Dénombrement

Exercice 1.

1. Combien de fois faut il lancer un dé pour être certain d'obtenir au moins deux fois le même chiffre ?
2. Combien de fois faut il lancer deux dés pour être certain d'obtenir le même total au moins deux fois ?
3. Combien de fois faut il lancer un dé pour être certain d'obtenir au moins quatre fois le même chiffre ?

Exercice 2. On jette 51 miettes sur une table carrée de 1 m de côté. Montrez qu'il y a toujours au moins un triangle formé de 3 miettes dont l'aire vaut au plus $200cm^2$.

Exercice 3. Montrez que dans tout groupe de six personnes, trois se connaissent mutuellement ou trois ne se sont jamais vues.

Exercice 4. Pour accéder à un service sur Internet, vous devez taper un mot de passe de 4 lettres choisies dans l'alphabet latin majuscule (26 caractères).

1. Combien de mots de passe de 4 lettres peut-on créer ?
2. Combien d'utilisateurs peuvent utiliser le service si un mot de passe ne peut pas être utilisé par deux utilisateurs différents.
3. Combien d'utilisateurs peuvent utiliser le service si un mot de passe ne peut pas être utilisé par cinq utilisateurs différents (mais éventuellement par quatre).
4. Combien de mots de passe de 4 lettres distinctes peut-on créer ?

Exercice 5. La société YOPMILK fabrique des yaourts aux fruits avec dix parfums différents. Le directeur des ventes propose de constituer des lots de quatre pots de parfums tous différents.

1. Combien de lots distincts peut-on former de cette façon ?
2. Combien de lots distincts peut-on former de cette façon sachant qu'ils ne doivent pas contenir simultanément un pot à la fraise et un à la framboise ?
3. Le service commercial abandonne cette idée. Désormais il souhaite des lots de quatre pots avec quatre parfums quelconques, c'est-à-dire non tous différents. Combien de lots distincts peut-on former ?

Exercice 6. Dans un club de sport, 36 membres jouent au tennis, 28 jouent au squash et 18 jouent au badminton. En outre, 22 membres jouent au tennis et au squash, 12 pratiquent le tennis et le badminton, 9 jouent au squash et au badminton et pour finir 4 pratiquent les 3 sports. Combien de membres de ce club pratiquent au moins un des trois sports ?

Exercice 7. On considère des jeux de données permettant de tester la robustesse de l'implémentation d'un algorithme, dont 8 sont jugés d'une complexité "élevée" et 6 sont jugés de complexité "moyenne". On choisit au hasard des jeux de données qu'on soumet à l'algorithme, chaque jeu de données ayant la même probabilité d'être choisi.

1. On tire simultanément 5 jeux de données. Quelle est la probabilité d'obtenir :
   - 3 jeux de complexité élevée et 2 de complexité moyenne ?
   - des jeux de données de complexités différentes (pas tous de complexité élevée ou tous de complexité moyenne) ?
2. On tire successivement 5 jeu de données, en s'autorisant à choisir le même jeu de données plus d'une fois. Quelle est la probabilité d'avoir :
   - 3 jeux de complexité élevée puis 2 de complexité moyenne (dans cet ordre) ?
   - 3 jeux de complexité élevée puis 2 de complexité moyenne (peu importe l'ordre dans lequel ils sont apparus) ?

Exercice 8. Un jardinier mélange 4 oignons de tulipes rouges avec 4 oignons de tulipes jaunes. Il réalise une bordure en plantant en ligne au hasard les 8 oignons.
Calculer la probabilité des événements suivants :

1. A : Les 4 tulipes rouges sont les unes à côté des autres.
2. B : Les tulipes rouges et jaunes sont alternées sur la bordure
3. C : Les 3 tulipes situées à droites de la bordures sont rouges

Exercice 9. Une étagère contient trois romans, deux livres de mathématique et un de chimie. Combien de manières peut on ranger l'étagère si :

1. aucune restriction n'est mise sur le rangement,
2. les livres de mathématique doivent être rangés ensemble et les romans aussi,
3. seuls les romans doivent être rangés ensemble,
4. aucune restriction n'est mise, mais les ouvrages d'une même collection sont indiscernables,
5. les livres de mathématique doivent être rangés ensemble et les romans aussi, mais les ouvrages d'une même collection sont indiscernables ?

