa le ipotesi del teorema di Lagrange in tale intervallo. Quindi:

$$\exists x_h, \; x_0 < x_h < x_0 + h \; : \; f'(x_h) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

dato che, per confronto:

$$x_h \underset{h \to 0^+}{\to} x_0$$

si ha che:

$$\lim_{x \to x_0^+} f'(x) = f'(x_0)$$

□

Teorema 83 (Derivabilità e monotonia ($\Diamond$)). *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione che soddisfi le ipotesi del teorema di Lagrange, allora:*

$$f \text{ è crescente} \iff f'(x) \geqslant 0 \ \forall x \in (a, b)$$

Dimostrazione.

- ($\Rightarrow$): Sia $x_0 \in (a, b)$ fissato e $h > 0$:

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \geqslant 0 \text{ per ipotesi } \implies f'_+(x_0) \geqslant 0 \text{ Th. della perm. del segno}$$

- ($\Leftarrow$): Sia $[x, y] \subset (a, b)$ e si applichi il teorema di Lagrange ad f in $[x, y]$:

$$\exists z \in (x, y) : \underset{\underset{0}{\geqslant}}{f'(z)}(y - x) = f(y) - f(x) \geqslant 0$$

□

Teorema 84. *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione che soddisfi le ipotesi del teorema di Lagrange, allora:*

$$f'(x) > 0 \ \forall x \in (a, b) \implies f \text{ è strettamente crescente}$$

Dimostrazione. La dimostrazione è analoga alla precedente. □

Osservazione 7.25. *Il viceversa non vale.*

Esempio 7.26. $f(x) = x^3$

Corollario 11. *f è costante $\iff f' = 0$*

7.27 Funzioni convesse

Definizione 7.28 (Combinazione convessa). *Siano $x, y \in \mathbb{R}$, si definisce **combinazione convessa** di x e y il numero:*

$$z_\lambda = \lambda x + (1 - \lambda)y \quad \lambda \in (0, 1)$$

Osservazione 7.29. *Tutti e soli i numeri tra x e y sono combinazioni convesse di x e y.*

Dimostrazione. □

♣ **Definizione 7.30 (Convessità).** Sia $f : [x, y] \to \mathbb{R}$, f è **convessa** in se:

$$\forall \lambda \in (0, 1) \quad f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leqslant \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$$

Osservazione 7.31. *La definizione di funzione convessa equivale a dire che il grafico di f sta sotto alla retta passante per x e y.*

Dimostrazione. Sia r la retta passante per x e y:

$$r(t) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x}(t - x) + f(x)$$

si vuole mostrare che:

$$f(t) \leqslant r(t) \ \forall t \in [x, y] \iff f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leqslant \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) \ \forall \lambda \in [0, 1]$$

si ha che:

$$f(z_\lambda) \leqslant r(z_\lambda)\ \forall \lambda \in [0,1]$$

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant \frac{f(y)-f(x)}{y-x}(\lambda x + (1-\lambda)y - x) + f(x)$$

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant \frac{f(y)-f(x)}{\cancel{y-x}}(1-\lambda)(\cancel{y-x}) + f(x)$$

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant \cancel{f(x)} + f(y) - \lambda f(y) - \cancel{f(x)} + \lambda f(x)$$

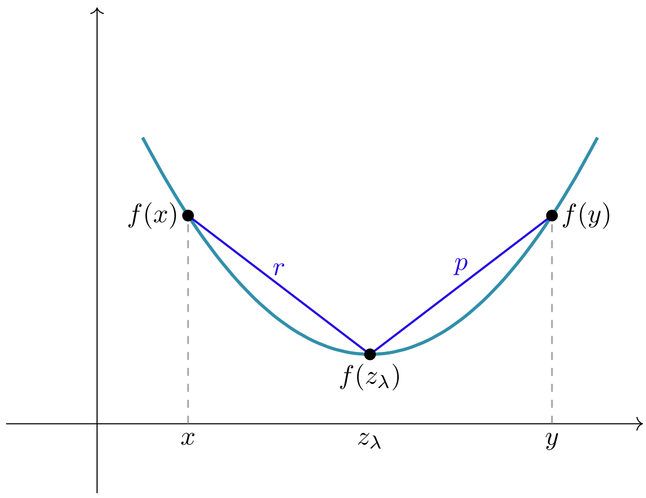
$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

□

Definizione 7.32 (Funzione convessa)**.** *Una funzione $f : \mathfrak{I} \to \mathbb{R}$ è* ***convessa*** *se è convessa in ogni $[x,y] \subset \mathfrak{I}$.*

Definizione 7.33 (Funzione concava)**.** *Una funzione $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ è* ***concava*** *se $-f$ è convessa.*

Osservazione 7.34. *Una funzione f è convessa $\iff$ $\forall x < y$ e $\forall z_\lambda$ $m_r \leqslant m_p$.*



Dimostrazione. Siano $x < y$ fissati. Si ha che:

$$m_r = \frac{f(z_\lambda) - f(x)}{z_\lambda - x}$$

$$m_p = \frac{f(z_\lambda) - f(y)}{z_\lambda - y}$$

inoltre:

$$z_\lambda - x = \lambda x + (1-\lambda)y - x = (\lambda - 1)(x - y)$$

$$z_\lambda - y = \lambda x + (1-\lambda)y - y = \lambda(x - y)$$

quindi:

$$
\begin{aligned}
m_r \leqslant m_p &\iff \frac{f(z_\lambda)-f(x)}{(\lambda-1)(x-y)} \leqslant \frac{f(z_\lambda)-f(y)}{\lambda(x-y)} \\
&\iff \frac{f(z_\lambda)-f(x)}{(\lambda-1)} \geqslant \frac{f(z_\lambda)-f(y)}{\lambda} \\
&\iff (f(z_\lambda)-f(x))\lambda \leqslant (f(z_\lambda)-f(y))(\lambda-1) \\
&\iff -f(x)\lambda \leqslant f(y)-\lambda f(y)-f(z_\lambda) \\
&\iff f(z_\lambda) \leqslant f(x)\lambda+(1-\lambda)f(y)
\end{aligned}
$$

□

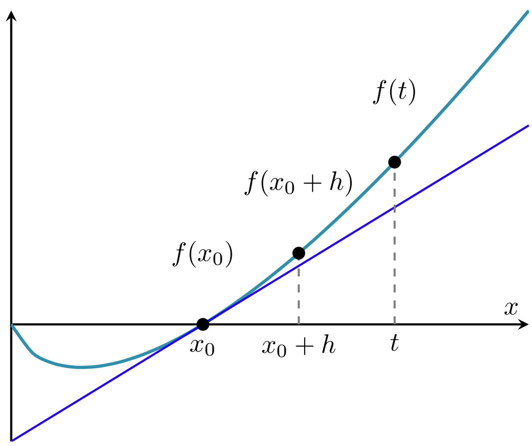
Teorema 85. *Se $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ è convessa $\implies$ f è continua in (a,b).*

Osservazione 7.35. *La convessità non implica la derivabilità.*

♣ **Teorema 86.** Sia $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una funzione convessa e si assuma che f sia derivabile in $x_0\in[a,b]$, Allora:

$$f(x)\geqslant\tau(x)\quad\forall x\in[a,b]$$

dove τ è la tangente al grafico di f in x_0.



Dimostrazione. Si fissi $x_0\in[a,b]$, la tangente in x_0 risulta essere:

$$\tau(x)=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$$

sia $h>0$ e sia $t>x_0+h$. Si ha che:

$$x_0+h=\lambda t+(1-\lambda)x_0=x_0+\lambda(t-x_0)\implies h=\lambda(t-x_0)$$

dato che f è convessa:

$$f(x_0+h)\leqslant\lambda f(t)+(1-\lambda)f(x_0)\implies f(x_0+h)-f(x_0)\leqslant\lambda[f(t)-f(x_0)]$$

dato che:

$$\lambda=\frac{h}{t-x_0}$$

si ottiene:

$$f(x_0+h)-f(x_0) \leqslant \frac{h}{t-x_0}[f(t)-f(x_0)] \implies \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \leqslant \frac{f(t)-f(x_0)}{t-x_0}$$

per il teorema della permanenza del segno, per $h \to 0$ si ha:

$$f'(x_0) \leqslant \frac{f(t)-f(x_0)}{t-x_0} \implies \tau(t) \leqslant f(t)$$

□

Definizione 7.36. *Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in (a,b)$, x_0 si dice* ***punto di cambio di concavità*** *(o convessità) se:*

$$\exists \varepsilon > 0 \ : \ f \ \ \text{è concava in} \ \ [x_0-\varepsilon, x_0] \ \ \text{e} \ \ f \ \ \text{è convessa in} \ \ [x_0, x_0+\varepsilon]$$

o viceversa.

Osservazione 7.37. *Se in x_0 f è derivabile, in x_0 si ha un flesso.*

Teorema 87. *Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ t.che f è derivabile in $[a,b]$ e $\forall x_0 \in [a,b]$ $f(x) \geqslant \tau_{x_0}(x) \quad \forall x \in [a,b]$, dove τ_{x_0} è la tangente al grafico di f in x_0 $\implies$ f è convessa in $[a,b]$.*

Dimostrazione. Sia $x_0 \in [a,b]$ fissato, si ha che:

$$\tau_{x_0}(t) = f'(x_0)(t-x_0)+f(x_0)$$

siano $x, y \in [a,b]$ t.che $x < x_0 < y$. Si ha che:

$$x_0 = \lambda x + (1-\lambda)y$$

$$\begin{cases} f(y) \geqslant \tau_{x_0}(y) \implies f(y) \geqslant f'(x_0)(y-x_0)+f(x_0) \\ f(x) \geqslant \tau_{x_0}(x) \implies f(x) \geqslant f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0) \end{cases}$$

$$y - x_0 = y - \lambda x - y + \lambda y = \lambda(y-x)$$

$$x - x_0 = x - \lambda x - y + \lambda y = (x-y)(1-\lambda)$$

di conseguenza:

$$\begin{cases} f(y) \geqslant f'(x_0)\lambda(y-x)+f(x_0) \\ f(x) \geqslant f'(x_0)(x-y)(1-\lambda)+f(x_0) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (1-\lambda)f(y) \geqslant (1-\lambda)f'(x_0)\lambda(y-x)+(1-\lambda)f(x_0) \\ \lambda f(x) \geqslant -\lambda f'(x_0)(y-x)(1-\lambda)+\lambda f(x_0) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \lambda f(x)+(1-\lambda)f(y) \geqslant{}& (1-\lambda)f'(x_0)\lambda(y-x) - \lambda f'(x_0)(y-x)(1-\lambda)+f(x_0) = \\ &= \cancel{\lambda f'(x_0)(y-x)} - \cancel{\lambda^2 f'(x_0)(y-x)} - \cancel{\lambda f'(x_0)(y-x)} + \cancel{\lambda^2 f'(x_0)(y-x)} + f(x_0) = \\ &= f(\lambda x + (1-\lambda)y) \end{aligned}$$

□

♣ **Teorema 88.** Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile, allora f è convessa $\iff$ f' è crescente.

Dimostrazione.

