Thème 2
Algèbre de Boole & Fonction logique

Afin de bien préparer ce thème, il est fortement conseillé d'étudier au préalable le cours.

Objectifs pédagogiques du thème

1- Connaître les propriétés et les théorèmes de l'algèbre de Boole.

2- Mettre les fonctions sous la 1ère et la 2ème forme canonique

3- Établir le tableau de Karnaugh d'une fonction

4- Savoir simplifier l'expression algébrique d'une fonction booléenne avec tableau de Karnaugh et/ou les propriétés et théorèmes de l'algèbre de Boole

5- Savoir faire la synthèse d'une fonction logique complète ou incomplète

Utilisation des propriétés et théorèmes de l'algèbre de Boole

1. Simplification d'expressions booléennes

1. En utilisant T3*, démontrer $\mathbf{F_1} = \bar{\mathbf{a}} + \mathbf{a.b} = \bar{\mathbf{a}} + \mathbf{b}$
2. En utilisant P3, P5, P6*, P7*, démontrer $\mathbf{F_2} = \mathbf{b.c} + \mathbf{a}.\overline{\mathbf{b.c}} = \mathbf{b.c} + \mathbf{a}$, on pourra aussi le démontrer en utilisant uniquement T3*.
3. En utilisant P3, P5, P7* et T3*, démontrer $\mathbf{F_3} = \bar{\mathbf{a}}.\bar{\mathbf{b}} + \mathbf{a.b} + \mathbf{a}.\bar{\mathbf{b}} = \bar{\mathbf{b}} + \mathbf{a}$
4. En utilisant P3*, P5, P7 et T2, démontrer $\mathbf{F_4} = \left(\bar{\mathbf{a}} + \bar{\mathbf{b}}\right).(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \mathbf{a}.\bar{\mathbf{b}} + \bar{\mathbf{a}}.\mathbf{b}$
5. En utilisant P4*, P5, P6 et P6*, démontrer $\mathbf{F_5} = (\mathbf{x}.\bar{\mathbf{y}} + \mathbf{z}).(\mathbf{x} + \bar{\mathbf{y}}).\mathbf{z} = (\mathbf{x} + \bar{\mathbf{y}}).\mathbf{z}$ (facultatif)
6. En utilisant P3, P4*, P5, P6, P6*, P7* et T3*, démontrer,
7. $\mathbf{F_6} = (\mathbf{a} + \mathbf{b}).(\mathbf{a} + \mathbf{b.c}) + \bar{\mathbf{a}}.\bar{\mathbf{b}} + \bar{\mathbf{a}}.\bar{\mathbf{c}} = \mathbf{1}$ (facultatif)

2. Complémentation d'expressions booléennes : théorème de De Morgan

1. Énoncer les théorèmes de De Morgan
2. En utilisant les théorèmes de De Morgan, donner l'expression algébrique du complément des fonctions suivantes :
3. $G_1 = \overline{(\bar{a}.b.c + d)}.f + g$
4. $G_2 = \left(\left(a.b.(\bar{c} + d)\right) + \bar{e}\right).f.\bar{g}$ (facultatif)
5. $G_3 = (a + \bar{b} + c).\overline{(\bar{d} + \bar{e})} + \bar{f}.g + \bar{h}.\bar{\imath}$ (facultatif)

3. Égalités d'expression booléennes

En utilisant les postulats et théorèmes de l'algèbre de Boole d'une part et les tables de vérité d'autre part, démontrer les égalités suivantes :

$H_1 = \bar{x}.\bar{y}.z + \bar{x}.y.z + x.\bar{y} = \bar{x}.z + x.\bar{y}$

$H_2 = x.y + \bar{x}.z + y.z = x.y + \bar{x}.z$ (facultatif)

$H_3 = \overline{(\bar{x}.\bar{z} + \bar{x}.y + \bar{x}.z + x.y)} = x.\bar{y}$ (facultatif)

Forme canonique

Donner les mintermes et maxtermes à 3 variables booléennes.

4. Somme de mintermes : 1ère forme canonique

Représenter $H1 = A.B + \bar{A}.(\bar{B} + C)$ sous la forme d'une somme de mintermes.

