Université Toulouse III — Année 2016-2017
Mathématiques discrètes — **Durée: 2h**

Examen

Les documents et les calculatrices ne sont pas autorisés pour l'épreuve.

Exercice 1 - Métro. Considérons le plan de métro de Toulouse donné par la figure suivante :

Soit E l'ensemble des stations de métro. On définit les relations binaires suivantes en posant pour tout $x, y \in E$:

$$x\mathcal{R}y \iff x \text{ est sur la même ligne que } y$$
$$x\mathcal{S}y \iff \text{on peut aller de } x \text{ à } y \text{ en métro avec éventuellement un changement}$$

1. Est-ce que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence ? Justifier.
2. Montrer que $\mathcal{S}$ est une relation d'équivalence.
3. Combien de classes d'équivalence a $\mathcal{S}$?

Exercice 2 - Relation d'ordre. Sur $\mathbb{N}^*$ on définit la relation binaire $\mathcal{R}$ en posant pour tout $x, y \in \mathbb{N}^*$:

$$x\mathcal{R}y \iff \text{il existe } n \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } y = x^n$$

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre sur $\mathbb{N}^*$.
2. Tracer le diagramme de Hasse de $\mathcal{R}$ sur l'ensemble $E = \{1, 2, 3, 4, 8, 9, 16\}$.
3. Est-ce que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre total ? Justifier.
4. Soit $A = \{2, 4, 16\}$. Déterminer le plus grand élément et le plus petit élément de A pour la relation $\mathcal{R}$.
5. Soit $B = \{2, 4, 8, 16\}$. Est-ce que B admet un plus grand élément pour la relation $\mathcal{R}$? Déterminer les éléments maximaux de B pour cet ordre.

Exercice 3 - Fonctions sur les mots. Soit $\mathcal{A} = \{0, 1\}$ un alphabet, on note $\mathcal{A}^*$ l'ensemble des mots sur $\mathcal{A}$. On rappelle que pour deux mots u et v de $\mathcal{A}^*$, on note $u.v$ la concaténation de u et v, cela correspond à écrire le mot u suivit du mot v. On définit la fonction miroir $f : \mathcal{A}^* \to \mathcal{A}^*$ tel que pour $u = u_1u_2 \dots u_n \in \mathcal{A}^*$ on a $f(u) = u_nu_{n-1} \dots u_1$. En d'autre terme la fonction f prend en argument un mot u et renverse l'ordre des lettres, par exemple on a $f(11001) = 10011$.
On définit la fonction $\texttt{Pal} : \mathcal{A}^* \to \mathcal{A}^*$ tel que pour $u \in \mathcal{A}^*$ on a $\texttt{Pal}(u) = u.f(u)$.

1. Calculer $f \circ f(101011)$ et $\texttt{Pal}(1011)$.
2. Montrer que $f \circ f$ est l'identité.
3. Montrer que f est bijective.

4. Est-ce que `Pal` est injective ? Est-ce que `Pal` est surjective ? Justifier.
5. Soit M l'ensemble des mots contenant autant de 0 que de 1.
   Soit X l'ensemble défini de manière inductive par :
   Base : $B = \{\varepsilon\}$;
   Induction : si $u \in X$, on a $\varphi_0(u) \in X$ et $\varphi_1(u) \in X$ où

$$\varphi_0 : \begin{array}{ccc} \mathcal{A}^* & \longrightarrow & \mathcal{A}^* \\ u & \longmapsto & 0u0 \end{array} \qquad \varphi_1 : \begin{array}{ccc} \mathcal{A}^* & \longrightarrow & \mathcal{A}^* \\ u & \longmapsto & 1u1 \end{array}$$

   (a) A-t-on $X \subset M$? Justifier.
   (b) A-t-on $M \subset X$? Justifier.
   (c) **Question bonus :** Donner une définition non inductive de X.

Exercice 4 - Poissons. L'ensemble $E = \{P1, P2, P3, P4, P5, P6, P7\}$ désignent sept espèces de poissons. Les trois parties de cet exercice sont **indépendantes**.

• **Partie I :**

1. Soit $A = \{P1, P4\}$ l'ensemble des espèces présentes dans l'aquarium d'Albert et $B = \{P1, P2, P3, P6\}$ l'ensemble des espèces présentes dans l'aquarium de Bénédicte. Déterminer $A \cup B$ et $B \cap A$.
2. On souhaite réaliser un aquarium contenant quatre poissons d'espèces différentes. Déterminer combien il y a de possibilités.
3. Alice, Bob et Charlie choisissent chacun un poisson d'espèces différentes. Déterminer combien il y a de possibilités.
4. Alice, Bob et Charlie choisissent chacun un poisson d'espèces pas forcément différentes. Déterminer combien il y a de possibilités.