- ($\Leftarrow$) Si vuole mostrare che f sta sopra ogni tangente. Sia x_0 fissato, si vuole mostrare che:

$$f(x) \geqslant \tau_{x_0}(x)\ \forall x > x_0$$

dove τ_{x_0} è la tangente al grafico di f in x_0. Si applichi allora il teorema di Lagrange all'intervallo $[x, x_0]$:

$$\exists y \in (x, x_0)\ :\ f(x) - f(x_0) = f'(y)(x - x_0)$$

dato che f' è crescente, $f'(y) \geqslant f'(x_0)$. Quindi:

$$f(x) - f(x_0) \geqslant f'(x_0)f'(x_0)(x - x_0) \implies f(x) \geqslant \tau_{x_0}(x)$$

□

Corollario 12. *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, con f due volte derivabile in $[a, b]$, allora f è convessa $\iff$ $f''(x) \geqslant 0\ \forall x \in [a, b]$.*

Dimostrazione. La dimostrazione segue dal teorema precedente, dato che:

$$f' \quad \text{crescente} \quad \iff f''(x) \geqslant 0 \quad \forall x \in [a, b]$$

□

7.38 Sviluppi di Taylor

7.38.1 Approssimazione di una funzione

Sia $f : \mathfrak{D}(f) \to \mathbb{R}$ una funzione n volte derivabile e sia $x_0 \in \mathfrak{D}(f)$. Si vuole trovare un polinomio p_n di grado n che "approssimi" la funzione f in x_0. Per approssimare si intende che le prime n derivate di p_n uguagliano le prime n derivate di f in x_0. Sia quindi p_n un generico polinomio di grado n:

$$p_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots + a_n(x - x_0)^n$$

le cui derivate risultano:

$$\begin{aligned}
p_n'(x) &= a_1 + 2a_2(x - x_0) + 3a_3(x - x_0)^2 + \cdots + na_n(x - x_0)^{n-1} \\
p_n''(x) &= 2a_2 + 6a_3(x - x_0) + \cdots + n(n-1)(x - x_0)^{n-2} \\
p_n'''(x) &= 6a_3 + \cdots + n(n-1)(n-2)(x - x_0)^{n-3} \\
p_n^{(k)}(x) &= k! \cdot a_k + \cdots + \frac{n!}{(n-k)!}(x - x_0)^{n-k} \\
p_n^{(n)}(x) &= n! \cdot a_n
\end{aligned}$$

quindi i coefficienti di p_n possono essere determinati come (con $k < n$):

$$\begin{cases}
p_n(x_0) = f(x_0) \implies f(x_0) = a_0 \implies a_0 = f(x_0) \\
p_n'(x_0) = f'(x_0) \implies f'(x_0) = a_1 \implies a_1 = f'(x_0) \\
p_n''(x_0) = f''(x_0) \implies f''(x_0) = 2a_2 \implies a_2 = \dfrac{f''(x_0)}{2} \\
p_n'''(x_0) = f'''(x_0) \implies f'''(x_0) = 6a_3 \implies a_3 = \dfrac{f'''(x_0)}{6} \\
p_n^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0) \implies f^{(k)}(x_0) = k! \cdot a_k \implies a_k = \dfrac{f^{(k)(x_0)}}{k!} \\
p_n^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0) \implies f^{(n)}(x_0) = n! \cdot a_n \implies a_n = \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}
\end{cases}$$

7.38.2 Polinomio di Taylor

♣ **Definizione 7.39.** Sia f una funzione derivabile n volte in x_0, si definisce **polinomio di Taylor** di ordine n centrato in x_0 il polinomio:

$$p_n(x) := \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

♣ **Teorema 89 (Teorema di Taylor-Peano).** Sia f derivabile n volte in x_0 e sia $p_n(x)$ il polinomio di Taylor di ordine n di f centrato in x_0. Allora:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - p_n(x)}{(x-x_0)^n} = 0$$

Osservazione 7.40. *Sia $x := x_0 + h$, con $h \neq 0$, allora la tesi è equivalente a:*

$$f(x_0+h) = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{f''(x_0)}{2!}h^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}h^n}_{p_n(x_0+h)} + \underbrace{h^n\omega(h)}_{\textit{resto di Peano}}$$

Dimostrazione. Si dimostrerà il caso in cui $x_0 = 0$, per $x \to x_0^+$. Detta $g(x) := f(x) - p_n(x)$, si vuole mostrare che:

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{g(x)}{x^n} = 0$$

sia allora $x > 0$ fissato sufficientemente piccolo in modo che $f^{(n-1)}$ sia definita in $[0, x]$. Si ha che, per come è definito $p_n(x)$:

$$g(0) = g'(0) = g''(0) = \cdots = g^{(k)}(0) = 0$$

0. si applichi Lagrange a g nell'intervallo $[0, x]$:

$$\exists x_1 \in (0, x) \ : \ g(x) = g'(x_1)x$$

1. si applichi Lagrange a g' nell'intervallo $[0, x_1]$:

$$\exists x_2 \in (0, x_1) \ : \ g(x)' = g''(x_2)x_1$$

2. ...

n-2 si applichi Lagrange a $g^{(n-2)}$ nell'intervallo $[0, x_{n-2}]$:

$$\exists x_{n-1} \in (0, x_{n-2}) \ : \ g(x)^{(n-2)} = g^{(n-1)}(x_{n-1})x_{n-2}$$

n-1 si usi il fatto che $g^{(n-1)}$ è differenziabile in 0:

$$g^{(n-1)}(x_{n-1}) = \underset{\underset{0}{\parallel}}{g^{(n-1)}(0)} + \underset{\underset{0}{\parallel}}{g^{(n)}(0)}x_{n-1} + x_{n-1}\omega(x_{n-1}) = x_{n-1}\omega(x_{n-1})$$

quindi:

$$g(x) = g'(x_1)x = g''(x_2)x_1x = x_{n-1}x_{n-2}\ldots x_1x\omega(x_{n-1})$$

$$g(x) = x^n \underbrace{\frac{x_{n-1}x_{n-2}\ldots x_1x}{x^n}}_{0<a_n<1}\omega(x_{n-1})$$

$$\frac{g(x)}{x^n} = a_n \omega(x_{n-1}) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$$

si noti che $x_{n-1} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$ per confronto. $\square$

Lemma 7.41. *Se $r(x)$ è un polinomio di grado minore o uguale a $n \in \mathbb{N}_0$ t.che:*

$$\lim_{x\to 0} \frac{r(x)}{x^n} = 0$$

allora $r(x) = 0$.

Dimostrazione. $\square$

Teorema 90. *Sia data f definita in $\mathcal{U}(0)$. Si supponga che $\exists q(x)$ di grado minore o uguale a $n \in \mathbb{N}_0$ t.che:*

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - q(x)}{x^n} = 0$$

allora $q(x)$ è unico.

Dimostrazione. P.A. si supponga che esistano due polinomi distinti $p(x)$ e $q(x)$ di grado minore o uguale a n t.che:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - p(x)}{x^n} = 0$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - q(x)}{x^n} = 0$$

allora:

$$\lim_{x\to 0} \frac{q(x) - p(x)}{x^n} = 0$$

ma per il lemma precedentemente dimostrato, si ha che:

$$q(x) - p(x) = 0 \implies q(x) = p(x)$$

$\square$

Teorema 91 (Teorema di Taylor-Lagrange)**.** *Sia $x_0 \in \mathfrak{D}(f)$ fissato e sia f una funzione derivabile $n-1$ volte in $[x_0, x]$ (o $[x, x_0]$) e sia $p_n(x)$ il polinomio di Taylor di f di ordine n centrato in $x_0 \implies \exists y \in (x_0, x)$ (o (x, x_0)) t.che:*

$$f(x) = p_n(x) + R_n(x)$$

dove $R_n(x)$ è detto ***resto di Lagrange*** *ed è definito come:*

$$R_n(x) := \frac{f^{(n+1)}(y)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

7.42 Teorema di de l'Hôpital

♣ **Teorema 92 (Teorema di de l'Hôpital).** Sia $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ e siano f, g due funzioni derivabili in un $\dot{\mathcal{U}}(x_0)$ con $g'(x) \neq 0 \ \forall x \in \dot{\mathcal{U}}(x_0)$. Si assuma che:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = 0$$

oppure:

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = \pm\infty$$

allora se:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \in \overline{\mathbb{R}} \implies \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l$$

Dimostrazione. Si dimostrerà il caso in cui si ottiene la forma indeterminata $\frac{0}{0}$ con $x_0 \in \mathbb{R}$. Si considerino le estensioni di f e g in x_0 $\hat{f}$, $\hat{g}$. Si ha che:

$$\hat{f}(x_0) = \hat{g}(x_0) = 0$$

inoltre, per il teorema di Cauchy, in $\dot{\mathcal{U}}(x_0)$:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\hat{f}(x) - \hat{f}(x_0)}{\hat{g}(x) - \hat{g}(x_0)} = \frac{f'(y)}{g'(y)} \underset{y \to x_0}{\to} l$$

con $x < y < x_0$ (se $x_0 > x$). □

7.43 Algebra degli o-piccoli

Definizione 7.44. *Date due funzioni reali f e g, si dice che f è un **o-piccolo** di g in $\mathcal{U}(x_0)$ se:*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

Notazione 19. $f = o(g)$ *in* $\mathcal{U}(x_0)$

Osservazione 7.45. *Con la notazione $f = o(g)$ si intende che f ha la proprietà di essere un o-piccolo di g, in particolare non si intende la relazione di equivalenza.*

Esempio 7.46. *In $\mathcal{U}(0)$:*

$$x^2 = o(x), \quad x^3 = o(x)$$

ma $x^2 \neq x^3$.

Teorema 93 (Teorema di Taylor-Peano con l'o-piccolo)**.** *Sia f derivabile n volte in x_0, allora:*

$$f(x_0 + h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} h^k + o(h^n)$$

Proprietà 7.47. *Siano $m, n \in \mathbb{Z}$ in $\mathcal{U}(0)$:*

I $o(x^n) \pm o(x^n) = o(x^n)$

II $ko(x^n) = o(kx^n) = o(x^n)$

III $x^m \cdot o(x^n) = o(x^{n+m})$

IV $o(o(x^n)) = o(x^n)$

V $o(x^n + o(x^n)) = o(x^n)$

VI $o(x^n) \cdot o(x^m) = o(x^{n+m})$

VII $[o(x^n)]^m = o(x^{nm})$

Dimostrazione. $\square$

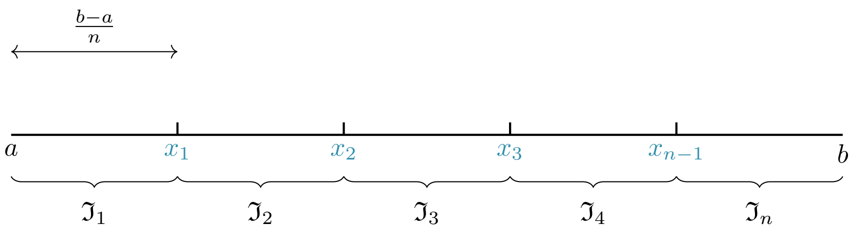
Capitolo 8

Integrali

8.1 L'integrale di Riemann

8.2 Costruzione dell'integrale di Riemann

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione limitata.



Si fissi $n \in \mathbb{N}$, ogni intervallo ha lunghezza $\dfrac{b-a}{n}$.

$$x_k = a + \frac{b-a}{n}k$$

$$\mathfrak{I}_k = [x_{k-1}, x_k] \quad \forall k = 1, 2 \ldots, n$$

Dato che f è limitata, $\forall k = 1, 2 \ldots, n$ si ha che $\inf\limits_{\mathfrak{I}_k} f$ e $\sup_{\mathfrak{I}_k} f$ sono finiti.