5. Produit de maxtermes : 2ème forme canonique

Représenter $H2 = (A + \bar{B}).(A.\bar{C} + B)$ sous la forme d'un produit de maxtermes.

6. Conversion d'une forme canonique à l'autre

Représenter la fonction H1 sous la forme de produits de maxtermes.

Expression de fonctions sous la forme de NAND ou de NOR

1. Rappeler la forme algébrique des fonctions universelles NAND et NOR

7. Exprimer les fonctions suivantes sous forme de NAND

1. $H3 = \bar{A}.B.\bar{D} + B.\bar{C} + A.\bar{C}.D$
2. $H4 = (A + B).(\bar{C} + \bar{D}).(\bar{A} + \bar{B} + \bar{C})$

8. Expression de fonctions sous la forme de NOR

1. Exprimer les fonctions H4 puis H3 précédentes sous forme de NOR

Tables de Karnaugh

9. Cas des mintermes

1. Rappeler l'utilisation des tableaux de Karnaugh avec les mintermes

En utilisant les tables de Karnaugh, simplifier les fonctions complètes suivantes.

2. F_1 représentée par la table de Karnaugh suivante :

wx \ yz	00	01	11	10
00	0	0	0	0
01	0	1	1	0
11	1	1	1	1
10	0	0	0	0

3. F_2 représentée par la table de vérité suivante :

F_2	0	1	1	0	1	1	0	0
x	0	0	0	0	1	1	1	1
y	0	0	1	1	0	0	1	1
z	0	1	0	1	0	1	0	1

4. F_3 représentée par la table de Karnaugh suivante :

ab \ cd	00	01	11	10
00	1	0	0	1
01	1	1	1	0
11	0	0	0	0
10	1	0	0	1

5. $F_4 = \sum m(0, 1, 3, 9, 10, 11)$
6. $F_5(x, y, z) = \bar{x}.\bar{y}.\bar{z} + \bar{x}.y + x.y.\bar{z} + x.z$
7. $F_6(w, x, y, z) = \bar{w}.\bar{x}.\bar{y}.\bar{z} + \bar{w}.\bar{x}.\bar{y}.z + \bar{w}.x.\bar{y}.z + \bar{w}.\bar{x}.y.\bar{z} + w.x\,\bar{y}.z + w.\bar{x}.\bar{y}.\bar{z} + w.\bar{x}.\bar{y}.z$
8. $F_7(w, x, y, z) = \bar{w}.\bar{x}.y.z + \bar{x}.z.y + \bar{w}.\bar{x}.y + \bar{w}.\bar{y}.\bar{z}.\bar{x} + w.\bar{x}.\bar{z}$
9. $F_8(w, x, y, z) = x.\bar{y}.\bar{z} + \bar{w}.\bar{x}.\bar{z}.y + \bar{w}.x.y.z + w.x.y.z + w.\bar{x}.z.\bar{y} + w.y.\bar{x}.\bar{z}$ (Facultatif)
10. $F_9(w, x, y, z) = (\bar{x}.z + \bar{w}.x.z) + w.x\,.(\bar{y} + z) + \bar{z}$
11. $F_{10} = \sum m(3, 4, 5, 11, 12, 13, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 27)$

10. Cas des maxtermes

1. Décrire l'utilisation des tableaux de Karnaugh avec les maxtermes

En utilisant les tables de Karnaugh, simplifier les fonctions complètes suivantes :

2. G_1 représentée par la table de Karnaugh suivante :

wx \ yz	00	01	11	10
00	0	1	1	1
01	0	0	0	1
11	1	0	0	1
10	1	1	1	1

3. $G_2 = \prod M(1, 3, 7, 9, 15)$
4. $G_3 = \prod M(0, 1, 2, 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14)$
5. F_2 décrite par la table de vérité dans la partie 8

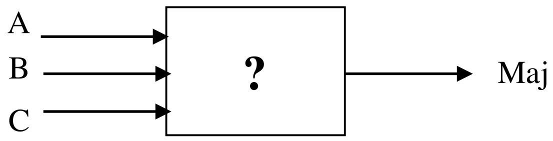
Simplification optimale de fonctions logiques à l'aide des tables de Karnaugh

Il existe des fonctions logiques pour lesquelles certaines combinaisons de variables sont indifférentes, indéterminées ou interdites. Ces combinaisons sont des mintermes, ou des maxtermes, dont la valeur est soit 0, soit 1. Dans une table de vérité ou une table de Karnaugh, on notera ces combinaisons indifférentes *.

