

Analisi 1

Luca Fagaraz

December 10, 2025

Contents

1 Logica	7
1.1 Sommatorie e produttorie	7
1.3 Principio di induzione	8
1.3.1 Disuguaglianza di Bernoulli	8
1.3.2 Fattoriale	8
1.7 Relazioni	9
1.11 Insiemi numerici	9
1.15 Strutture algebriche	10
1.21 Cardinalità infinite	10
2 Trigonometria iperbolica	13
3 Numeri complessi	15
3.1 Introduzione	15
3.10 Forma trigonometrica	16
3.14 Radici n -esime	17
3.21 Struttura algebrica di \mathbb{C}	19
4 Successioni	21
4.1 Introduzione	21
4.8 Unicità del limite	23
4.9 Permanenza del segno	23
4.10 Teorema del confronto	24
4.11 Monotonia	24
4.13 Numero di Eulero	25
4.16 Sottosuccessioni	26
4.21 Limite superiore e limite inferiore	27
4.26 Proprietà dei limiti	27
4.28 Aritmetica estesa	28
4.28.1 Forme indeterminate	28
4.29 Limiti notevoli	29
4.31 Gerarchie di infinito	32
4.32 Asintoticità	33
4.41.1 Formula di De Moivre-Stirling	34
4.42 Continuità per successioni di alcune funzioni	34
4.42.1 Formula di Cesaro	35
4.43 Asintotici di esponenziali e logaritmi	36
4.44 Successioni di Cauchy	37
4.47 Spazi metrici	39

5 Serie numeriche	41
5.1 Introduzione	41
5.8 Serie telescopiche	43
5.8.1 Serie di Mengoli	43
5.9 Serie a termini positivi	43
5.13 Serie geometrica	44
5.14 Rappresentazione decimale dei reali	44
5.17 Serie armonica	45
5.19 Formula di Eulero-Mascheroni	46
5.21 Serie armonica generalizzata	46
5.22 Criterio del confronto asintotico	47
5.23 Serie campione	47
5.24 Criteri del rapporto e della radice	47
5.25 Serie fattoriale	48
5.27 Criterio di Leibniz	49
5.29 Criterio di Dirichlet	49
5.30 Convergenza assoluta	50
5.33 Riordinamenti	50
5.38 Funzione Zeta di Riemann	50
6 Funzioni Reali	51
6.1 Topologia	51
6.14 Limiti	53
6.14.1 Introduzione	53
6.16.1 Teoremi sui limiti	54
6.22.1 Continuità	54
6.35.1 Prolungamento per continuità	57
6.36 Teoremi sulle funzioni continue	57
6.43 Continuità uniforme	58
7 Derivate	59
7.1 Introduzione	59
7.4 Differenziabilità	59
7.7 La funzione derivata	60
7.12 Derivate successive	61
7.16 Teoremi sulle funzioni derivabili	61
7.19 Funzioni convesse	63
7.30 Sviluppi di Taylor	66
7.30.1 Approssimazione di una funzione	66
7.30.2 Polinomio di Taylor	66
7.34 Teorema di de l'Hôpital	68
7.35 Algebra degli <i>o</i> -piccoli	68
8 Integrali	69
8.1 L'integrale di Riemann	69
8.2 Costruzione dell'integrale di Riemann	69
8.29 Classi di funzioni integrabili	74
8.31 Integrale definito	75
8.36 Primitiva	75
8.45 Teorema fondamentale del calcolo integrale	76
8.46 Media integrale	77
8.48 Integrazione per parti	77
8.49 Funzione integrale	77
8.54 Cambio di variabili	78
8.55 Integrale indefinito	79

CONTENTS	5
8.61 Applicazione degli integrali allo studio delle serie numeriche	79
8.62 Integrale improprio (generalizzato)	79
9 Successioni e serie di funzioni	83
9.1 Successioni di funzioni	83
9.12.1 Convergenza uniforme	84
9.16 Serie di funzioni	86
9.17.1 Convergenza totale	86

Chapter 1

Logica

1.1 Sommatorie e produttorie

Notazione 1. Sia $n \in \mathbb{N}_0$:

$$\bullet \sum_{n=1}^m a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_m$$

$$\bullet \prod_{n=1}^m b_n = b_1 \cdot b_2 \cdot \cdots \cdot b_m$$

Proposizione 1.2.

$$(I) \sum_{j=1}^n ca_j = c \sum_{j=1}^n a_j \quad \forall c \in \mathbb{C}$$

$$(II) \prod_{j=1}^n cb_j = c^n \prod_{j=1}^n b_j \quad \forall c \in \mathbb{C}$$

$$(III) \sum_{j=1}^n a_j + \sum_{j=1}^n b_j = \sum_{j=1}^n (a_j + b_j)$$

$$(IV) \left(\prod_{j=1}^n a_j \right) \cdot \left(\prod_{j=1}^n b_j \right) = \prod_{j=1}^n (a_j \cdot b_j)$$

$$(V) \sum_{j=1}^{n+1} a_j = a_{n+1} + \sum_{j=1}^n a_j$$

$$(VI) \prod_{j=1}^{n+1} b_j = b_{n+1} \cdot \prod_{j=1}^n b_j$$

$$(VII) \sum_{j=1}^n a_j = \sum_{j=1+m}^{n+m} a_{j-m} \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

$$(VIII) \prod_{j=1}^n b_j = \prod_{j=1+m}^{n+m} b_{j-m} \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

$$(IX) \sum_{j=0}^n a_j = \sum_{j=0}^n a_{n-j}$$

$$(X) \prod_{j=0}^n b_j = \prod_{j=0}^n b_{n-j}$$

1.3 Principio di induzione

Principio 1 (Principio di induzione). *Sia $p(n)$ una proposizione, con $n \in \mathbb{N}$. Se:*

- $p(n_0)$ è verificata, con $n_0 \in \mathbb{N}$
 - se $p(n)$ è vera, allora $p(n + 1)$ è vera
- allora $p(n)$ è vera $\forall n \geq n_0$.

1.3.1 Disuguaglianza di Bernoulli

Teorema 1 (Disuguaglianza di Bernoulli). *Sia $x \in \mathbb{R}$ con $x > -1$, allora:*

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx \quad \forall n \geq 1$$

Dim. Si proceda per induzione:

- $n = 1$: $(1 + x) \geq 1 + x$
- si supponga ora vera $P(n)$:

$$\begin{aligned} (1 + x)^{n+1} &= (1 + x)(1 + x)^n \geq (1 + x)(1 + nx) = 1 + x(n + 1) + nx^2 \\ &\geq 1 + x(n + 1) \end{aligned}$$

□

1.3.2 Fattoriale

Definizione 1.4. *Sia $n \in \mathbb{N}$, si definisce **fattoriale** di n :*

$$n! := \begin{cases} 1 & \text{se } n = 0 \\ n(n-1) & \text{se } n > 0 \end{cases}$$

Definizione 1.5. *Siano $k, m \in \mathbb{N}$ t.che $0 \leq k \leq n$, si definisce **coefficiente binomiale**:*

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Proposizione 1.6. *Siano $0 \leq k \leq m$:*

$$(I) \quad \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \quad (\text{simmetria})$$

$$(II) \quad \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1} \quad (\text{formula di Stifffer})$$

Dim.

□

Teorema 2 (Formula del binomio di Newton). *Sia $n \in \mathbb{N}_0$ e $a, b \in \mathbb{C}$, allora:*

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Dim. Si proceda per induzione:

- $(a + b)^0 = 1 \cdot a^0 b^0 = 1$
- Si supponga ora vera $P(n)$:

$$\begin{aligned} (a + b)^{n+1} &= (a + b)(a + b)^n = (a + b) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^k b^{n+1-k} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} \\ &= \binom{n+1}{n} a^{n+1} b^0 + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k-1} a^k b^{n+1-k} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} + \binom{n}{0} a^0 b^{n+1} = \\ &= \binom{n+1}{n+1} a^{n+1} b^0 + \sum_{k=1}^n \left[\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right] a^k b^{n+1-k} + \binom{n}{0} a^0 b^{n+1} = \\ &= \binom{n+1}{n+1} a^{n+1} b^0 + \sum_{k=1}^n \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k} + \binom{n}{0} a^0 b^{n+1} \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k} \end{aligned}$$

□

1.7 Relazioni

Definizione 1.8 (Prodotto cartesiano). *Siano A e B due insiemi. Si definisce **prodotto cartesiano** di A e B l'insieme di coppie ordinate:*

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A \wedge b \in B\}$$

Definizione 1.9 (Relazione). *Dati due insiemi A e B si definisce **relazione** \mathfrak{R} tra A e B un sottoinsieme del prodotto cartesiano $A \times B$. Diciamo che \mathfrak{R} **associa** un elemento $a \in A$ a $b \in B$ se $(a, b) \in \mathfrak{R}$.*

Notazione 2. $A \mathfrak{R} B$

Definizione 1.10 (Funzione). *Dati due insiemi A e B , una funzione f è una relazione che a un elemento di A associa al più un elemento di B .*

Notazione 3. $f : A \rightarrow B$

1.11 Insiemi numerici

Definizione 1.12 (Estremo superiore). *Sia $A \subset \mathbb{R}$, si definisce estremo superiore di A :*

- $\sup_A := l \in \mathbb{R} \iff l \geq a \ \forall a \in A \wedge \forall \varepsilon > 0 \ \exists a \in A : a \geq l - \varepsilon$

- $\sup_A := +\infty \iff \forall M > 0 \ \exists a \in A : a > M$

Definizione 1.13 (Massimo). *Sia $A \subset \mathbb{R}$, si definisce massimo di A :*

$$\max A = M \in \mathbb{A} : M \geq a \ \forall a \in \mathbb{A}$$

Osservazione 1.14. *Se $\sup_A \in \mathbb{A}$, $\sup_A = \max A$.*

Assioma 1 (Assioma di completezza). *Sia $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, con A superiormente limitato. A ammette estremo superiore in \mathbb{R} .*

1.15 Strutture algebriche

Definizione 1.16 (Campo).

Definizione 1.17 (Relazione d'equivalenza).

Definizione 1.18 (Relazione d'ordine).

Definizione 1.19 (Campo ordinato).

Definizione 1.20 (Campo ordinato completo).

1.21 Cardinalità infinite

Definizione 1.22. Due insiemi A e B sono **equipotenti** (o hanno la stessa cardinalità) se esiste una funzione $f : A \rightarrow B$ biunivoca.

Notazione 4. $A \sim B$

Osservazione 1.23. L'equipotenza è una relazione di equivalenza.

Notazione 5. $P_n := \{1, 2, 3, \dots, n\}$,

Definizione 1.24. Sia $P_n = \{1, 2, 3, \dots, n\}$, un insieme A si dice **finito** se $\exists n_0 \in \mathbb{N} : A \sim P_{n_0}$

Osservazione 1.25. Se n_0 esiste, è unico.

Definizione 1.26. Si definisce n il **cardinale** di P_n .

Notazione 6. $|P_n| = n$, $\#P_n = n$

Proposizione 1.27. Siano A e B due insiemi, $|A| < |B|$ se non esiste una biezione tra A e B e $\exists C \subset B : A \sim C$.

Teorema 3. Ogni insieme infinito contiene una copia di \mathbb{N} , dove per copia si intende un sottoinsieme $C \sim \mathbb{N}$.

Osservazione 1.28. $|\mathbb{N}|$ è la più piccola cardinalità non finita.

Definizione 1.29. Si definisce la cardinalità di \mathbb{N} **cardinalità numerabile**.

Notazione 7. $|\mathbb{N}| = \aleph_0$

Teorema 4. $\mathbb{N} \sim \mathbb{Z}$

Dim.

□

Teorema 5. $|\mathbb{Q}| = \aleph_0$

Dim.

□

Teorema 6. \mathbb{R} non è numerabile.

Dim. (Diagonalizzazione di Cantor). □

Teorema 7 (Teorema di Cantor). *Dato un qualsiasi insieme A si ha che $|A| < |\wp(A)|$.*

Osservazione 1.30. $|\wp(\mathbb{N})| = |\mathbb{R}|$. In particolare, $|\mathbb{R}|$ è detta **cardinalità del continuo**.

Notazione 8. $|\mathbb{R}| = \mathfrak{C}$

Dim. P.A. si supponga che esista $f : A \rightarrow \wp(A)$ biunivoca. Allora sia B il sottoinsieme di A così definito:

$$B := \{a \in A : a \notin f(a)\}$$

dato che f è biunivoca, $\exists b \in A : f(b) = B$. È facilmente verificabile che b non può né appartenere né non appartenere a B , il che è un assurdo. □

Chapter 2

Trigonometria iperbolica

Definizione 2.1 (Coseno iperbolico). *Si definisce **coseno iperbolico** la funzione $\cosh : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:*

$$\cosh x := \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Definizione 2.2 (Seno iperbolico). *Si definisce **seno iperbolico** la funzione $\sinh : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:*

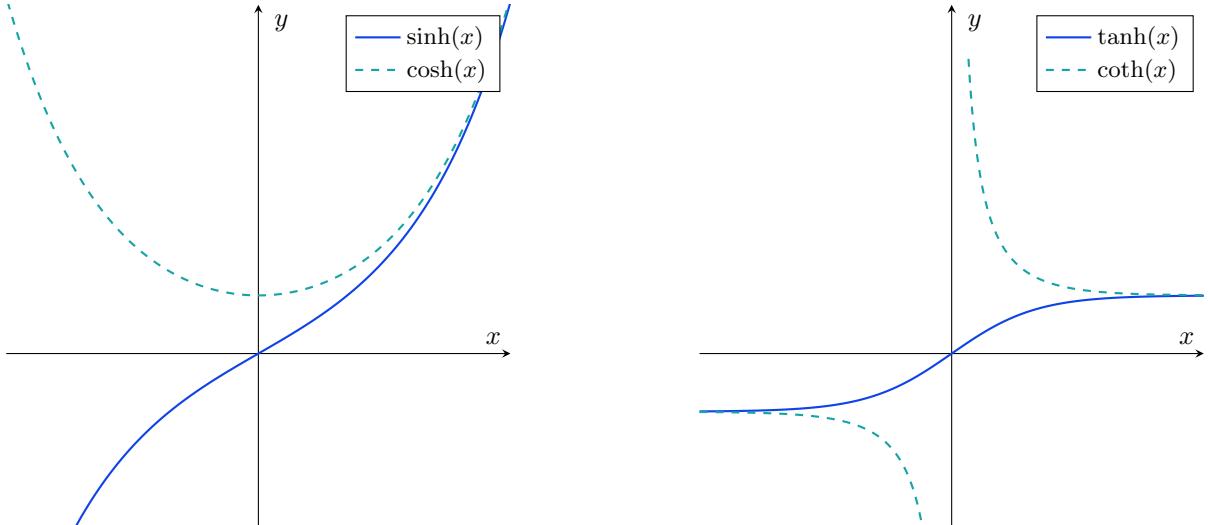
$$\sinh x := \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

Definizione 2.3 (Tangente iperbolica). *Si definisce **tangente iperbolica** la funzione $\tanh : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:*

$$\tanh x := \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

Definizione 2.4 (Cotangente iperbolica). *Si definisce **cotangente iperbolica** la funzione $\coth : \mathbb{R}_0 \rightarrow \mathbb{R}$:*

$$\coth x := \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$



Proposizione 2.5.

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Proposizione 2.6. *Siano $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:*

- $\sinh(\alpha + \beta) = \sinh \alpha \cosh \beta + \sinh \beta \cosh \alpha$
- $\cosh(\alpha + \beta) = \cosh \alpha \cosh \beta + \sinh \alpha \sinh \beta$

Dim.

□

Corollario 1. *Siano $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:*

- $\sinh(\alpha - \beta) = \sinh \alpha \cosh \beta - \sinh \beta \cosh \alpha$
- $\cosh(\alpha - \beta) = \cosh \alpha \cosh \beta - \sinh \alpha \sinh \beta$

Corollario 2. *Sia $\alpha \in \mathbb{R}$:*

- $\sinh(2\alpha) = 2 \sinh \alpha \cosh \alpha$
- $\cosh(2\alpha) = \cosh^2 \alpha + \sinh^2 \alpha$

Proposizione 2.7. *Sia $\alpha \in \mathbb{R}$:*

- $\sinh\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \text{sgn}(\alpha) \sqrt{\frac{\cosh \alpha - 1}{2}}$
- $\cosh\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\frac{\cosh \alpha + 1}{2}}$

Dim.

□

Proposizione 2.8. *La funzione $\sinh : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è invertibile e l'inversa è data da:*

Chapter 3

Numeri complessi

3.1 Introduzione

Definizione 3.2. Definiamo l'insieme dei numeri complessi \mathbb{C} come:

$$\mathbb{C} := \{x + iy : x, y \in \mathbb{R}\}$$

con $i \in \mathbb{C}$ t.che $i^2 = -1$

Definizione 3.3. Dato $z = a + ib \in \mathbb{C}$, definiamo **parte reale** e **parte immaginaria** di z rispettivamente i numeri:

$$\begin{aligned}\Re(z) &= a \\ \Im(z) &= b\end{aligned}$$

Osservazione 3.4.

$$z = w \iff \begin{cases} \Re(z) = \Re(w) \\ \Im(z) = \Im(w) \end{cases}$$

Definizione 3.5. Dati $z = a + ib$, $w = c + id$ con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$,

1. $z + w = (a + b) + i(c + d)$
2. $z \cdot w = (ac - bd) + i(bc + ad)$
3. $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$
4. $\bar{z} = a - ib$

Proprietà 3.6. Siano $z, w \in \mathbb{C}$,

1. $|z| \geq 0$ e $|z| = 0 \iff z = 0$
2. $|z|^2 = |\bar{z}|^2 = z \cdot \bar{z}$
3. $|z \cdot w| = |z||w|$
4. $\Re(z) \leq |z|$, $\Im(z) \leq |z|$

Dim. (3)

$$\begin{aligned}|z \cdot w|^2 &= (ac - bd)^2 + (bc + ad)^2 = \\ &= (a^2c^2 + b^2d^2 - 2abd\bar{c}\bar{d}) + (a^2d^2 + b^2c^2 + 2abd\bar{c}\bar{d}) = \\ &= a^2(c^2 + d^2) + b^2(c^2 + d^2) = \\ &= (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = |z||w|\end{aligned}$$

□

Teorema 8 (Disuguaglianza triangolare).

$$|z| + |w| \geq |z + w| \quad \forall z, w \in \mathbb{C}$$

Dim. Siano $z = a + ib$ e $w = c + id$, con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} |z + w|^2 &= (a + c)^2 + (b + d)^2 = a^2 + c^2 + 2ac + b^2 + d^2 + 2bd = \\ &= a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2(ac + bd) = \\ &= |z|^2 + |w|^2 + 2(\Re(z \cdot \bar{w})) \leqslant \\ &\leqslant |z|^2 + |w|^2 + 2(|z \cdot \bar{w}|) = \\ &= |z|^2 + |w|^2 + 2|z||w| = (|z| + |w|)^2 \end{aligned}$$

□

Proposizione 3.7. Sia $z \in \mathbb{C}$, $\exists z^* \in \mathbb{C}$ t.che $z \cdot z^* = 1$

Dim. Sia $z = a + ib$,

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a + ib} = \frac{1}{a + ib} \cdot \frac{a - ib}{a - ib} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} - i \frac{b}{a^2 + b^2} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = z^*$$

□

Osservazione 3.8. Se $|z| = 1$, $z^* = \bar{z}$

Proprietà 3.9. Siano $z, w \in \mathbb{C}$,

1. $\bar{\bar{z}} = z$

2. $z = \bar{z} \iff z \in \mathbb{R}$

3. $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$

4. $\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$

5. $\frac{\overline{1}}{z} = \frac{z}{|z|^2}$

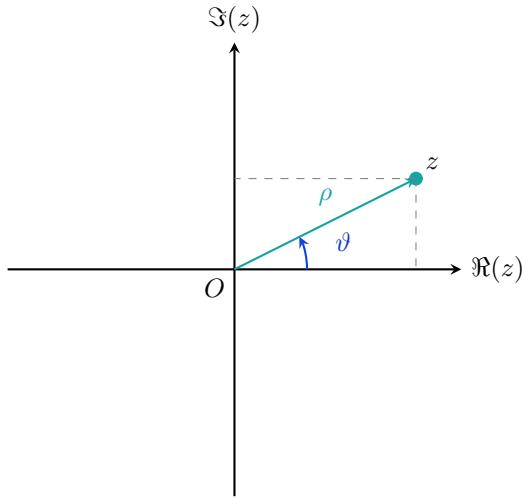
6. $\Re(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}$, $\Im(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}$

3.10 Forma trigonometrica

Un numero complesso può essere scritto in forma trigonometrica come:

$$z = \rho(\cos \vartheta + i \sin \vartheta)$$

con $\rho \in [0, +\infty)$, $\vartheta \in [-\pi, \pi)$



Lemma 3.11. Siano $\vartheta, \varphi \in \mathbb{R}$,

$$(\cos \vartheta + i \sin \vartheta)(\cos \varphi + i \sin \varphi) = \cos (\vartheta + \varphi) + i \sin (\vartheta + \varphi)$$

Dim.

□

Osservazione 3.12. Siano $z, w \in \mathbb{C}$ con $|w| = 1$, allora geometricamente $z \cdot w$ equivale a ruotare z di $\arg w$.