Si defiscano allora:

Definizione 8.3 (Somme inferiori)**.** *Si definisce **somma inferiore** di ordine n la successione:*

$$\sigma_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} \inf_{\mathfrak{I}_k} f$$

Definizione 8.4 (Somme superiori)**.** *Si definisce **somma superiore** di ordine n la successione:*

$$S_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} \sup_{\mathfrak{I}_k} f$$

Osservazione 8.5. *Dato che σ_n è l'area di un plurirettangolo sotto il grafico della funzione, mentre S_n è l'area di un plurirettangolo sopra il grafico della funzione, si ha che:*

$$\sigma_n \leqslant S_n \; \forall n \; \forall m$$

Osservazione 8.6 ($\diamondsuit$)**.** *Non è detto che S_n sia monotona decrescente.*

Esempio 8.7.

$$f(x) = \begin{cases} 1 & se\ x \in \left[0, \frac{1}{2}\right) \\ 0 & se\ x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$$

$$S_2 = \frac{1}{2}$$

$$S_3 = \frac{2}{3}$$

Definizione 8.8. $S := \lim S_n$, $\sigma := \lim \sigma_n$

Osservazione 8.9. *Per il teorema della permanenza del segno, si ha che:*

$$\sigma_n \leqslant S$$

$$\sigma \leqslant S$$

$$\sigma_n \leqslant \sigma \leqslant S \leqslant S_n \ \forall n$$

♣ **Definizione 8.10 (Integrabilità secondo Riemann).** f si dice **integrabile secondo Riemann** su $[a, b]$ se

$$\lim \sigma_n = \lim S_n = S = \sigma$$

Notazione 20. *$R(a, b)$, insieme delle funzioni integrabili secondo Riemann su $[a, b]$*

Osservazione 8.11. *Se una funzione $f \in R(a, b)$, f è limitata.*

♣ **Definizione 8.12 (Integrale di Riemann).** Se $f \in R(a, b)$, $S = \sigma$ è detto **integrale di Riemann** di f su $[a, b]$.

Notazione 21. $\displaystyle\int_a^b f(x)dx, \int_{[a,b]} f(x)dx, \int_a^b f$

Notazione 22. $\Delta_{\mathfrak{I}_k} f := \sup_{\mathfrak{I}_k} f - \inf_{\mathfrak{I}_k} f$

Definizione 8.13.

$$\omega_n(f) := S_n - \sigma_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} \sup_{\mathfrak{I}_k} f - \inf_{\mathfrak{I}_k} f = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} \Delta_{\mathfrak{I}_k} f$$

Teorema 94. $f \in R(a, b) \iff \omega_n(f) \to 0$

Dimostrazione.

- $(\Rightarrow)$: Dato che $f \in R(a, b)$, $S_n \to S$, $\sigma_n \to \sigma = S$. Quindi:

$$\omega_n(f) = S_n - \sigma_n \to S - S = 0$$

- $(\Leftarrow)$: Si ha che:

$$\sigma_n \leqslant \sigma \leqslant S \leqslant S_n$$

quindi:

$$0 \leqslant \sigma - \sigma_n \leqslant S - S_n \leqslant S_n - \sigma_n = \omega_n(f) \to 0$$

dunque per confronto, $\sigma_n \to \sigma$ e $S_n \to S$. Inoltre:

$$0 \leqslant S - S_n \leqslant S - \sigma_n \leqslant S_n - \sigma_n$$

quindi $\sigma_n \to S = \sigma$.

□

Definizione 8.14 (Area)**.**

Definizione 8.15 (Funzione caratteristica)**.** *Dato un insieme $A \subset \mathbb{R}$, si definisce* ***funzione caratteristica*** *di A:*

$$\chi_A(x) := \begin{cases} 1 & se\ x \in A \\ 0 & se\ x \notin A \end{cases}$$

Teorema 95. *Siano $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ t.che f e g differiscono in un numero finito di punti. Allora, se $f \in R(a,b)$, $g \in R(a,b)$ e:*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx$$

Dimostrazione. □

Teorema 96. *Esistono funzioni reali f limitate t.che $f \notin R(a,b)$.*

Esempio 8.16 (Funzione di Dirichlet)**.** *Sia $D : [0,1] \to \mathbb{R}$:*

$$D(x) = \chi_{[0,1]\cap\mathbb{Q}}(x)$$

si ha che $D \notin R(a,b)$. Infatti, fissato $n \in \mathbb{N}$:

$$S_n = \frac{1}{n}\left[\sup_{\Im_1} D + \sup_{\Im_2} D + \cdots + \sup_{\Im_n} D\right]$$

in ogni $\Im_k$, $\sup_{\Im_k} D = 1$ (per la densità di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$). Quindi:

$$S = 1$$

ma

$$\sigma_n = \frac{1}{n}\left[\inf_{\Im_1} D + \inf_{\Im_2} D + \cdots + \inf_{\Im_n} D\right] = 0 \to 0 = \sigma \neq S$$

Definizione 8.17. *Se $A \subset \mathbb{R}$ è limitato, preso $[-N, N] \supset A$ si può definire una misura di A come:*

$$m(A) = \int_{-N}^{N} \chi_A(x)dx$$

Osservazione 8.18. *Non tutti gli insiemi sono misurabili secondo questa misura.*

Lemma 8.19. *Siano $f, g : \Im \to \mathbb{R}$ limitate, si ha che:*

$$\sup_{\Im}(f+g) \leqslant \sup_{\Im} f + \sup_{\Im} g$$
$$\inf_{\Im}(f+g) \geqslant \inf_{\Im} f + \inf_{\Im} g$$

Dimostrazione. Fissato $x \in \Im$:

$$f(x) \leqslant \sup_{\Im} f$$
$$g(x) \leqslant \sup_{\Im} g$$
$$f(x) + g(x) \leqslant \sup_{\Im} f + \sup_{\Im} g$$
$$\sup_{\Im}(f+g) \leqslant \sup_{\Im} f + \sup_{\Im} g$$

dove nell'ultimo passaggio si è utilizzato il teorema della permanenza del segno. In modo analogo si può procedere per gli estremi inferiori. □

♣ **Teorema 97 (Linearità dell'integrale).** Se $f, g \in R(a,b)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, allora:

$$f + \lambda g \in R(a,b)$$
$$\int_a^b f(x) + \lambda g(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \lambda \int_a^b g(x) dx$$

Dimostrazione. Consideriamo il caso in cui $f(x) = 0$. Si vuole mostrare che:

$$\int_a^b \lambda g(x) dx = \lambda \int_a^b g(x) dx$$

Si ha che:

$$\sigma_n(\lambda g) = \lambda \sigma_n(g) \quad \text{se} \quad \lambda > 0$$
$$\sigma_n(\lambda g) = \lambda S_n(g) \quad \text{se} \quad \lambda < 0$$

da cui segue la tesi (passando ai limiti).

Consideriamo ora il caso in cui $f(x) \neq 0$. Fissato $\mathfrak{I}_k$, si ha che:

$$\inf_{\mathfrak{I}_k} f + \inf_{\mathfrak{I}_k} g \leqslant \inf_{\mathfrak{I}_k}(f+g) \leqslant \sup_{\mathfrak{I}_k}(f+g) \leqslant \sup_{\mathfrak{I}_k} f + \sup_{\mathfrak{I}_k} g$$

$$\sigma_n(f) + \sigma_n(g) \leqslant \sigma_n(f+g) \leqslant S_n(f+g) \leqslant S_n(f) + S_n(g)$$

da cui segue la tesi per confronto. □

Definizione 8.20 (Funzione costante a tratti)**.** *Una funzione $h : [a,b] \to \mathbb{R}$ è* ***costante a tratti*** *se $\exists \mathfrak{I}_1, \mathfrak{I}_2, \ldots, \mathfrak{I}_n$ intervalli in $[a,b]$ e $\exists \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ t.che:*

$$h(x) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \chi_{\mathfrak{I}_k}(x)$$

Proposizione 8.21. *Se $h(x) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \chi_{\mathfrak{I}_k}(x)$, ($\mathfrak{I}_k \subset [a,b]$), allora $h \in R(a,b)$ e:*

$$\int_a^b h(x) dx = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \int_a^b \chi_{\mathfrak{I}_k}(x) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \ell(\mathfrak{I}_k)$$

♣ **Teorema 98 (Teorema del confronto per l'integrale di Riemann).** Siano $f, g \in R(a,b)$, se $f \geqslant g$ ($f(x) \geqslant g(x)$ $\forall x \in [a,b]$), allora:

$$\int_a^b f(x) dx \geqslant \int_a^b g(x) dx$$

Dimostrazione. Dato che $f \geqslant g$, si ha che:

$$\sigma_n(f) \geqslant \sigma_n(g)$$

la tesi segue dal teorema della permanenza del segno per le successioni. □

Corollario 13. *Sia $f \in R(a,b)$ t.che $f \geqslant 0$, allora:*

$$\int_a^b f(x) dx \geqslant 0$$

Osservazione 8.22. *Sia $f \in R(a,b)$, $f \geqslant 0$, $\int_a^b f(x) dx = 0 \;\not\Rightarrow\; f(x) = 0$*

Esempio 8.23. *Basti prendere una f che differisca da 0 in un numero finito di punti*

Proposizione 8.24. *Sia $f \in R(a,b)$, $f \geqslant 0$, $\int_a^b f(x)dx = 0$, f continua $\implies$ $f(x) = 0$*

Dimostrazione. □

Osservazione 8.25. *Non è necessario specificare che $f \in R(a,b)$ (dato che si vedrà in seguito che la continuità implica l'integrabilità).*

♣ **Teorema 99 (Disuguaglianza del modulo).** Sia $f \in R(a,b)$, allora $|f| \in R(a,b)$ e:

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\, dx$$

Dimostrazione. Il fatto che $|f| \in R(a,b)$ sarà dimostrato successivamente.
Si ha che:

$$-|f| \leqslant f \leqslant |f|$$

per confronto:

$$\int_a^b -|f(x)|dx \leqslant \int_a^b f(x)dx \leqslant \int_a^b |f(x)|dx$$

per la linearità dell'integrale:

$$-\int_a^b |f(x)|dx \leqslant \int_a^b f(x)dx \leqslant \int_a^b |f(x)|dx$$

quindi:

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\, dx$$

□

Teorema 100. *Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ limitata, allora:*

$$f \in R(a,b) \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists \ \text{ due costanti a tratti } \ h^-,\ h^+ \ : \ h^- \leqslant f \leqslant h^+ \ \wedge \ \int_a^b h^+ - h^- < \varepsilon$$

Dimostrazione.