Exercice 10. Soient $E = \{1, \dots, p\}$ et $F = \{1, \dots, n\}$. Déterminer en fonction de n et p :

1. le nombre d'applications de E dans F,
2. le nombre d'applications injectives de E dans F,
3. le nombre d'applications strictement croissantes de E dans F,
4. le nombre d'applications croissantes de E dans F,
5. le nombre d'applications surjectives de E dans F.

Exercice 11. Soient $n, p \in \mathbb{N}$ tels que $p \leq n$.

1. Montrer qu'il y a autant de façons de tirer p éléments parmi n dans le désordre et sans remise que de tirer $n - p$ éléments parmi n dans le désordre et sans remise. En déduire que
$$C_n^{n-p} = C_n^p$$
2. En dénombrant de deux façons différentes le nombre de façons de tirer $p + 1$ éléments parmi $n + 1$, montrer que
$$C_{n+1}^{p+1} = C_n^p + C_n^{p+1}$$
3. En dénombrant de deux façons différentes le nombre de sous-ensemble d'un ensemble à n éléments, montrer que
$$2^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k$$
4. Retrouver ces formules par le calcul.

Exercice 12. Lorsqu'on développe $(a + b)^n$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, combien de fois apparaît le monôme $a^k b^{n-k}$? Retrouver la formule du binôme.

Exercice 13. Soit E un ensemble fini à n éléments. Calculer
$$\sum_{X \subset E} \mathrm{Card}\,(X)\,, \qquad \sum_{X,Y \subset E} \mathrm{Card}\,(X \cap Y) \text{ et } \sum_{X \subset E} \mathrm{Card}\,(X \cup Y)$$
On pourra utiliser la fonction caractéristique $\mathbf{1}_X$ de l'ensemble $X \subset E$ et le fait que :
$$\mathrm{Card}\,(X) = \sum_{x \in E} \mathbf{1}_X(x)$$

Université Toulouse III Année 2018-2019
TD Mathématiques discrètes **Feuille n° 4**

Dénombrement (Méthodes)

☞ **Comment déterminer le cardinal d'un ensemble ?**

- On rappelle trois principes :
  1. Pour dénombrer une **réunion disjointe** de sous-ensembles, ce qui revient à considérer un cas **ou bien** un autre ou bien un autre, etc..., on effectue la **somme** des cardinaux de chaque sous-ensemble.
  2. Pour dénombrer un **produit cartésien** d'ensembles, ce qui revient à considérer un cas **puis** un autre puis un autre, etc..., on effectue le **produit** des cardinaux de chaque ensemble.
  3. Parfois il est plus facile de dénombrer le complémentaire d'un ensemble. Par exemple, si $A \subset B$ et que l'on connaît Card (B) et Card $\left(\overline{A}\right)$, alors Card $(A) =$ Card $(B) -$ Card $\left(\overline{A}\right)$.
- On se ramène à un des deux cas suivants :
  1. Tirages de p éléments parmi n :

Tirages	Ordonnés	Non ordonnés
Sans remise	$A_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!}$	$C_n^p = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$
Avec remise	n^p	$K_n^p = C_{n+p-1}^p$

  2. Rangement de p objets dans n cases :

Objets	Discernables	Indiscernables
Un seul dans chaque case	$A_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!}$	$C_n^p = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$
Éventuellement plusieurs dans chaque case	n^p	$K_n^p = C_{n+p-1}^p$

☞ **Comment calculer des probabilités sous l'hypothèse d'équiprobabilité ?**

Soit $\mathbf{P}$ l'équiprobabilité défini sur un univers fini Ω. On souhaite calculer $\mathbf{P}(A)$ pour un événement $A \subset \Omega$:

1. Dénombrer le cardinal de Ω.
2. Dénombrer le cardinal de A.
3. Calculer $\mathbf{P}(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)}$