Teorema 9 (Formula di De Moivre). Siano $z \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}$, si ha che, detti $\rho = |z|$ e $\vartheta = \arg z$:

$$z^n = \rho^n (\cos n\vartheta + i \sin n\vartheta)$$

Dim. Per il lemma 3.11:

$$z^n = \underbrace{z \cdot z \cdots z}_{n \text{ volte}} = \rho^n (\cos n\vartheta + i \sin n\vartheta)$$

□

Proposizione 3.13. Sia $z \in \mathbb{C}$ e $\arg z \in [-\pi, \pi]$:

$$\arg z = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{se } \Re(z) = 0, \Im(z) > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{se } \Re(z) = 0, \Im(z) < 0 \\ \arctan \left[\frac{\Im(z)}{\Re(z)} \right] & \text{se } \Re(z) > 0 \\ \arctan \left[\frac{\Im(z)}{\Re(z)} \right] + \pi & \text{se } \Re(z) < 0, \Im(z) \geq 0 \\ \arctan \left[\frac{\Im(z)}{\Re(z)} \right] - \pi & \text{se } \Re(z) < 0, \Im(z) < 0 \end{cases}$$

3.14 Radici n -esime

Definizione 3.15 (Esponenziale complesso). Sia $\lambda \in \mathbb{R}$, si definisce:

$$e^\lambda := \cos \lambda + i \sin \lambda$$

Sia $z \in \mathbb{C}$, si definisce:

$$e^z := e^{\Re(z)} [\cos \Im(z) + i \sin \Im(z)]$$

Definizione 3.16. Sia $z \in \mathbb{C}$, $w \in \mathbb{C}$ è una **radice n -esima** di z , con $n \in \mathbb{N}$ se:

$$w^n = z$$

Osservazione 3.17. $e^{i\pi} = -1$, $e^{2\pi i} = 1$

Osservazione 3.18 (Forma esponenziale di un numero complesso).

$$z = \rho(\cos \vartheta + i \sin \vartheta) = \rho e^{i\vartheta}$$

Teorema 10 (Radici n -esime). Sia $n \in \mathbb{N}_0$ e $z = \rho e^{i\vartheta} \in \mathbb{C}_0$, z ammette n radici distinte date da:

$$w_k = \rho^{\frac{1}{n}} e^{i\vartheta_k}, \quad \vartheta_k = \frac{\vartheta + 2k\pi}{n}, \quad k \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$$

Dim. Si provi prima che w_k è una radice di z :

$$w_k^n = (\rho^{\frac{1}{n}})^n e^{i\vartheta_k n} = \rho e^{i\vartheta}$$

si mostri ora che w_k sono le sole radici di z .

$$t = \sqrt[n]{z} = z^{\frac{1}{n}} = \rho^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\vartheta}{n}}$$

$$t = \rho^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\vartheta}{n}} \iff \begin{cases} |t| = \rho^{\frac{1}{n}} \\ \arg t = \frac{\vartheta}{n} + \frac{2k\pi}{n} \end{cases}$$

Sia:

- $k \in \{n, n+1, \dots\}$, allora:

$$k = n \cdot q + r$$

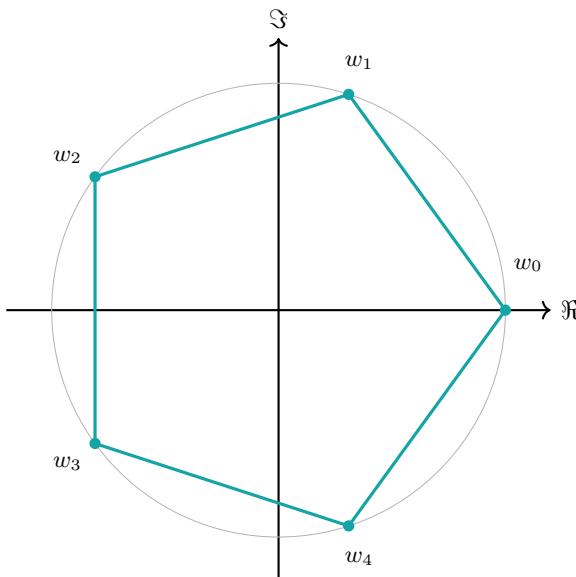
con $r \in \{0, 1, \dots, n-1\}$. Quindi:

$$\arg t = \frac{\vartheta + 2\pi(nq+r)}{n}$$

$$t = \rho^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\vartheta}{n}} e^{\frac{2\pi r}{n}} e^{2\pi q} = \rho^{\frac{1}{n}} e^{\frac{\vartheta+2\pi r}{n}}$$

- $k \in \{-1, -2, \dots, -n+1\}$

□



Definizione 3.19 (Molteplicità). *Sia $p_n(z)$ un polinomio, con $n \in \mathbb{N}$, $z \in \mathbb{C}$ e sia $\alpha \in \mathbb{C} : p_n(\alpha) = 0$. Si dice **molteplicità** di α l'esponente di $(z - \alpha)$ nella fattorizzazione di $p_n(z)$.*

Proposizione 3.20. *L'equazione a coefficienti reali:*

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n = 0, \quad a_i \in \mathbb{R}$$

soddisfa le seguenti proprietà:

- Se z è soluzione se e solo se \bar{z} è soluzione
- Se z è soluzione, z e \bar{z} hanno la stessa molteplicità

Dim.

- Sia $\alpha \in \mathbb{C}$ soluzione, allora:

$$\begin{aligned} a_0 + a_1 \alpha + a_2 \alpha^2 + \cdots + a_n \alpha^n &= 0, \quad a_i \in \mathbb{R} \\ \overline{a_0 + a_1 \alpha + a_2 \alpha^2 + \cdots + a_n \alpha^n} &= \bar{0} \\ a_0 + a_1 \bar{\alpha} + a_2 \bar{\alpha}^2 + \cdots + a_n \bar{\alpha}^n &= 0 \end{aligned}$$

- Supponiamo che α sia soluzione, ma $m(\alpha) > m(\bar{\alpha})$. Allora il polinomio associato può essere scritto come:

$$p_n(z) = (z - \alpha)^s (z - \bar{\alpha})^t q_n(z)$$

Sia:

$$\tilde{p}(z) = \frac{p_n(z)}{(z - \alpha)^s (z - \bar{\alpha})^t} = (z - \alpha)^{s-t} q_n(z)$$

allora $\tilde{p}(z)$ è un polinomio a coefficienti reali ed ha α come radice, ma non $\bar{\alpha}$. Ciò contraddice il punto precedente.

□

Teorema 11 (Teorema fondamentale dell'algebra). *Siano $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ con $a_n \neq 0$, l'equazione:*

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n = 0$$

*ha esattamente n soluzioni in \mathbb{C} , contate con le loro molteplicità. Si dice che \mathbb{C} è un campo **algebricamente chiuso**.*

3.21 Struttura algebrica di \mathbb{C}

Chapter 4

Successioni

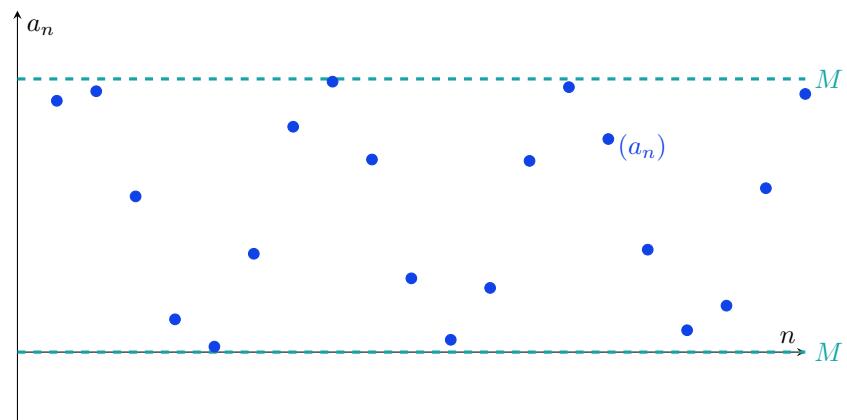
4.1 Introduzione

Definizione 4.2. Definiamo una **successione** $\{a_n\}$ una funzione $a: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$.

Definizione 4.3. Diciamo che una successione a_n è **positiva** se $a_n \geq 0 \forall n$

Definizione 4.4. Diciamo che una successione a_n è **limitata** se:

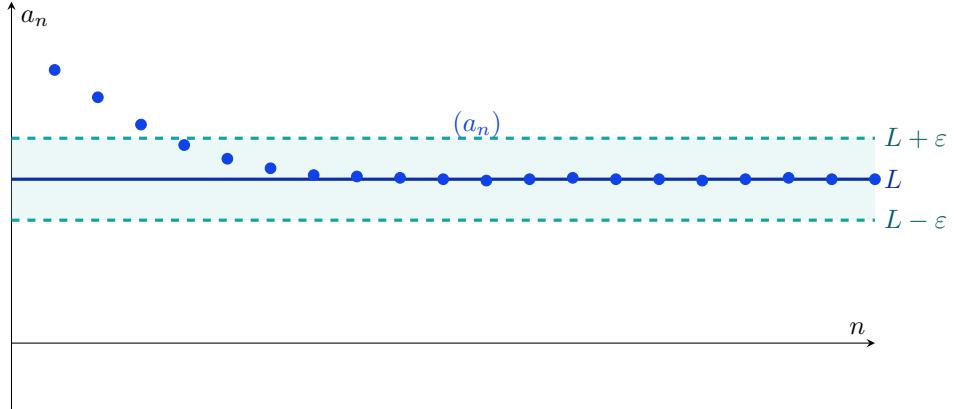
$$\exists M > 0 : |a_n| \leq M \quad \forall n$$



Definizione 4.5. Diciamo che una proposizione $P(n)$, con $n \in \mathbb{N}$, è vera **definitivamente** se è vera $\forall n \geq n_0$, con $n_0 \in \mathbb{N}$.

Definizione 4.6. Data una successione a_n , diciamo che a_n **converge**, oppure tende a, oppure ha limite $l \in \mathbb{R}$ se $\exists l \in \mathbb{R}$ t.che:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} : |a_n - l| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$$



Teorema 12. $a_n \rightarrow l \in \mathbb{R} \iff |a_n - l| \rightarrow 0$.

Dim. Dato che $|a_n - l| \rightarrow 0$, si ha che:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 : |a_n - l| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$$

ne segue che

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 : |a_n - l| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$$

quindi $a_n \rightarrow l$

□

Teorema 13. Sia $\{a_n\}$ definitivamente positiva. Se $a_n \rightarrow a \in \mathbb{R}$, $\sqrt{a_n} \rightarrow \sqrt{a}$.

Dim. Si noti che dati $x, y \in \mathbb{R}^+$, si ha:

$$|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq \sqrt{|x - y|}$$

quindi:

$$|\sqrt{a_n} - \sqrt{a}| \leq \sqrt{|a_n - a|}$$

dato che $a_n \rightarrow a$, si ha che, fissato $\varepsilon > 0$:

$$|a_n - a| < \varepsilon \text{ Definit.} \implies \sqrt{|a_n - a|} < \sqrt{\varepsilon} \text{ Definit.}$$

preso $\varepsilon' = \sqrt{\varepsilon}$, ciò dimostra la tesi.

$$|\sqrt{a_n} - \sqrt{a}| < \varepsilon' \text{ Definit.}$$

□

Teorema 14. Sia $\{a_n\}$. Se $a_n \rightarrow a \in \mathbb{R}$, $|a_n| \rightarrow |a|$.

Dim. Si noti che dati $a, b \in \mathbb{R}$, si ha:

$$||a| - |b|| \leq |a - b|$$

quindi:

$$||a_n| - |a|| \leq |a_n - a|$$

dato che $a_n \rightarrow a$, si ha che, fissato $\varepsilon > 0$:

$$|a_n - a| < \varepsilon \text{ Definit.} \implies ||a_n| - |a|| < \varepsilon \text{ Definit.}$$

□

Definizione 4.7. Data una successione a_n , diciamo che a_n **diverge**, oppure tende a, oppure ha limite $+\infty$ se:

$$\forall M > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : a_n > M \quad \forall n \geq n_0$$

4.8 Unicità del limite

Teorema 15. Se $a_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$, l è unico.

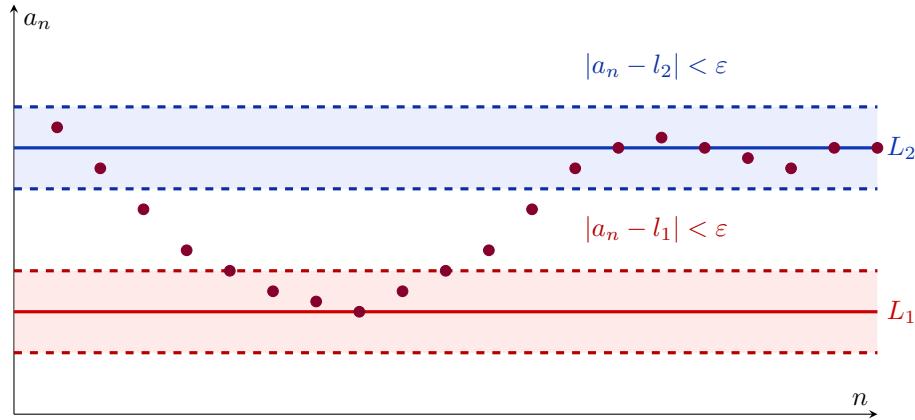
Dim. P.A. supponiamo che esistano due numeri reali l_1 e l_2 , tali che $l_1 \neq l_2$ e tali che:

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0 \exists n_1 \in \mathbb{N} : |a_n - l_1| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_1 \\ \forall \varepsilon > 0 \exists n_2 \in \mathbb{N} : |a_n - l_2| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_2 \end{aligned}$$

Sia $\varepsilon = \frac{|l_1 - l_2|}{3}$, si ha che:

$$\begin{aligned} |l_1 - l_2| &= |l_1 - a_n + a_n - l_2| \leq |l_1 - a_n| + |l_2 - a_n| < 2\varepsilon \text{ Definit.} \\ \implies |l_1 - l_2| &< 2\varepsilon = 2 \frac{|l_1 - l_2|}{3} \implies 1 < \frac{2}{3} \end{aligned}$$

il che è un assurdo.



□

4.9 Permanenza del segno

Teorema 16. Sia $a_n \rightarrow l$, si ha che:

- Se $l > 0$, $a_n > 0$ Definit.
- Se $a_n \geq 0$ Definit., allora $l \geq 0$;

Dim.

- Sia $\varepsilon = \frac{l}{2}$. Si ha che:

$$0 < |a_n - l| < \frac{l}{2} \implies 0 < \frac{l}{2} < a_n < \frac{3l}{2}$$

- In modo analogo, se $l < 0$, $a_n < 0$, quindi se $a_n \geq 0$, $l \geq 0$.

□

4.10 Teorema del confronto

Teorema 17 (Primo teorema del confronto). *Siano $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ e $\{c_n\}$ tre successioni tali che:*

$$a_n \leq c_n \leq b_n \text{ Definit.}$$

se $a_n \rightarrow l$, $b_n \rightarrow l$ con $l \in \mathbb{R}$, allora $c_n \rightarrow l$.

Dim. Dato che a_n e b_n convergono allo stesso l :

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon' > 0 \exists n'_0 : -\varepsilon' + l < a_n < \varepsilon' + l \quad \forall n \geq n'_0 \\ \forall \varepsilon'' > 0 \exists n''_0 : -\varepsilon'' + l < b_n < \varepsilon'' + l \quad \forall n \geq n''_0 \end{aligned}$$

sia ora $n_0 = \max\{n'_0, n''_0\}$, dato che $a_n \leq b_n$:

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon' \forall \varepsilon'' \exists n_0 : -\varepsilon' + l < a_n \leq b_n < \varepsilon'' + l \quad \forall n \geq n_0 \\ \forall \varepsilon' \forall \varepsilon'' \exists n_0 : -\varepsilon' + l < a_n \leq c_n \leq b_n < \varepsilon'' + l \quad \forall n \geq n_0 \end{aligned}$$

per giungere a $c_n \rightarrow l$, basta prendere $\varepsilon = \min\{\varepsilon', \varepsilon''\}$. □

Teorema 18 (Secondo teorema del confronto). *Siano $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ due successioni tali che:*

$$a_n \leq b_n \text{ Definit.}$$

se $a_n \rightarrow \infty$, allora $b_n \rightarrow \infty$.

Dim. Dato che $a_n \rightarrow \infty$, si ha che:

$$\forall M > 0 \exists n_0 : a_n > M \quad \forall n \geq n_0$$

avendo $b_n \geq a_n$:

$$\forall M > 0 \exists n_0 : M < a_n \leq b_n \quad \forall n \geq n_0$$

□

Corollario 3. *Se $\{a_n\}$ è una successione limitata e $\{\varepsilon_n\}$ è una successione infinitesima, $a_n \cdot \varepsilon_n \rightarrow 0$*

Dim. Dato che a_n è limitata:

$$\exists M > 0 : -M \leq a_n \leq M \quad \forall n$$

si supponga $\varepsilon_n > 0$ Definit. (ciò tuttavia non fa perdere di generalità). Allora:

$$\exists M > 0 : -M \cdot \varepsilon_n \leq a_n \cdot \varepsilon_n \leq M \cdot \varepsilon_n \quad \forall n$$

Quindi $a_n \cdot \varepsilon_n \rightarrow 0$ per il teorema del confronto. □

4.11 Monotonia

Definizione 4.12. *Data una successione $\{a_n\}$, diciamo che essa è **monotona**:*

- **crescente** se $a_{n+1} \geq a_n \quad \forall n$;
- **strettamente crescente** se $a_{n+1} > a_n \quad \forall n$;
- **decrescente** se $a_{n+1} \leq a_n \quad \forall n$;
- **strettamente decrescente** se $a_{n+1} < a_n \quad \forall n$.

Teorema 19. *Se una successione $\{a_n\}$ è definitivamente monotona, allora è regolare. In particolare:*

- Se $\{a_n\}$ è illimitata, $\{a_n\}$ diverge.
- Se $\{a_n\}$ è limitata, $\{a_n\}$ converge;

Dim.

- Consideriamo il caso in cui $\{a_n\}$ sia monotona crescente. Dato che non è limitata, si ha che:

$$\forall M > 0 \exists a_{n_0} : |a_{n_0}| > M$$

dato che $\{a_n\}$ è crescente, $a_n \geq a_{n_0} \forall n \geq n_0$. Quindi:

$$\forall M > 0 \exists n_0 : a_n > M \forall n \geq n_0$$

- Consideriamo nuovamente il caso in cui $\{a_n\}$ sia crescente. Sia:

$$A = \{a_0, a_1, \dots\}$$

per la completezza di \mathbb{R} , A ammette estremo superiore. Sia $\gamma = \sup_A$. Per la definizione di estremo superiore:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists a_{n_0} \in A : \gamma - \varepsilon < a_{n_0}$$

Dato che $\{a_n\}$ è crescente:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 : \gamma - a_n < \varepsilon \forall n \geq n_0$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 : \gamma - \varepsilon < a_n \leq \gamma \forall n \geq n_0$$

□

Notazione 9. $a_n \uparrow \gamma$, $b_n \downarrow \gamma$ (a_n tende a γ dal basso, b_n tende a γ dall'alto)

4.13 Numero di Eulero

Definizione 4.14.

$$e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Teorema 20. e_n converge.

Dim. Dimostriamo che e_n è monotona crescente:

$$\begin{aligned} a_{n+1} \geq a_n &\iff \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \geq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \\ &\iff \left[\frac{1 + \frac{1}{n+1}}{1 + \frac{1}{n}} \right]^{n+1} \geq \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} \\ &\iff \left[\frac{n+2}{n+1} \right]^{n+1} \geq \frac{n}{n+1} \\ &\iff \left[\frac{n(n+2)}{(n+1)^2} \right]^{n+1} \geq 1 - \frac{1}{n+1} \\ &\iff \left[\frac{n^2 + 2n + 1 - 1}{n^2 + 2n + 1} \right]^{n+1} \geq 1 - \frac{1}{n+1} \\ &\iff \left[1 - \frac{1}{(n+1)^2} \right]^{n+1} \geq 1 - \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

che è la diseguaglianza di Bernoulli con $x = -\frac{1}{(n+1)^2}$.

In modo analogo si dimostra che $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ è decrescente.

Dato che $e_n < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \forall n$, e_n è superiormente limitata. Dato che e_n è monotona, ne segue che e_n converge. \square

Definizione 4.15 (Numero di Eulero). $e := \lim e_n$

4.16 Sottosuccessioni

Definizione 4.17. Data una successione a_n e una successione $n_k : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, si dice **sottosuccessione** di a_n la funzione composta $a_{n_k} = a_n \circ n_k$

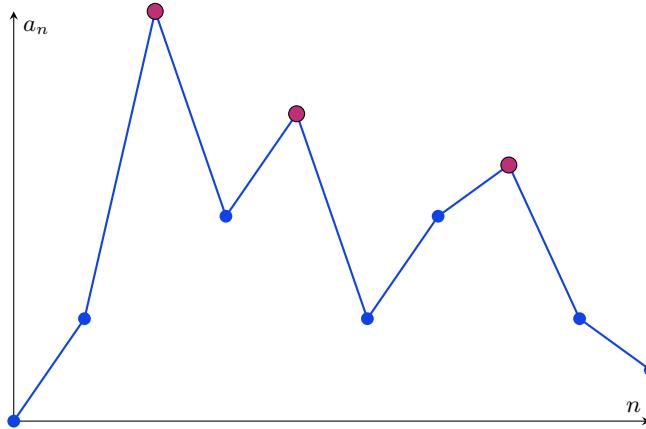
Osservazione 4.18. Le possibili Sottosuccessioni di una data successione a_n sono infinite di cardinalità \mathfrak{c}

Teorema 21. Se una successione $a_n \rightarrow l \in \overline{\mathbb{R}}$, allora ogni sottosuccessione $a_{n_k} \rightarrow l$.

Osservazione 4.19. Se una successione a_n ammette due Sottosuccessioni che hanno limite diverso, a_n è oscillante.

Lemma 4.20 (Lemma dei picchi). Ogni successione ammette una sottosuccessione monotona.

Dim. Sia $\{a_n\}$ una generica successione. Definiamo *picco* una coppia (n_0, a_{n_0}) se $a_{n_0} \geq a_n \forall n \geq n_0$.



La successione a_n può quindi avere:

- Un numero infinito di picchi. In tal caso, si costruisca una sottosuccessione di a_n che abbia come elementi i picchi. In tal modo, la sottosuccessione sarà decrescente (per la definizione di picco) e quindi monotona.
- Un numero finito di picchi. In tal caso si prenda l'ultimo picco (quello con n_0 maggiore). Si ha che $\exists n_1 > n_0 + 1 : a_{n_1} > a_{n_0+1}$ (altrimenti $(n_0 + 1, a_{n_0+1})$ sarebbe un picco). Si può così iterare la procedura e costruire una sottosuccessione crescente.

\square

Teorema 22 (Teorema di Bolzano-Weierstrass). Ogni successione limitata ammette una sottosuccessione convergente.

Dim. Per il lemma dei picchi ogni successione a_n ammette una sottosuccessione a_{n_k} monotona. Per un teorema precedentemente dimostrato, se a_{n_k} è monotona è limitata, allora converge. \square

4.21 Limite superiore e limite inferiore

Definizione 4.22. Sia a_n una successione, si definisce **limite superiore** di a_n :

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left(\sup_{m \geq n} a_n \right)$$

Definizione 4.23. Sia a_n una successione, si definisce **limite inferiore** di a_n :

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left(\inf_{m \geq n} a_n \right)$$

Notazione 10. $\limsup a_n$, $\liminf a_n$, $\overline{\lim} a_n$, $\underline{\lim} a_n$

Definizione 4.24. Sia a_n una successione, $l \in \bar{\mathbb{R}}$ è **limite sottosuccessionale** di a_n se $\exists a_{n_k} \rightarrow l$.

Proprietà 4.25.

$$\underline{\lim} a_n \leq \overline{\lim} a_n$$

In particolare, se $\underline{\lim} a_n = \overline{\lim} a_n$, $a_n \rightarrow \underline{\lim} a_n = \overline{\lim} a_n$.

Teorema 23. Il limite superiore è il più grande limite sottosuccessionale possibile di una successione.