• **Partie II :** On décrit les incompatibilités d'espèces dans le tableau ci-dessous, un X signifie que les poissons ne peuvent pas cohabiter dans un même aquarium. On cherche à déterminer le nombre minimum d'aquariums qu'il faut pour avoir ces sept poissons.

	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7
P1		X	X		X	X	X
P2	X		X			X	
P3	X	X		X		X	
P4			X		X		X
P5	X			X		X	
P6	X	X	X		X		
P7	X			X			

1. A quel problème de coloriage sur les graphes peut-on se ramener ?
2. Quel nombre minimum d'aquariums faut-il ? On justifiera la réponse et on montrera que l'on ne peut pas utiliser moins d'aquariums.

• **Partie III :** Une usine produit des sushis à l'aide des sept espèces de poissons. On modélise une production par une suite infinie $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeur dans $E = \{P1, P2, P3, P4, P5, P6, P7\}$, c'est à dire que pour $n \in \mathbb{N}$, le terme u_n correspond à l'espèce du $n^{\text{ème}}$ poisson transformé en sushi. On note $\mathcal{C}$ l'ensemble de ces suites.

1. Soit $f : \mathbb{N} \to \mathcal{C}$ une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathcal{C}$. On note $f(n)_k$ le $k^{\text{ème}}$ terme de la suite $f(n)$. On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$v_n = \begin{cases} P1 & \text{si } f(n)_n \neq P1 \\ P2 & \text{si } f(n)_n = P1 \end{cases}$$

   Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'a pas d'antécédent par f.
2. Montrer que $\mathcal{C}$ n'est pas dénombrable.
3. **Question bonus :** Montrer qu'il existe une suite de $\mathcal{C}$ qui ne peut pas être réalisée par un programme informatique. On admettra que l'ensemble des programmes informatiques est dénombrable.

Université Toulouse III Année 2016-2017
Mathématiques discrètes **Durée: 2h**

Examen (Solutions)

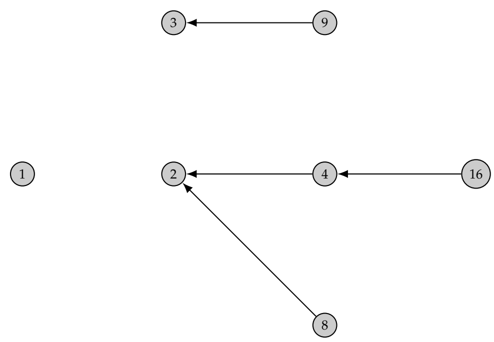
En comptant les points bonus l'examen est noté sur 23 points. On laissera la note tel quel sur 20.

Correction 1 **[3 points]**

1. *[1 point]* $\mathcal{R}$ n'est pas une relation d'équivalence car elle n'est pas transitive : On a (Capitole$\mathcal{R}$Jean Jaurès) et (Jean Jaurès$\mathcal{R}$Carmes) mais Capitole n'est pas en relation avec Carmes par $\mathcal{R}$.
2. *[1 point]* $\mathcal{S}$ est une relation d'équivalence car :
   — $\mathcal{S}$ est réflexive : de toute station on peut aller à elle même.
   — $\mathcal{S}$ est symétrique : si on va d'une station x à une station y, on peut aller de y à x en faisant le chemin inverse.
   — $\mathcal{S}$ est transitive : si on peut aller de x à y et de y à z, on peut aller de x à z en faisant un changement en y.
3. *[1 point]* Comme de toute station on peut aller à n'importe quelle autre, on en déduit qu'il y a une seule classe d'équivalence par $\mathcal{S}$.

Correction 2 **[4 points]**

1. *[1 point]* $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre sur $\mathbb{N}^*$ car :
   — $\mathcal{R}$ est réflexive : pour tout $x \in \mathbb{N}^*$, $x = x^1$ donc $x\mathcal{R}x$.
   — $\mathcal{R}$ est transitive : si $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$ alors il existe $n, n' \in \mathbb{N}^*$ tels que $y = x^n$ et $z = y^{n'}$, on a donc $z = y^{n'} = (x^n)^{n'} = x^{nn'}$ donc $z\mathcal{R}x$.
   — $\mathcal{R}$ est antisymétrique : si $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}x$ alors il existe $n, n' \in \mathbb{N}^*$ tels que $y = x^n$ et $x = y^{n'}$, on a donc $x = y^{n'} = (x^n)^{n'} = x^{nn'}$ donc $nn' = 1$. Comme $n, n' \in \mathbb{N}^*$, on a donc $n = n' = 1$ d'ou $x = y$.
2. *[1 point]*



Remarque : Mettre les points si l'étudiant a tracé le diagramme sagittal de la relation plutôt que le diagramme de Hasse.