Expression d'une fonction booléenne

11. Fonction « majorité »

Soit Maj la fonction booléenne de trois variables A, B et C qui vaut 1 si le nombre de variables à l'état 1 est majoritaire.



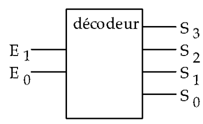
1. Établir la table de vérité de Maj.
2. Trouver les expressions canoniques correspondantes (mintermes, maxtermes).
3. Donner l'équation simplifiée de la fonction.

12. Circuits combinatoires classiques

Les circuits qui suivent sont couramment employés en architecture des systèmes informatiques. Ils constituent les briques de base permettant la création des processeurs, des systèmes d'entrées/sorties, etc. Pour chacun de ces circuits, donnez la table de vérité et les équations des sorties en fonction des entrées.

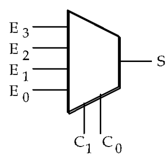
12.1. Décodeur 2 vers 4.

Un décodeur 2 vers 4 met à 1 la sortie S_n dont le numéro est codé sur les entrées E_1 et E_0, et met à 0 les autres sorties.



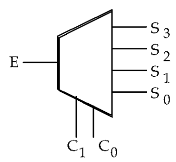
12.2. Multiplexeur 4 vers 1.

Un multiplexeur 4 vers 1 répercute sur sa sortie S la valeur d'un de ses 4 signaux d'entrée E_n. Le numéro du signal d'entrée sélectionné est défini par les signaux de commande C_1 et C_0.



12.3. Démultiplexeur 1 vers 4.

Un démultiplexeur 1 vers 4 répercute sur une de ses sorties S_n la valeur de son entrée E. Le numéro de la sortie sélectionnée est défini par les signaux de commande C_1 et C_0. Les autres sorties sont positionnées à 0.

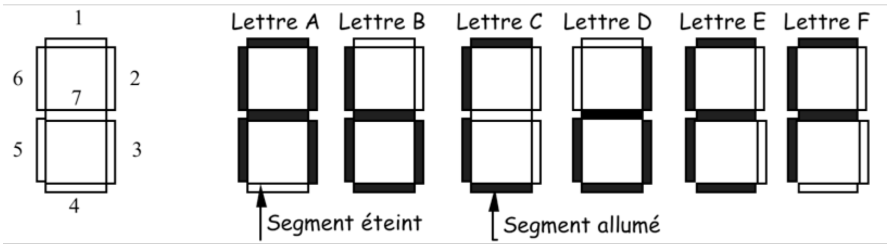


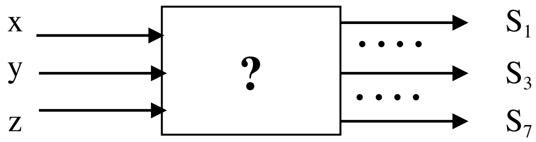
13. Afficheur « 7 segments » de lettres

Le dispositif d'affichage d'une lettre (voir schéma ci-dessous) est constitué de 7 segments lumineux notés 1 à 7. Un segment peut être allumé ou éteint.

On désire construire un circuit combinatoire qui affiche une lettre (A à F, respectivement) en fonction du chiffre décimal (compris entre 0 et 5, respectivement) codé en binaire présenté en entrée de ce circuit.

Une fonction S_i contrôle l'état du segment i, S_i vaut 1 lorsque le segment i doit être allumé, 0 sinon.





1. Donner la table de vérité de la fonction S7 qui gère l'affichage du segment 7.
2. En déduire l'expression algébrique simplifiée de S7, en utilisant une table de Karnaugh.