4.26 Proprietà dei limiti

Teorema 24 (Operazioni con i limiti). Siano $a_n \rightarrow a \in \mathbb{R}$, $b_n \rightarrow b \in \mathbb{R}$:

$$1. a_n + b_n \rightarrow a + b$$

$$2. a_n \cdot b_n \rightarrow a \cdot b$$

$$3. \text{ Se } b \neq 0, \frac{a_n}{b_n} \rightarrow \frac{a}{b}$$

Dim.

1.

$$|a_n + b_n - (a + b)| = |a_n - a + b_n - b| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < 2\varepsilon \text{ Definit.}$$

2.

$$\begin{aligned} |a_n \cdot b_n - a \cdot b| &= |a_n b_n - a_n b + a_n b - ab| = |a_n(b_n - b) + b(a_n - a)| \leq \\ &\leq |a_n||b_n - b| + |b||a_n - a| \end{aligned}$$

dato che $a_n \rightarrow a$, $|b||a_n - a| \rightarrow 0$. Dato che a_n converge, $|a_n|$ converge ed è limitata. Quindi $|a_n||b_n - b| \rightarrow 0$. Quindi $|a_n - ab| \rightarrow 0$ per confronto $\Rightarrow a_n b_n \rightarrow ab$.

3. Per il terzo punto, basta provare che $\frac{1}{b_n} \rightarrow \frac{1}{b}$:

$$\left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{b} \right| = \left| \frac{b - b_n}{b_n b} \right| = |b_n - b| \frac{1}{|b_n||b|} \leq \frac{2}{|b|^2} |b_n - b| \rightarrow 0$$

dove nell'ultimo passaggio si è utilizzato il fatto che se $|b_n| \rightarrow |b|$ allora $|b_n| \geq \frac{|b|}{2}$ Definit.

□

Proposizione 4.27. $\sin n$ non converge.

Dim. P.A. si supponga che $\sin n \rightarrow l \in [-1, 1]$ (se $\sin n$ converge ad l , per il teorema della permanenza del segno si deve avere $-1 \leq l \leq 1$).

Si considerino:

$$\sin(n+1) = \sin n \cdot \cos 1 + \sin 1 \cdot \cos n \rightarrow l \quad \sin(n-1) = \sin n \cdot \cos 1 - \sin 1 \cdot \cos n \rightarrow l$$

entrambe convergono ad l poiché sottosuccessioni di $\sin n$. Quindi:

$$\sin(n+1) + \sin(n-1) = 2\sin n \cdot \cos 1 \implies l + l = 2l \cdot \cos 1$$

dato che $\cos 1 \neq 1$, $l = 0$. Si consideri ora:

$$\sin(n+1) - \sin(n-1) = 2\sin 1 \cdot \cos n \rightarrow l - l = 0$$

dato che $\sin 1 \neq 0$, $\cos n \rightarrow 0$. Ma si ha che:

$$\sin^2 n + \cos^2 n \rightarrow 0 + 0 \neq 1$$

ciò è un assurdo. □

4.28 Aritmetica estesa

- $+\infty + \infty = +\infty$
- $+\infty \cdot c = +\infty$ $c \in \mathbb{R}^+$
- $+\infty \cdot (-c) = -\infty$ $c \in \mathbb{R}^+$
- $\frac{c}{+\infty} = 0^+$ $c \in \mathbb{R}^+$
- $\frac{c}{0^+} = +\infty$ $c \in \mathbb{R}^+$
- [...]

4.28.1 Forme indeterminate

1. $+\infty \cdot 0$

2. $+\infty - \infty$

3. $\frac{+\infty}{+\infty}$

4. $\frac{0}{0}$

5. 1^∞

6. ∞^0

7. 0^0

Si noti che le ultime tre possono essere ricondotte alle 2., 3. e 4., che a loro volta possono essere ricondotte alla prima.

4.29 Limiti notevoli

Sia $\varepsilon_n \rightarrow 0$ una successione infinitesima, con $\varepsilon \neq 0$. Definit., valgono i seguenti limiti notevoli:

Limite notevole I. Sia $a \in \mathbb{R}$:

$$a^n = \begin{cases} +\infty & \text{se } a > 1 \\ 1 & \text{se } a = 1 \\ 0 & \text{se } |a| < 1 \\ \emptyset & \text{se } a \leq -1 \end{cases}$$

Dim. Se $a > 1$, $a = 1 + b$, con $b > 0$. Quindi, per la diseguaglianza di Bernoulli:

$$a^n = (1 + b)^n \geq 1 + nb \rightarrow \infty$$

Se $a = 1$, la successione è costante.

Se $|a| < 1$, $a = \frac{1}{b}$, con $|b| > 1$. Quindi:

$$a^n = \frac{1}{b^n} \rightarrow 0$$

Se $a \leq 1$, allora può essere scritta come:

$$a^n = (-1)^n b$$

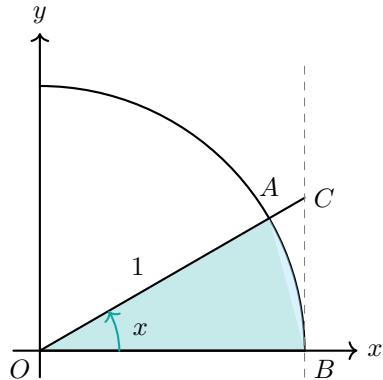
con $b = |a|$.

□

Lemma 4.30. Sia $x \in \mathbb{R} \cap \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$:

$$\sin x \leq x \leq \tan x$$

Dim. Si ha che:



$$\mathfrak{A}_{OAB} \leq \mathfrak{A}_{OAC} \leq \mathfrak{A}_{OCB}$$

$$\frac{1}{2} \sin x \leq \frac{1}{2} x \leq \frac{1}{2} \tan x$$

□

Limite notevole II.

$$\frac{\sin \varepsilon_n}{\varepsilon_n}$$

Dim. Mostriamo che se $\delta_n \rightarrow 0$, $\sin \delta_n \rightarrow 0$. Dato che $\delta_n \rightarrow 0$, $\delta_n \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ Definit.. Allora, per il lemma 4.30 si ha che:

$$0 \leq |\sin \delta_n| = \sin |\delta_n| \leq |\delta_n|$$

quindi $\sin |\delta_n| \rightarrow 0$ per confronto.

Dimostriamo ora che se $\delta_n \rightarrow 0$, $\cos \delta_n \rightarrow 0$:

$$\cos \delta_n = \sqrt{1 - \sin^2 \delta_n} \rightarrow \sqrt{1} = 1$$

Infatti $a_n \rightarrow a \implies \sqrt{a_n} \rightarrow \sqrt{a}$.

Si può supporre, senza perdita di generalità, che $\varepsilon_n \in (0, \frac{\pi}{2})$ Definit.. Per il lemma 4.30:

$$\sin \varepsilon_n < \varepsilon_n < \frac{\sin \varepsilon_n}{\cos \varepsilon_n} \implies 1 < \frac{\varepsilon_n}{\sin \varepsilon_n} < \frac{1}{\cos \varepsilon_n}$$

di conseguenza:

$$\cos \varepsilon_n < \frac{\sin \varepsilon_n}{\varepsilon_n} < 1$$

quindi $\frac{\sin \varepsilon_n}{\varepsilon_n} \rightarrow 1$ per confronto. □

Limite notevole III.

$$\frac{\arcsin \varepsilon_n}{\varepsilon_n} \rightarrow 1$$

Dim. Si supponga, senza perdere di generalità, che $\varepsilon_n \in (0, 1)$. Sia $\delta_n = \arcsin \varepsilon_n \implies \varepsilon_n = \sin \delta_n$. Si vuole mostrare che $\delta_n \rightarrow 0$. Si ha che:

$$0 \leq \sin \delta_n \leq \delta_n \leq \frac{\sin \delta_n}{\cos \delta_n} = \frac{\varepsilon_n}{\sqrt{1 - \varepsilon_n^2}} \rightarrow 0$$

quindi $\delta_n \rightarrow 0$ per confronto. Di conseguenza:

$$\frac{\arcsin \varepsilon_n}{\varepsilon_n} = \frac{\delta_n}{\sin \delta_n} = \frac{1}{\frac{\sin \delta_n}{\delta_n}} \rightarrow 1$$

□

Limite notevole IV.

$$\frac{\tan \varepsilon_n}{\varepsilon_n} \rightarrow 1$$

Dim.

$$\frac{\tan \varepsilon_n}{\varepsilon_n} = \frac{\sin \varepsilon_n}{\varepsilon_n} \cdot \frac{1}{\cos \varepsilon_n} \rightarrow 1$$

□

Limite notevole V.

$$\frac{\arctan \varepsilon_n}{\varepsilon_n} \rightarrow 1$$

Dim. Senza perdita di generalità, sia $0 < \varepsilon_n < 1$ Definit.. Sia $\delta_n = \arctan \varepsilon_n \implies \varepsilon_n = \tan \delta_n$. Si vuole mostrare che $\delta_n \rightarrow 0$. Si ha che:

$$0 \leq \sin \delta_n \leq \delta_n \leq \tan \delta_n = \varepsilon_n \rightarrow 0$$

quindi $\delta_n \rightarrow 0$ per confronto. Dunque:

$$\frac{\arctan \varepsilon_n}{\varepsilon_n} = \frac{\delta_n}{\tan \delta_n} = \frac{1}{\frac{\tan \delta_n}{\delta_n}} \rightarrow 1$$

□

Limite notevole VI.

$$\frac{1 - \cos \varepsilon_n}{\varepsilon_n^2} \rightarrow \frac{1}{2}$$

Dim.

$$\frac{1 - \cos \varepsilon_n}{\varepsilon_n^2} = \frac{1 - \cos \varepsilon_n}{\varepsilon_n^2} \frac{1 + \cos \varepsilon_n}{1 + \cos \varepsilon_n} = \frac{1 - \cos^2 \varepsilon_n}{\varepsilon_n^2} \frac{1}{1 + \cos \varepsilon_n} = \left(\frac{\sin \varepsilon_n}{\varepsilon_n} \right)^2 \frac{1}{1 + \cos \varepsilon_n} \rightarrow \frac{1}{2}$$

□

Limite notevole VII.

$$(1 + \varepsilon_n)^{\frac{1}{\varepsilon_n}} \rightarrow e$$

Limite notevole VIII.

$$\frac{\log(1 + \varepsilon_n)}{\varepsilon_n} \rightarrow 1$$

Dim. Per il limite notevole precedente:

$$(1 + \varepsilon_n)^{\frac{1}{\varepsilon_n}} \rightarrow e$$

quindi:

$$\exp\left(\frac{\log(1 + \varepsilon_n)}{\varepsilon_n}\right) \rightarrow e \implies \frac{\log(1 + \varepsilon_n)}{\varepsilon_n} \rightarrow 1$$

□

Limite notevole IX.

$$\frac{e^{\varepsilon_n} - 1}{\varepsilon_n} \rightarrow 1$$

Dim. Sia $\delta_n = e^{\varepsilon_n} - 1 \implies \varepsilon_n = \log(\delta_n + 1)$. Dato che $e^{\varepsilon_n} \rightarrow 1$, $\delta_n \rightarrow 0$. Quindi:

$$\frac{e^{\varepsilon_n} - 1}{\varepsilon_n} = \frac{\delta_n}{\log(\delta_n + 1)} \rightarrow 1$$

□

Limite notevole X.

$$\frac{\sinh \varepsilon_n}{\varepsilon_n} \rightarrow 1$$

Dim.

$$\frac{\sinh \varepsilon_n}{\varepsilon_n} = \frac{e^{\varepsilon_n} - e^{-\varepsilon_n}}{2\varepsilon_n} = \frac{1}{e^{\varepsilon_n}} \frac{e^{2\varepsilon_n} - 1}{2\varepsilon_n} \rightarrow 1$$

□

Limite notevole XI.

$$\frac{\tanh \varepsilon_n}{\varepsilon_n} \rightarrow 1$$

Dim.

$$\frac{\tanh \varepsilon_n}{\varepsilon_n} = \frac{\sinh \varepsilon_n}{\varepsilon_n} \frac{1}{\cosh \varepsilon_n} \rightarrow 1$$

□

Limite notevole XII.

$$\frac{\cosh \varepsilon_n - 1}{\varepsilon_n^2} \rightarrow \frac{1}{2}$$

Dim.

$$\frac{\cosh \varepsilon_n - 1}{\varepsilon_n^2} = \frac{\cosh \varepsilon_n - 1}{\varepsilon_n^2} \cdot \frac{\cosh \varepsilon_n + 1}{\cosh \varepsilon_n + 1} = \frac{\cosh^2 \varepsilon_n - 1}{\varepsilon_n^2} \frac{1}{\cosh \varepsilon_n + 1} = \left(\frac{\sinh \varepsilon_n}{\varepsilon_n} \right)^2 \frac{1}{\cosh \varepsilon_n + 1} \rightarrow \frac{1}{2}$$

□

Limite notevole XIII. *Sia $a \in \mathbb{R}$:*

$$\frac{(1 + \varepsilon_n)^a - 1}{\varepsilon_n} \rightarrow a$$

Dim.

$$\frac{(1 + \varepsilon_n)^a - 1}{\varepsilon_n} = \frac{e^{a \log(1 + \varepsilon_n)} - 1}{a \log(1 + \varepsilon_n)} \frac{\log(1 + \varepsilon_n)}{\varepsilon_n} a \rightarrow a$$

□

Limite notevole XIV. *Sia a_n una successione tale che $a_n \varepsilon_n \rightarrow 0$:*

$$\frac{(1 + \varepsilon_n)^{a_n} - 1}{a_n \varepsilon_n} \rightarrow 1$$

Dim.

$$\frac{(1 + \varepsilon_n)^{a_n} - 1}{a_n \varepsilon_n} = \frac{e^{a_n \log(1 + \varepsilon_n)} - 1}{a_n \log(1 + \varepsilon_n)} \frac{\log(1 + \varepsilon_n)}{\varepsilon_n} \rightarrow 1 \text{ se } a_n \log(1 + \varepsilon_n) \rightarrow 0 \implies a_n \varepsilon_n \rightarrow 0$$

□

4.31 Gerarchie di infinito

Teorema 25 (Teorema del confronto per le successioni). *Sia a_n una successione definitivamente positiva. Sia $l = \lim \frac{a_{n+1}}{a_n}$, si ha che:*

- Se $l > 1$, a_n diverge;
- Se $0 \leq l < 1$, a_n converge;
- Se $l = 1$, il criterio è inconcludente.

Dim.

- Se $l < 1$, $\exists \beta$ t.che $l < \beta < 1$. Si ha che:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \beta \text{ Definit.}$$

$$a_{n+1} \leq \beta a_n \text{ Definit.}$$

$$a_{n+2} \leq \beta a_{n+1} \leq \beta^2 a_n \text{ Definit.}$$

$$0 < a_{n+k} \leq \beta^k a_n \rightarrow 0 \text{ Definit.}$$

quindi $a_{n+k} \rightarrow 0$ per confronto.

- Se $l > 1$, $\exists \beta$ t.che $1 < \beta < l$. Si ha che:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \beta \text{ Definit.}$$

$$a_{n+k} \geq \beta^k a_n \rightarrow +\infty \text{ Definit.}$$

quindi $a_{n+k} \rightarrow +\infty$ per confronto.

□

Notazione 11. $a_n \ll b_n \iff \frac{a_n}{b_n} \rightarrow 0$

Teorema 26 (Gerarchie di infinito). *Siano $p, q, r > 0$, si ha che:*

$$(\log n)^p \ll n^q \ll e^r \ll n! \ll n^n$$

Dim. Dimostriamo il primo, in particolare che:

$$\frac{\log n}{n} \rightarrow 0$$

Sia $q_n = \log n \implies n = e^{q_n} \implies \frac{\log n}{n} = \frac{q_n}{e^{q_n}}$. Si ha che, fissato n :

$$\begin{aligned} \exists k \in \mathbb{Z}^+ : 0 < k \leq q_n \leq k + 1 \\ e^k \leq e^{q_n} \leq e^{k+1} \implies \frac{1}{e^k} \geq \frac{1}{e^{q_n}} \end{aligned}$$

Quindi:

$$\frac{\log n}{n} = \frac{q_n}{e^{q_n}} < \frac{k+1}{e^k} = \frac{k}{e^k} + \frac{1}{e^k}$$

dato che se $n \rightarrow \infty$, $k \rightarrow \infty$, $\frac{\log n}{n} \rightarrow 0$ per confronto. □

4.32 Asintoticità

Definizione 4.33. Due successioni a_n e b_n si dicono **asintotiche** se:

$$\frac{a_n}{b_n} \rightarrow 1$$

Notazione 12. $a_n \sim b_n$

Osservazione 4.34. Se $a_n \sim b_n$, $a_n \neq 0$ Definit., $b_n \neq 0$ Definit..

Proposizione 4.35. Sia A l'insieme delle successioni diverse da 0 definitivamente. Allora l'asintoticità è una relazione d'equivalenza.

Osservazione 4.36.

$$a_n \sim b_n \iff a_n = b_n(1 + \varepsilon_n)$$

Dim.

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{b_n(1 + \varepsilon_n)}{b_n} = 1 + \varepsilon_n \rightarrow 1$$

□

Proposizione 4.37. Sia $a_n \sim b_n$ e c_n una successione diversa da 0 definitivamente. Allora:

- $a_n \cdot c_n \sim b_n \cdot c_n$

- $\frac{a_n}{c_n} \sim \frac{b_n}{c_n}$

Proposizione 4.38. Sia $a_n \sim b_n$ e c_n una successione limitata. Allora:

$$a_n^{c_n} \sim b_n^{c_n}$$

Proposizione 4.39. $a_n \sim b_n \not\Rightarrow a_n + c_n \sim b_n + c_n$

Proposizione 4.40 (Polinomio in n). Sia $p_n = a_1 n^{\alpha_1} + a_2 n^{\alpha_2} + \cdots + a_k n^{\alpha_k}$, con $a_1, a_2, \dots, a_k \in \mathbb{R}_0$ e $\alpha_1 > \alpha_2 > \cdots > \alpha_k$, si ha che:

$$p_n \sim a_1 n^{\alpha_1}$$

Dim.

$$p_n = a_1 n^{\alpha_1} \left(1 + \frac{a_2}{a_1 n^{\alpha_1 - \alpha_2}} + \cdots + \frac{a_k}{a_1 n^{\alpha_1 - \alpha_k}} \right) = a_1 n^{\alpha_1} (1 + \varepsilon_n)$$

A small, empty square box with a black border, likely a placeholder for a figure or diagram.

Osservazione 4.41. I coefficienti a_k possono essere anche successioni limitate.

4.41.1 Formula di De Moivre-Stirling

Teorema 27 (Formula di De Moivre-Stirling).

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \cdot n^n e^{-n}$$

Corollario 4.

$$\log n! \sim n \log n$$

Dim. $n! \rightarrow +\infty$, quindi, usando la formula di Stirling:

$$\log n! \sim \log (\sqrt{2\pi n} \cdot n^n e^{-n}) = \\ = \log \sqrt{2\pi n} + n \log n - n \sim n \log n$$

1

4.42 Continuità per successioni di alcune funzioni

Teorema 28 (Continuità del logaritmo per successioni). *Sia $\{a_n\}$ una successione t.che $a_n > 0$ e $a_n \rightarrow a \in [0, +\infty]$, allora:*

$$\log a_n \rightarrow l = \begin{cases} \log a & \text{se } a \in (0, +\infty) \\ +\infty & \text{se } a = +\infty \\ -\infty & \text{se } a = 0 \end{cases}$$

Il logaritmo si dice continuo per successioni.

Dim. Sia $a \in (0, +\infty)$

$$\begin{aligned}
|\log a_n - \log a| &= \left| \log \left(\frac{a_n}{a} \right) \right| < \varepsilon \iff -\varepsilon < \log \left(\frac{a_n}{a} \right) < \varepsilon \\
&\iff e^{-\varepsilon} < \frac{a_n}{a} < e^\varepsilon \\
&\iff ae^{-\varepsilon} < a_n < ae^\varepsilon \\
&\iff a(e^{-\varepsilon} - 1) < a_n - a < a(e^\varepsilon + 1) \\
&\quad \parallel \qquad \qquad \qquad \parallel \\
&\quad -\beta, \beta > 0 \qquad \qquad \qquad \alpha, \alpha > 0
\end{aligned}$$

dato che $a_n \rightarrow a$:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 : |a_n - a| < \varepsilon \forall n \geq n_0$$

Sia $\delta = \min(\beta, \alpha)$, allora $|a_n - a| < \delta \implies |\log a_n - \log a| < \varepsilon$ \square

Teorema 29 (Continuità dell'esponenziale per successioni). *Sia $\{a_n\}$ una successione t.che e $a_n \rightarrow a \in \bar{\mathbb{R}}$, allora:*

$$e^{a_n} \rightarrow l = \begin{cases} e^a & \text{se } a \in \mathbb{R} \\ +\infty & \text{se } a = +\infty \\ 0 & \text{se } a = -\infty \end{cases}$$

Dim. Sia $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} |e^{a_n} - e^a| < \varepsilon &\iff -\varepsilon < e^{a_n} - e^a < \varepsilon \\ &\iff -\varepsilon + e^a < e^{a_n} < \varepsilon + e^a \end{aligned}$$

senza perdita di generalità, si supponga $-\varepsilon + e^a > 0 \implies \varepsilon < e^a$:

$$\begin{aligned} |e^{a_n} - e^a| < \varepsilon &\iff \log(-\varepsilon + e^a) < a_n < \log(\varepsilon + e^a) \\ &\iff \log(-\varepsilon + e^a) - a < a_n - a < \log(\varepsilon + e^a) - a \\ &\iff \log(-\varepsilon e^{-a} + 1) < a_n - a < \log(\varepsilon e^{-1} + 1) \\ &\quad \parallel \quad \parallel \\ &\quad -\beta, \beta > 0 \quad \quad \quad \alpha, \alpha > 0 \end{aligned}$$

dato che $a_n \rightarrow a$:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 : |a_n - a| < \varepsilon \forall n \geq n_0$$

Sia $\delta = \min(\beta, \alpha)$, allora $|a_n - a| < \delta \implies |e^{a_n} - e^a| < \varepsilon$ \square

Teorema 30 (Continuità per successioni dell'arcotangente). *Sia $a_n \rightarrow a \in \bar{\mathbb{R}}$:*

$$\arctan a_n \rightarrow l = \begin{cases} \arctan a & \text{se } a \in \mathbb{R} \\ \frac{\pi}{2} & \text{se } a \rightarrow +\infty \\ -\frac{\pi}{2} & \text{se } a \rightarrow -\infty \end{cases}$$

4.42.1 Formula di Cesaro

Teorema 31 (Formula di Cesaro). *Sia $\{a_n\}$ una successione e $\sigma_n := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k$ la successione delle medie di a_n . Se $a_n \rightarrow \bar{a} \in \mathbb{R}$, $\sigma_n \rightarrow \bar{a}$.*

Dim.

$$\begin{aligned} |\sigma_n - \bar{a}| &= \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k - \bar{a} \right| = \\ &= \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \bar{a} \right| = \\ &= \frac{1}{n} \left| \sum_{k=1}^n (a_k - \bar{a}) \right| \leqslant \\ &\leqslant \frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^n |a_k - \bar{a}| \right) \end{aligned}$$

Dato che $a_n \rightarrow \bar{a}$:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : |a_n - \bar{a}| < \varepsilon \forall n \geq n_0$$

quindi, fissato $\varepsilon > 0$:

$$\begin{aligned} |\sigma_n - \bar{a}| &\leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |a_k - \bar{a}| = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n_0} |a_k - \bar{a}| + \frac{1}{n} \sum_{k=n_0+1}^n |a_k - \bar{a}| \leq \\ &\leq \frac{1}{n} C + \frac{1}{n} \varepsilon (n - n_0) \end{aligned}$$

con $C \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 : |\sigma_n - \bar{a}| &\leq \frac{C}{n} + \varepsilon \frac{n - n_0}{n} \leq \frac{C}{n} + \varepsilon \quad \forall n \geq n_0 \\ \frac{C}{n} \rightarrow 0 \implies \forall \varepsilon > 0 \exists n_1 \in \mathbb{N} : \frac{C}{n} &\leq \varepsilon \quad \forall n \geq n_1 \\ |\sigma_n - \bar{a}| &\leq 2\varepsilon \quad \forall n \geq \max(n_0, n_1) \end{aligned}$$

□

4.43 Asintotici di esponenziali e logaritmi

Teorema 32. *Siano a_n e b_n due successioni tali che $a_n \sim b_n$, allora:*

$$e^{a_n} \sim e^{b_n}$$

se a_n e b_n sono limitate.