3. *[0.5 point]* $\mathcal{R}$ n'est pas une relation d'ordre total car 8 et 16 ne sont pas comparables.
4. *[0.75 point]* Soit $A = \{2, 4, 16\}$. 16 est le plus grand élément et 2 le plus petit élément de A.
   Remarque : Il y'a des chances que les étudiants aient confondu avec l'ordre classique, parfois cela peut être ambiguë comme on ne demande pas de preuve explicite. En cas de doute, mettre les points tout de même.
5. *[0.75 point]* Soit $B = \{2, 4, 8, 16\}$. B n'admet pas de plus grand élément car 8 et 16 ne sont pas comparables. Les éléments maximaux de B sont 8 et 16.

Correction 3 **[6 points+1 bonus]**

1. *[1 point]* $f \circ f(101011) = 101011$ et $\texttt{Pal}(1011) = 10111101$.
2. *[1 point]* Soit $u = u_1 u_2 \dots u_n \in \mathcal{A}^*$, on a

$$f \circ f(u) = f(f(u_1 u_2 \dots u_n)) = f(u_n u_{n-1} \dots u_1) = u_1 u_2 \dots u_n = u$$

   Donc $f \circ f$ est l'identité.

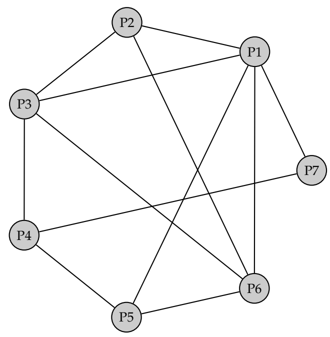
3. *[1 point]* f est surjective : soit $w \in \mathcal{A}^*$, on a $f(f(w)) = w$ donc $u = f(w)$ est un antécédent de w par f.
   f est injective : soit u et u' deux mots de $\mathcal{A}^*$ tels que $f(u) = f(u')$, on a $u = f \circ f(u) = f \circ f(u') = u'$ donc f est injective.
   Comme f est surjective et injective alors f est bijective.
   Remarque : on peut aussi utiliser le fait que f est la fonction réciproque de f.
4. *[1 point]* $\texttt{Pal}$ est injective car si u et u' sont deux mots de $\mathcal{A}^*$ tels que $\texttt{Pal}(u) = \texttt{Pal}(u')$ on a $u.f(u) = u'.f(u')$. Comme u et $f(u)$ ont la même longueur et u' et $f(u')$ ont la même longueur, on en déduit que u et u' ont la même longueur. Comme u et u' sont préfixes du même mot $u.f(u) = u'.f(u')$ et qu'ils on même longueur, on a $u = u'$.
   $\texttt{Pal}$ n'est pas surjective car l'image de $\texttt{Pal}$ est de longueur paire. En particulier 1 n'a pas d'antécédent.
5. *[2 point+1 pour le bonus]*
   (a) On n'a pas $X \subset M$. En effet le mot 00 appartient à X car $00 = \varphi_0(\varepsilon)$, mais $00 \notin M$.
   (b) On n'a pas $M \subset X$. En effet le mot 10 appartient à M mais pas à X car les mots de X qui ne sont pas ε commence et termine par la même lettre. Cela vient du fait qu'un mot $u \neq \varepsilon$ de X s'écrit comme un mot de X auquel on a appliqué φ_0 ou φ_1. Dans les deux cas, soit u commence et termine par 0, soit c'est par 1.
   Remarque : Si l'étudiant ne donne que le contre exemple sans vraiment justifier, il faut mettre les points. En fait le sujet est mal posé, il aurait fallut définir M comme l'ensemble des mots qui a un nombre pair de 0 et de 1 pour forcer une preuve inductive.
   (c) **Question bonus :** L'ensemble X est l'ensemble des mots palindromiques de longueur paire. On a $X = \texttt{Pal}(\mathcal{A}^*)$, c'est à dire les mot palyndromiques de longueur paire.
   • Montrons de manière inductive que $X \subset \texttt{Pal}(\mathcal{A}^*)$, autrement dit que $\forall u \in X$ il existe $v \in \mathcal{A}^*$ tel que $u = \texttt{Pal}(v)$:
   Base : la propriété est vraie pour la base car $\texttt{Pal}(\varepsilon) = \varepsilon$;
   Induction : si $u \in X$ tel qu'il existe $v \in \mathcal{A}^*$ vérifiant $\texttt{Pal}(v) = u$, on a :
   $$\varphi_0(u) = 0u0 = 0vf(v)0 = 0vf(0v) = \texttt{Pal}(0v) \text{ et } \varphi_1(u) = 1u1 = 1vf(v)1 = 1vf(1v) = \texttt{Pal}(1v)$$
   On en déduit par induction que $X \subset \texttt{Pal}(\mathcal{A}^*)$.
   • Tout les mots de $\texttt{Pal}(\mathcal{A}^*)$ sont de taille paire. Pour montrer $\texttt{Pal}(\mathcal{A}^*) \subset X$, on montre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que pour tout $u \in \mathcal{A}^*$ de taille n on a $\texttt{Pal}(u) \in X$.
   Initialisation : pour $n = 0$ on a $u = \varepsilon$ donc $\texttt{Pal}(\varepsilon) = \varepsilon \in X$;
   Héridité : supposons que pour u de taille n on a $\texttt{Pal}(u) \in X$. Soit u' de taille $n+1$. On peut décomposer $u' = av$ ou v est un mot de taille n et $a \in \{0, 1\}$. On a :
   $$\texttt{Pal}(u') = \texttt{Pal}(av) = avf(av) = avf(v)a = \varphi_a(vf(v)) = \varphi_a(\texttt{Pal}(v)).$$
   Comme $\texttt{Pal}(v) \in X$, on a $\texttt{Pal}(u') \in X$.

