Contrôle Terminal Logique 1 – Corrigé (25/05/2018)

L1, Année 2017/2018

Durée : 2 heures.

Aucun document n'est autorisé

1 Modélisation en logique propositionnelle – TouIST (4 points)

Exercice 1. Une usine doit stocker un certain nombre de produits chimiques dans des hangars. Afin d'éviter tout accident, il est nécessaire de ne pas stocker ensemble des produits chimiques incompatibles.

On s'intéresse donc à modéliser en logique un certain nombre d'exigences que l'on souhaitera peut-être plus tard voir être vérifiées. Pour cela, on se donne donc deux ensembles finis : P pour l'ensemble des produits ; S pour l'ensemble des salles. On se donne aussi des propositions : $I_{p,s}$ indique que le produit p est stocké dans la salle s ; $C_{pa,pb}$ indique que les deux produits pa et pb sont compatibles.

Pour chacune des formules ci-dessous (1 à 8), dites quelle phrase (a à h) elle formalise. Pas de justification demandée. À chaque formule correspond une seule phrase, mais une même phrase peut correspondre à plusieurs formules. Vous devez remplir la Table 1 fournie en annexe.

1. $\bigwedge_{s\in S} \bigvee_{p\in P} I_{p,s}$
2. $\bigwedge_{pa\in P} \bigwedge_{pb\in P} \bigwedge_{s\in S} (I_{pa,s} \wedge I_{pb,s} \rightarrow C_{pa,pb})$
3. $\bigwedge_{s\in S} \bigvee_{pa\in P} \bigvee_{pb\in P/pa\neq pb} (I_{pa,s} \wedge I_{pb,s} \wedge C_{pa,pb})$
4. $\bigwedge_{p\in P} \bigvee_{s\in S} I_{p,s}$
5. $\bigwedge_{pa\in P} \bigwedge_{pb\in P} \bigwedge_{s\in S} (C_{pa,pb} \vee \neg I_{pa,s} \vee \neg I_{pb,s})$
6. $\bigwedge_{p\in P} \bigwedge_{sa\in S} \left(I_{p,sa} \rightarrow \bigwedge_{sb\in S/sa\neq sb} \neg I_{p,sb} \right)$
7. $\bigvee_{s\in S} \bigwedge_{p\in P} \neg I_{p,s}$
8. $\bigvee_{p\in P} \bigwedge_{s\in S} I_{p,s}$

A. Tout produit est stocké dans au moins une salle

B. Un produit ne peut pas être stocké dans plusieurs salles

C. Toute salle contient au moins un produit

D. Deux produits quelconques dans une même salle sont compatibles

E. Au moins un produit n'est dans aucune salle

F. Il y a un produit qui est dans toutes les salles

G. Dans toute salle, on trouve deux produits compatibles

H. Au moins une salle est vide

2 Raisonnement en logique propositionnelle (6 points)

Exercice 2. **(2pts)** Appliquez à l'ensemble de clauses suivant l'algorithme de résolution jusqu'à son arrêt : $\{\{p,\neg q\},\{\neg r,s\},\{\neg p,s\},\{q,r\}\}$. Quelle est la signification du résultat obtenu ?

Res($1:\{\mathbf{p},\neg q\}$, $3:\{\neg\mathbf{p},s\}$) $= 5:\{\neg q,s\}$
Res($1:\{p,\neg\mathbf{q}\}$, $4:\{\mathbf{q},r\}$) $= 6:\{p,r\}$
Res($2:\{\neg\mathbf{r},s\}$, $4:\{q,\mathbf{r}\}$) $= 7:\{q,s\}$
Res($1:\{p,\neg\mathbf{q}\}$, $7:\{\mathbf{q},s\}$) $= 8:\{p,s\}$
Res($2:\{\neg\mathbf{r},s\}$, $6:\{p,\mathbf{r}\}$) $= 8:\{p,s\}$ (déjà présente)
Res($3:\{\neg\mathbf{p},s\}$, $6:\{\mathbf{p},r\}$) $= 9:\{r,s\}$
Res($2:\{\neg\mathbf{r},s\}$, $9:\{\mathbf{r},s\}$) $= 10:\{s\}$
Res($3:\{\neg\mathbf{p},s\}$, $8:\{\mathbf{p},s\}$) $= 10:\{s\}$ (déjà présente)
Res($4:\{\mathbf{q},r\}$, $5:\{\neg\mathbf{q},s\}$) $= 9:\{r,s\}$ (déjà présente)
Res($5:\{\neg\mathbf{q},s\}$, $7:\{\mathbf{q},s\}$) $= 10:\{s\}$ (déjà présente)

L'ensemble des résolvantes est saturé et ne contient pas la clause vide donc l'ensemble de clauses est satisfiable.