Dim. Si ha che:

$$\frac{e^{a_n}}{e^{b_n}} = e^{a_n - b_n} \rightarrow 1 \iff a_n - b_n \rightarrow 0$$

dato che $\frac{a_n}{b_n} \rightarrow 1$:

$$a_n - b_n = b_n \left(\frac{a_n}{b_n} - 1 \right) \rightarrow 0 \iff b_n \text{ è limitata}$$

\parallel
 ε_n

si può concludere lo stesso per a_n .

□

Teorema 33. *Siano a_n e b_n due successioni tali che $a_n \sim b_n$, allora:*

$$\log a_n \sim \log b_n$$

se $a_n \not\rightarrow 1$, $b_n \not\rightarrow 1$.

Dim. Si ha che:

$$\frac{\log a_n}{\log b_n} = \frac{\log \left(\frac{a_n}{b_n} b_n \right)}{\log b_n} = \frac{\log \frac{a_n}{b_n} + \log b_n}{\log b_n} = 1 + \frac{\log \frac{a_n}{b_n}}{\log b_n} \rightarrow 1 \iff \frac{\log \frac{a_n}{b_n}}{\log b_n} \rightarrow 0$$

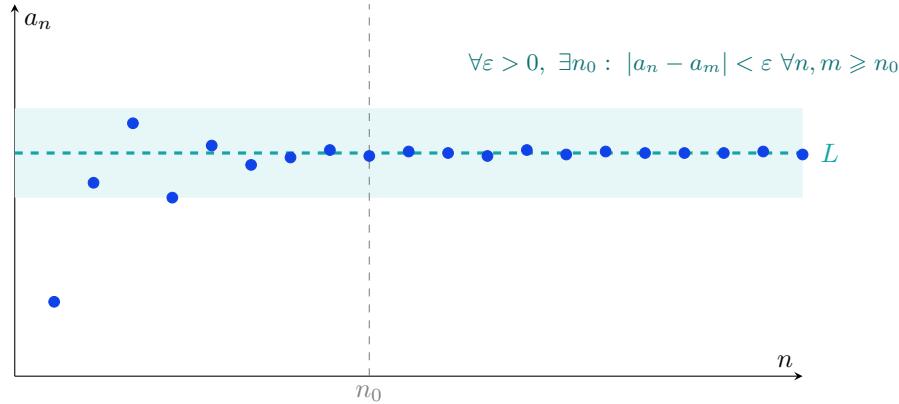
dato che $\frac{a_n}{b_n} \rightarrow 1$, $\log a_n \sim \log b_n$ se $\log b_n \not\rightarrow 0$, $b_n \not\rightarrow 1$. Lo stesso si può dire per a_n .

□

4.44 Successioni di Cauchy

Definizione 4.45. Sia $\{a_n\}$ una successione, $\{a_n\}$ è **di Cauchy** se:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 : |a_m - a_n| < \varepsilon \quad \forall m, n \geq n_0$$



Teorema 34. Se $a_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$, a_n è di Cauchy.

Dim. Dato che $a_n \rightarrow \mathbb{R}$, si ha che:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 : |a_n - l| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$$

quindi, se $n, m \geq n_0$:

$$|a_n - a_m| = |a_n - l + l - a_m| \leq |a_n - l| + |a_m - l| < 2\varepsilon \quad \forall n, m \geq n_0$$

□

Osservazione 4.46. Il viceversa è vero ed equivale alla completezza di \mathbb{R} .

Teorema 35. Se a_n è di Cauchy, a_n è convergente.

Dim. Si inizi dal dimostrare che se a_n è di Cauchy, a_n è limitata. Si vuole mostrare quindi che:

$$\exists M > 0 \quad |a_n| \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

dato che a_n è di Cauchy:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : |a_n - a_m| < \varepsilon \quad \forall n, m \geq n_0$$

si fissi $\varepsilon > 0$ e quindi n_0 . $\{a_0, a_1, \dots, a_{n_0}\}$ è un insieme finito, quindi ammette massimo. Sia $M = \max \{a_0, a_1, \dots, a_{n_0}\}$, senza perdità di generalità si supponga $n > m$ e si fissi m :

$$-\varepsilon < a_n - a_m < \varepsilon \implies -\varepsilon + a_n < a_n < \varepsilon + a_m$$

dato che m dipende da n_0 e n_0 dipende da ε , m dipende da ε . Quindi:

$$a_n < \max(M, \varepsilon + a_m)$$

ossia a_n è superiormente limitata. Si può procedere in modo analogo dimostrando che è inferiormente limitata.

Dato che a_n è limitata, per il teorema di Bolzano-Weierstrass ammette una sottosuccessione a_{n_k} convergente. Sia $a_{n_k} \rightarrow l \in \mathbb{R}$, allora:

$$|a_n - l| = |a_n - a_{n_k} + a_{n_k} - l| \leq |a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k} - l|$$

dato che $a_{n_k} \rightarrow l$:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : |a_{n_k} - l| < \varepsilon \forall n \geq n_0$$

e dato che a_n è di Cauchy:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : |a_n - a_m| < \varepsilon \forall n, m \geq n_0$$

detto $m = n_k$:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : |a_n - a_{n_k}| < \varepsilon \forall n, n_k \geq n_0$$

quindi:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : |a_n - l| < \varepsilon \forall n \geq n_0$$

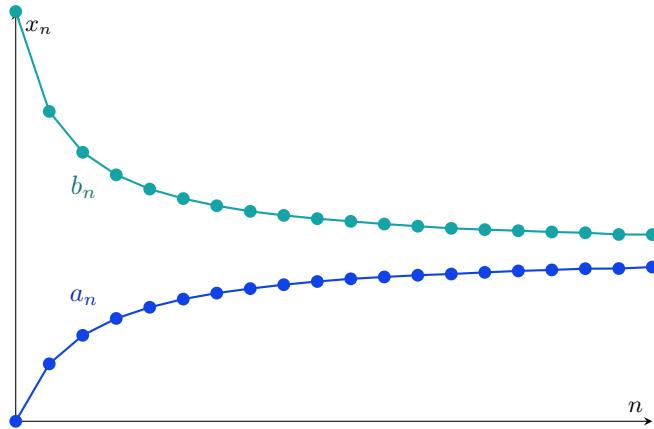
□

Teorema 36. *Siano $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ due successioni tali che:*

- $a_n \leq b_n$
- $a_n \uparrow, b_n \downarrow$
- $0 \leq b_n - a_n \rightarrow 0$

allora $a_n \rightarrow l \in \mathbb{R}, b_n \rightarrow l$ e:

$$\begin{aligned} |a_n - l| &\leq |a_n - b_k| \quad \forall k \in \mathbb{N} \\ |b_n - l| &\leq |a_k - b_n| \quad \forall k \in \mathbb{N} \end{aligned}$$



Dim. Dato che $a_n \leq b_n$, a_n è superiormente limitata e b_n è inferiormente limitata. Inoltre, dato che a_n è crescente, a_n è inferiormente limitata, mentre b_n è superiormente limitata. Dato che a_n e b_n sono monotone e limitate, convergono. Sia $a_n \rightarrow a$ e $b_n \rightarrow b$ e $a \neq b$, allora:

$$0 \leq |a - b| = |a - a_n + a_n - b_n + b_n - b| \leq |a - a_n| + |a_n - b_n| + |b_n - b|$$

ma, dato che $a_n \rightarrow a$, $b_n \rightarrow b$ e $|a_n - b_n| \rightarrow 0$, i tre termini tendono a zero, quindi:

$$0 \leq \lim |a - b| \leq 0$$

quindi $a - b = 0$, $a = b := l$.

Dato che $b_n \downarrow l$, $b_k \geq l \forall k$. Allo stesso modo $a_n \leq l \forall n$. Dunque:

$$|a_n - b_k| = |a_n - l| + |b_k - l| \geq |a_n - l|$$

□

4.47 Spazi metrici

Definizione 4.48. Siano X un insieme e $d : X \times X \rightarrow [0, +\infty)$. (X, d) è uno spazio metrico se:

- $d(x, y) = 0 \iff x = y \quad \forall x, y \in X$
- $d(x, y) = d(y, x) \quad \forall x, y \in X$ (simmetria)
- $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \quad \forall x, y, z \in X$ (diseguaglianza triangolare)

Esempio 4.49. $X = \mathbb{R}$, $d(x, y) = |x - y|$

Definizione 4.50. Uno spazio metrico (X, d) è **completo** se le successioni di Cauchy in (X, d) sono convergenti.

Chapter 5

Serie numeriche

5.1 Introduzione

Definizione 5.2. Data una successione $\{a_n\}$, si construisca la successione $\{s_n\}$ (detta delle somme parziali):

$$s_n := a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{k=0}^n a_k$$

Definiamo **serie** di termine generale a_n il limite $\sum_{n=0}^{\infty} a_n := \lim s_n$.

- Se $\lim s_n = s \in \mathbb{R}$, diciamo che la serie **converge**;
- Se $\lim s_n = \pm\infty$, diciamo che la serie **diverge**;
- Se $\nexists \lim s_n$, diciamo che la serie è **oscillante**.

Notazione 13. $\lim s_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum_n a_n$, $\sum a_n$

Proposizione 5.3 (Problema di Basilea). $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge. In particolare:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Proposizione 5.4. Sia $k \in \mathbb{R}$, $\sum k a_n = k \sum a_n$

Dim.

$$\sigma_n = k a_0 + k a_1 + \cdots + k a_n = k(a_0 + a_1 + \cdots + a_n) = k s_n$$

□

Proposizione 5.5. Siano $\sum a_n$ e $\sum b_n$ due serie convergenti $\implies \sum(a_n + b_n)$ converge e $\sum(a_n + b_n) = \sum a_n + \sum b_n$

Dim. Sia $s_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$ e $\sigma_n = b_0 + b_1 + \cdots + b_n$.

$$\begin{aligned} s_n + \sigma_n &= a_0 + a_1 + \cdots + a_n + b_0 + b_1 + \cdots + b_n \\ \sum(a_n + b_n) &= \lim(s_n + \sigma_n) = \lim s_n + \lim \sigma_n = \sum a_n + \sum b_n \end{aligned}$$

□

Osservazione 5.6. Lo stesso si può estendere a serie divergenti utilizzando l'aritmetica estesa.

Teorema 37. Il carattere di una serie non cambia se si modificano un numero finito di termini.

Dim. Siano $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ due successioni tali che $a_n = b_n \forall n \geq n_0 \in \mathbb{N}$.

$$s_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_{n_0} + \cdots + a_n$$

$$\sigma_n = b_0 + b_1 + \cdots + b_{n_0} + \cdots + b_n$$

$$s_n - \sigma_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_{n_0} - b_0 - b_1 - \cdots - b_{n_0} = k \in \mathbb{R}$$

$$s_n = k + \sigma_n \implies \lim s_n = \lim \sigma_n + \lim k = \lim \sigma_n + k$$

□

Teorema 38 (Criterio di Cauchy). Una serie $\sum a_n$ converge se e solo se:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : \left| \sum_{k=n}^{n+p} a_k \right| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0 \quad \forall p \geq 0$$

Dim. Sia s_n la successione delle somme parziali. s_n converge $\iff s_n$ è di Cauchy \implies

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : |s_m - s_n| < \varepsilon \quad \forall m, n \geq n_0$$

equivalentemente:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : |s_{n+p} - s_{n-1}| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0 \quad \forall p \geq 0$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : \left| \sum_{k=0}^{n+p} a_k - \sum_{k=0}^{n-1} a_k \right| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0 \quad \forall p \geq 0$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : \left| \sum_{k=n}^{n+p} a_k \right| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0 \quad \forall p \geq 0$$

□

Teorema 39 (Condizione necessaria di convergenza). Se $\sum a_n$ converge, allora $a_n \rightarrow 0$.

Dim. Sia $s_n = a_0 + a_1 + \dots + a_n$:

$$s_n - s_{n-1} = a_n$$

Se $s_n \rightarrow s \in \mathbb{R}$, $s_{n-1} \rightarrow s$ (sottosuccessione di una successione convergente). Quindi:

$$\lim(s_n - s_{n-1}) = \lim s_n - \lim s_{n-1} = s - s = 0 = \lim a_n \implies a_n \rightarrow 0$$

□

Osservazione 5.7. L'inverso non vale.

5.8 Serie telescopiche

Sia $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$, con $a_n = b_n - b_{n+1}$, la serie $\sum a_n$ è detta serie telescopica

Sia $s_n = a_{n_0} + a_{n_0+1} + \dots + a_n$, si ha che:

$$\begin{aligned} s_n &= b_{n_0} - \cancel{b_{n_0+1}} + \cancel{b_{n_0+1}} - \cancel{b_{n_0+2}} + \cancel{b_{n_0+2}} - \dots - b_{n+1} = \\ &= b_{n_0} - b_{n+1} \end{aligned}$$

quindi:

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n = \lim s_n = \lim(b_{n_0} - b_{n+1}) = b_{n_0} - \lim b_n$$

5.8.1 Serie di Mengoli

Caso particolare di una serie telescopica è la serie di Mengoli, il cui termine generale è $a_n = \frac{1}{n(n+1)}$

5.9 Serie a termini positivi

Definizione 5.10. Una serie $\sum a_n$ si dice a **termini positivi** se $a_n \geq 0 \forall n$

Teorema 40. Una serie a termini positivi è regolare (o diverge o converge).

Dim. Dato che $a_n \geq 0 \forall n$, s_n è una successione monotona crescente (somma di termini positivi o nulli). Quindi la successione s_n è regolare. \square

Osservazione 5.11. Se $\sum a_n$ è a termini positivi e $a_n \not\rightarrow 0$, $\sum a_n = +\infty$

Teorema 41 (Teorema del confronto). Siano $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ due successioni tali che $0 \leq a_n \leq b_n \forall n$. Si ha che:

- Se $\sum a_n$ diverge, $\sum b_n$ diverge;
- Se $\sum b_n$ converge, $\sum a_n$ converge.

Dim. Siano $s_n = a_0 + a_1 + \dots + a_n$ e $\sigma_n = b_0 + b_1 + \dots + b_n$, si ha che:

$$0 \leq s_n \leq \sigma_n \quad \forall n$$

- Se $s_n \rightarrow +\infty$, $\sigma_n \rightarrow +\infty$ per il teorema del confronto per le successioni;
- Se $\sigma_n \rightarrow \sigma \in \mathbb{R}$, allora:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : -\varepsilon + \sigma < \sigma_n < \varepsilon + \sigma \quad \forall n \geq n_0$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : 0 < s_n \leq \sigma_n < \varepsilon + \sigma \quad \forall n \geq n_0$$

Quindi s_n è limitata e monotona e dunque converge.

\square

Osservazione 5.12. Se $0 \leq a_n \leq b_n$ e $\sum b_n$ converge $\implies \sum a_n \leq \sum b_n$ (teorema della permanenza del segno).

Corollario 5 (Teorema del panino imbottito). Siano $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ due successioni positive. Se $\exists M, N \in \mathbb{R}$, con $N \leq M$: $Na_n \leq b_n \leq Ma_n$, allora

$$\sum a_n \text{Conv.} \iff \sum b_n \text{Conv.}$$

5.13 Serie geometrica

Si definisce serie geometrica la serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n$$

con $q \in \mathbb{R}$. Detta s_n la successione delle somme parziali, si ha che:

$$\begin{aligned} s_n &= q^0 + q^1 + \cdots + q^n \\ q \cdot s_n &= q^1 + q^2 + \cdots + q^{n+1} \\ s_n - q \cdot s_n &= q^0 + q^1 - q^2 + q^3 - q^4 + \cdots - q^{n+1} \\ s_n &= \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}, \quad q \neq 1 \end{aligned}$$

Di conseguenza, si ottiene che:

$$s_n = \begin{cases} n+1 & \text{se } q = 1 \\ \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} & \text{se } q \neq 1 \end{cases}$$

quindi:

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \lim s_n = \begin{cases} +\infty & \text{se } q \geq 1 \\ \frac{1}{1-q} & \text{se } |q| < 1 \\ \text{non esiste} & \text{se } q \leq -1 \end{cases}$$

5.14 Rappresentazione decimale dei reali

Sia $a \in \mathbb{R} \cap (0, 1)$, a può essere scritto come:

$$a = 0.a_1 a_2 a_3 \dots$$

dove a_i è una cifra tra 0 e 9. Quindi a_n (a troncato all' n -esima cifra) può essere scritto come:

$$a_n = \sum_{k=1}^n a_k \frac{1}{10^k}$$

Proposizione 5.15. a_n converge.

Dim. Sia $\alpha_k := a_k \frac{1}{10^k}$. Si ha che:

$$0 \leq a_k \leq 9 \implies 0 \leq \alpha_k \leq 9 \frac{1}{10^k}$$

quindi $\sum \alpha_k$ converge per confronto con una serie geometrica di ragione $\frac{1}{10}$. \square

Proposizione 5.16. $0.\bar{9} = 1$

Dim. Si ha che:

$$\begin{aligned}
0.\bar{9} &= \sum_{n=1}^{+\infty} 9 \frac{1}{10^n} = 9 \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{10} \right)^n - 9 = \\
&= 9 \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} - 9 = \\
&= 9 \frac{10}{10 - 1} - 9 = 1
\end{aligned}$$

□

5.17 Serie armonica

Si definisce serie armonica la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

Teorema 42.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$$

Dim. I. P.A. si supponga che $\sum \frac{1}{n} = l \in \mathbb{R}$. Sia s_n la successione delle somme parziali:

$$s_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \rightarrow l$$

si consideri s_{2n}

$$s_{2n} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n}$$

a sua volta, $s_{2n} \rightarrow l$. Quindi:

$$s_{2n} - s_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \geq n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$$

Quindi $s_{2n} - s_n \geq \frac{1}{2}$, ma $s_{2n} - s_n \rightarrow 0$, quindi $s_{2n} - s_n < \frac{1}{2}$ definitivamente. □

Lemma 5.18.

$$\sum_{k=1}^n \log \left(1 + \frac{1}{k} \right) = \log (1+n)$$

Dim. II.

$$\log \left(1 + \frac{1}{k} \right) = \log \left(\frac{k+1}{k} \right) = \log (k+1) - \log (k)$$

tale è il termine generale di una serie telescopica. Quindi si ha che:

$$\sum_{k=1}^n \log \left(1 + \frac{1}{k} \right) = -\log (1) + \log (2) - \log (2) + \cdots + \log (n+1) = \log (n+1)$$

□

Dim. II. Per la monotonia della successione e_n , si ha che:

$$\left(1 + \frac{1}{k}\right)^k < e \quad \forall k \in \mathbb{N}_0$$

Dato che $a \leq b \implies \log(a) \leq \log(b)$, si trova:

$$k \log\left(1 + \frac{1}{k}\right) < 1 \implies \log\left(1 + \frac{1}{k}\right) < \frac{1}{k} \quad \forall k \in \mathbb{N}_0$$

quindi $\sum \frac{1}{n} = +\infty$ per il teorema del confronto. \square

5.19 Formula di Eulero-Mascheroni

Proposizione 5.20. *Sia s_n la successione delle somme parziali della serie armonica:*

$$s_n - \log n \rightarrow \gamma$$

dove γ è la costante di Eulero-Mascheroni:

$$\gamma = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n} - \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) \right] \simeq 0.5772$$

Teorema 43 (Formula di Eulero-Mascheroni).

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \sim \log n$$

5.21 Serie armonica generalizzata

Chiamiamo serie armonica generalizzata la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$$

con $\alpha \in \mathbb{R}$.

Teorema 44. *La serie armonica:*

- Converge se $\alpha > 1$;
- Diverge se $\alpha \leq 1$.

Dim.

- Si consideri il caso $\alpha \geq 2$. Si ha che:

$$\frac{1}{n^\alpha} \leq \frac{1}{n^2}$$

quindi $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge per confronto con una serie convergente.

- Si consideri ora il caso $\alpha \leq 1$. In tal caso si ha che:

$$\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n^\alpha}$$

quindi $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ diverge per confronto.

- Il caso $1 < \alpha < 2$ non sarà trattato.

\square

5.22 Criterio del confronto asintotico

Teorema 45. Siano $\sum a_n$ e $\sum b_n$ due serie a termini positivi. Se $a_n \sim b_n$, $\sum a_n$ e $\sum b_n$ hanno lo stesso carattere.

Dim. Dato che $a_n \sim b_n$, si ha che:

$$\begin{aligned} \lim \frac{a_n}{b_n} = 1 &\implies \forall \varepsilon > 0 \quad -\varepsilon + 1 < \frac{a_n}{b_n} < \varepsilon + 1 \text{ Definit.} \\ &\implies b_n(-\varepsilon + 1) < a_n < b_n(\varepsilon + 1) \text{ Definit.} \\ &\implies -\varepsilon + 1 > 0 \text{ Definit.} \wedge -\varepsilon + 1 < \varepsilon + 1 \end{aligned}$$

Quindi $\sum a_n$ e $\sum b_n$ hanno lo stesso carattere per il *teorema del panino imbottito*. \square

5.23 Serie campione

Definiamo serie campione la serie:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha} (\log n)^{\beta}}$$

con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Teorema 46. La serie campione:

- Se $\alpha > 1$, converge $\forall \beta$
- Se $\alpha < 1$, diverge $\forall \beta$
- Se $\alpha = 1$, converge se $\beta > 1$
- Se $\alpha = 1$, diverge se $\beta \leq 1$

5.24 Criteri del rapporto e della radice

Teorema 47 (Criterio del rapporto per le serie). Sia $\sum a_n$ una serie a termini positivi e sia $l = \lim \frac{a_{n+1}}{a_n}$:

- Se $l > 1$, $\sum a_n$ diverge;
- Se $l < 1$, $\sum a_n$ converge;
- Se $l = 1$, il criterio è inoncludente.