Correction 4 • **<u>Partie I :</u>[3 points]**

1. *[0.75 point]* On a $A \cup B = \{P1, P2, P3, P4, P6\}$ et $A \cap B = \{P1\}$.
2. *[0.75 point]* Cela revient à choisir 4 poissons parmi 7 sans remise et de manière non ordonné, il y a $C_7^4 = \frac{7\times6\times5\times4}{4\times3\times2\times1} = 7 \times 5 = 35$ possibilités.
3. *[0.75 point]* Cela revient à choisir 3 poissons parmi 7 sans remise et de manière ordonné, il y a $7 \times 6 \times 5 = 210$ possibilités.
4. *[0.75 point]* Cela revient à choisir 3 poissons parmi 7 avec remise et de manière ordonné, il y a $7 \times 7 \times 7 = 343$ possibilités.

• **<u>Partie II :</u>[3 points]**

1. *[1 point]* On considère le graphe G dont les sommets sont les poissons et il y a une arête entre deux poissons s'ils ne peuvent pas cohabiter. Donner une attribution des aquarium compatible revient à colorier les sommets du graphes de telle sorte que deux sommets adjacents soient de couleur différentes. Chaque couleur correspond à un aquarium. Chercher le nombre minimum d'aquariums revient à chercher le nombre chromatique du graphe G.



2. *[2 points]* Le graphe contient un graphe complet à 4 sommets (le graphe induit par P1,P2,P3,P6) donc $4 \leq \chi(G)$.
   Avec l'algorithme glouton ou Welsh-Powell on trouve l'affectation suivante qui permet de dire que $4 \geq \chi(G)$.

P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7
1	4	2	1	2	3	2

3. *[2 points]*

• **<u>Partie III :</u> [2 points + 1 bonus]**
Une usine produit des sushis à l'aide des sept espèces de posions. On modélise une production par une suite infinie $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeur dans $E = \{P1, P2, P3, P4, P5, P6, P7\}$, c'est à dire que pour $n \in \mathbb{N}$, le terme u_n correspond à la $n^{\text{ème}}$ espèce de poisson transformée en sushi. On note $\mathcal{C}$ l'ensemble de ces suites.

1. *[1 point]* Soit $k \in \mathbb{N}$ un antécédent de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par f. Le $k^{\text{ème}}$ terme de la suite $f(k)$ est différent de v_k donc $f(k)$ ne peut pas être égal à $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On en déduit que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne peut pas avoir d'antécédent par f.
2. *[1 point]* La question précédente montre qu'il n'existe pas d'application surjective de $\mathbb{N}$ dans $\mathcal{C}$, on en déduit qu'il ne peut pas exister de bijection entre ces deux ensembles donc $\mathcal{C}$ n'est pas dénombrable.
3. *[1 point]* Comme $\mathcal{C}$ n'est pas dénombrable, il n'existe pas de surjection de $\mathbb{N}$ dans $\mathcal{C}$. L'ensemble des programmes informatique est dénombrable, il est donc en bijection avec $\mathbb{N}$. On en déduit qu'il n'existe pas de surjection de l'ensemble des programmes informatique dans $\mathcal{C}$. Ainsi il existe un élément de $\mathcal{C}$ qui ne peut pas être réalisée par un programme informatique.