- ($\Rightarrow$) L'implicazione diretta è banale e segue dal fatto che $\omega_n(f) = S_n - \sigma_n \to 0$
- ($\Leftarrow$) Si vuole mostrare che $\omega_n(f) \to 0$. Si fissi $\varepsilon > 0$ e siano h^-, h^+ t.che $h^- \leqslant f \leqslant h^+$, con $\int_a^b h^+ - h^- < \varepsilon$. Allora:

$$\begin{aligned} 0 \leqslant \omega_n(f) = S_n - \sigma_n \leqslant S_n(h^+) - \sigma_n(h^-) = \\ = S_n(h^+) - \int_a^b h^+ + \int_a^b h^+ - \int_a^b h^- + \int_a^b h^- - \sigma_n(h^-) \leqslant \\ \leqslant \left| S_n(h^+) - \int_a^b h^+ \right| + \int_a^b h^+ - h^- + \left| \int_a^b h^- - \sigma_n(h^-) \right| < 3\varepsilon \end{aligned}$$

□

♣ **Teorema 101 (Additività dell'integrale).** Sia dato $[a,b]$ e $c \in (a,b)$, allora:

$$f \in R(a,b) \iff f \in R(a,c) \wedge f \in R(c,b)$$
$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Dimostrazione. □

Proposizione 8.26. *Sia $f \in R(-a, a)$:*

$$\int_{-a}^{0} f(-x)dx = \int_{0}^{a} f(x)dx$$

Dimostrazione. □

Proposizione 8.27. *Sia $f \in R(-a, a)$ una funzione pari. Allora:*

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$$

Proposizione 8.28. *Sia $f \in R(-a, a)$ una funzione dispari. Allora:*

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$$

Teorema 102. *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, se f è limitata in $[a, b]$ e $f \in R(c, d)$ $\forall a < c < d < b$, allora:*

$$f \in R(a, b)$$

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \lim_{c \to a \ d \to b} \int_{c}^{d} f(x)dx$$

8.29 Classi di funzioni integrabili

Teorema 103 (Integrabilità delle continue)**.** *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Se f è continua $\implies$ $f \in R(a, b)$.*

Dimostrazione. Per il teorema di Heine-Cantor, f è uniformemente continua su $[a, b]$. Quindi:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta : \quad \text{se} \ \ |x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon \ \forall x, y \in [a, b]$$

Si fissi $\varepsilon > 0$, sia $n_0 \in \mathbb{N}_0$ t.che $\dfrac{b-a}{n} < \delta \ \forall n \geqslant n_0$.
Si suddivida $[a, b]$ in n intervalli $\mathfrak{I}_k$ di lunghezza $\dfrac{b-a}{n} < \delta$. Si ha che:

$$\forall x, y \in \mathfrak{I}_k \quad |f(x) - f(y)| < \varepsilon \implies \sup_{\mathfrak{I}_k} f - \inf_{\mathfrak{I}_k} < \varepsilon$$

quindi:

$$\omega_n(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} \sup_{\mathfrak{I}_k} f - \inf_{\mathfrak{I}_k} f < \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} \varepsilon = (b-a)\varepsilon$$

di conseguenza $\omega_n(f) \to 0$. □

Teorema 104. *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ limitata e con al più un numero finito di punti di discontinuità $\implies$ $f \in R(a, b)$.*

Dimostrazione. Sia f discontinua in $c \in (a, b)$. Per l'additività, se $f \in R(a, c)$ e $f \in R(c, d)$ $\implies$ $f \in R(a, b)$.

Siano $a < \alpha < \beta < c$. f è limitata in $[a, c]$ e continua in (a, c).
$f \in C([\alpha, \beta]) \implies f \in R(\alpha, \beta)$. f è limitata in $[a, c]$ e $f \in R(\alpha, \beta)$ $\forall a < \alpha < \beta < c$.
Quindi $f \in R(a, c)$. □

Teorema 105 (Integrabilità delle monotone)**.** *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ monotona $\implies$ $f \in R(a, b)$.*

Dimostrazione. Si consideri il caso di f crescente e si supponga $[a,b] = [0,1]$ (la dimostrazione può tuttavia essere estesa a un qualsiasi intervallo). Si ha che, fissato $n \in \mathbb{N}$:

$$S_n(f) = \frac{1}{n}\left[\sup_{\mathfrak{I}_1} f + \sup_{\mathfrak{I}_2} f + \cdots + \sup_{\mathfrak{I}_n} f\right] = \frac{1}{n}\left[f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + \cdots + f\left(\frac{n}{n}\right)\right]$$
$$\sigma_n(f) = \frac{1}{n}\left[\inf_{\mathfrak{I}_1} f + \inf_{\mathfrak{I}_2} f + \cdots + \inf_{\mathfrak{I}_n} f\right] = \frac{1}{n}\left[f\left(\frac{0}{n}\right) + f\left(\frac{1}{n}\right) + \cdots + f\left(\frac{n-1}{n}\right)\right]$$

dove nel secondo passaggio si è usata la crescenza della funzione. Quindi:

$$\omega_n(f) = S_n(f) - \sigma_n(f) = \frac{1}{n}[f(1) - f(0)] \to 0$$

□

Teorema 106. *Sia $f \in R(a,b)$ e $\varphi : [c,d] \to \mathbb{R}$ una funzione continua t.che:*

$$[a,b] \overset{f}{\curvearrowright} \mathfrak{I} \subset [c,d] \overset{\varphi}{\curvearrowright} \mathbb{R}$$

$\implies (\varphi \circ f)(x) = \varphi(f(x)) \in R(a,b)$

Osservazione 8.30. *Una composta di due integrabili può non essere integrabile.*

Corollario 14. *Se $f \in R(a,b)$, allora $|f| \in R(a,b)$ e $f^2 \in R(a,b)$*

Corollario 15. *Se $f, g \in R(a,b) \implies (f \cdot g) \in R(a,b)$*

Dimostrazione. Si ha che:

$$(f+g) \in R(a,b)$$
$$(f-g) \in R(a,b)$$

quindi:

$$(f+g)^2 \in R(a,b)$$
$$(f-g)^2 \in R(a,b)$$

di conseguenza:

$$\frac{1}{4}\left[(f+g)^2 - (f-g)^2\right] \in R(a,b)$$
$$\frac{1}{4}\left[(f+g)^2 - (f-g)^2\right] = fg$$

□

8.31 Integrale definito

Definizione 8.32. *Sia $f \in R(a,b)$, $x, y \in [a,b]$, si definisce* ***integrale definito*** *tra x e y:*

$$\int_x^y f(t)dt = \begin{cases} \displaystyle\int_x^y f(t)dt & se \quad x < y \\ 0 \quad se \quad x = y \\ \displaystyle -\int_y^x f(t)dt & se \quad x > y \end{cases}$$

Notazione 23. $\displaystyle\int_x^y f(t)dt, \int_{[x,y]} f(t)dt$

Proprietà 8.33 (Linearità)**.**

Proprietà 8.34 (Additività)**.**

Proposizione 8.35 (Confronto)**.**

8.36 Primitiva

♣ **Definizione 8.37.** Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, si dice **primitiva** di f una funzione derivabile $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ t.che:

$$F'(x) = f(x)\ \forall x \in [a,b]$$

Proposizione 8.38. *Data una funzione f, non è detto che esista una primitiva di F di f.*

Dimostrazione. È sufficiente scegliere una f che non abbia la proprietà di Darboux. □

Proposizione 8.39. *Si supponga che una funzione f ammetta come primitiva F. Allora ogni funzione $F(x) + C$ $(C \in \mathbb{R})$ è primitiva di F.*

Dimostrazione. Sia $G(x) = F(x) + C$. Si ha che:

$$G'(x) = F'(x) + \frac{d}{dx}C = F'(x) = f(x)$$

□

Proposizione 8.40. *Si supponga che una funzione f ammetta come primitiva F e si supponga che G sia anch'essa una primitiva di f. Allora:*

$$G(x) = F(x) + C \quad (C \in \mathbb{R})$$

Dimostrazione. Sia $H(x) := G(x) - F(x)$, H è derivabile (dato che F e G sono derivabili) e:

$$H'(x) = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0\ \forall x$$

quindi $H(x)$ è una funzione costante. □

Proposizione 8.41. *Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, f ammette primitiva in $[a,b]$ $\not\Leftrightarrow$ $f \in R(a,b)$.*

Esempio 8.42 ($\not\Leftarrow$)**.** *È sufficiente prendere una f costante a tratti.*

Esempio 8.43 ($\not\Rightarrow$)**.**

Proposizione 8.44. *Se f è limitata e f ammette primitiva $\not\Rightarrow$ $f \in R(a,b)$.*

Notazione 24. $f \in R_P(a,b)$ *se:*

I *f ammette primitiva in* $[a,b]$

II $f \in R(a,b)$

8.45 Teorema fondamentale del calcolo integrale

♣ **Teorema 107 (Teorema fondamentale del calcolo integrale).** Sia $f \in R_P(a,b)$ e sia F una primitiva di f, allora:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Notazione 25. $F|_a^b := F(b) - F(a)$

Dimostrazione. Si dimostrerà il caso $[a, b] = [0, 1]$ (la dimostrazione può tuttavia essere estesa al caso generale). Si fissi $n \in \mathbb{N}$ e si consideri l'intervallo $\mathfrak{I}_k = [x_{k-1}, x_k]$. Su tale intervallo F soddisfa le ipotesi del teorema di Lagrange. Quindi:

$$\exists y \in [x_{k-1}, x_k] \ : \ F(x_{k-1}) - F(x_k) = F'(y)(x_{k-1} - x_k) = \frac{1}{n} f(y)$$

dato che $y \in [x_{k-1}, x_k]$:

$$\inf_{\mathfrak{I}_k} f \leqslant y \leqslant \sup_{\mathfrak{I}_k} f \quad \forall k = 1, 2, \ldots, n$$

$$\frac{1}{n} \inf_{\mathfrak{I}_k} f \leqslant F(x_{k-1}) - F(x_k) \leqslant \frac{1}{n} \sup_{\mathfrak{I}_k} f \quad \forall k = 1, 2, \ldots, n$$

sommando le n disuguaglianze:

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \inf_{\mathfrak{I}_k} f \leqslant \sum_{k=1}^{n} F(x_{k-1}) - F(x_k) \leqslant \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \sup_{\mathfrak{I}_k} f$$

il termine centrale corrisponde alla succesione delle somme parziali di una serie telescopica. Quindi:

$$\sigma_n \leqslant F(1) - F(0) \leqslant S_n \quad \forall n$$

dato che $f \in R(a, b)$, $\sigma_n \to \sigma$, $S_n \to S$, $S = \sigma$. Quindi, per confronto:

$$\int_0^1 f(x)dx = F(1) - F(0)$$

□

8.46 Media integrale

Definizione 8.47 (Media integrale)**.** *Data $f \in R(a, b)$, si definisce **media integrale** di f su $[a, b]$:*

$$M_{[a,b]} := \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$$

Teorema 108 (Teorema della media integrale)**.** *Sia $f \in R_P(a, b)$, allora:*

$$\exists c \in (a, b) \ : \ \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx = f(c)$$

Dimostrazione. Sia F una primitiva di f, si ha che F soddisfa le ipotesi del teorema di Lagrange in $[a, b]$. Quindi:

$$\exists c \in (a, b) \ : \ F'(c) = \frac{F(b) - F(a)}{b-a} \implies f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$$

□

8.48 Integrazione per parti

♣ **Teorema 109 (Integrazione per parti).** Siano $f, g \in R_P(a, b)$ e siano F e G due primitive rispettivamente di f e g, allora:

$$\int_a^b F(x)g(x)dx = F(x)G(x)|_a^b - \int_a^b f(x)G(x)dx$$

Dimostrazione. Sia $h(x) = F(x)g(x)+f(x)G(x)$, si ha che h è integrabile (F e G sono continue, in quanto derivabili), inoltre:

$$[F(x)G(x)]' = h(x)$$

quindi $h \in R_P(a,b)$. Di conseguenza, per il teorema fondamentale del calcolo integrale:

$$\int_a^b h(x)dx = F(x)G(x)|_a^b \implies F(x)G(x)|_a^b = \int_a^b F(x)g(x)dx + \int_a^b f(x)G(x)dx$$

□

8.49 Funzione integrale

♣ **Definizione 8.50.** Sia $f \in R(a,b)$, si definisce **funzione integrale** di f la funzione $\mathcal{I} : [a,b] \to \mathbb{R}$ così definita:

$$\mathcal{I}(x) = \int_a^x f(t)dt$$

Osservazione 8.51. *Sia $f \in R(a,b)$, se $a < x < b$, allora $f \in R(a,x)$.*

Osservazione 8.52. *Si noti che la funzione è ben definita grazie all'integrabilità di f.*

Teorema 110.