Teorema 48 (Criterio della radice per le serie). Sia $\sum a_n$ una serie a termini positivi e sia $l = \lim \sqrt[n]{a_n}$:

- Se $l > 1$, $\sum a_n$ diverge;
- Se $l < 1$, $\sum a_n$ converge;
- Se $l = 1$, il criterio è inoncludente.

Dim.

- Se $l < 1$, sia $l < \beta < 1$. Si ha che:

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{a_n} &< \beta \text{ Definit.} \\ a_n &< \beta^n \text{ Definit.} \end{aligned}$$

dato che $\beta < 1$, $\sum \beta^n$ converge, quindi $\sum a_n$ a sua volta converge per il criterio del confronto.

- Se $l > 1$:

$$\sqrt[n]{a_n} > 1 \text{ Definit.}$$

$$a_n > 1 \text{ Definit.}$$

dato che $a_n > 1$ Definit., $a_n \not\rightarrow 0$, quindi diverge.

□

5.25 Serie fattoriale

Si definisce serie fattoriale la serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

Teorema 49. *La serie fattoriale converge.*

Dim. $\frac{1}{n!} < \frac{1}{n^2}$ Definit. \implies la serie converge per confronto. □

Si ha inoltre che:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Teorema 50. *Sia $e_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$, allora:*

$$0 < e - e_n < \frac{1}{n \cdot n!} \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$$

Dim. Dato che $e_n \uparrow e$, $e_n < e \implies 0 < e - e_n$

$$\begin{aligned} e - e_n &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!} = \\ &= \left[\frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \frac{1}{(n+3)!} + \dots \right] = \\ &= \frac{1}{(n+1)!} \left[1 + \frac{1}{(n+2)} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \dots \right] < \\ &< \frac{1}{(n+1)!} \left[1 + \frac{1}{(n+1)} + \frac{1}{(n+1)^2} + \dots \right] = \\ &= \frac{1}{(n+1)!} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n+1} \right)^j = \frac{1}{(n+1)!} \frac{1}{1 - \frac{1}{n+1}} = \\ &= \frac{1}{(n+1)n!} \frac{n+1}{n+1-1} = \frac{1}{n \cdot n!} \end{aligned}$$

□

Osservazione 5.26.

$$n! \cdot e_n \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$$

Dim.

$$n! \cdot e_n = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!}$$

$\frac{n!}{k!}$ è un intero (dato che $n \geq k$). □

Teorema 51. $e \notin \mathbb{Q}$

Dim. P.A. si supponga che $e \in \mathbb{Q}$ e che quindi $e = \frac{m}{k}$, con $m, k \in \mathbb{Z}^+$ coprimi. Per la diseguaglianza precedentemente dimostrata, si ha che:

$$0 < e - e_k < \frac{1}{k \cdot k!} \implies 0 < \frac{m}{k} - e_k < \frac{1}{k \cdot k!}$$

quindi, moltiplicando per $n!$:

$$0 < m(k-1)! - e_k \cdot k! < \frac{1}{k} \leq 1$$

detto $p = m(k-1)! - e_k \cdot k!$, si ha che $p \in \mathbb{Z}$ (differenza di due interi). Quindi $0 < p < 1$, $p \in \mathbb{Z}$, che è un assurdo. □

5.27 Criterio di Leibniz

Teorema 52. Sia $\sum a_n = \sum (-1)^n \cdot b_n$ una serie a segno alterno, se:

- $b_n \geq 0$
- $b_{n+1} \leq b_n$
- $b_n \rightarrow 0$

o, equivalentemente $b_n \downarrow 0$, allora $\sum a_n$ converge.

Dim. Si considerino i termini della successione delle somme parziali con n pari o nullo:

$$s_0 = b_0, \quad s_2 = b_0 - b_1 + b_2 = b_0 - (b_1 - b_2), \quad s_4 = b_0 - (b_1 - b_2) - (b_3 - b_4)$$

dato che b_n è decrescente, i termini $b_1 - b_2, b_3 - b_4$ ecc. sono negativi, e quindi s_{2n} è decrescente. Si considerino ora i termini ad indice dispari:

$$s_1 = b_0 - b_1, \quad s_3 = (b_0 - b_1) + (b_2 - b_3), \quad s_5 = (b_0 - b_1) + (b_2 - b_3) + (b_4 - b_5)$$

nuovamente, dato che b_n è decrescente, i termini $b_0 - b_1, b_2 - b_3, b_4 - b_5$ ecc. sono positivi, quindi s_{2n+1} è crescente.

Inoltre, si ha che $s_{2n} \geq s_{2n+1}$ e $s_{2n} - s_{2n+1} \rightarrow 0$. Quindi, per un teorema noto si ha che $\exists l \in \mathbb{R}$:

$$s_{2n} \rightarrow l, \quad s_{2n+1} \rightarrow l$$

e di conseguenza:

$$s_n \rightarrow l$$

□

Osservazione 5.28. È sufficiente che $b_n \downarrow$ Definit.

5.29 Criterio di Dirichlet

Teorema 53. Sia $\sum c_n = \sum a_n \cdot b_n$. Dotta A_n la successione delle somme parziali di a_n , se $b_n \downarrow 0$ e A_n è limitata, $\sum c_n$ converge.

5.30 Convergenza assoluta

Definizione 5.31. Data una serie $\sum a_n$, diciamo che essa converge **assolutamente** se la serie $\sum |a_n|$ converge.

Teorema 54. Se una serie converge assolutamente, allora converge.

Dim. Sia $\sum a_n$ t.che $\sum |a_n|$ converge. Sia $b_n = a_n + |a_n|$, si ha che:

$$0 \leq b_n \leq 2|a_n|$$

quindi b_n converge per confronto. Inoltre:

$$a_n = b_n - |a_n| \implies \sum a_n = \sum (b_n - |a_n|) = \sum b_n + \sum -|a_n|$$

Dato che $\sum b_n$ e $\sum -|a_n|$ convergono, $\sum a_n$ converge. \square

Osservazione 5.32. Il viceversa è falso. Infatti $\sum \frac{1}{n}$ diverge, mentre $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ converge.

5.33 Riordinamenti

Definizione 5.34. Sia $\{a_n\}$ una successione, b_n è un **riordinamento** di a_n se $b_n = a_{k(n)}$, dove $k : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ è una funzione biunivoca.

Definizione 5.35. Sia $\sum a_n$ una serie, $\sum b_n$ è un **riordinamento della serie** $\sum a_n$ se b_n è un riordinamento di a_n .

Definizione 5.36. Una serie $\sum a_n$ converge **incondizionatamente** se tutti i riordinamenti di $\sum a_n$ convergono.

Teorema 55 (Riemann-Dini).

- Se $\sum a_n$ converge assolutamente, allora $\sum a_n$ converge incondizionatamente.
- Se $\sum a_n$ converge, ma non converge assolutamente, allora $\forall l \in \overline{\mathbb{R}}$ esiste un riordinamento $\sum b_n$ t.che $\sum b_n = l$.

Osservazione 5.37. Sia $\sum a_n$ una serie a termini positivi. Se $\sum a_n$ converge, converge incondizionatamente.

5.38 Funzione Zeta di Riemann

Definizione 5.39 (Funzione Zeta di Riemann). Si definisce la funzione **Zeta di Riemann**:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

Osservazione 5.40.

$$\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Proposizione 5.41.

$$\zeta(2n) = 2^{2n-1} \frac{\pi^{2n} |B_{2n}|}{(2n)!}$$

dove B_n è l' n -esimo numero di Bernoulli.

Chapter 6

Funzioni Reali

6.1 Topologia

Definizione 6.2. Sia $x \in \overline{\mathbb{R}}$, si definisce *intorno* $\mathcal{U}(x)$ di x :

$$\mathcal{U}(x) = \begin{cases} (x - \varepsilon, x + \varepsilon) & (\varepsilon > 0) \text{ se } x \in \mathbb{R} \\ (M, +\infty) & (M > 0) \text{ se } x = +\infty \\ (-\infty, -M) & (M > 0) \text{ se } x = -\infty \end{cases}$$

Definizione 6.3. Sia $x \in \overline{\mathbb{R}}$, si definisce *intorno bucato* $\dot{\mathcal{U}}(x)$ di x :

$$\dot{\mathcal{U}}(x) = \begin{cases} \mathcal{U}(x) \setminus \{x\} & \text{se } x \in \mathbb{R} \\ \mathcal{U}(x) & \text{se } x = \pm\infty \end{cases}$$

Osservazione 6.4. $x_n \rightarrow x \iff \forall \mathcal{U}(x) \text{ si ha che } x_n \in \mathcal{U}(x)$ Definit.

Definizione 6.5 (Punto di accumulazione). Un punto $x \in \overline{\mathbb{R}}$ è detto **punto di accumulazione** di un insieme $A \subset \mathbb{R}$ se:

$$\forall \mathcal{U}(x) \quad \dot{\mathcal{U}}(x) \cap A \neq \emptyset$$



Teorema 56. $x \in \overline{\mathbb{R}}$ è un punto di accumulazione di $A \iff \exists \{a_n\}, a_n \neq x \ \forall n \in \mathbb{N} : a_n \rightarrow x$.

Dim.

- ($\Leftarrow, x \in \mathbb{R}$): per ipotesi, si ha che $a_n \rightarrow x$. Quindi, per definizione di limite,

$$\forall \mathcal{U}(x) \ \exists n_0 \in \mathbb{N} : a_n \in \mathcal{U}(x) \ \forall n \geq n_0$$

quindi:

$$\forall \mathcal{U}(x) \quad \dot{\mathcal{U}}(x) \cap A \neq \emptyset$$

- ($\Rightarrow, x \in \mathbb{R}$): per ipotesi, si ha che, fissato $\mathcal{U}(x)$:

$$\dot{\mathcal{U}}(x) \cap A \neq \emptyset$$

Sia:

$$\mathcal{U}(x) = \left(x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n} \right)$$

allora:

$$\exists a_n \in A : a_n \neq x \wedge a_n \in \mathcal{U}(x)$$

$$0 < |a_n - x| < \frac{1}{n}$$

quindi $a_n \rightarrow x$ per confronto.

□

Corollario 6. Se x è un punto di accumulazione di A , si ha che $\dot{\mathcal{U}}(x) \cap A$ contiene infiniti elementi.

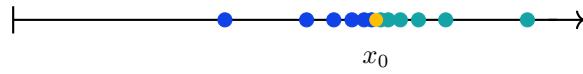
Definizione 6.6 (Punto isolato). Dato un insieme $A \subset \mathbb{R}$, $x \in A$ è un **punto isolato** di A se:

$$\exists \mathcal{U}(x) : \mathcal{U}(x) \cap A = \{x\}$$



Definizione 6.7 (Punto di frontiera). Dato $x \in \mathbb{R}$ e $A \subset \mathbb{R}$, x è un **punto di frontiera** di A se:

$$\forall \mathcal{U}(x) \quad \mathcal{U}(x) \cap A \neq \emptyset \quad \wedge \quad \mathcal{U}(x) \cap A^C \neq \emptyset$$



Osservazione 6.8. I punti isolati sono punti di frontiera banali

Definizione 6.9 (Punto interno). Sia $A \subset \mathbb{R}$, $x \in A$ è un **punto interno** di A se:

$$\exists \mathcal{U}(x) : \mathcal{U}(x) \subset A$$



Definizione 6.10 (Insieme aperto). $A \subset \mathbb{R}$ si definisce **aperto** se ogni $a \in A$ è punto interno di A .

Definizione 6.11 (Insieme chiuso). $A \subset \mathbb{R}$ si definisce **chiuso** contiene tutti i suoi punti di accumulazione finiti.

Esempio 6.12.

- $\{a\}$ è chiuso
- \mathbb{R} e \emptyset sono sia aperti che chiusi

Teorema 57. Un insieme A è aperto $\iff A^C$ è chiuso.

Dim.

□

Teorema 58. Un insieme A è chiuso \iff Se $\forall a_n \in A$ t.che $a_n \rightarrow x$ $x \in A$.

Dim.

□

Definizione 6.13 (Compattezza sequenziale). Un insieme $A \subset \mathbb{R}$ si definisce **compatto** se $\forall a_n \in A \exists x \in A$ ed esiste una sottosuccessione $a_{n_k} \rightarrow x$

Teorema 59 (Heine-Borel). Un insieme $A \subset \mathbb{R}$ è compatto $\iff A$ è chiuso e limitato.

Dim.

- (\Leftarrow): Sia $x_n \in A$. Dato che A è limitato, x_n è limitata. Quindi per il teorema di Bolzano-Weierstrass, $\exists x_{n_k} : x_{n_k} \rightarrow x \in \mathbb{R}$. Quindi x è un punto di accumulazione di A . Dato che A è chiuso, contiene tutti i suoi punti di accumulazione, quindi $x \in A$.

- (\Rightarrow):

□

6.14 Limiti

6.14.1 Introduzione

Definizione 6.15 (Limite). Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ di dominio \mathfrak{D} e sia $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ un punto di accumulazione di \mathfrak{D} , si dice che f ammette **limite** uguale a $l \in \overline{\mathbb{R}}$ per x che tende a x_0 se:

$$\forall \mathcal{U}(l) \exists \mathcal{U}(x_0) : \text{se } x \in \mathfrak{D} \cap \dot{\mathcal{U}}(x_0) \implies f(x) \in \mathcal{U}(l)$$

Notazione 14. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$, $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} l$

Definizione 6.16 (Limite successionale). Data $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ di dominio \mathfrak{D} , si dice che f ammette **limite successionale** uguale a $l \in \overline{\mathbb{R}}$ per x che tende a x_0 se:

$$\forall a_n \in \mathfrak{D} : a_n \neq x_0, a_n \rightarrow x_0 \quad f(a_n) \rightarrow l$$

Notazione 15. $\underset{x \rightarrow x_0}{\text{s-lim}} f(x) = l$

Teorema 60 (Teorema traghettatore). $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \iff \underset{x \rightarrow x_0}{\text{s-lim}} f(x) = l$

Dim.

- (\Rightarrow): per ipotesi, fissato $\mathcal{U}(l)$:

$$\exists \mathcal{U}(x_0) : \text{se } x \in \mathfrak{D} \cap \dot{\mathcal{U}}(x_0) \implies f(x) \in \mathcal{U}(l)$$

sia $a_n \in \mathfrak{D}$ t.che $a_n \neq x_0$, $a_n \rightarrow x_0$, si ha che:

$$a_n \in \dot{\mathcal{U}}(x_0) \text{ Definit.}$$

quindi:

$$f(a_n) \in \mathcal{U}(l) \text{ Definit.}$$

- (\Leftarrow): per l'implicazione inversa si mostrerà che $\neg \text{Th.} \implies \neg \text{Hp.}$
La negazione della tesi è:

$$\exists \mathcal{U}(l) : \forall \mathcal{U}(x_0) \exists x \in \mathfrak{D} \cap \dot{\mathcal{U}}(x_0) : f(x) \notin \mathcal{U}(l)$$

mentre la negazione dell'ipotesi è:

$$\exists a_n \in \mathfrak{D}, a_n \neq x_0, a_n \rightarrow x_0 : f(a_n) \not\rightarrow l$$

sia $\mathcal{U}(x_0) = \left(x_0 - \frac{1}{n}, x_0 + \frac{1}{n}\right)$, fissato $n \in \mathbb{N}$ $\exists a_n \in \mathfrak{D} \cap \dot{\mathcal{U}}(x_0)$: $f(a_n) \notin \mathcal{U}(l) \implies f(a_n) \not\rightarrow l$. La possibilità di costruire a_n è garantita dall'assioma della scelta.

□

6.16.1 Teoremi sui limiti

Molti dei teoremi sui limiti di successioni hanno una "controparte" per i limiti di funzioni reali ottenibili tramite il teorema traghettatore.

Teorema 61 (Unicità del limite).

Teorema 62 (Permanenza del segno).

Teorema 63 (Teorema del confronto).

Teorema 64 (Operazioni con i limiti).

Osservazione 6.17. Siano f e g due funzioni reali, se x_0 è punto di accumulazione di $\mathfrak{D}(f)$ e $\mathfrak{D}(g)$, non è detto che sia punto di accumulazione di $\mathfrak{D}(f+g)$.

Esempio 6.18. $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = \sqrt{-x}$, $x_0 = 0$

Definizione 6.19 (\diamond). Dato $A \subset \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$ è **punto di accumulazione destro** di A se:

$$\forall \mathcal{U}(x) \dot{\cup}(x) \cap A \cap (x, +\infty) \neq \emptyset$$

Definizione 6.20 (\diamond). Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ di dominio \mathfrak{D} e x_0 un punto di accumulazione destro di \mathfrak{D} , f ha **limite destro** l per x che tende a x_0 se:

$$\forall a_n \in \mathfrak{D} : a_n > x_0 \wedge a_n \rightarrow x_0 \implies f(a_n) \rightarrow l$$

Notazione 16 (\diamond). $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = l$

Definizione 6.21. x_0 è un **punto di accumulazione bilatero** di A se è un sia un punto di accumulazione destro che un punto di accumulazione sinistro di A .

Osservazione 6.22. Se x_0 è un punto di accumulazione bilatero:

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \iff \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$$

6.22.1 Continuità

Definizione 6.23 (Continuità). Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione di dominio \mathfrak{D} e sia $x_0 \in \mathfrak{D}$, f è **continua** in x_0 se:

$$\forall \mathcal{U}(f(x_0)) \exists \mathcal{U}(x_0) : \text{se } x \in \mathfrak{D} \cap \mathcal{U}(x_0) \implies f(x) \in \mathcal{U}(f(x_0))$$

Osservazione 6.24. La definizione è equivalente a dire che:

- Se x_0 è un punto di accumulazione di \mathfrak{D} , allora $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$
- Se x_0 è un punto isolato di \mathfrak{D} , allora f è continua in x_0

Definizione 6.25 (Continuità successionale). Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione di dominio \mathfrak{D} e sia $x_0 \in \mathfrak{D}$, f è **continua per successioni** in x_0 se:

$$\forall a_n \in \mathfrak{D}, a_n \rightarrow x_0 \quad f(a_n) \rightarrow f(x_0)$$

Teorema 65. f è continua in $x_0 \iff f$ è continua per successioni in x_0

Dim.

- Se x_0 è un punto isolato si prenda $a_n = x_0$ Definit.. Allora $f(a_n) \rightarrow f(x_0)$

- Se x_0 è un punto di accumulazione, si ha che $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \iff \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

□

Definizione 6.26 (\diamond). Sia $x_0 \in \mathfrak{D}(f)$ t.che x_0 è un punto di accumulazione destro di $\mathfrak{D}(f)$, f è **continua da destra** in x_0 se:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$$

Proposizione 6.27. Se $x_0 \in \mathfrak{D}(f)$ è un punto di accumulazione bilatero, allora f è continua in $x_0 \iff f$ è continua sia da destra che da sinistra in x_0 .

Dim.

□

Teorema 66 (Permanenza del segno per funzioni continue). Sia f continua in x_0 e $f(x_0) > 0$, allora:

$$\exists \mathcal{U}(x_0) : \text{se } x \in \mathfrak{D} \cap \mathcal{U}(x_0) \implies f(x) > 0$$

Dim.

- Se x_0 è un punto isolato, sia $\mathcal{U}(x_0) = \{x_0\}$
- Se x_0 è un punto di accumulazione, segue dal teorema della permanenza del segno

□

Teorema 67 (Continuità per le operazioni). Siano f e g continue in x_0 , allora:

I $[f + g]$ è continua in x_0

II $[f \cdot g]$ è continua in x_0

III se $g(x_0) \neq 0$, $\left[\frac{f}{g} \right]$ è continua in x_0

Dim. Sia $a_n \in \mathfrak{D}(f + g)$, con $a_n \rightarrow x_0$. Dato che f e g sono continue in x_0 :

$$\begin{aligned} f(a_n) &\rightarrow f(x_0) \\ g(a_n) &\rightarrow g(x_0) \end{aligned}$$

quindi:

$$[f + g](a_n) = f(a_n) + g(a_n) \rightarrow f(x_0) + g(x_0) = [f + g](x_0)$$

In modo analogo si dimostrano i punti II e III.

□

Teorema 68 (Continuità della composta). Sia f continua in x_0 e g continua in $y_0 = f(x_0)$, allora la funzione composta $h = g \circ f$ è continua in x_0

Dim. Sia $a_n \in \mathfrak{D}(h)$, $a_n \rightarrow x_0$ ($a_n \in \mathfrak{D}(f)$, $f(a_n) \in \mathfrak{D}(g)$).

Dato che f è continua in x_0 :

$$f(a_n) \rightarrow f(x_0)$$

dato che g è continua in $f(x_0)$

$$g(f(a_n)) \rightarrow g(f(x_0))$$

quindi:

$$h(a_n) = g(f(a_n)) \rightarrow g(f(x_0)) = h(x_0)$$

□

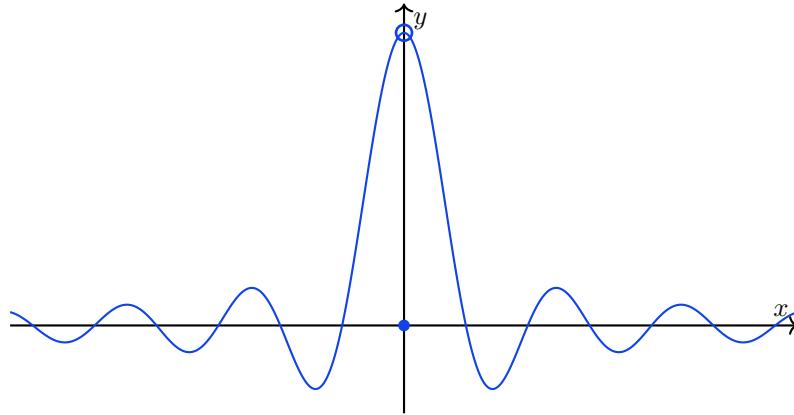
Definizione 6.28. Una funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è **globalmente continua** se è continua in ogni $x \in \mathfrak{D}(f)$.

