Graph Exercises 1

Gilles
gilles.richard@irit.fr

1 Introduction

On travaille sur matrices adjacences et les MST encore un peu.

2 Exercice 1

On donne le graphe G **oriente** par sa matrice d'adjacence:

	1	2	3	4	5	6
1	0	1	1	0	0	0
2	0	0	1	0	0	0
3	0	0	0	1	1	0
4	0	1	0	0	0	0
5	0	0	1	0	0	0
6	1	0	0	0	0	0

Table 1: Matrice d'adjacence de G

1. Donner une representation graphique de G.

   SOL.:

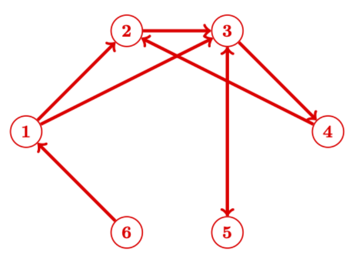

Figure 1: Representation graphique de G

2. Dessiner le graphe de la fermeture transitive $\hat{G}$ de G et en deduire sa matrice d'adjacence.

   SOL.: S'il existe un chemin de x a y dans G, alors on doit rajouter l'arc (x, y) s'il n'existe pas deja dans $\hat{G}$. Donc $\hat{G}$ contient tous les arcs de G plus certains autres.

	1	2	3	4	5	6
1	0	1	1	1	1	0
2	0	0	1	1	1	0
3	0	1	1	1	1	0
4	0	1	1	1	1	0
5	0	0	1	1	0	0
6	1	1	1	1	1	0

Table 2: Matrice d'adjacence de $\hat{G}$

3 Exercice 2

On considere le graphe $G1$ de la figure 2 (considere comme **non oriente**):

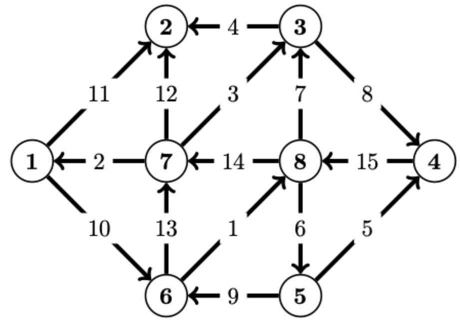

Figure 2: Graphe $G1$

1. En utilisant Kruskal (basique), donner la liste des aretes constituant un MST T pour $G1$. Quel est le poids de T, $\omega(T)$?
   SOL.: $G1$ est connexe donc il admet un MST. On constate que ttes les aretes ont des poids distincts donc le MST est unique. On peut ecrire la liste ordonnee par poids croissant des aretes et on trouve :
   $$\{(6,8),(7,1),(7,3),(3,2),(5,4),(8,5),(8,3)\}$$
   Poids $\omega(T) = 28$. En fait, l'ajout des 7 aretes dans l'ordre des poids croissants ne genere pas de cycle.
2. Appliquer Kruskal avec union-find. On representera l'execution de l'algorithme avec la table habituelle.
   SOL.:

etape	1	2	3	4	5	6	7	8	*arete*
0	1	2	3	4	5	6	7	8	$\emptyset$
1	1	2	3	4	5	**8**	7	**8**	$\{(6,8)\}$
2	**7**	2	3	4	5	8	**7**	8	$\{(6,8),(7,1)\}$
3	7	2	**7**	4	5	8	**7**	8	$\{(6,8),(7,1),(7,3)\}$
4	7	**7**	**7**	4	5	8	7	8	$\{(6,8),(7,1),(7,3),(3,2)\}$
5	7	7	7	**5**	**5**	8	7	8	$\{(6,8),(7,1),(7,3),(3,2),(5,4)\}$
6	7	7	7	5	**8**	8	7	**8**	$\{(6,8),(7,1),(7,3),(3,2),(5,4),(8,5)\}$
7	7	7	**8**	5	8	8	7	**8**	$\{(6,8),(7,1),(7,3),(3,2),(5,4),(8,5),(8,3)\}$

Table 3: Kruskal avec union-find

4 Exercice 3

Enfin on considere le graphe $G2$ suivant:

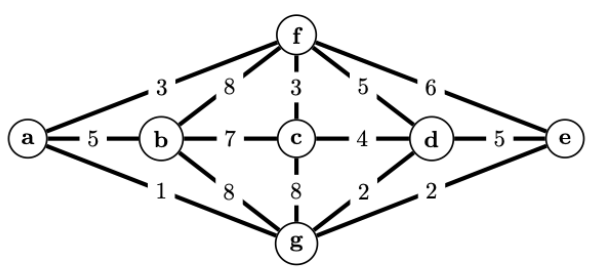

Figure 3: Graphe $G2$

1. Executer l'algorithme de Prim a partir du sommet c. On ecrira une table comme vue en cours.
   SOL.:

k	*arete selectionnee*	X_k	U_k
0	*aucune*	$\{c\}$	$\emptyset$
1	$(c,f)(3)$	$\{c,f\}$	$\{(c,f)\}$
2	$(f,a)(3)$	$\{a,c,f\}$	$\{(c,f),(f,a)\}$
3	$(a,g)(1)$	$\{a,c,f,g\}$	$\{(c,f),(f,a),(a,g)\}$
4	$(g,d)(2)$	$\{a,c,d,f,g\}$	$\{(c,f),(f,a),(a,g),(g,d)\}$
5	$(g,e)(2)$	$\{a,c,d,e,f,g\}$	$\{(c,f),(f,a),(a,g),(g,d),(g,e)\}$
6	$(a,b)(5)$	$\{a,b,c,d,e,f,g\}$	$\{(c,f),(f,a),(a,g),(g,d),(g,e),(a,b)\}$

Table 4: Prim

2. A l'etape 3 de l'algorithme, on doit choisir la 3ieme arete du MST. Donner la liste des aretes candidates (il s'agit donc de la liste des aretes du cocycle a cette etape.

   SOL.: Les 3 sommets deja ajoutes sont a, c et f. Les aretes candidates sont donc:

$$(a,b),(a,g),(b,f),(b,c),(c,g),(c,d),(f,d),(f,e)$$