0,25pt par résolvante ($5 : \{\neg q, s\}$**,** $6 : \{p, r\}$**,** $7 : \{q, s\}$**,** $8 : \{p, s\}$**,** $9 : \{r, s\}$**,** $10 : \{s\}$**)**
0,5pt pour la conclusion (ensemble saturé et pas la clause vide donc satisfiable)
+ 0,5 (bonus) si un modèle est donné, par exemple :
$v(s) = 1 : \{\{p, \neg q\}, \cancel{\{\neg r, s\}}, \cancel{\{\neg p, s\}}, \{q, r\}\} = \{\{p, \neg q\}, \{q, r\}\}$
$v(q) = 1 : \{\{p, \cancel{\neg q}\}, \cancel{\{q, r\}}\} = \{\{p\}\}$ $\quad$ $v(p) = 1 : \{\{\cancel{p}\}\} = \{\}$ $\quad$ $v(r) = 0/1$

Exercice 3. **(2pts)** La conséquence logique $\{\neg p \vee q, \neg r \vee \neg s, q \to r\} \models \neg p \vee \neg s$ est-elle vraie ? Vous pouvez utiliser la méthode qui vous semble la plus appropriée, mais il faut justifier la réponse.

Toute solution est acceptée à partir du moment où la justification est correcte **(2pts si tout est juste, sinon 1pt si la méthode choisie est correctement décrite, mais avec une erreur dans l'application)**.
Solutions possibles :

1) Par résolution :
$\{\neg p \vee q, \neg r \vee \neg s, q \to r\} \models \neg p \vee \neg s$ est vraie si et seulement si $\{\neg p \vee q, \neg r \vee \neg s, q \to r, \neg(\neg p \vee \neg s)\}$ est insatisfiable.
On considère la base de clauses $\{\{\neg p, q\}, \{\neg r, \neg s\}, \{\neg q, r\}, \{p\}, \{s\}\}$.
$Res(\{\neg p, q\}, \{p\}) = \{q\}$, $Res(\{\neg q, r\}, \{q\}) = \{r\}$, $Res(\{\neg r, \neg s\}, \{r\}) = \{\neg s\}$, $Res(\{s\}, \{\neg s\}) = \{\}$

2) Par raisonnement sur les interprétations :
Considérons un modèle des hypothèses. En particulier, nous avons $v(q \to r) = max(1 - v(q), v(r)) = 1$. Il est donc impossible d'avoir $v(q) = 1$ et $v(r) = 0$.
<u>Cas 1</u> : $v(q) = 0$
$v(\neg p \vee q) = max(1 - v(p), v(q)) = max(1 - v(p), 0) = 1 - v(p)$, or $v(\neg p \vee q) = 1$ par hypothèse donc $v(p) = 0$ d'où $v(\neg p \vee \neg s) = max(1 - v(p), 1 - v(s)) = max(1, 1 - v(s)) = 1$.
<u>Cas 2</u> : $v(r) = 1$
$v(\neg r \vee \neg s) = max(1 - v(r), 1 - v(s)) = max(0, 1 - v(s)) = 1 - v(s)$, or $v(\neg r \vee \neg s) = 1$ par hypothèse donc $v(s) = 0$. d'où $v(\neg p \vee \neg s) = max(1 - v(p), 1 - v(s)) = max(1 - v(p), 1) = 1$.
Dans les deux cas, le modèle des hypothèses est aussi un modèle de la conclusion, donc la conséquence logique est vraie.

3) Par raisonnement sur les interprétations (autre version) :
Considérons un modèle des hypothèses.
Cas $v(p) = 0$: alors $v(\neg p \vee \neg s) = 1$
Cas $v(p) = 1$: puisque $v(\neg p \vee q) = 1$, on a $v(q) = 1$. Puisque $v(q \to r) = 1$, on a $v(r) = 1$. Puisque $v(\neg r \vee \neg s) = 1$, on a $v(\neg s) = 1$. Ainsi $v(\neg p \vee \neg s) = 1$.