Definizione 6.29 (Punto di discontinuità). $x_0 \in \mathfrak{D}(f)$ è un **punto di discontinuità** di f se f non è continua in x_0

Definizione 6.30 (Discontinuità eliminabile (III specie)). x_0 è un **punto di discontinuità eliminabile** di f se:

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \in \mathbb{R} \quad \text{ma} \quad l \neq f(x_0)$$

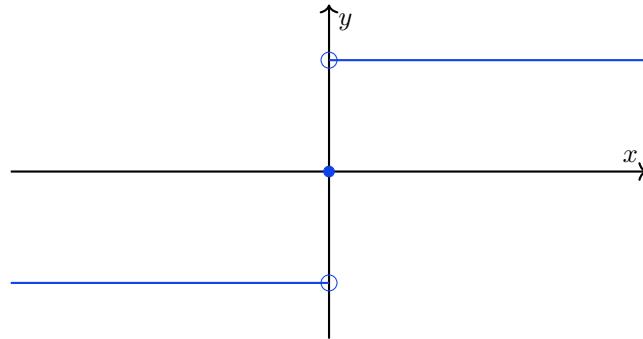
Esempio 6.31.



Definizione 6.32 (Discontinuità salto (I specie)). x_0 è un **punto di discontinuità salto** di f se:

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = l_1 \in \mathbb{R} \quad \exists \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = l_2 \in \mathbb{R} \quad \text{ma} \quad l_1 \neq l_2$$

Esempio 6.33.



Definizione 6.34 (Discontinuità di II specie). x_0 è un **punto di discontinuità di II specie** di f se:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \pm\infty \quad (\text{o } \nexists) \quad \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \pm\infty \quad (\text{o } \nexists)$$

Esempio 6.35.

grafico

Teorema 69 (\diamond). Sia $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione monotona crescente e sia $c \in (a, b)$, allora esistono in c entrambi i limiti destro e sinistro e:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \leq f(x_0) \leq \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$$

grafico

6.35.1 Prolungamento per continuità

6.36 Teoremi sulle funzioni continue

Teorema 70 (Teorema degli zeri). *Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua. Se $f(a) \cdot f(b) < 0$, allora*

$$\exists c \in [a, b] : f(c) = 0$$

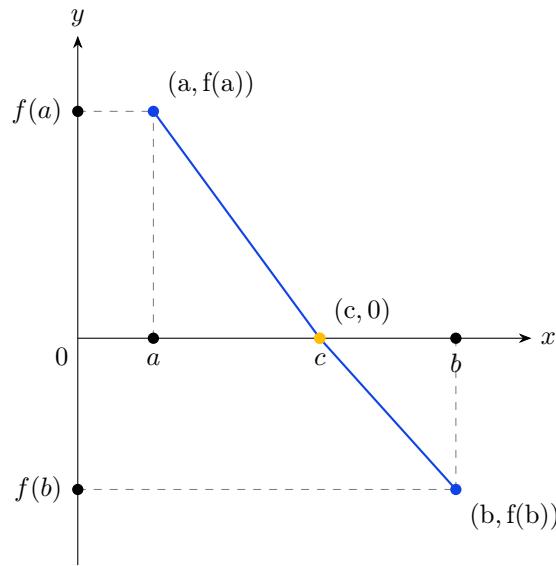
Dim. Si supponga che sia $f(a) > 0$ e $f(b) < 0$. Sia $P := \{x \in [a, b] : f(x) > 0\}$. Dato che P è limitato e non vuoto (a appartiene a P), ammette estremo superiore. Sia $c := \sup_P$, esiste $x_n \in P$ t.che $x_n \rightarrow c$. Si ha inoltre che $f(x_n) > 0 \forall n \in \mathbb{N}$. Dato che f è continua:

$$f(x_n) \rightarrow f(c) \geq 0 \text{ (per il th. della perm. del segno)}$$

Sia ora $x'_n := c + \frac{1}{n}$. Si ha che $f(x'_n) < 0$ e $x'_n \rightarrow c$, quindi:

$$f(x'_n) \rightarrow f(c) \leq 0 \text{ (per il th. della perm. del segno)}$$

quindi si conclude che $f(c) = 0$. □



Osservazione 6.37. *Sia $A \subset \mathbb{R}$ t.che $\forall x, y \in A, x < y \implies [x, y] \subset A \iff A$ è un intervallo*

Definizione 6.38 (Proprietà di Darboux). *Sia \mathfrak{I} un intervallo non banale, $f : \mathfrak{I} \rightarrow \mathbb{R}$ ha la **proprietà di Darboux** (o è di Darboux, o ha la proprietà dei valori intermedi) se:*

$$\forall x, y \in \mathfrak{I}, x < y \quad f \text{ assume tutti i valori tra } f(x) \text{ e } f(y) \text{ nell'intervallo } [x, y]$$

Osservazione 6.39. *Se $f : \mathfrak{I} \rightarrow \mathbb{R}$ è di Darboux:*

$$\forall \mathfrak{J} \subset \mathfrak{I} \text{ si ha che } f(\mathfrak{J}) \text{ è un intervallo}$$

Osservazione 6.40. *Se $f : \mathfrak{I} \rightarrow \mathbb{R}$ è di Darboux, non può avere discontinuità eliminabili.*

Teorema 71 (Teorema di Darboux). *Sia $f : \mathfrak{I} \rightarrow \mathbb{R}$, se f è continua allora è di Darboux.*

Dim. Si vuole mostrare che, fissati $x, y \in \mathfrak{I}$, $x < y$:

$$\forall \gamma : f(x) < \gamma < f(y) \quad \exists c \in [x, y] : f(c) = \gamma$$

- Se $f(x) = f(y)$, la tesi è verificata
- Se $f(x) \neq f(y)$, si supponga $f(x) < f(y)$. Si fissi γ t.che $f(x) < \gamma < f(y)$. Sia $g(t) = f(t) - \gamma$. Si ha che g è continua (somma tra una funzione continua e una costante). Inoltre:

$$\begin{aligned} g(x) &= f(x) - \gamma < 0 \\ g(y) &= f(y) - \gamma > 0 \end{aligned}$$

quindi per il teorema degli zeri si ha che:

$$\exists c \in [x, y] : g(c) = 0 \implies f(c) - \gamma = 0 \implies f(c) = \gamma$$

□

Lemma 6.41. Presa $x_n \in [a, b]$, $\exists x \in [a, b]$ ed una sottosuccessione x_{n_k} t.che $x_{n_k} \rightarrow x$.

Dim. Sia $x_n \in [a, b]$, dato che $[a, b]$ è limitato, x_n è limitata. Quindi per il teorema di Bolzano-Weierstrass, $\exists x_{n_k} : x_{n_k} \rightarrow x \in \mathbb{R}$. Dato che $x_n \in [a, b]$, per il teorema della permanenza del segno si ha che:

$$\begin{aligned} x_{n_k} &\geq a \implies x \geq a \\ x_{n_k} &\leq b \implies x \leq b \end{aligned}$$

quindi $x \in [a, b]$. □

Teorema 72 (Teorema di Weierstrass). *Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua, f ammette massimo e minimo.*

Dim. Sia $M := \sup_f$ (o $+\infty$ se f è illimitata). Si ha che:

$$\exists x_n \in [a, b] : f(x_n) \rightarrow M$$

Per il lemma precedentemente dimostrato, $\exists x \in [a, b]$ e $\exists x_{n_k} \rightarrow x \in [a, b]$

$$f(x_n) \rightarrow M \implies f(x_{n_k}) \rightarrow M$$

ma $x_{n_k} \rightarrow x$ e, dato che f è continua:

$$f(x_{n_k}) \rightarrow f(x) = M = \max f$$

si può procedere in modo analogo per il minimo. □

Corollario 7. *$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua $\implies f([a, b]) = [m, M]$ $m = \min_f$, $M = \max_f$*

Dim. Per il teorema di Weierstrass, $m, M \in f([a, b])$. Per il teorema di Darboux, $f([a, b]) = [m, M]$. □

Teorema 73. *Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ monotona, allora:*

$$f \text{ è continua} \iff f([a, b]) = [m, M] \quad m = \min_n, \quad M = \max_f$$

Dim. (\Leftarrow): Se f non fosse continua, f avrebbe un salto (poiché monotona), quindi $[m, M]$ avrebbe un "buco". □

Corollario 8. *Sia $f : [a, b] \rightarrow [c, d]$ strettamente monotona, allora f è invertibile e $f^{-1} : [c, d] \rightarrow [a, b]$ è continua.*

Dim. La dimostrazione segue dal fatto che f^{-1} è monotona. □

Proposizione 6.42. *Sia $f : [a, b] \rightarrow [m, M]$ continua e invertibile $\implies f$ è strettamente monotona.*

6.43 Continuità uniforme

Chapter 7

Derivate

7.1 Introduzione

Definizione 7.2 (Rapporto incrementale). *Sia $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ e $x_0 \in (a, b)$, sia $h \neq 0$, si definisce rapporto incrementale di f in x_0 :*

$$R(f, x_0, h) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Definizione 7.3 (Derivata). *Una funzione reale f è derivabile in x_0 se:*

$$\lim_{h \rightarrow 0} R(f, x_0, h) = l \in \mathbb{R}$$

l è detto **derivata** di f in x_0 .

Notazione 17. $\frac{df}{dx}(x_0)$, $f'(x_0)$, $\dot{f}(x_0)$, $Df(x_0)$

7.4 Differenziabilità

Notazione 18. $\omega(h)$: $\omega(h) \rightarrow 0 \iff h \rightarrow 0$

Definizione 7.5 (Differenziabilità). *Sia $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ e $x_0 \in (a, b)$, f è differenziabile in x_0 se:*

$$\exists L \in \mathbb{R} : f(x_0 + h) = f(x_0) + L \cdot h + h\omega(h)$$

Osservazione 7.6. *Sia $x_0 + h := x$, allora:*

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + L(x - x_0)}_{\text{retta}} + \underbrace{(x - x_0)\omega(x - x_0)}_{\text{errore}}$$

Teorema 74. *Sia f una funzione reale, allora f è differenziabile in $x_0 \iff f$ è derivabile in x_0 . In particolare:*

$$L = f'(x_0)$$

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + (x - x_0)\omega(x - x_0)$$

Dim.

- (\Rightarrow): Dato che f è differenziabile, $\exists L \in \mathbb{R}$ t.che:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + L \cdot h + h\omega(h) \iff f(x_0 + h) - f(x_0) = h(L + \omega(h))$$

dato che $h \neq 0$:

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = L + \omega(h) \iff f'(x_0) = L \in \mathbb{R}$$

- (\Leftarrow): Dato che f è derivabile:

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \xrightarrow[h \rightarrow 0]{} f'(x_0) \iff \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - f'(x_0) \xrightarrow[h \rightarrow 0]{} 0$$

quindi:

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - f'(x_0) = \omega(h) \implies f(x_0 + h) = f(x_0) + h f'(x_0) + h \omega(h)$$

\parallel
 L

□

Teorema 75. Se f è derivabile in x_0 , allora è continua in x_0 .

Dim. Dato che f è derivabile in x_0 , è differenziabile in x_0 . Quindi:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + (x - x_0)\omega(x - x_0)$$

si ha che (dato che $f'(x_0)$ è finito):

$$f'(x_0)(x - x_0) \xrightarrow[x \rightarrow x_0]{} 0$$

$$(x - x_0)\omega(x - x_0) \xrightarrow[x \rightarrow x_0]{} 0$$

quindi:

$$f(x) \xrightarrow[x \rightarrow x_0]{} f(x_0)$$

che è la definizione di continuità in x_0 .

□

7.7 La funzione derivata

Definizione 7.8 (Funzione derivata). Sia $f : \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}$, si definisce **funzione derivata** di f la funzione $f' : \mathfrak{D}(f') \rightarrow \mathbb{R}$ così definita:

$$x \mapsto f'(x)$$

dove $\mathfrak{D}(f') := \{x \in \mathcal{I} : f \text{ è derivabile in } x\} \subset \mathcal{I}$

Osservazione 7.9. Può essere che $\mathfrak{D}(f') = \emptyset$

Osservazione 7.10 (\diamond). Se $\mathcal{I} = [a, b]$, derivabile in a significa che $\exists f'_+(a)$

Teorema 76. Sia $f : \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile in \mathcal{I} , la funzione derivata $f' : \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}$ ha la proprietà di Darboux.

Dim. Siano $x, y \in \mathcal{I}$ con $x < y$. Allora:

- Se $f'(x) = f'(y)$, la proprietà è verificata

- Se $f'(x) \neq f'(y)$, si supponga $f'(x) < f'(y)$ e sia $\gamma \in \mathbb{R} : f'(x) < \gamma < f'(y)$, si vuole mostrare che $\exists c \in [x, y] : f'(c) = \gamma$.

Sia $g : [x, y] \rightarrow \mathbb{R}$ così definita:

$$g(t) = f(t) - \gamma t$$

si ha che g è derivabile in $[x, y]$ (poiché f lo è). Inoltre:

$$g'(t) = f'(t) - \gamma$$

si ha che $g'(y) = f'(y) - \gamma > 0$, mentre $g'(x) = f'(x) - \gamma < 0$. Dato che g è continua, ammette massimo e minimo in $[x, y]$ (per il teorema di Weierstrass). Inoltre, si ha che non può assumere il minimo in x . Infatti, se così fosse, si avrebbe che:

$$\begin{aligned} g(x) &\leq g(t) \quad \forall t \in [x, y] \\ g'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \geq 0 \quad \text{Th. della perm. del segno} \end{aligned}$$

che contraddice l'osservazione precedente. Lo stesso si può dire per y . Si può quindi concludere che:

$$\exists c \in [x, y] : g'(c) = 0 \implies f'(c) = \gamma$$

□

Definizione 7.11. $\mathcal{C}'(\mathcal{I}) := \{f : \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ è derivabile e } f' \text{ è continua}\}$

7.12 Derivate successive

Definizione 7.13 (Derivata n -esima). *Sia $f : \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile in $\mathcal{U}(x_0)$. Detta $f^{(0)}$ la funzione stessa, se $f^{(n-1)}$ è definita in $\mathcal{U}(x_0)$, si definisce **derivata n -esima** di f in x_0 $f^{(n)}(x_0)$ la derivata di $f^{(n-1)}$ in x_0 .*

Definizione 7.14. $\mathcal{C}^n(\mathcal{I}) := \{f : \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ è derivabile } n \text{ volte e } f^{(n)} \text{ è continua}\}$

Definizione 7.15. $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{I}) := \{f : \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R} : \exists f^{(n)} \forall n \in \mathbb{N}\}$

7.16 Teoremi sulle funzioni derivabili

Teorema 77 (Teorema di Lagrange). *Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ t.che:*

- f è continua in $[a, b]$
- f è derivabile in (a, b)

allora:

$$\exists c \in (a, b) : f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Corollario 9 (Teorema di Rolle). *Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ t.che:*

- f è continua in $[a, b]$

- f è derivabile in (a, b)

- $f(a) = f(b)$

allora:

$$\exists c \in (a, b) : f'(c) = 0$$

Dim. Si dimostrerà prima il caso in cui $f(a) = f(b)$ (quindi $f'(c) = 0$).

Dato che f è continua, per il teorema di Weierstrass ammette massimo e minimo in $[a, b]$. I possibili casi sono che:

- f assume sia il massimo che il minimo agli estremi. In tal caso f è costante, quindi $f'(x) = 0 \forall x \in (a, b)$
- f assume almeno uno tra il massimo e il minimo in un punto interno. In tal caso, detto c l'ascissa del minimo o del massimo interno, per il teorema di Fermat, $f'(c) = 0$

si consideri ora $f(a) \neq f(b)$. Sia $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ t.che:

$$g(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) - f(x)$$

si ha che:

$$g(a) = -f(a) = g(b)$$

quindi g soddisfa le ipotesi del teorema di Rolle. Quindi:

$$\exists c \in (a, b) : f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

□

Corollario 10.

Teorema 78 (Teorema di Cauchy). *Siano $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ due funzioni t.che:*

- f e g sono continue in $[a, b]$
- f e g sono derivabili in (a, b)

allora:

$$\exists c \in (a, b) : f'(c)[g(b) - g(a)] = g'(c)[f(b) - f(a)]$$

Dim. Sia $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ t.che:

$$h(x) = [f(b) - f(a)]g(x) - [g(b) - g(a)]f(x)$$

si ha che $h(x)$ soddisfa le ipotesi di Rolle.

□

Teorema 79 (Condizione sufficiente di derivabilità). *Sia $f : \mathcal{U}(x_0) \rightarrow \mathbb{R}$ t.che:*

- f sia derivabile in $\dot{\mathcal{U}}(x_0)$

- f sia continua in x_0

- $\exists l \in \mathbb{R} : \lim_{x \rightarrow x_0} f'(x) = l$

allora f è derivabile in x_0 e $f'(x_0) = l$.

Dim. Si dimostrerà che $f'_+(x_0) = l$. Si consideri, per $h > 0$, l'intervallo $[x_0, x_0 + h]$. Si ha che f soddisfa le ipotesi del teorema di Lagrange in tale intervallo. Quindi:

$$\exists x_h, \quad x_0 < x_h < x_0 + h : \quad f'(x_h) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

dato che, per confronto:

$$x_h \xrightarrow[h \rightarrow 0^+]{} x_0$$

si ha che:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f'(x) = f'(x_0)$$

□

Teorema 80 (Derivabilità e monotonia (\diamond)). *Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione che soddisfi le ipotesi del teorema di Lagrange, allora:*

$$f \text{ è crescente} \iff f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in (a, b)$$

Dim.

- (\Rightarrow): Sia $x_0 \in (a, b)$ fissato e $h > 0$:

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \geq 0 \quad \text{per ipotesi} \implies f'_+(x_0) \geq 0 \quad \text{Th. della perm. del segno}$$

- (\Leftarrow): Sia $[x, y] \subset (a, b)$ e si applichi il teorema di Lagrange ad f in $[x, y]$:

$$\exists z \in (x, y) : \quad f'(z)(y - x) = f(y) - f(x) \geq 0$$

□

Teorema 81. *Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione che soddisfi le ipotesi del teorema di Lagrange, allora:*

$$f'(x) > 0 \quad \forall x \in (a, b) \implies f \text{ è strettamente crescente}$$

Dim. La dimostrazione è analoga alla precedente. □

Osservazione 7.17. *Il viceversa non vale.*

Esempio 7.18. $f(x) = x^3$

Corollario 11. f è costante $\iff f' = 0$

7.19 Funzioni convesse

Definizione 7.20 (Combinazione convessa). *Siano $x, y \in \mathbb{R}$, si definisce **combinazione convessa** di x e y il numero:*

$$z_\lambda = \lambda x + (1 - \lambda)y \quad \lambda \in (0, 1)$$

Osservazione 7.21. *Tutti e soli i numeri tra x e y sono combinazioni convesse di x e y .*

Dim. □

Definizione 7.22 (Convessità). *Sia $f : [x, y] \rightarrow \mathbb{R}$, f è **convessa** in se:*

$$\forall \lambda \in (0, 1) \quad f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$$

Osservazione 7.23. *La definizione di funzione convessa equivale a dire che il grafico di f sta sotto alla retta passante per x e y .*

Dim. Sia r la retta passante per x e y :

$$r(t) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x}(t - x) + f(x)$$

si vuole mostrare che:

$$f(t) \leq r(t) \quad \forall t \in [x, y] \iff f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) \quad \forall \lambda \in [0, 1]$$

si ha che:

$$f(z_\lambda) \leq r(z_\lambda) \quad \forall \lambda \in [0, 1]$$

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x}(\lambda x + (1 - \lambda)y - x) + f(x)$$

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x}(1 - \lambda)(y - x) + f(x)$$

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq f(x) + f(y) - f(x) - f(y) + \lambda f(y) - (1 - \lambda)f(x)$$

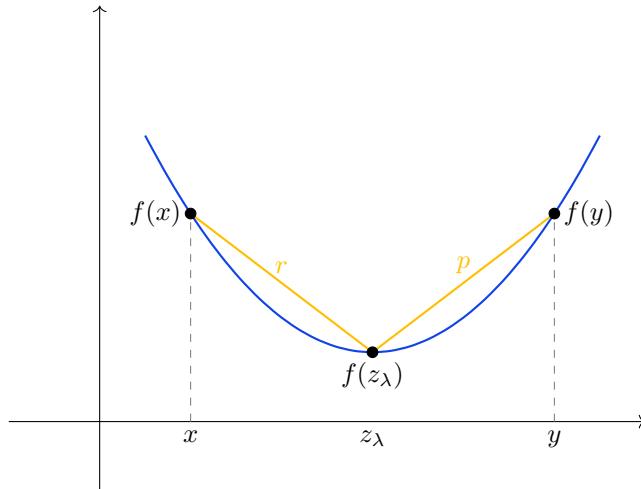
$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$$

□

Definizione 7.24 (Funzione convessa). *Una funzione $f : \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}$ è **convessa** se è convessa in ogni $[x, y] \subset \mathcal{I}$.*

Definizione 7.25 (Funzione concava). *Una funzione $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è **concava** se $-f$ è convessa.*

Osservazione 7.26. *Una funzione f è convessa $\iff \forall x < y \text{ e } \forall z_\lambda \text{ } m_r \leq m_p$.*



Dim. Siano $x < y$ fissati. Si ha che:

$$m_r = \frac{f(z_\lambda) - f(x)}{z_\lambda - x}$$

$$m_p = \frac{f(z_\lambda) - f(y)}{z_\lambda - y}$$

inoltre:

$$z_\lambda - x = \lambda x + (1 - \lambda)y - x = (\lambda - 1)(x - y)$$

$$z_\lambda - y = \lambda x + (1 - \lambda)y - y = \lambda(x - y)$$

quindi:

$$\begin{aligned} m_r \leq m_p &\iff \frac{f(z_\lambda) - f(x)}{(\lambda - 1)(x - y)} \leq \frac{f(z_\lambda) - f(y)}{\lambda(x - y)} \\ &\iff \frac{f(z_\lambda) - f(x)}{(\lambda - 1)} \geq \frac{f(z_\lambda) - f(y)}{\lambda} \\ &\iff (f(z_\lambda) - f(x))\lambda \leq (f(z_\lambda) - f(y))(\lambda - 1) \\ &\iff -f(x)\lambda \leq f(y) - \lambda f(y) - f(z_\lambda) \\ &\iff f(z_\lambda) \leq f(x)\lambda + (1 - \lambda)f(y) \end{aligned}$$

□

Teorema 82. Se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è convessa $\implies f$ è continua in (a, b) .

Osservazione 7.27. La convessità non implica la derivabilità.

Teorema 83. Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione convessa e si assuma che f sia derivabile in $x_0 \in [a, b]$, Allora:

$$f(x) \geq \tau(x) \quad \forall x \in [a, b]$$

dove τ è la tangente al grafico di f in x_0 .