I *Se $f \in R_P(a,b) \implies \mathcal{I}$ è una primitiva di f*

II *La funzione $\mathcal{I}$ è (Lipschitz) continua*

III *Se f è continua in $x_0 \in [a,b] \implies \mathcal{I}$ è derivabile in x_0 e:*

$$\mathcal{I}'(x_0) = f(x_0)$$

Dimostrazione I. Sia F una primitiva di f, allora, per il teorema fondamentale del calcolo integrale:

$$\mathcal{I}(x) = F(x) - F(a)$$

quindi:

$$\mathcal{I}'(x) = F'(x) = f(x)$$

□

Dimostrazione II. Si ha che, dato che $f \in R(a,b)$, f è limitata, quindi $\exists L \geqslant 0$ t.che $|f(x)| \leqslant L \quad \forall x \in [a,b]$. Inoltre:

$$\begin{aligned}
|\mathcal{I}(x) - \mathcal{I}(y)| &= \left| \int_a^x f(t)dt - \int_a^y f(t)dt \right| = \\
&= \left| \int_x^y f(t)dt \right| \leqslant \int_x^y |f(t)|dt \\
&\leqslant \int_x^y Ldt = L(y-x)
\end{aligned}$$

□

Dimostrazione III. Si dimostrerà che $I'_+(x_0) = f(x_0)$. Dato che f è continua in x_0, fissato $\varepsilon > 0$:

$$\exists \delta > 0 : \quad \text{se} \ \ |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

dunque, sia $h > 0$:

$$\left| \frac{\mathcal{I}(x_0 + h) - \mathcal{I}(x_0)}{h} - f(x_0) \right| = \left| \frac{\displaystyle\int_a^{x_0+h} f(t)dt - \int_a^{x_0} f(t)dt}{h} - f(x_0) \right| =$$
$$= \frac{1}{h} \left| \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt - hf(x_0) \right|$$

dove nel secondo passaggio si è sfruttata l'additività dell'integrale definito. Si ha inoltre:

$$\begin{aligned} \frac{1}{h} \left| \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt - hf(x_0) \right| &= \frac{1}{h} \left| \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt - \int_{x_0}^{x_0+h} f(x_0)dt \right| = \\ &= \frac{1}{h} \left| \int_{x_0}^{x_0+h} f(t) - f(x_0)dt \right| \leqslant \\ &\leqslant \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} |f(t) - f(x_0)|dt < \\ &< \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} \varepsilon dt = \varepsilon \end{aligned}$$

dove il penultimo passaggio è vincolato alla condizione $|x - x_0| < \delta$. □

Corollario 16. *Se f è continua in $[a, b]$, $\mathcal{I}(x)$ è derivabile in ogni $x \in [a, b]$:*

$$\mathcal{I}'(x) = f(x) \quad \forall x \in [a, b]$$

quindi $\mathcal{I}$ è una primitiva di f, quindi $f \in R_P(a, b)$.

Proposizione 8.53 (Formula del trasporto)**.** *Sia $f \in R_P(a, b)$ e siano $g, h : [\alpha, \beta] \to [a, b]$. Sia $\mathcal{J} : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$:*

$$\mathcal{J}(x) = \int_{h(x)}^{g(x)} f(t)dt$$

sia F una primitiva di f, allora:

$$\mathcal{J}(x) = F(g(x)) - F(h(x))$$

se inoltre g e h sono derivabili, allora:

$$\mathcal{J}'(x) = F'(g(x))g'(x) - F'(h(x))h'(x) = f(g(x))g'(x) - f(h(x))h'(x)$$

8.54 Cambio di variabili

Teorema 111. *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua e sia $\psi : [\alpha, \beta] \to [a, b]$ una funzione derivabile, con $\psi' \in R(a, b)$, allora:*

$$\int_{\psi(\alpha)}^{\psi(\beta)} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\psi(t))\psi'(t)dt$$

Dimostrazione. Si ha che $f(\psi(t))\psi'(t) \in R(\alpha, \beta)$ (integrabilità della composta, con f continua).

Sia F una primitiva di f. $F(\psi(t))$ è primitiva di $f(\psi(t))\psi'(t)$, quindi:

$$f(\psi(t))\psi'(t) \in R_P(\alpha, \beta)$$

inoltre:

$$\int_\alpha^\beta f(\psi(t))\psi'(t)dt = F(\psi(\beta)) - F(\psi(\alpha)) = \int_{\psi(\alpha)}^{\psi(\beta)} f(x)dx$$

□

Corollario 17 (Cambio di variabili)**.** *Sia $\psi : [\alpha, \beta] \to [a, b]$ una funzione biunivoca (quindi monotona)*

- *Se ψ è crescente $\implies \psi(\alpha) = a,\ \psi(\beta) = b,\ \int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\psi(t))\psi'(t)dt$*
- *Se ψ è decrescente $\implies \psi(\alpha) = b,\ \psi(\beta) = a,\ \int_a^b f(x)dx = \int_\beta^\alpha f(\psi(t))\psi'(t)dt$*

Notazione 26 (Differenziale)**.** $d(\psi(t)) = \psi'(t)dt$

8.55 Integrale indefinito

♣ **Definizione 8.56 (Integrale indefinito).** Sia f una funzione che ammetta primitiva in $[a, b]$, si definisce **integrale indefinito** di f in $[a, b]$ l'insieme delle primitive di f.

Notazione 27 (Integrale indefinito)**.** $\displaystyle\int f(x)dx$

Osservazione 8.57. *Se F è una primitiva di f, allora:*

$$\begin{aligned}\int f(x)dx &= F(x) + C \quad (C \in \mathbb{R})\\ &= \bigcup_{C\in\mathbb{R}} F(x) + C\end{aligned}$$

Proprietà 8.58 (Linearità)**.**

$$\int f(x) + \lambda g(x)dx = \int f(x)dx + \lambda \int g(x)dx$$

Proprietà 8.59 (Integrazione per parti)**.**

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

Proprietà 8.60 (Cambio di variabili)**.**

$$\int f(\psi(t))\psi'(t)dt = F(\psi(t)) + C \quad C \in \mathbb{R}$$

se ψ è invertibile:

$$\int f(x)dx = \int f(\psi(t))\psi'(t)dt|_{t=\psi^{-1}(x)}$$

8.61 Applicazione degli integrali allo studio delle serie numeriche

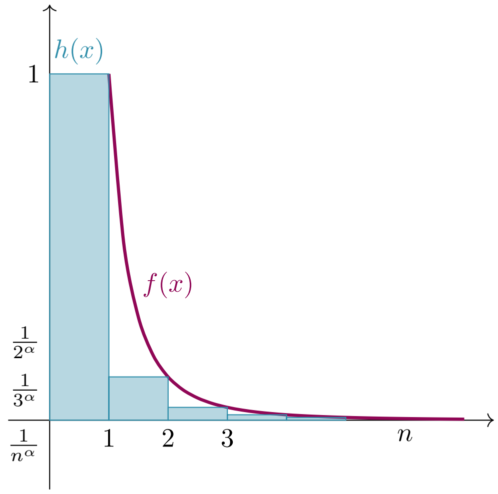
Teorema 112. *Se $\alpha > 1$, allora:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \; \textit{Conv.}$$

inoltre:

$$\zeta(\alpha) < \frac{\alpha}{\alpha - 1}$$

Dimostrazione.



Sia $s_n := \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k^\alpha}$ e $f(x) := \dfrac{1}{x^\alpha}$. Si ha che:

$$s_n = \int_0^n h(x)dx = 1 + \int_1^n h(x)dx$$

inoltre, su $[0, +\infty)$, si ha che $h(x) < f(x)$. Quindi, per il teorema sul confronto degli integrali definiti:

$$1 + \int_1^n h(x)dx \leqslant 1 + \int_1^n \frac{1}{x^\alpha}dx$$

quindi:

$$\begin{aligned} s_n \leqslant 1 + \left[\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_1^n &= 1 + \left(\frac{n^{-\alpha+1}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha}\right) \\ &= 1 + \frac{1}{\alpha - 1}\left(1 - n^{1-\alpha}\right) = \\ &= \frac{\alpha}{\alpha-1} - \frac{n^{1-\alpha}}{\alpha-1} < \frac{\alpha}{\alpha-1} \end{aligned}$$

□

Teorema 113.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$$

Dimostrazione. Sia $s_n := \sum_{k=0}^{n} \dfrac{(-1)^k}{2k+1}$. Si noti che:

$$\int_0^1 x^{2k} dx = \frac{1}{2k+1}$$

quindi:

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \int_0^1 x^{2k} dx$$

per la linearità dell'integrale:

$$s_n = \int_0^1 \sum_{k=0}^{n} (-x^2)^k dx$$

l'integranda è ora la successione delle somme parziali di una serie geometrica, la cui somma risulta:

$$\sum_{k=0}^{n} (-x^2)^k = \frac{(-x^2)^{n+1} - 1}{-x^2 - 1}$$

di conseguenza:

$$s_n = \int_0^1 \frac{(-x^2)^{n+1} - 1}{-x^2 - 1} dx = \int_0^1 \frac{1}{x^2+1} dx + R_n = \frac{\pi}{4} + R_n$$

dove:

$$R_n := -\int_0^1 \frac{(-x^2)^{n+1}}{x^2+1} dx$$

si vuole quindi mostrare che $R_n \to 0$. Si ha quindi:

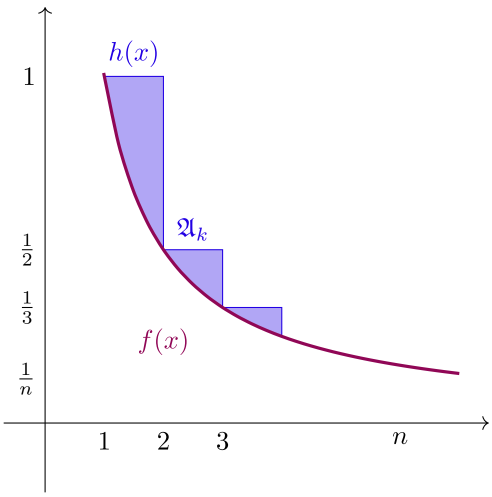
$$\begin{aligned} |R_n| = \left| \int_0^1 \frac{(-x^2)^{n+1}}{x^2+1} dx \right| &\leqslant \int_0^1 \left| \frac{(-x^2)^{n+1}}{x^2+1} \right| dx = \\ &= \int_0^1 \frac{x^{2n+2}}{x^2+1} dx \leqslant \int_0^1 x^{2n+2} dx = \\ &= \frac{1}{2n+3} \to 0 \end{aligned}$$

□

Teorema 114 (Formula di Eulero-Mascheroni)**.** *Detta* $s_n := \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$ *si ha che:*

$$s_n - \log n \to \gamma \in \left(\frac{1}{2}, 1 \right)$$

Dimostrazione.



si ha che:

$$\log(n+1) = \log\left[n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right] = \log n + \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}$$

di conseguenza, $\log n$ e $\log(n+1)$ sono uguali a meno di una successione infinitesima.
Detta S_n la successione delle somme parziali:

$$S_n = \int_1^{n+1} h(x)dx = \underset{\substack{\| \\ \log(n+1)}}{\int_1^{n+1} \frac{1}{x}dx} + \sum_{k=1}^{n} \mathfrak{A}_k$$

quindi:

$$S_n - \log(n+1) = \sum_{k=1}^{n} \mathfrak{A}_k$$

si ha che:

$$\frac{1}{2}\mathfrak{A}_{R_k} \leqslant \mathfrak{A}_k \leqslant \mathfrak{A}_{R_k}$$

dove l'altezza del rettangolo è:

$$h = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

quindi si ha che:

$$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} \leqslant \gamma_n \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$$

quindi per confronto:

$$\gamma_n \to \gamma \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$$

□

8.61.1 Esercizi svolti

Esercizio 8.62.

$$\int \log x dx$$

$$\int \log x dx = \int 1 \cdot \log x dx = x \log x - \int \cancel{x} \cdot \frac{1}{\cancel{x}} dx = x(\log x - 1) + C$$

Esercizio 8.63. *Determinare una primitiva di una funzione nella forma:*

$$f(x) = \frac{P(\sin x, \cos x)}{Q(\sin x, \cos x)}$$

dove P e Q sono due polinomi in seno e coseno.