14. Couleur des cases d'un damier.

Soit un damier rectangulaire comportant 20 cases réparties sur 5 lignes et 4 colonnes. Ces cases sont alternativement noires et blanches et sont numérotées de 1 à 20 comme indiqué sur la figure. On se propose d'établir une fonction booléenne D permettant de déterminer si une case de la grille représentée par son numéro est noire ou blanche. Si la case est noire, alors D doit donner 1.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16
17	18	19	20

1. Donner le nombre de variables en entrée qui correspondent au numéro de la case représenté en binaire.
2. Etablir la table de vérité de la fonction D.
3. Donner, en utilisant une table de Karnaugh, une expression simplifiée de la fonction D par les mintermes (1ère forme canonique).
4. Donner, en utilisant une table de Karnaugh, une expression simplifiée de la fonction D par les maxtermes (2ème forme canonique).

Pour aller plus loin…

[QF] Exprimer $S1 = (\overline{A + C}) + (\overline{B + C + D}) + B + \overline{D}$ et

$G4 = \left(\overline{\bar{A} + B}\right).C + \bar{A}.\bar{B}.\bar{C}.D + \bar{A}.B.D + A.B$ sous les deux formes canoniques.

[QF] Simplifier les fonctions complètes suivantes à l'aide des tables de Karnaugh :

$S2 = \bar{w}.\bar{x}.y.z + w.\bar{y} + \bar{w}.\bar{x}.y + \bar{x}.z.y.w + (\overline{\bar{w} + x + z})$

$S3 = \sum m(0, 1, 4, 5, 6, 12, 14, 16, 17, 20, 22, 28, 30)$

$S4 = w.\bar{y}.z + \bar{w}.\bar{x}.y + x.y.z + w.\bar{x}.y.\bar{z} + \bar{w}.\bar{x}.\bar{y}.z$

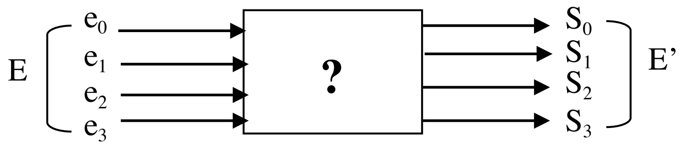
[QF] Simplification de fonctions incomplètes

$H1 = \sum m(3, 4, 13, 14, 19, 20, 21, 23, 28, 29) + \mathrm{d}(5, 7, 12, 26, 27, 30, 31)$

$H2 = \sum m(1,5,10,12,13,14,15) + \mathrm{d}(6,7,9,11)$

[QF] Successeur d'un nombre

On désire construire un circuit combinatoire qui calcule, à partir d'un entier E codé en binaire et compris entre 0 et 10, l'entier E'=E+3 correspondant, codé lui aussi en binaire, et donc compris entre 3 et 13. Au résultat E', on associe quatre fonctions logiques : s_0, s_1, s_2 et s_3, telles que la fonction s_i vaut 1 si le bit de poids 2^i du résultat vaut 1, 0 sinon.



- Donner la table de vérité des fonctions s_i.
- En déduire les expressions algébriques des fonctions s_i, éventuellement simplifiées en utilisant une table de Karnaugh.

[QF] Afficheur « 7 segments » de lettres

En suivant la même démarche que dans l'exercice 13, donner les expressions algébriques simplifiées des fonctions gérant l'allumage des autres segments : S_1 à S_6.

[QF] Fonction « palindrome »

Soit Pal la fonction booléenne de quatre variables A, B C et D qui vaut 1 si ABCD est un palindrome, c'est-à-dire si ABCD est identique à DCBA.

En suivant la même démarche que dans l'exercice 11, donner l'expression algébrique simplifiée de la fonction Pal.

[QF] Comparaison de deux nombres

On veut réaliser un circuit qui compare deux nombres binaires A et B codés chacun sur 2 bits. Le circuit doit pouvoir être capable de détecter si A=B, si A>B et si A<B.

1. Déterminer le nombre d'entrées et de sorties de ce système.
2. Etablir la table de vérité des sorties en fonction des entrées.
3. Ecrire les tables de Karnaugh pour chacune des sorties et en déduire les équations simplifiées.
4. Que se passe-t-il si l'on ne souhaite comparer que les chiffres décimaux allant de 0 à 2 toujours codés en binaire ?