Dim. Si fissi $x_0 \in [a, b]$, la tangente in x_0 risulta essere:

$$\tau(x) = f'(x_0)(x - x_0) + x_0$$

sia $x := x_0 + h$ con $h > 0$. Sia quindi $z_\lambda \in [x_0, x_0 + h]$:

$$z_\lambda = \lambda x_0 + (1 - \lambda)(x_0 + h) = x_0 + h(1 - \lambda)$$

si ha che, dato che f è convessa:

$$f(z_\lambda) \leq \lambda f(x_0) + (1 - \lambda)f(x_0 + h) = \lambda(f(x_0) - f(x_0 + h)) + f(x_0 + h)$$

□

Definizione 7.28. Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ e $x_0 \in (a, b)$, x_0 si dice **punto di cambio di concavità** (o convessità) se:

$$\exists \varepsilon > 0 : f \text{ è concava in } [x_0 - \varepsilon, x_0] \text{ e } f \text{ è convessa in } [x_0, x_0 + \varepsilon]$$

o viceversa.

Osservazione 7.29. Se in x_0 f è derivabile, in x_0 si ha un flesso.

Teorema 84. Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ t.che f è derivabile in $[a, b]$ e $\forall x_0 \in [a, b]$ $f(x) \geq \tau(x) \quad \forall x \in [a, b]$, dove τ è la tangente al grafico di f in $x_0 \implies f$ è convessa in $[a, b]$.

Dim. \square

Teorema 85. Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione derivabile, allora f è convessa $\iff f'$ è crescente.

Dim. \square

Corollario 12. Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, con f due volte derivabile in $[a, b]$, allora f è convessa $\iff f''(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a, b]$.

Dim. \square

7.30 Sviluppi di Taylor

7.30.1 Approssimazione di una funzione

7.30.2 Polinomio di Taylor

Definizione 7.31. Sia f una funzione derivabile n volte in x_0 , si definisce **polinomio di Taylor** di ordine n centrato in x_0 il polinomio:

$$p_n(x) := \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

Teorema 86 (Teorema di Taylor-Peano). Sia f derivabile n volte in x_0 e sia $p_n(x)$ il polinomio di Taylor di ordine n di f centrato in x_0 . Allora:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - p_n(x)}{(x - x_0)^n} = 0$$

Osservazione 7.32. Sia $x := x_0 + h$, con $h \neq 0$, allora la tesi è equivalente a:

$$f(x_0 + h) = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{f''(x_0)}{2!}h^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}h^n}_{p_n(x_0+h)} + \underbrace{h^n \omega(h)}_{resto\ di\ Peano}$$

Dim. Si dimostrerà il caso in cui $x_0 = 0$, per $x \rightarrow x_0^+$. Detta $g(x) := f(x) - p_n(x)$, si vuole mostrare che:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{g(x)}{x^n} = 0$$

sia allora $x > 0$ fissato sufficientemente piccolo in modo che $f^{(n-1)}$ sia definita in $[0, x]$. Si ha che, per come è definito $p_n(x)$:

$$g(0) = g'(0) = g''(0) = \cdots = g^{(k)}(0) = 0$$

0. si applichi Lagrange a g nell'intervallo $[0, x]$:

$$\exists x_1 \in (0, x) : g(x) = g'(x_1)x$$

1. si applichi Lagrange a g' nell'intervallo $[0, x_1]$:

$$\exists x_2 \in (0, x_1) : g(x)' = g''(x_2)x_1$$

2. ...

n-2 si applichi Lagrange a $g^{(n-2)}$ nell'intervallo $[0, x_{n-2}]$:

$$\exists x_{n-1} \in (0, x_{n-2}) : g(x)^{(n-2)} = g^{(n-1)}(x_{n-1})x_{n-2}$$

$n-1$ si usi il fatto che $g^{(n-1)}$ è differenziabile in 0:

$$g^{(n-1)}(x_{n-1}) = g^{(n-1)}(0) + \underbrace{g^{(n)}(0)x_{n-1}}_{0} + x_{n-1}\omega(x_{n-1}) = x_{n-1}\omega(x_{n-1})$$

quindi:

$$g(x) = g'(x_1)x = g''(x_2)x_1x = x_{n-1}x_{n-2}\dots x_1x\omega(x_{n-1})$$

$$g(x) = x^n \underbrace{\frac{x_{n-1}x_{n-2}\dots x_1x}{x^n}}_{0 < a_n < 1} \omega(x_{n-1})$$

$$\frac{g(x)}{x^n} = a_n \omega(x_{n-1}) \underset{x \rightarrow 0}{\rightarrow} 0$$

si noti che $x_{n-1} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ per confronto.

Lemma 7.33. Se $r(x)$ è un polinomio di grado minore o uguale a $n \in \mathbb{N}_0$ t.che:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{r(x)}{x^n} = 0$$

allora $r(x) = 0$.

Dim.

□

Teorema 87. Sia data f definita in $\mathcal{U}(0)$. Si supponga che $\exists q(x)$ di grado minore o uguale a $n \in \mathbb{N}_0$ t.che:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - q(x)}{x^n} = 0$$

allora $q(x)$ è unico.

Dim. P.A. si supponga che esistano due polinomi distinti $p(x)$ e $q(x)$ di grado minore o uguale a n t.che:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - p(x)}{x^n} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - q(x)}{x^n} = 0$$

allora:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{q(x) - p(x)}{x^n} = 0$$

ma per il lemma precedentemente dimostrato, si ha che:

$$q(x) - p(x) = 0 \implies q(x) = p(x)$$

□

Teorema 88 (Teorema di Taylor-Lagrange).

7.34 Teorema di de l'Hôpital

Teorema 89 (Teorema di de l'Hôpital). *Sia $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ e siano f, g due funzioni derivabili in un $\dot{\mathcal{U}}(x_0)$ con $g'(x) \neq 0 \forall x \in \dot{\mathcal{U}}(x_0)$. Si assume che:*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$$

oppure:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \pm\infty$$

allora se:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \in \overline{\mathbb{R}} \implies \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l$$

Dim.

□

7.35 Algebra degli *o-piccoli*

Definizione 7.36. Date due funzioni reali f e g , si dice che f è un *o-piccolo* di g in $\mathcal{U}(x_0)$ se:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

Notazione 19. $f = o(g)$ in $\mathcal{U}(x_0)$

Osservazione 7.37. Con la notazione $f = o(g)$ si intende che f ha la proprietà di essere un *o-piccolo* di g , in particolare non si intende la relazione di equivalenza.

Esempio 7.38. In $\mathcal{U}(0)$:

$$x^2 = o(x), \quad x^3 = o(x)$$

ma $x^2 \neq x^3$.

Teorema 90 (Teorema di Taylor-Peano con l'*o-piccolo*). *Sia f derivabile n volte in x_0 , allora:*

$$f(x_0 + h) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} h^k + o(h^n)$$

Proprietà 7.39. Siano $m, n \in \mathbb{Z}$ in $\mathcal{U}(0)$:

$$I \quad o(x^n) \pm o(x^n) = o(x^n)$$

$$II \quad ko(x^n) = o(kx^n) = o(x^n)$$

$$III \quad x^m \cdot o(x^n) = o(x^{n+m})$$

$$IV \quad o(o(x^n)) = o(x^n)$$

$$V \quad o(x^n + o(x^n)) = o(x^n)$$

$$VI \quad o(x^n) \cdot o(x^m) = o(x^{n+m})$$

$$VII \quad [o(x^n)]^m = o(x^{nm})$$

Dim.

□

Chapter 8

Integrali

8.1 L'integrale di Riemann

8.2 Costruzione dell'integrale di Riemann

Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione limitata.

grafico

Si fissi $n \in \mathbb{N}$, ogni intervallo ha lunghezza $\frac{b-a}{n}$.

$$x_k = a + \frac{b-a}{n}k$$

$$\mathfrak{I}_k = [x_{k-1}, x_k] \quad \forall k = 1, 2, \dots, n$$

Dato che f è limitata, $\forall k = 1, 2, \dots, n$ si ha che $\inf_{\mathfrak{I}_k} f$ e $\sup_{\mathfrak{I}_k} f$ sono finiti.

Si definiscono allora:

Definizione 8.3 (Somme inferiori). *Si definisce somma inferiore di ordine n la successione:*

$$\sigma_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n \inf_{\mathfrak{I}_k} f$$

Definizione 8.4 (Somme superiori). *Si definisce somma superiore di ordine n la successione:*

$$S_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n \sup_{\mathfrak{I}_k} f$$

Osservazione 8.5. Dato che σ_n è l'area di un plurirettangolo sotto il grafico della funzione, mentre S_n è l'area di un plurirettangolo sopra il grafico della funzione, si ha che:

$$\sigma_n \leq S_n \quad \forall n \quad \forall m$$

Osservazione 8.6 (\diamond). Non è detto che S_n sia monotona decrescente.

Esempio 8.7.

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \left[0, \frac{1}{2}\right) \\ 0 & \text{se } x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$$

$$S_2 = \frac{1}{2}$$

$$S_3 = \frac{2}{3}$$

Definizione 8.8. $S := \lim S_n$, $\sigma := \lim \sigma_n$

Osservazione 8.9. Per il teorema della permanenza del segno, si ha che:

$$\begin{aligned}\sigma_n &\leq S \\ \sigma &\leq S \\ \sigma_n &\leq \sigma \leq S \leq S_n \quad \forall n\end{aligned}$$

Definizione 8.10 (Integrabilità secondo Riemann). f si dice **integrabile secondo Riemann** su $[a, b]$ se

$$\lim \sigma_n = \lim S_n = S = \sigma$$

Notazione 20. $R(a, b)$, insieme delle funzioni integrabili secondo Riemann su $[a, b]$

Osservazione 8.11. Se una funzione $f \in R(a, b)$, f è limitata.

Definizione 8.12 (Integrale di Riemann). Se $f \in R(a, b)$, $S = \sigma$ è detto **integrale di Riemann** di f su $[a, b]$.

Notazione 21. $\int_a^b f(x)dx$, $\int_{[a,b]} f(x)dx$, $\int_a^b f$

Notazione 22. $\Delta_{\mathcal{J}_k} f := \sup_{\mathcal{J}_k} f - \inf_{\mathcal{J}_k} f$

Definizione 8.13.

$$\omega_n(f) := S_n - \sigma_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n \sup_{\mathcal{J}_k} f - \inf_{\mathcal{J}_k} f = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n \Delta_{\mathcal{J}_k} f$$

Teorema 91. $f \in R(a, b) \iff \omega_n(f) \rightarrow 0$

Dim.

- (\Rightarrow): Dato che $f \in R(a, b)$, $S_n \rightarrow S$, $\sigma_n \rightarrow \sigma = S$. Quindi:

$$\omega_n(f) = S_n - \sigma_n \rightarrow S - S = 0$$

- (\Leftarrow): Si ha che:

$$\sigma_n \leq \sigma \leq S \leq S_n$$

quindi:

$$0 \leq \sigma - \sigma_n \leq S - S_n \leq S_n - \sigma_n = \omega_n(f) \rightarrow 0$$

dunque per confronto, $\sigma_n \rightarrow \sigma$ e $S_n \rightarrow S$. Inoltre:

$$0 \leq S - S_n \leq S - \sigma_n \leq S_n - \sigma_n$$

quindi $\sigma_n \rightarrow S = \sigma$.

□

Definizione 8.14 (Area).

Definizione 8.15 (Funzione caratteristica). *Dato un insieme $A \subset \mathbb{R}$, si definisce **funzione caratteristica** di A :*

$$\chi_A(x) := \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A \\ 0 & \text{se } x \notin A \end{cases}$$

Teorema 92. *Siano $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ t.che f e g differiscono in un numero finito di punti. Allora, se $f \in R(a, b)$, $g \in R(a, b)$ e:*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx$$

Dim.

□

Teorema 93. *Esistono funzioni reali f limitate t.che $f \notin R(a, b)$.*

Esempio 8.16 (Funzione di Dirichlet). *Sia $D : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$:*

$$D(x) = \chi_{[0,1] \cap \mathbb{Q}}(x)$$

si ha che $D \notin R(a, b)$. Infatti, fissato $n \in \mathbb{N}$:

$$S_n = \frac{1}{n} \left[\sup_{\mathfrak{I}_1} D + \sup_{\mathfrak{I}_2} D + \cdots + \sup_{\mathfrak{I}_n} D \right]$$

in ogni \mathfrak{I}_k , $\sup_{\mathfrak{I}_k} D = 1$ (per la densità di \mathbb{Q} in \mathbb{R}). Quindi:

$$S = 1$$

ma

$$\sigma_n = \frac{1}{n} \left[\inf_{\mathfrak{I}_1} D + \inf_{\mathfrak{I}_2} D + \cdots + \inf_{\mathfrak{I}_n} D \right] = 0 \rightarrow 0 = \sigma \neq S$$

Definizione 8.17. *Se $A \subset \mathbb{R}$ è limitato, preso $[-N, N] \supset A$ si può definire una misura di A come:*

$$m(A) = \int_{-N}^N \chi_A(x)dx$$

Osservazione 8.18. *Non tutti gli insiemi sono misurabili secondo questa misura.*

Lemma 8.19. *Siano $f, g : \mathfrak{I} \rightarrow \mathbb{R}$ limitate, si ha che:*

$$\begin{aligned} \sup_{\mathfrak{I}} (f + g) &\leqslant \sup_{\mathfrak{I}} f + \sup_{\mathfrak{I}} g \\ \inf_{\mathfrak{I}} (f + g) &\geqslant \inf_{\mathfrak{I}} f + \inf_{\mathfrak{I}} g \end{aligned}$$

Dim. Fissato $x \in \mathfrak{I}$:

$$\begin{aligned} f(x) &\leqslant \sup_{\mathfrak{I}} f \\ g(x) &\leqslant \sup_{\mathfrak{I}} g \\ f(x) + g(x) &\leqslant \sup_{\mathfrak{I}} f + \sup_{\mathfrak{I}} g \\ \sup_{\mathfrak{I}} (f + g) &\leqslant \sup_{\mathfrak{I}} f + \sup_{\mathfrak{I}} g \end{aligned}$$

dove nell'ultimo passaggio si è utilizzato il teorema della permanenza del segno. In modo analogo si può procedere per gli estremi inferiori. □

Teorema 94 (Linearità dell'integrale). *Se $f, g \in R(a, b)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, allora:*

$$\begin{aligned} f + \lambda g &\in R(a, b) \\ \int_a^b f(x) + \lambda g(x) dx &= \int_a^b f(x) dx + \lambda \int_a^b g(x) dx \end{aligned}$$

Dim. Consideriamo il caso in cui $f(x) = 0$. Si vuole mostrare che:

$$\int_a^b \lambda g(x) dx = \lambda \int_a^b g(x) dx$$

Si ha che:

$$\begin{aligned} \sigma_n(\lambda g) &= \lambda \sigma_n(g) \quad \text{se } \lambda > 0 \\ \sigma_n(\lambda g) &= \lambda S_n(g) \quad \text{se } \lambda < 0 \end{aligned}$$

da cui segue la tesi (passando ai limiti).

Consideriamo ora il caso in cui $f(x) \neq 0$. Fissato \mathfrak{I}_k , si ha che:

$$\inf_{\mathfrak{I}_k} f + \inf_{\mathfrak{I}_k} g \leq \inf_{\mathfrak{I}_k} (f + g) \leq \sup_{\mathfrak{I}_k} (f + g) \leq \sup_{\mathfrak{I}_k} f + \sup_{\mathfrak{I}_k} g$$

$$\sigma_n(f) + \sigma_n(g) \leq \sigma_n(f + g) \leq S_n(f + g) \leq S_n(f) + S_n(g)$$

da cui segue la tesi per confronto. \square

Definizione 8.20 (Funzione costante a tratti). *Una funzione $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è **costante a tratti** se $\exists \mathfrak{I}_1, \mathfrak{I}_2, \dots, \mathfrak{I}_n$ intervalli in $[a, b]$ e $\exists \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ t.che:*

$$h(x) = \sum_{k=1}^n \lambda_k \chi_{\mathfrak{I}_k}(x)$$

Proposizione 8.21. *Se $h(x) = \sum_{k=1}^n \lambda_k \chi_{\mathfrak{I}_k}(x)$, ($\mathfrak{I}_k \subset [a, b]$), allora $h \in R(a, b)$ e:*

$$\int_a^b h(x) dx = \sum_{k=1}^n \lambda_k \int_a^b \chi_{\mathfrak{I}_k}(x) dx = \sum_{k=1}^n \lambda_k \ell(\mathfrak{I}_k)$$

Teorema 95 (Teorema del confronto per l'integrale di Riemann). *Siano $f, g \in R(a, b)$, se $f \geq g$ ($f(x) \geq g(x) \forall x \in [a, b]$), allora:*

$$\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx$$

Dim. Dato che $f \geq g$, si ha che:

$$\sigma_n(f) \geq \sigma_n(g)$$

la tesi segue dal teorema della permanenza del segno per le successioni. \square

Corollario 13. *Sia $f \in R(a, b)$ t.che $f \geq 0$, allora:*

$$\int_a^b f(x) dx \geq 0$$

Osservazione 8.22. *Sia $f \in R(a, b)$, $f \geq 0$, $\int_a^b f(x) dx = 0 \Rightarrow f(x) = 0$*

Esempio 8.23. *Basti prendere una f che differisca da 0 in un numero finito di punti*

Proposizione 8.24. *Sia $f \in R(a, b)$, $f \geq 0$, $\int_a^b f(x)dx = 0$, f continua implies $f(x) = 0$*

Dim. \square

Osservazione 8.25. *Non è necessario specificare che $f \in R(a, b)$ (dato che si vedrà in seguito che la continuità implica l'integrabilità).*

Teorema 96 (Disuguaglianza del modulo). *Sia $f \in R(a, b)$, allora $|f| \in R(a, b)$ e:*

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

Dim. Il fatto che $|f| \in R(a, b)$ sarà dimostrato successivamente.

Si ha che:

$$-|f| \leq f \leq |f|$$

per confronto:

$$\int_a^b -|f(x)|dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

per la linearità dell'integrale:

$$-\int_a^b |f(x)|dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

quindi:

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

\square

Teorema 97. *Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ limitata, allora:*

$$f \in R(a, b) \iff \forall \varepsilon > 0 \exists \text{ due costanti a tratti } h^-, h^+ : h^- \leq f \leq h^+ \wedge \int_a^b h^+ - h^- < \varepsilon$$

Dim. \square

Teorema 98 (Additività dell'integrale). *Sia dato $[a, b]$ e $c \in (a, b)$, allora:*

$$\begin{aligned} f \in R(a, b) &\iff f \in R(a, c) \wedge f \in R(c, b) \\ \int_a^b f(x)dx &= \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \end{aligned}$$

Dim. \square

Proposizione 8.26. *Sia $f \in R(-a, a)$:*

$$\int_{-a}^0 f(-x)dx = \int_0^a f(x)dx$$

Dim. \square

Proposizione 8.27. *Sia $f \in R(-a, a)$ una funzione pari. Allora:*

$$\int_{-a}^a f(x)dx = 2 \int_0^a f(x)dx$$

Proposizione 8.28. *Sia $f \in R(-a, a)$ una funzione dispari. Allora:*

$$\int_{-a}^a f(x)dx = 0$$

Teorema 99. *Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, se f è limitata in $[a, b]$ e $f \in R(c, d) \forall a < c < d < b$, allora:*

$$f \in R(a, b)$$

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{c \rightarrow a} \lim_{d \rightarrow b} \int_c^d f(x)dx$$

8.29 Classi di funzioni integrabili

Teorema 100 (Integrabilità delle continue). *Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Se f è continua $\Rightarrow f \in R(a, b)$.*

Dim.

□

Teorema 101. *Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ limitata e con al più un numero finito di punti di discontinuità $\Rightarrow f \in R(a, b)$.*

Dim. Sia f discontinua in $c \in (a, b)$. Per l'additività, se $f \in R(a, c)$ e $f \in R(c, d) \Rightarrow f \in R(a, b)$.

Siano $a < \alpha < \beta < c$. f è limitata in $[a, c]$ e continua in (a, c) .

$f \in C([\alpha, \beta]) \Rightarrow f \in R(\alpha, \beta)$. f è limitata in $[a, c]$ e $f \in R(\alpha, \beta) \forall a < \alpha < \beta < c$.

Quindi $f \in R(a, c)$.

□

Teorema 102 (Integrabilità delle monotone). *Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ monotona $\Rightarrow f \in R(a, b)$.*

Dim. Si consideri il caso di f crescente e si supponga $[a, b] = [0, 1]$ (la dimostrazione può tuttavia essere estesa a un qualsiasi intervallo). Si ha che, fissato $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} S_n(f) &= \frac{1}{n} \left[\sup_{\mathcal{I}_1} f + \sup_{\mathcal{I}_2} f + \cdots + \sup_{\mathcal{I}_n} f \right] = \frac{1}{n} \left[f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + \cdots + f\left(\frac{n}{n}\right) \right] \\ \sigma_n(f) &= \frac{1}{n} \left[\inf_{\mathcal{I}_1} f + \inf_{\mathcal{I}_2} f + \cdots + \inf_{\mathcal{I}_n} f \right] = \frac{1}{n} \left[f\left(\frac{0}{n}\right) + f\left(\frac{1}{n}\right) + \cdots + f\left(\frac{n-1}{n}\right) \right] \end{aligned}$$

dove nel secondo passaggio si è usata la crescenza della funzione. Quindi:

$$\omega_n(f) = S_n(f) - \sigma_n(f) = \frac{1}{n} [f(1) - f(0)] \rightarrow 0$$

□

Teorema 103. *Sia $f \in R(a, b)$ e $\varphi : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua t.che:*

$$[a, b] \xrightarrow{f} \mathcal{I} \subset [c, d] \xrightarrow{\varphi} \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow (\varphi \circ f)(x) = \varphi(f(x)) \in R(a, b)$$

Osservazione 8.30. *Una composta di due integrabili può non essere integrabile.*

Corollario 14. *Se $f \in R(a, b)$, allora $|f| \in R(a, b)$ e $f^2 \in R(a, b)$*

Corollario 15. *Se $f, g \in R(a, b) \Rightarrow (f \cdot g) \in R(a, b)$*

Dim. Si ha che:

$$(f+g) \in R(a,b)$$

$$(f-g) \in R(a,b)$$

quindi:

$$(f+g)^2 \in R(a,b)$$

$$(f-g)^2 \in R(a,b)$$

di conseguenza:

$$\frac{1}{4} [(f+g)^2 - (f-g)^2] \in R(a,b)$$

$$\frac{1}{4} [(f+g)^2 - (f-g)^2] = fg$$

□

8.31 Integrale definito

Definizione 8.32. Sia $f \in R(a,b)$, $x, y \in [a,b]$, si definisce **integrale definito** tra x e y :

$$\int_x^y f(t)dt = \begin{cases} \int_x^y f(t)dt & \text{se } x < y \\ 0 & \text{se } x = y \\ -\int_y^x f(t)dt & \text{se } x > y \end{cases}$$

Notazione 23. $\int_x^y f(t)dt$, $\int_{[x,y]} f(t)dt$

Proprietà 8.33 (Linearità).