4) En utilisant une table de vérité (mais c'est long !) :

p	q	r	s	$\neg p \lor q$	$\neg r \lor \neg s$	$q \to r$	$\{\neg p \lor q, \neg r \lor \neg s, q \to r\}$	$\{\neg p \lor \neg s\}$
0	0	0	0	1	1	1	$\boxed{1}$	$\boxed{1}$
0	0	0	1	1	1	1	$\boxed{1}$	$\boxed{1}$
0	0	1	0	1	1	1	$\boxed{1}$	$\boxed{1}$
0	0	1	1	1	0	1	0	1
0	1	0	0	1	1	0	0	1
0	1	0	1	1	1	0	0	1
0	1	1	0	1	1	1	$\boxed{1}$	$\boxed{1}$
0	1	1	1	1	0	1	0	1
1	0	0	0	0	1	1	0	1
1	0	0	1	0	1	1	0	0
1	0	1	0	0	1	1	0	1
1	0	1	1	0	0	1	0	0
1	1	0	0	1	1	0	0	1
1	1	0	1	1	1	0	0	0
1	1	1	0	1	1	1	$\boxed{1}$	$\boxed{1}$
1	1	1	1	1	0	1	0	0

Tout modèle des hypothèses est aussi un modèle de la conclusion donc la conséquence logique est vraie.

Exercice 4. **(2pts)** Justifiez précisément vos réponses aux questions suivantes :
Notation binaire.

— Existe-t-il un ensemble H et une formule C tels que $H \models C$ et $H \models \neg C$?
Solution: Il suffit de prendre un ensemble H insatisfiable. Dans ce cas, $H \cup \{\neg C\}$ sera insatisfiable et donc $H \models C$, et $H \cup \{C\}$ sera aussi insatisfiable et donc $H \models \neg C$. **(1pt)**

— Proposer 3 formules F_1, F_2 et F_3 dont la conjonction est insatisfiable mais dont la conjonction de n'importe quelle paire est satisfiable.
Solution: Par exemple, $F_1 = \neg p, F_2 = \neg q, F_3 = p \lor q$. **(1pt)**

3 Modélisation en logique des prédicats (5 points)

Exercice 5. Une liste ℓ peut être vue comme une fonction qui associe une valeur à un indice issu d'un intervalle entier $1, \cdots, N$.
Soit un langage de la logique des prédicats défini par les fonctions suivantes : $FON_0 = \{1, 2, ..., N\}$ (ce sont des constantes) ; $FON_1 = \{\ell\}$ (fonction associant une valeur à un indice) ; $FON_2 = \{+\}$ (l'addition standard)
et les prédicats suivants : $PRED_1 = \{Ind\}$; $PRED_2 = \{=, \neq, \leq, <, Assoc\}$ (comparateurs standard plus le prédicat $Assoc$).
$Ind(x)$ signifie "x est un indice" (ou "x est un entier entre 1 et N inclus", c'est pareil ici) ; $Assoc(x, y)$ signifie "x est un nombre associé à y" (vous n'avez pas à savoir ce que cela signifie pour l'exercice).

1. Traduisez les formules suivantes par des phrases en français COURTES et facilement compréhensibles. Pour ce faire, il est évidemment interdit de paraphraser les formules ou d'utiliser les noms de variables.
La phrase en français doit être grammaticalement correcte. Notation binaire.
   (a) $\forall x.\forall y.((Ind(x) \land Ind(y)) \to x = y \lor \ell(x) \neq \ell(y))$
   Solution: Toutes les valeurs de la liste sont distinctes. **(1pt)**
   (b) $\forall x.\forall y.((Ind(x) \land Ind(y)) \to x + y = N + 1 \to \ell(x) = \ell(y))$
   Solution: La liste est un palindrome. **(1pt)**

(c) $\forall x.(Ind(x) \to \exists y.(Ind(y) \land x \neq y \land Assoc(\ell(x), \ell(y)))$

Solution: Tout nombre de la liste est associé à (au moins) un nombre de la liste d'indice distinct. **(1pt)**

2. Traduisez les phrases suivantes par des formules du langage logique défini ci-dessus.

On accepte des formules équivalentes. Notation binaire.

(a) Les valeurs de la liste sont triées dans l'ordre croissant des indices.

Solution: $\forall x.\forall y.((Ind(x) \land Ind(y)) \to x \leq y \to \ell(x) \leq \ell(y)$ **(1pt)**

(b) Chaque valeur situés strictement APRÈS un certain indice est l'associée d'une valeur située non-strictement AVANT l'indice.

Solution: $\forall x.\forall y.((Ind(x) \land Ind(y)) \to x < y \to \exists z.(Ind(z) \land z \leq x \land Assoc(\ell(z), \ell(y)))$ **(1pt)**