Per determinare una primitiva è sufficiente operare la sostituzione:

$$t := \tan \frac{x}{2}$$

e sfruttare le formule parametriche di seno e coseno:

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$$
$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

Esercizio 8.64. *Calcolare:*

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx$$
$$\int \sqrt{a^2 + x^2} dx$$
$$\int \sqrt{x^2 - a^2} dx$$

È sufficiente operare le seguenti sostituzioni (nell'ordine):

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx \quad x := a \sin t$$
$$\int \sqrt{a^2 + x^2} dx \quad x := a \sinh t$$
$$\int \sqrt{x^2 - a^2} dx \quad x := a \cosh t$$

Esercizio 8.65. *Calcolare:*

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}dx$$

Si può procedere effettuando la sostituzione:

$$t := x^{\frac{1}{\gcd(2,3)}} = \sqrt[6]{x}$$

Esercizio 8.66. *Calcolare:*

$$I = \int \sin(\alpha x)\cos(\beta x)dx$$

È sufficiente utilizzare le formule di Prostaferesi:

$$\sin p + \sin q = 2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$$

8.67 Integrale improprio (generalizzato)

Definizione 8.68. *Sia $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ e siano $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$, f si dice* ***localmente integrabile*** *in (a,b) se:*

$$\forall [c,d] \subset (a,b) \;\; f \in R(c,d)$$

♣ **Definizione 8.69 (Integrale improprio).** Sia f localmente integrabile in (a,b), se esiste finito:

$$\lim_{c\to a \;\; d\to b}\int_c^d f(x)dx = l \in \mathbb{R}$$

f si dice **integrabile impropriamente** su (a,b). Inoltre, l si dice **integrale improprio** di f su (a,b)

Notazione 28. $\displaystyle\int_a^b f(d)dx := l$

Notazione 29. *$I(a,b)$, classe delle funzioni integrabili impropriamente su $[a,b]$*

Osservazione 8.70. $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = l \in \mathbb{R}$ *se:*

$$\forall a_n \to a^+ \;\forall b_n \to b^- \quad \int_{a_n}^{b_n} f(x)dx \to l$$

Osservazione 8.71 (Additività)**.**

Osservazione 8.72 (♢)**.** *Se $a > -\infty$ e f è limitata in $\mathcal{U}^+(a)$, $\to$*

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{d\to b}\int_a^d f(x)dx$$

Proposizione 8.73. *Sia $\alpha \in \mathbb{R}$, allora:*

$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^\alpha}dx = \begin{cases}\dfrac{1}{\alpha-1} & se \;\; \alpha > 1\\ +\infty & se \;\; \alpha \leqslant 1\end{cases}$$

$$\int_0^1\frac{1}{x^\alpha}dx = \begin{cases}\dfrac{1}{\alpha-1} & se \;\; \alpha < 1\\ +\infty & se \;\; \alpha \geqslant 1\end{cases}$$

Dimostrazione. È sufficiente calcolare i limiti:

$$\lim_{R\to+\infty}\left[\frac{R^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}-\frac{1}{-\alpha+1}\right]=\lim_{R\to+\infty}\frac{1-R^{-\alpha+1}}{\alpha-1}$$

e

$$\lim_{\varepsilon\to0^+}\left[\frac{1}{-\alpha+1}-\frac{\varepsilon^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]=\lim_{\varepsilon\to0^+}\frac{\varepsilon^{-\alpha+1}-1}{\alpha-1}$$

□

Definizione 8.74. *Sia $f:\mathfrak{D}(f)\to\mathbb{R}$, f si dice* ***localmente integrabile*** *su un intervallo $[a,b]$ se esiste una partizione $a=x_0<x_1<\cdots<x_k=b$ di $[a,b]$ t.che f è localmente integrabile (nel senso definito in precedenza) su ogni intervallo della forma $[x_{k-1},x_k]$.*

Definizione 8.75. *Sia f localmente integrabile su $[a,b]$, si definisce* ***integrale improprio*** *su $[a,b]$ (se esiste finito):*

$$\int_a^b f(x)dx := \sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)dx = l\in\mathbb{R}$$

Osservazione 8.76. $f\in I(a,b) \iff f\in I(x_{k-1},x_k)\ \forall k=1,2,\dots,n$

Osservazione 8.77. *Sia $\{a_n\}$ una successione e sia:*

$$f(x)=a_n\chi_{[n-1,n]}(x)$$

allora:

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n\ Conv. \iff \exists\int_0^{+\infty}f(x)dx$$

Osservazione 8.78. *In analogia alle serie numeriche, un integrale improprio può convergere (se $f\in I(a,b)$), divergere o essere indeterminato.*

Definizione 8.79. *$\int_a^b f$ converge* ***assolutamente*** *se $\int_a^b |f|$ converge*

Osservazione 8.80. *Se $f\geqslant 0$ su $(a,b) \implies \int_a^b f(x)dx$ converge a un numero non negativo o diverge a $+\infty$.*

Teorema 115 (Linearità)**.** *Siano $f,g\in I(a,b)$ e $\lambda\in\mathbb{R} \implies f+\lambda g\in I(a,b)$ e:*

$$\int_a^b f+\lambda g=\int_a^b f+\lambda\int_a^b g$$

Dimostrazione. Per la linearità dell'integrale:

$$\int_c^d f+\lambda g=\int_c^d f+\lambda\int_c^d g$$

$$\int_a^b f+\lambda g=\lim_{c\to a\ d\to b}\int_c^d f+\lambda g=\lim_{c\to a\ d\to b}\int_c^d f+\lambda\int_c^d g=\int_a^b f+\lambda\int_a^b g$$

□

Teorema 116 (Confronto per l'integrale improprio)**.** *Siano $0\leqslant f(x)\leqslant g(x)\ \forall x\in(a,b)$, allora:*

- *se $g\in I(a,b) \implies f\in I(a,b)$*
- *se $f\notin I(a,b) \implies g\notin I(a,b)$*

Corollario 18. *Se* $\forall x \in (a,b)$ $f, g \geqslant 0$ *e* $\exists 0 < m < M$ *t.che:*

$$mf(x) \leqslant g(x) \leqslant Mf(x) \;\; \forall x \in (a,b)$$

allora $f \in I(a,b) \iff g \in I(a,b)$

Teorema 117 (Convergenza assoluta)**.** *Sia* f *localmente integrabile, se* $|f| \in I(a,b) \implies f \in I(a,b)$

Osservazione 8.81. $f \in I(a,b),\ g \in I(a,b) \;\;\not\Longrightarrow\;\; (f \cdot g) \in I(a,b)$

Esempio 8.82. *Sia* $f(x) = g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ *e* $(a,b) = (0,1)$

Osservazione 8.83. *Sia* f *localmente integrabile su* (a,b)*,* $f \in I(a,b) \;\;\not\Longrightarrow\;\; |f| \in I(a,b)$

Esempio 8.84.

♣ **Teorema 118 (Confronto asintotico per gli integrali impropri).** Sia f una funzione di segno costante in $\dot{\mathcal{U}}(x_0)$, allora se $f \sim g$ in $\mathcal{U}(x_0)$ si ha che $\exists \mathcal{U}'(x_0) \subset \mathcal{U}(x_0)$ t.che:

$$f \in I(\mathcal{U}'(x_0)) \iff g \in I(\mathcal{U}'(x_0))$$

Dimostrazione.

$$\frac{f(x)}{g(x)} \underset{x \to x_0}{\to} 1 \implies \text{ in } \mathcal{U}'(x_0) \;\; \frac{1}{2} g(x) \leqslant f(x) \leqslant 2g(x)$$

□

♣ **Teorema 119 (Funzione campione).** Siano $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e f definita come:

$$f(x) = \frac{1}{x^\alpha \left|\log x\right|^\beta} \quad x \in (0, +\infty)$$

allora:

$$f \in I(\mathcal{U}(0)) \iff \begin{cases} \alpha < 1 & \forall \beta \\ \alpha = 1, & \beta > 1 \end{cases}$$

$$f \in I(\mathcal{U}(+\infty)) \iff \begin{cases} \alpha > 1 & \forall \beta \\ \alpha = 1, & \beta > 1 \end{cases}$$

Dimostrazione. Sia $\alpha > 1$, si può scrivere:

$$\alpha := 1 + 2p$$

con $p > 0$. Quindi, sia $x \in \mathcal{U}(+\infty)$:

$$f(x) = \frac{1}{x^{1+2p} \left(\log x\right)^\beta} \leqslant \frac{1}{x^{1+p}} \iff \frac{x^{1+p}}{x^{1+2p} \left(\log x\right)^\beta} \leqslant 1 \iff x^p \left(\log x\right)^\beta \geqslant 1$$

per confronto, si ha che:

$$\frac{1}{x^\alpha \left(\log x\right)^\beta} \leqslant \frac{1}{x^{1+p}} \in I(\mathcal{U}(+\infty))$$

□

8.84.1 Esercizi svolti

Esercizio 8.85. *Si dimostri che:*

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x}\int_0^x \sin\frac{1}{t}dt = 0$$

Sia $x > 0$ fissato. Si noti che:

$$\left(\cos\frac{1}{t}\right)' = \sin\frac{1}{t}\cdot\frac{1}{t^2}$$

quindi:

$$\int_0^x \sin\frac{1}{t}dt = \int_0^x t^2\left(\cos\frac{1}{t}\right)' dt = t^2\cos\frac{1}{t}\mid_0^x - \int_0^x 2t\cos\frac{1}{t}dt$$

Il limite diventa dunque:

$$\lim_{x\to 0^+}\left[x\cos\frac{1}{x} - \frac{2}{x}\int_0^x t\cos\frac{1}{t}dt\right] = \lim_{x\to 0^+}\left[-\frac{2}{x}\int_0^x t\cos\frac{1}{t}dt\right]$$

Inoltre:

$$\frac{2}{x}\left|\int_0^x t\cos\frac{1}{t}dt\right| \leqslant \frac{2}{x}\int_0^x t\left|\cos\frac{1}{t}\right|dt \leqslant \frac{2}{x}\int_0^x tdt = x \underset{x\to 0^+}{\to} 0$$

Esercizio 8.86. *Si dimostri che:*

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}$$

è integrabile impropriamente in $(\pi, +\infty)$, ma che non lo è il suo modulo

Esercizio 8.87 (Integrale di Dirichlet)**.** *Si calcoli:*

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx$$

Esercizio 8.88. *Si calcoli:*

$$\int_0^\pi \log(\sin x)dx$$

Esercizio 8.89. *Si calcoli:*

$$\int e^{\arcsin x}dx$$

$$I := \int e^{\arcsin x}dx = \int 1\cdot e^{\arcsin x}dx = xe^{\arcsin x} - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}e^{\arcsin x}dx$$

$$I = xe^{\arcsin x} + \int \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}e^{\arcsin x}dx = xe^{\arcsin x} + \sqrt{1-x^2}e^{\arcsin x} - \int \cancel{\sqrt{1-x^2}}\frac{e^{\arcsin x}}{\cancel{\sqrt{1-x^2}}}dx$$

$$I = \frac{1}{2}xe^{\arcsin x} + \frac{1}{2}\sqrt{1-x^2}e^{\arcsin x} + C$$

Esercizio 8.90. *Si calcoli:*

$$\int \frac{\sqrt{\log(\log x)}}{x \log x} dx$$

si ponga:

$$t := \log(\log x)$$

$$dt = \frac{1}{\log x} \cdot \frac{1}{x} dx$$

si ottiene:

$$\int \sqrt{t} dt = \frac{2}{3} [\log(\log x)]^{\frac{2}{3}} + C$$

Esercizio 8.91 (Integrali di Fresnel)**.** *Si dimostri che:*

$$\int_0^\infty \sin(x^2) dx$$

converge.