Proprietà 8.34 (Additività).

Proposizione 8.35 (Confronto).

8.36 Primitiva

Definizione 8.37. Sia $f : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$, si dice **primitiva** di f una funzione derivabile $F : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ t.che:

$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in [a,b]$$

Proposizione 8.38. Data una funzione f , non è detto che esista una primitiva di F di f .

Dim. È sufficiente scegliere una f che non abbia la proprietà di Darboux. □

Proposizione 8.39. Si supponga che una funzione f ammetta come primitiva F . Allora ogni funzione $F(x) + C$ ($C \in \mathbb{R}$) è primitiva di f .

Dim. Sia $G(x) = F(x) + C$. Si ha che:

$$G'(x) = F'(x) + \frac{d}{dx}C = F'(x) = f(x)$$

□

Proposizione 8.40. Si supponga che una funzione f ammetta come primitiva F e si supponga che G sia anch'essa una primitiva di f . Allora:

$$G(x) = F(x) + C \quad (C \in \mathbb{R})$$

Dim. Sia $H(x) := G(x) - F(x)$, H è derivabile (dato che F e G sono derivabili) e:

$$H'(x) = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0 \quad \forall x$$

quindi $H(x)$ è una funzione costante. \square

Proposizione 8.41. Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, f ammette primitiva in $[a, b] \iff f \in R(a, b)$.

Esempio 8.42 (\Leftarrow). È sufficiente prendere una f costante a tratti.

Esempio 8.43 ($\not\Rightarrow$).

Proposizione 8.44. Se f è limitata e f ammette primitiva $\Rightarrow f \in R(a, b)$.

Notazione 24. $f \in R_P(a, b)$ se:

I f ammette primitiva in $[a, b]$

II $f \in R(a, b)$

8.45 Teorema fondamentale del calcolo integrale

Teorema 104 (Teorema fondamentale del calcolo integrale). Sia $f \in R_P(a, b)$ e sia F una primitiva di f , allora:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

Notazione 25. $F|_a^b := F(b) - F(a)$

Dim. Si dimostrerà il caso $[a, b] = [0, 1]$ (la dimostrazione può tuttavia essere estesa al caso generale). Si fissi $n \in \mathbb{N}$ e si consideri l'intervallo $\mathfrak{I}_k = [x_{k-1}, x_k]$. Su tale intervallo F soddisfa le ipotesi del teorema di Lagrange. Quindi:

$$\exists y \in [x_{k-1}, x_k] : F(x_{k-1}) - F(x_k) = F'(y)(x_{k-1} - x_k) = \frac{1}{n}f(y)$$

dato che $y \in [x_{k-1}, x_k]$:

$$\inf_{\mathfrak{I}_k} f \leqslant y \leqslant \sup_{\mathfrak{I}_k} f \quad \forall k = 1, 2, \dots, n$$

$$\frac{1}{n} \inf_{\mathfrak{I}_k} f \leqslant F(x_{k-1}) - F(x_k) \leqslant \frac{1}{n} \sup_{\mathfrak{I}_k} f \quad \forall k = 1, 2, \dots, n$$

sommando le n diseguaglianze:

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \inf_{\mathfrak{I}_k} f \leqslant \sum_{k=1}^n F(x_{k-1}) - F(x_k) \leqslant \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sup_{\mathfrak{I}_k} f$$

il termine centrale corrisponde alla successione delle somme parziali di una serie telescopica. Quindi:

$$\sigma_n \leqslant F(1) - F(0) \leqslant S_n \quad \forall n$$

dato che $f \in R(a, b)$, $\sigma_n \rightarrow \sigma$, $S_n \rightarrow S$, $S = \sigma$. Quindi, per confronto:

$$\int_0^1 f(x) dx = F(1) - F(0)$$

\square

8.46 Media integrale

Definizione 8.47 (Media integrale). *Data $f \in R(a, b)$, si definisce **media integrale** di f su $[a, b]$:*

$$M_{[a,b]} := \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

Teorema 105 (Teorema della media integrale). *Sia $f \in R_P(a, b)$, allora:*

$$\exists c \in (a, b) : \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = f(c)$$

Dim. Sia F una primitiva di f , si ha che F soddisfa le ipotesi del teorema di Lagrange in $[a, b]$. Quindi:

$$\exists c \in (a, b) : F'(c) = \frac{F(b) - F(a)}{b-a} \implies f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

□

8.48 Integrazione per parti

Teorema 106 (Integrazione per parti). *Siano $f, g \in R_P(a, b)$ e siano F e G due primitive rispettivamente di f e g , allora:*

$$\int_a^b F(x)g(x) dx = F(x)G(x)|_a^b - \int_a^b f(x)G(x) dx$$

Dim. Sia $h(x) = F(x)g(x) + f(x)G(x)$, si ha che h è integrabile (F e G sono continue, in quanto derivabili), inoltre:

$$[F(x)G(x)]' = h(x)$$

quindi $h \in R_P(a, b)$. Di conseguenza, per il teorema fondamentale del calcolo integrale:

$$\int_a^b h(x) dx = F(x)G(x)|_a^b \implies F(x)G(x)|_a^b = \int_a^b F(x)g(x) dx + \int_a^b f(x)G(x) dx$$

□

8.49 Funzione integrale

Definizione 8.50. *Sia $f \in R(a, b)$, si definisce **funzione integrale** di f la funzione $\mathcal{I} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ così definita:*

$$\mathcal{I}(x) = \int_a^x f(t) dt$$

Osservazione 8.51. *Sia $f \in R(a, b)$, se $a < x < b$, allora $f \in R(a, x)$.*

Osservazione 8.52. *Si noti che la funzione è ben definita grazie all'integrabilità di f .*

Teorema 107.

I Se $f \in R_P(a, b) \implies \mathcal{I}$ è una primitiva di f

II La funzione \mathcal{I} è (Lipschitz) continua

III Se f è continua in $x_0 \in [a, b] \implies \mathcal{I}$ è derivabile in x_0 e:

$$\mathcal{I}'(x_0) = f(x_0)$$

Dim. I. Sia F una primitiva di f , allora, per il teorema fondamentale del calcolo integrale:

$$\mathcal{I}(x) = F(x) - F(a)$$

quindi:

$$\mathcal{I}'(x) = F'(x) = f(x)$$

□

Corollario 16. Se f è continua in $[a, b]$, $\mathcal{I}(x)$ è derivabile in ogni $x \in [a, b]$:

$$\mathcal{I}'(x) = f(x) \quad \forall x \in [a, b]$$

quindi \mathcal{I} è una primitiva di f , quindi $f \in R_P(a, b)$.

Proposizione 8.53. Sia $f \in R_P(a, b)$ e siano $g, h : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$. Sia $\mathcal{J} : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$:

$$\mathcal{J}(x) = \int_{h(x)}^{g(x)} f(t) dt$$

sia F una primitiva di f , allora:

$$\mathcal{J}(x) = F(g(x)) - F(h(x))$$

se inoltre g e h sono derivabili, allora:

$$\mathcal{J}'(x) = F'(g(x))g'(x) - F'(h(x))h'(x) = f(g(x))g'(x) - f(h(x))h'(x)$$

8.54 Cambio di variabili

Teorema 108. Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua e sia $\psi : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$ una funzione derivabile, con $\psi' \in R(\alpha, \beta)$, allora:

$$\int_{\psi(\alpha)}^{\psi(\beta)} f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\psi(t)) \psi'(t) dt$$

Dim. Si ha che $f(\psi(t))\psi'(t) \in R(\alpha, \beta)$ (integrabilità della composta, con f continua).

Sia F una primitiva di f . $F(\psi(t))$ è primitiva di $f(\psi(t))\psi'(t)$, quindi:

$$f(\psi(t))\psi'(t) \in R_P(\alpha, \beta)$$

inoltre:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\psi(t)) \psi'(t) dt = F(\psi(\beta)) - F(\psi(\alpha)) = \int_{\psi(\alpha)}^{\psi(\beta)} f(x) dx$$

□

Corollario 17 (Cambio di variabili). Sia $\psi : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$ una funzione biunivoca (quindi monotona)

- Se ψ è crescente $\Rightarrow \psi(\alpha) = a, \psi(\beta) = b, \int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\psi(t)) \psi'(t) dt$
- Se ψ è decrescente $\Rightarrow \psi(\alpha) = b, \psi(\beta) = a, \int_a^b f(x) dx = \int_{\beta}^{\alpha} f(\psi(t)) \psi'(t) dt$

Notazione 26 (Differenziale). $d(\psi(t)) = \psi'(t) dt$

8.55 Integralle indefinito

Definizione 8.56 (Integrale indefinito). *Sia f una funzione che ammetta primitiva in $[a, b]$, si definisce integrale indefinito di f in $[a, b]$ l'insieme delle primitive di f .*

Notazione 27 (Integrale indefinito). $\int f(x)dx$

Osservazione 8.57. *Se F è una primitiva di f , allora:*

$$\begin{aligned}\int f(x)dx &= F(x) + C \quad (C \in \mathbb{R}) \\ &= \bigcup_{C \in \mathbb{R}} F(x) + C\end{aligned}$$

Proprietà 8.58 (Linearità).

Proprietà 8.59 (Integrazione per parti).

Proprietà 8.60 (Cambio di variabili).

8.61 Applicazione degli integrali allo studio delle serie numeriche

Teorema 109. *Se $\alpha > 1$, allora:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \text{ Conv.}$$

inoltre:

$$\zeta(\alpha) < \frac{\alpha}{\alpha - 1}$$

Dim.

□

Teorema 110.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$$

Dim.

□

Teorema 111 (Formula di Eulero-Mascheroni). *Detta $s_n := \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ si ha che:*

$$s_n - \log n \rightarrow \gamma \in \left(\frac{1}{2}, 1 \right)$$

Dim.

□

8.62 Integralle improprio (generalizzato)

Definizione 8.63. *Sia $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ e siano $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, f si dice localmente integrabile in (a, b) se:*

$$\forall [c, d] \subset [a, b] \quad f \in R(c, d)$$

Definizione 8.64 (Integrale improprio). *Sia f localmente integrabile in (a, b) , se esiste finito:*

$$\lim_{c \rightarrow a^+} \lim_{d \rightarrow b^-} \int_c^d f(x) dx = l \in \mathbb{R}$$

f si dice integrabile impropriamente su (a, b) . Inoltre, l si dice integrale improprio di f su (a, b)

Notazione 28. $\int_a^b f(x) dx := l$

Notazione 29. $I(a, b)$, classe delle funzioni integrabili impropriamente su $[a, b]$

Osservazione 8.65. $\int_a^b f(x) dx = l \in \mathbb{R}$ se:

$$\forall a_n \rightarrow a^+ \quad \forall b_n \rightarrow b^- \quad \int_{a_n}^{b_n} f(x) dx \rightarrow l$$

Osservazione 8.66 (Additività).

Osservazione 8.67 (\diamond). *Se $a > -\infty$ e f è limitata in $U^+(a)$, →*

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{d \rightarrow b^-} \int_a^d f(x) dx$$

Proposizione 8.68. *Sia $\alpha \in \mathbb{R}$, allora:*

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx &= \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1} & \text{se } \alpha > 1 \\ +\infty & \text{se } \alpha \leq 1 \end{cases} \\ \int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx &= \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1} & \text{se } \alpha < 1 \\ +\infty & \text{se } \alpha \geq 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Dim.

□

Definizione 8.69. *Sia $f : \mathcal{D}(f) \rightarrow \mathbb{R}$, f si dice localmente integrabile su un intervallo $[a, b]$ se esiste una partizione $a = x_0 < x_1 < \dots < x_k = b$ di $[a, b]$ t.che f è localmente integrabile (nel senso definito in precedenza) su ogni intervallo della forma $[x_{k-1}, x_k]$.*

Definizione 8.70. *Sia f localmente integrabile su $[a, b]$, si definisce integrale improprio su $[a, b]$ (se esiste finito):*

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x) dx = l \in \mathbb{R}$$

Osservazione 8.71. $f \in I(a, b) \iff f \in I(x_{k-1}, x_k) \forall k = 1, 2, \dots, n$

Osservazione 8.72. *Sia $\{a_n\}$ una successione e sia:*

$$f(x) = a_n \chi_{[n-1, n]}(x)$$

allora:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ Conv.} \iff \exists \int_0^{+\infty} f(x) dx$$

Osservazione 8.73. *In analogia alle serie numeriche, un integrale improprio può convergere (se $f \in I(a, b)$), divergere o essere indeterminato.*

Definizione 8.74. $\int_a^b f$ converge **assolutamente** se $\int_a^b |f|$ converge

Osservazione 8.75. Se $f \geq 0$ su $(a, b) \implies \int_a^b f(x)dx$ converge a un numero non negativo o diverge a $+\infty$.

Teorema 112 (Linearità). Siano $f, g \in I(a, b)$ e $\lambda \in \mathbb{R} \implies f + \lambda g \in I(a, b)$ e:

$$\int_a^b f + \lambda g = \int_a^b f + \lambda \int_a^b g$$

Dim. Per la linearità dell'integrale:

$$\begin{aligned} \int_c^d f + \lambda g &= \int_c^d f + \lambda \int_c^d g \\ \int_a^b f + \lambda g &= \lim_{c \rightarrow a} \lim_{d \rightarrow b} \int_c^d f + \lambda g = \lim_{c \rightarrow a} \lim_{d \rightarrow b} \int_c^d f + \lambda \int_c^d g = \int_a^b f + \lambda \int_a^b g \end{aligned}$$

□

Teorema 113 (Confronto per l'integrale improprio). Siano $0 \leq f(x) \leq g(x) \forall x \in (a, b)$, allora:

- se $g \in I(a, b) \implies f \in I(a, b)$
- se $f \notin I(a, b) \implies g \notin I(a, b)$

Corollario 18. Se $\forall x \in (a, b) f, g \geq 0$ e $\exists 0 < m < M$ t.che:

$$mf(x) \leq g(x) \leq Mf(x) \quad \forall x \in (a, b)$$

allora $f \in I(a, b) \iff g \in I(a, b)$

Teorema 114 (Convergenza assoluta). Sia f localmente integrabile, se $|f| \in I(a, b) \implies f \in I(a, b)$

Osservazione 8.76. $f \in I(a, b), g \in I(a, b) \not\implies (f \cdot g) \in I(a, b)$

Esempio 8.77. Sia $f(x) = g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ e $(a, b) = (0, 1)$

Osservazione 8.78. Sia f localmente integrabile su (a, b) , $f \in I(a, b) \not\implies |f| \in I(a, b)$

Esempio 8.79.

Teorema 115 (Confronto asintotico per gli integrali impropri). Sia f una funzione di segno costante in $\dot{\mathcal{U}}(x_0)$, allora se $f \sim g$ in $\mathcal{U}(x_0)$ si ha che $\exists \mathcal{U}'(x_0) \subset \mathcal{U}(x_0)$ t.che:

$$f \in I(\mathcal{U}'(x_0)) \iff g \in I(\mathcal{U}'(x_0))$$

Dim.

$$\frac{f(x)}{g(x)} \underset{x \rightarrow x_0}{\rightarrow} 1 \implies \text{in } \mathcal{U}'(x_0) \quad \frac{1}{2}g(x) \leq f(x) \leq 2g(x)$$

□

Teorema 116 (Funzione campione). Siano $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e f definita come:

$$f(x) = \frac{1}{x^\alpha |\log x|^\beta} \quad x \in (0, +\infty)$$

allora:

$$f \in I(\mathcal{U}(0)) \iff \begin{cases} \alpha < 1 & \forall \beta \\ \alpha = 1, \beta > 1 & \end{cases}$$

$$f \in I(\mathcal{U}(+\infty)) \iff \begin{cases} \alpha > 1 & \forall \beta \\ \alpha = 1, \beta > 1 & \end{cases}$$

Dim.

□

Chapter 9

Successioni e serie di funzioni

9.1 Successioni di funzioni

Definizione 9.2 (Successione di funzioni). *Sia $f_n : \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione reale, con $n \in \mathbb{N}$, la successione $\{f_n\}$ si dice **successione di funzioni**.*

Notazione 30. $\{f_n\}$, f_n , $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$

Osservazione 9.3. Fissato $x_0 \in \mathcal{I}$, $f_n(x_0)$ è una successione numerica.

Definizione 9.4 (Convergenza puntuale). *Sia f_n una successione di funzioni e sia $f : \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}$, si dice che f_n converge puntualmente a f se:*

$$\forall x_0 \in \mathcal{I} \quad f_n(x_0) \rightarrow f(x_0)$$

Esempio 9.5 (I). Sia $\mathcal{I} = [0, 1]$ e sia f_n :

$$f_n(x) = x^n$$

f_n converge puntualmente a:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in [0, 1) \\ 1 & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

Esempio 9.6 (II). Sia $\mathcal{I} = [0, 1]$ e sia f_n :

$$f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$$

$$f_n(x) \rightarrow f(x) = 0$$

$$\begin{aligned} f'_n(x) &= \sqrt{n} \cos(nx) \\ f'_n(x) &\rightarrow +\infty \end{aligned}$$

Esempio 9.7 (III). Sia $\mathcal{I} = [0, 1]$ e sia f_n così definita:
grafico

$$f_n(x) \rightarrow f(x) = 0$$

$$\int_0^1 f_n(x) dx = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx = 1 \neq \int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} f(x) dx = 0$$

Proposizione 9.8. Se f_n è continua $\forall n \Rightarrow f$ è continua.

Proposizione 9.9. Se f_n è derivabile $\forall n \Rightarrow f$ è derivabile.

Proposizione 9.10. Se $f_n \in R(\mathcal{J}) \forall n \Rightarrow f \in R(\mathcal{J})$.

Esempio 9.11. Sia f_n così definita nell'intervallo $[0, 1]$:

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{se } x \geq \frac{1}{n} \\ 0 & \text{se } x < \frac{1}{n} \end{cases}$$

$$f_n(x) \rightarrow f(x) = \frac{1}{x}$$

ma f non è limitata in $[0, 1]$, quindi non è integrabile.

Proposizione 9.12. Se $f_n \in R(\mathcal{J}) \forall n$ e $f \in R(\mathcal{J}) \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{J}} f_n(x) dx = \int_{\mathcal{J}} f(x) dx = \int_{\mathcal{J}} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx$.

9.12.1 Convergenza uniforme

Definizione 9.13 (Convergenza uniforme). Sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni e sia $f : \mathcal{J} \rightarrow \mathbb{R}$, f_n converge uniformemente a f se:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0 \quad \forall x \in \mathcal{J}$$

Notazione 31. $f_n \xrightarrow{u} f$

Osservazione 9.14. La scelta di n_0 non dipende da x .

Osservazione 9.15.

$$f_n \xrightarrow{u} f \iff \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in \mathcal{J}} |f_n(x) - f(x)| = 0$$

Teorema 117 (Convergenza uniforme e continuità). Sia $f_n : \mathcal{J} \rightarrow \mathbb{R}$ una successione di funzioni, se f_n è continua $\forall n$ e $f_n \xrightarrow{u} f \Rightarrow f$ è continua.

Dim. Dato che f_n converge uniformemente a f , si ha che, fissato $x_0 \in \mathcal{J}$:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0 \quad \forall x \in \mathcal{J}$$

dato che f_n è continua:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ se } |x - x_0| < \delta \implies |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| < \varepsilon$$

quindi, fissato $\varepsilon > 0$, se $|x - x_0| < \delta$:

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &= |f(x) - f_{n_0}(x) + f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0) + f_{n_0}(x_0) - f(x_0)| \leq \\ &\leq |f(x) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| + |f_{n_0}(x_0) - f(x_0)| < 3\varepsilon \end{aligned}$$

□

Teorema 118 (Convergenza uniforme e continuità). Sia $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una successione di funzioni, se $f_n \in R(a, b) \forall n$ e $f_n \xrightarrow{u} f \Rightarrow f \in R(a, b)$ e:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b |f_n(x) - f(x)| dx = 0$$

Dim. Si dimostrerà solo il secondo punto. Si ha che:

$$\int_a^b |f_n(x) - f(x)| dx \leq \int_a^b \sup_{x \in [a,b]} |f_n(x) - f(x)| dx = (b-a) \sup_{x \in [a,b]} |f_n(x) - f(x)| \rightarrow 0$$

dove nell'ultimo passaggio si è usata la convergenza uniforme di f_n . \square

Teorema 119 (Convergenza uniforme e derivabilità). *Sia $f_n : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ una successione di funzioni derivabili. Si supponga che esista $g : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ t.che $f'_n \xrightarrow{u} g$ e che esista un $x_0 \in [a,b]$ t.che $f_n(x_0)$ converge. Allora $f_n \xrightarrow{u} f$, dove f è derivabile e:*

$$f' = g$$

$$\lim f'_n = (\lim f_n)'$$

Dim. Si dimostrerà il caso in cui $f_n \in C'([a,b])$. Si supponga inoltre che $x_0 = a$. f_n si può scrivere come (dato che f'_n è continua e quindi integrabile):

$$f_n(x) = f_n(a) + \int_a^x f'_n(t) dt$$

si definisca allora:

$$l := \lim f_n(a)$$

e:

$$f(x) := l + \int_a^x g(t) dt$$

si ha che f è continua e derivabile. Inoltre:

$$f'(x) = g'(x)$$

inoltre:

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f(x)| &= |f_n(a) + \int_a^x f'_n(t) dt - l - \int_a^x g(t) dt| \leq \\ &\leq |f_n(a) - l| + \left| \int_a^x f'_n(t) - g(t) dt \right| \leq \\ &\leq |f_n(a) - l| + \int_a^x |f'_n(t) - g(t)| dt \leq \\ &\leq |f_n(a) - l| + \int_a^b |f'_n(t) - g(t)| dt \end{aligned}$$

di conseguenza:

$$\sup_{x \in [a,b]} |f_n(x) - f(x)| \leq |f_n(a) - l| + \int_a^b |f'_n(t) - g(t)| dt \rightarrow 0$$

la tesi segue per confronto. \square

9.16 Serie di funzioni

Definizione 9.17 (Serie di funzioni). *Sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni. Si definisca la successione di funzioni s_n (detta successione delle somme parziali) come:*

$$s_n := \sum_{k=1}^n f_k(x)$$

si definisce serie di funzioni di termine generale f_n , se esiste, la funzione $s : \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}$:

$$s := \lim s_n$$

Notazione 32. $\sum f_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$

9.17.1 Convergenza totale

Definizione 9.18 (Convergenza totale). *Sia $\sum f_n$ una serie di funzioni, con $f_n : \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}$, si dice che $\sum f_n$ converge totalmente se esiste una successione numerica $M_n \geq 0$ t.che:*

- $\sup_{x \in \mathcal{I}} |f_n(x)| \leq M_n$
- $\sum M_n$ converge