On accepte : $Assoc(\ell(y), \ell(z))$ à la place de $Assoc(\ell(z), \ell(y))$

4 Sémantique de la logique des prédicats (5 points)

Exercice 6. Les figures 1, 2, 3 et 4 (fournies en annexe) représentent quatre interprétations I_1, I_2, I_3 et I_4 d'un langage constitué des six prédicats E, C, R, V, $<$ et F. Le prédicat E représente la propriété *"être une étoile"*, C la propriété *"être un carré"*, R la propriété *"être un rond"*, V la propriété *"être vide"* (l'intérieur de la forme est blanc), $x < y$ le fait que "x est en dessous ou à gauche de y" (x et y sont obligatoirement sur une même ligne ou une même colonne, la diagonale ne compte pas !) et $F(x, y)$ le fait que x et y ont la même forme (étoile, carré ou rond). Les trois formes s'excluent mutuellement. Ainsi, la figure 1 représente un modèle de la formule $\forall x.E(x) \lor C(x)$ (car en effet dans cette figure, tout objet est une étoile ou un carré) et un contre-modèle de la formule $\exists x.\exists y.C(x) \land \neg V(x) \land E(y) \land V(y) \land x < y$ (car il n'y a aucun carré non vide qui soit en dessous ou à gauche d'une étoile vide, rappelons que la diagonale ne compte pas !).

Pour chaque figure vous direz si elle est un modèle ou un contre-modèle de chacune des cinq formules qui suivent les figures (ne vous trompez pas dans les numéros de figure !).

Respectez les consignes suivantes :

— Remplissez le tableau (Table 2 fournie en annexe) en inscrivant $\boxed{\text{M}}$ pour modèle, $\boxed{\text{C}}$ pour contre-modèle dans chacune des cases.

— Les réponses fausses compteront négativement !

Contrôle Terminal Logique 1 – Corrigé (25/05/2018)

L1, Année 2017/2018

Cette feuille est à rendre avec la copie

Numéro étudiant :		**Nom :**	

Formule	Phrase
1	**C**
2	**D**
3	**G**
4	**A**

Formule	Phrase
5	**D**
6	**B**
7	**H**
8	**F**

0,5pt par correspondance correcte

TABLE 1 – Tableaux pour correspondance Formule/Phrase (Exercice 1)

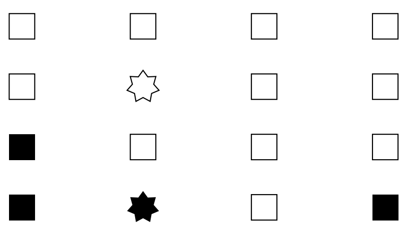

FIGURE 1 – Interprétation I_1

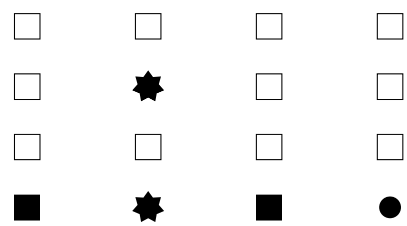

FIGURE 2 – Interprétation I_2

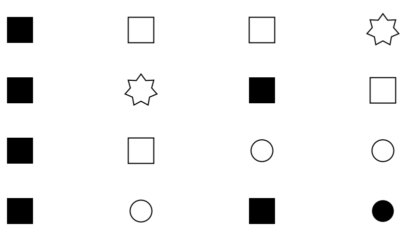

FIGURE 3 – Interprétation I_3

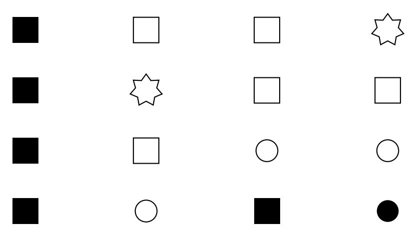

FIGURE 4 – Interprétation I_4

1pt pour une formule (une ligne) pour laquelle les 4 réponses (cases) sont correctes.
0,5pt pour une formule (une ligne) pour laquelle seulement 3 réponses (cases) sont correctes.
0pt pour une formule (une ligne) pour laquelle au plus 2 réponses (cases) sont correctes.

	I_1	I_2	I_3	I_4
$\forall x.E(x) \to V(x)$	**C**	**C**	**M**	**M**
$\forall x.\forall y.(x \neq y) \wedge \neg V(x) \wedge \neg V(y) \wedge F(x,y) \to (x < y) \vee (y < x)$	**C**	**M**	**C**	**C**
$\forall x.R(x) \wedge \neg V(x) \to \exists y.R(y) \wedge V(y) \wedge (x < y)$	**M**	**C**	**M**	**M**
$\forall x.C(x) \wedge \neg V(x) \to \exists y.\neg F(x,y) \wedge (x < y)$	**C**	**M**	**C**	**M**
$\forall x.(\exists y.C(x) \wedge \neg V(x) \wedge E(y) \wedge (y < x)) \to \exists z.C(z) \wedge V(z) \wedge (z < x)$	**M**	**C**	**C**	**M**

TABLE 2 – Tableau pour Modèle/Contre-modèle (Exercice 6)