Si ponga:

$$t := x^2 \implies x = \sqrt{t}$$

$$dx = \frac{1}{2\sqrt{t}} dt$$

$$I = \int_0^\infty \frac{1}{2\sqrt{t}} \sin t dt = \lim_{R \to \infty} \int_0^R \frac{\sin t}{2\sqrt{t}} dt$$

sia $a > 0$, si ha che:

$$\int_a^R \frac{\sin t}{2\sqrt{t}} dt = -\frac{\cos t}{2\sqrt{t}} \mid_a^R - \int_a^R \frac{\cos t}{t^{\frac{3}{2}}} dt$$

$$\int_a^\infty \sin(x^2) dx = \underbrace{\lim_{R \to \infty} \left[-\frac{\cos t}{2\sqrt{t}} \right] \mid_a^R}_{l \in \mathbb{R}} - \int_a^\infty \frac{\cos t}{t^{\frac{3}{2}}} dt$$

ma, dato che il coseno è limitato, per confronto:

$$\int_a^\infty \left| \frac{\cos t}{t^{\frac{3}{2}}} \right| dt \quad \textit{Conv.}$$

di conseguenza:

$$\int_a^\infty \sin(x^2) dx \quad \textit{Conv.}$$

Esercizio 8.92. *Si calcoli:*

$$\int \frac{1}{(1+x^2)^3} dx$$

È sufficiente effettuare la sostituzione:

$$x := \tan u$$

Esercizio 8.93. *Si calcoli:*

$$I := \int_{-1}^{1} \frac{1}{(1+x^2)(1+e^x)} dx$$

È sufficiente effettuare la sostituzione:

$$u := -x$$

Capitolo 9

Successioni e serie di funzioni

9.1 Successioni di funzioni

♣ **Definizione 9.2 (Successione di funzioni).** Sia $f_n : \mathfrak{I} \to \mathbb{R}$ una funzione reale, con $n \in \mathbb{N}$, la successione $\{f_n\}$ si dice **successione di funzioni**.

Notazione 30. $\{f_n\}$, f_n, $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$

Osservazione 9.3. *Fissato* $x_0 \in \mathfrak{I}$, $f_n(x_0)$ *è una successione numerica.*

♣ **Definizione 9.4 (Convergenza puntuale).** Sia f_n una successione di funzioni e sia $f : \mathfrak{I} \to \mathbb{R}$, si dice che f_n **converge puntualmente** a f se:

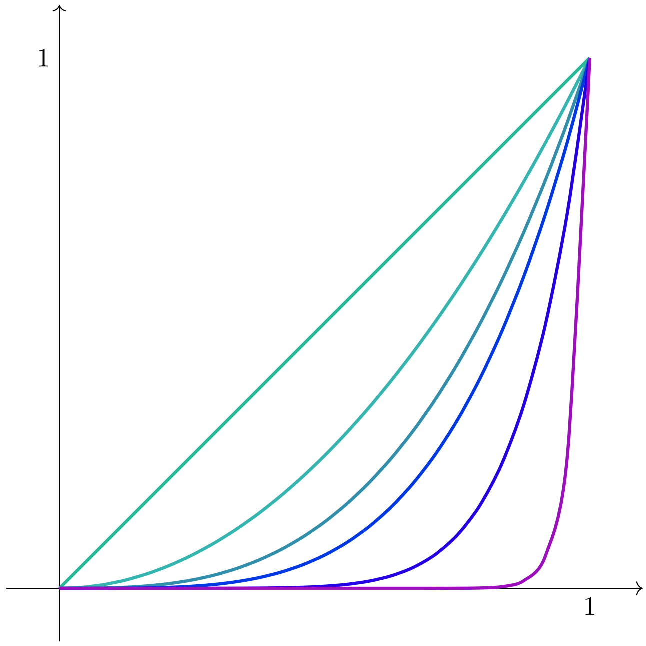
$$\forall x_0 \in \mathfrak{I} \; f_n(x_0) \to f(x_0)$$

Esempio 9.5 (I). *Sia* $\mathfrak{I} = [0,1]$ *e sia* f_n*:*

$$f_n(x) = x^n$$

f_n *converge puntualmente a:*

$$f(x) = \begin{cases} 0 & se \quad x \in [0,1) \\ 1 & se \quad x = 1 \end{cases}$$



Esempio 9.6 (II)**.** *Sia* $\mathfrak{I} = [0,1]$ *e sia* f_n*:*

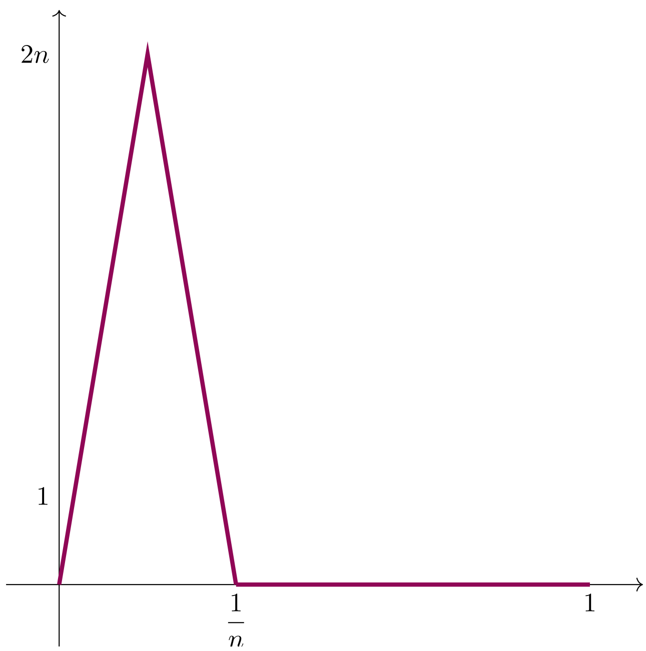
$$f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$$

$$f_n(x) \to f(x) = 0$$

$$f_n'(x) = \sqrt{n}\cos(nx)$$

$$f_n'(x) \to +\infty$$

Esempio 9.7 (III)**.** *Sia* $\mathfrak{I} = [0,1]$ *e sia* f_n *così definita:*



$$f_n(x) \to f(x) = 0$$

$$\int_0^1 f_n(x)dx = 1 \ \forall n \in \mathbb{N}_0$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = 1 \neq \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f(x)dx = 0$$

Proposizione 9.8. *Se f_n è continua $\forall n \ \not\Rightarrow\ f$ è continua.*

Proposizione 9.9. *Se f_n è derivabile $\forall n \ \not\Rightarrow\ f$ è derivabile.*

Proposizione 9.10. *Se $f_n \in R(\mathfrak{I})\ \forall n \ \not\Rightarrow\ f \in R(\mathfrak{I})$.*

Esempio 9.11. *Sia f_n così definita nell'intervallo $[0, 1]$:*

$$f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & se \quad x \geqslant \dfrac{1}{n} \\ 0 & se \quad x < \dfrac{1}{n} \end{cases}$$

$$f_n(x) \to f(x) = \frac{1}{x}$$

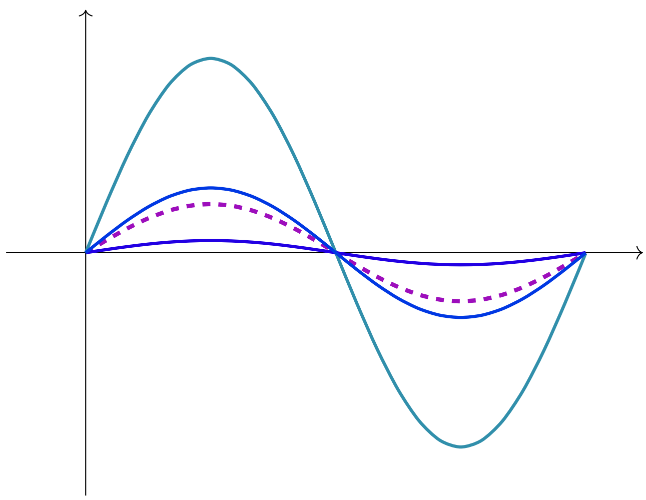
ma f non è limitata in $[0, 1]$, quindi non è integrabile.

Proposizione 9.12. *Se $f_n \in R(\mathfrak{I})\ \forall n$ e $f \in R(\mathfrak{I}) \ \not\Rightarrow\ \lim_{n\to\infty} \int_{\mathfrak{I}} f_n(x)dx = \int_{\mathfrak{I}} f(x)dx = \int_{\mathfrak{I}} \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx$.*

9.12.1 Convergenza uniforme

♣ **Definizione 9.13 (Convergenza uniforme).** Sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni e sia $f : \mathfrak{I} \to \mathbb{R}$, f_n **converge uniformemente** a f se:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N} : \ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \ \forall n \geqslant n_0 \ \forall x \in \mathfrak{I}$$



Notazione 31. $f_n \overset{u}{\to} f$

Osservazione 9.14. *La scelta di n_0 non dipende da x.*

Osservazione 9.15.

$$f_n \overset{u}{\to} f \iff \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\mathfrak{I}} |f_n(x) - f(x)| = 0$$

♣ **Teorema 120 (Convergenza uniforme e continuità).** Sia $f_n : \mathfrak{I} \to \mathbb{R}$ una successioni di funzioni, se f_n è continua $\forall n$ e $f_n \xrightarrow{u} f \implies f$ è continua.

Dimostrazione. Dato che f_n converge uniformemente a f, si ha che, fissato $x_0 \in \mathfrak{I}$:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} : \ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \ \forall n \geqslant n_0 \ \forall x \in \mathfrak{I}$$

dato che f_n è continua:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \text{ se } |x - x_0| < \delta \implies |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| < \varepsilon$$

quindi, fissato $\varepsilon > 0$, se $|x - x_0| < \delta$:

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &= |f(x) - f_{n_0}(x) + f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0) + f_{n_0}(x_0) - f(x_0)| \leqslant \\ &\leqslant |f(x) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| + |f_{n_0}(x_0) - f(x_0)| < 3\varepsilon \end{aligned}$$

□

♣ **Teorema 121 (Convergenza uniforme e integrabilità).** Sia $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ una successioni di funzioni, se $f_n \in R(a, b) \ \forall n$ e $f_n \xrightarrow{u} f \implies f \in R(a, b)$ e:

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b |f_n(x) - f(x)| dx = 0$$

Dimostrazione. Si dimostrerà solo il secondo punto. Si ha che:

$$\int_a^b |f_n(x) - f(x)| dx \leqslant \int_a^b \sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)| dx = (b - a) \sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)| \to 0$$

dove nell'ultimo passaggio si è usata la convergenza uniforme di f_n. □

♣ **Teorema 122 (Convergenza uniforme e derivabilità).** Sia $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ una successione di funzioni derivabili. Si supponga che esista $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ t.che $f'_n \xrightarrow{u} g$ e che esista un $x_0 \in [a, b]$ t.che $f_n(x_0)$ converge. Allora $f_n \xrightarrow{u} f$, dove f è derivabile e:

$$f' = g$$
$$\lim f'_n = (\lim f_n)'$$

Dimostrazione. Si dimostrerà il caso in cui $f_n \in \mathcal{C}'([a, b])$. Si supponga inoltre che $x_0 = a$. f_n si può scrivere come (dato che f'_n è continua e quindi integrabile):

$$f_n(x) = f_n(a) + \int_a^x f'_n(t) dt$$

si definisca allora:

$$l := \lim f_n(a)$$

e:

$$f(x) := l + \int_a^x g(t) dt$$

si ha che f è continua e derivabile. Inoltre:

$$f'(x) = g'(x)$$

inoltre:

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f(x)| &= |f_n(a) + \int_a^x f_n'(t)dt - l - \int_a^x g(t)dt| \leqslant \\ &\leqslant |f_n(a) - l| + |\int_a^x f_n'(t) - g(t)dt| \leqslant \\ &\leqslant |f_n(a) - l| + \int_a^x |f_n'(t) - g(t)|dt \leqslant \\ &\leqslant |f_n(a) - l| + \int_a^b |f_n'(t) - g(t)|dt \end{aligned}$$

di conseguenza:

$$\sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)| \leqslant |f_n(a) - l| + \int_a^b |f_n'(t) - g(t)|dt \to 0$$

la tesi segue per confronto. □

9.16 Serie di funzioni

♣ **Definizione 9.17 (Serie di funzioni).** Sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni. Si definisca la successione di funzioni s_n (detta successione delle somme parziali) come:

$$s_n := \sum_{k=1}^{n} f_n(x)$$

si definisce **serie di funzioni** di termine generale f_n, se esiste, la funzione $s : \Im \to \mathbb{R}$:

$$s := \lim s_n$$

Notazione 32. $\sum f_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$

Teorema 123 (Convergenza uniforme e continuità per le serie di funzioni)**.** *Se f_n è continua $\forall n$ e $\sum f_n \xrightarrow{u} s \implies s$ è continua*

Teorema 124 (Convergenza uniforme e integrabilità per le serie di funzioni)**.** *Sia $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$, se $f_n \in R(a,b)$ $\forall n$ e $\sum f_n \xrightarrow{u} s \implies s \in R(a,b)$. Inoltre:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)dx$$

Teorema 125 (Convergenza uniforme e derivabilità per le serie di funzioni)**.** *Sia $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ t.che f_n è derivabile $\forall n$, se $\exists x_0 \in [a,b]$ t.che $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$ converge e $\sum f_n' \xrightarrow{u} s' : [a,b] \to \mathbb{R} \implies \sum f_n \xrightarrow{u} s : [a,b] \to \mathbb{R}$ e $\sum f_n$ è derivabile. Inoltre:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right)'$$

9.17.1 Convergenza totale

♣ **Definizione 9.18 (Convergenza totale).** Sia $\sum f_n$ una serie di funzioni, con $f_n : \Im \to \mathbb{R}$, si dice che $\sum f_n$ **converge totalmente** se esiste una successione numerica $M_n \geqslant 0$ t.che:

- $\sup_{x\in\Im} |f_n(x)| \leqslant M_n$

- $\sum M_n$ converge

Teorema 126. *Se $\sum f_n$ converge totalmente $\implies$ $\sum f_n$ converge uniformemente*

Dimostrazione. Sia s_n la successione delle somme parziali. Si noti inoltre che, se $\sum_{k=1}^{\infty} M_k$ converge, allora:

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} M_k \underset{n\to+\infty}{\to} 0$$

si ha quindi che:

$$\begin{aligned}|s_n(x) - s(x)| = \left|\sum_{k=1}^{n} f_n(x) - \sum_{k=1}^{\infty} f_n(x)\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} f_n(x)\right| \leqslant \\ \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} |f_n(x)| \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} M_k \quad \forall x \in \mathfrak{I}\end{aligned}$$

dunque:

$$\sup_{x\in\mathfrak{I}} |s_n(x) - s(x)| \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} M_k \underset{n\to+\infty}{\to} 0$$

□

9.18.1 Serie di potenze

♣ **Definizione 9.19 (Serie di potenze).** Sia $\{a_n\}$ una successione numerica, si definisce **serie di potenze** la serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

Osservazione 9.20. *Se $x = 0$, la serie converge a a_0.*

♣ **Definizione 9.21 (Raggio di convergenza).** Sia $\sum a_n x^n$ una serie di potenze, si dice **raggio di convergenza** della serie:

$$R := \frac{1}{L} \in [0, +\infty]$$

dove:

$$L := \limsup \sqrt[n]{|a_n|} \in [0, +\infty]$$

Osservazione 9.22. *Se a_n è polinomiale, $R = 1$.*

♣ **Teorema 127.** Sia $\sum a_n x^n$ una serie di potenze e sia R il suo raggio di convergenza, allora se $R > 0$:

- la serie converge puntualmente su $(-R, R)$
- la serie converge totalmente su ogni $[-r, r]$ con $0 < r < R$
- la serie non converge in alcun $x \in [-R, R]^C$

Osservazione 9.23. *Se $R = +\infty$ si ha convergenza totale su ogni intervallo chiuso.*

Osservazione 9.24. *Se $R = 0$, la serie converge solo in $x = 0$.*

Dimostrazione.

- Il primo punto segue dal secondo
- Sia $0 < r < R$ e sia $x \in [-r, r]$, allora:

$$|a_n x^n| \leqslant |a_n| r^n$$

  inoltre, per il criterio della radice la serie $\sum |a_n| r^n$ converge:

$$\limsup \sqrt[n]{|a_n| r^n} = \limsup r \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{r}{R} < 1$$

- Sia $|x| > R$:

$$\limsup \sqrt[n]{|a_n x^n|} = \frac{|x|}{R} > 1$$

  quindi esiste una sottosuccessione t.che $|a_{n_k} x^{n_k}| > 1$, quindi $a_n x^n \not\to 0$.

□

Osservazione 9.25. *Si può sostituire x con $f(x)$:*

$$\sum a_n [f(x)]^n$$

ed ottenere il raggio di convergenza ponendo $y := f(x)$ e imponendo $y \in (-R, R)$.

Lemma 9.26 (Lemma di Abel)**.** *Sia $\sum a_n x^n$ una serie di potenze di raggio di convergenza $0 < R < +\infty$, se $\sum a_n R^n$ converge allora la serie converge uniformemente su $[-r, R]$ $\forall 0 < r < R$. Lo stesso vale per l'altro estremo. Di conseguenza, se $\sum a_n x^n$ converge su $x = -R$ e $x = R$ si ha convergenza uniforme su $[-R, R]$.*

Teorema 128 (Continuità per le serie di potenze)**.** *Sia $\sum a_n x^n$ una serie di potenze di raggio di convergenza $R > 0$ e sia:*

$$s(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

allora s è continua su $(-R, R)$. Inoltre, se la serie converge su $x = R$, s è continua su $(-R, R]$. Lo stesso vale per l'altro estremo.

Teorema 129 (Integrabilità per le serie di potenze)**.** *Sia $\sum a_n x^n$ una serie di potenze di raggio di convergenza $R > 0$ e sia:*

$$s(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

allora s è integrabile su ogni $[a, b]$, con $-R < a < b < R$. Inoltre:

$$\int_a^b s(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b a_n x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(b^{n+1} - a^{n+1})$$

Inoltre, se la serie converge su $x = R$, s è integrabile su $-R < a < b \leqslant R$. Lo stesso vale per l'altro estremo.

Lemma 9.27. *Se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ha raggio di convergenza $R > 0 \implies \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ ha raggio di convergenza R.*

Dimostrazione. Si ha che:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n$$

inoltre:

$$\limsup \sqrt[n]{(n+1)|a_{n+1}|} = \limsup \sqrt[n]{n+1} \left(|a_{n+1}|^{\frac{1}{n+1}} \right)^{\frac{n+1}{n}} = L$$

□

Teorema 130 (Derivabilità per le serie di potenze)**.** *Sia* $\sum a_n x^n$ *una serie di potenze di raggio di convergenza* $R > 0$ *e sia:*

$$s(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

allora s *è derivabile su* $(-R, R)$*. Inoltre:*

$$s'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

Osservazione 9.28. $s \in \mathcal{C}^{\infty}(-R, R)$*. Inoltre:*

$$s^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1) a_n x^{n-k} \quad \forall k = 0, 1, \dots$$

$$s^{(k)}(0) = k! \cdot a_k$$

$$s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

Esempio 9.29.

$$s(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$$

si ha che $R = 1$*. Sia* $x \in (-1, 1)$*, si ha che:*

$$s'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n = \frac{1}{1+x^2}$$

quindi, per il teorema fondamentale del calcolo integrale:

$$s(x) - \underset{\substack{\parallel \\ 0}}{s(0)} = \arctan x \implies s(x) = \arctan x$$

si ha inoltre che s *converge puntualmente per* $x = 1$*. Quindi, per il lemma di Abel:*

$$s(1) = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$$

Esempio 9.30. *Si vuole calcolare:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n (n+2)}$$

sia allora:

$$s(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+2}$$

si ha che s ha raggio di convergenza $R = 1$. Sia quindi $x \in (-1, 1)$, con $x \neq 0$:

$$s(x)x^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+2}}{n+2}$$

$$\left(s(x)x^2\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} x^{n+1} = x \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{x}{1-x}$$

inoltre:

$$\int_0^x \frac{t}{1-t} dt = -\int_0^x dt + \int_0^1 \frac{1}{1-t} dt = -x - \log(1-x)$$

quindi:

$$s(x)x^2 = -x - \log(1-x) \implies s(x) = -\frac{1}{x} - \frac{\log(1-x)}{x^2}$$

si noti che, pur non essendo definita in $x = 0$, la funzione trovata può essere estesa per continuità in tale punto (dove infatti la serie converge a $\frac{1}{2}$). Si ha quindi che:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n(n+2)} = s\left(\frac{1}{2}\right) = -2 + 4\log 2$$

Esempio 9.31. *Si vuole calcolare:*

$$s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n x^n$$

il raggio di convergenza di tale serie di funzioni è $R = 1$. Sia $x \in (-1, 1)$ e sia F così definita:

$$F(x) := \sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

si ha che:

$$F'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} \implies xF'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n x^n = s(x)$$

$$s(x) = xF'(x) = \frac{x}{(1-x)^2}$$