CALCUL MATRICIEL

JEAN-PAUL CALVI

Institut de Mathématiques de Toulouse,
Université Toulouse III,
univ.jeanpaulcalvi.com

Licence d'Informatique
Seconde année
Résumé de cours et Dossier d'exercices

VERSION 4.0

Année 2019-2020

4.0

Informations générales

A. Ce polycopié est disponible en ligne sur la page MOODLE du module ou bien

`http://univ.jeanpaulcalvi.com/JPC_MATH_ENS.html`

ou, directement, en suivant ce LIEN en utilisant les identifiants suivants :

Identifiant :	studenti
Mot de passe :	calvi

B. Il y a deux épreuves écrites :

— une intermédiaire de 1h30 ou 2h00, à mi-parcours, qui compte pour 30% de la note finale,

— une finale de 2h00, après la fin des cours, qui compte pour 70% de la note finale.

Dans les épreuves écrites, il est demandé aux étudiants de traiter des exercices proches de ceux traités en cours ou bien des variantes des théorèmes simples démontrés en cours. **Il n'y a pas d'autres annales disponibles que celles qui figurent à la fin de ce document et sur la page MOODLE du cours.**

C. Le polycopié - **non annoté** - est autorisé pendant les épreuves écrites.

D. Les parties écrites en petits caractères ne sont pas au programme et ne sont destinées qu'aux étudiants qui souhaitent renforcer leurs connaissances et/ou faire des exercices supplémentaires.

E. Symboles utilisés.

† : S'il s'agit d'un théorème, il signifie que sa démonstration est encouragée ; s'il s'agit d'un exercice, il signifie qu'il doit être traité en **priorité**.

$*$: S'il s'agit d'un théorème, il est déconseillé de la démontrer ; s'il s'agit d'un exercice, il est à traiter en dernier lieu.

$**$: Seulement pour les théorèmes, la démonstration est explicitement hors programme.

F. PLAN PRÉVISIONNEL (qui pourra être modifié par les enseignants) Sur un total de 15 séances de 2 heures :

— 6-7 séances sur le chapitre 1 (le langage vectoriel)

— 5-6 séances sur le chapitre 2 (calcul matriciel)

— 3-4 séances sur le chapitre 3 (factorisations matricielles)

Table des matières

LE LANGAGE VECTORIEL

§ 1. Espaces Vectoriels

1 Définition

Un ensemble non vide V muni d'une **loi interne** $+$, c'est-à-dire une application

$$\begin{aligned} V \times V &\to V \\ (u, v) &\to u + v, \end{aligned}$$

et d'une **loi externe** $\cdot$, c'est-à-dire une application

$$\begin{aligned} \mathbb{R} \times V &\to V \\ (\lambda, v) &\to \lambda \cdot v, \end{aligned}$$

est appelé **espace vectoriel** ou, plus précisément, **$\mathbb{R}$-espace vectoriel**, lorsque les propriétés suivantes sont satisfaites.

A. $(V, +)$ est un **groupe commutatif** ce qui signifie que les axiomes (les règles qui régissent les calculs) suivants sont vérifiés.
   (a) Pour tous $u, v, w \in V$, $u + (v + w) = (u + v) + w$ (**associativité** de $+$).
   (b) Pour tous $u, v \in V$, $u + v = v + u$ (**commutativité** de $+$).
   (c) Il existe un (unique) élément noté 0_V tel que $u + 0_V = 0_V + u = u$. L'élément 0_V est appelé le **vecteur nul** de l'espace vectoriel V.
   (d) Tout élément u de V admet un (unique) élément, appelé **élément symétrique** ou **opposé** et noté $-u$, tel que $u + (-u) = 0_V$.

B. Pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $u, v \in V$, les règles de calculs suivantes sont valides.
   (a) $(\lambda + \mu) \cdot u = \lambda \cdot u + \mu \cdot u$.
   (b) $(\lambda\mu) \cdot u = \lambda \cdot (\mu \cdot u)$.
   (c) $\lambda \cdot (u + v) = \lambda \cdot u + \lambda \cdot v$.
   (d) $1 \cdot u = u$.

Il est facile de démontrer à l'aide des axiomes qu'on a toujours

A. Pour tout $u \in V$, $0 \cdot u = 0_V$

B. Pour tout $u \in V$, $(-1) \cdot u = -u$.

▮ Trouver cette démonstration.

Pour indiquer les lois qui sont utilisées, il faudrait parler de l'espace vectoriel $(V, +, \cdot)$ plutôt que de l'espace vectoriel V.

On simplifie généralement les notations ci-dessus en écrivant :

A. 0 à la place de 0_V,

B. $u - v$ à la place de $u + (-v)$ et

C. λu à la place de $\lambda \cdot u$.

2 Exemples fondamentaux

On donne une liste des espaces vectoriels les plus importants qui interviendront dans ce cours. Dans chaque cas, on précise la forme des éléments, la loi $+$, le vecteur nul 0_V, l'opposé $-u$, la loi $\cdot$.

2.1 $\mathbb{R}^n$ - *Listes de* n *nombres réels*

Les éléments sont des **n-uplets** de réels, c'est-à-dire des listes de n nombres réels, les mathématiciens appellent ces listes des **vecteurs**. Un élément de $\mathbb{R}^n$ est de la forme $x = (x_1, \dots, x_n)$.

Le réel x_i s'appelle la i-ème **coordonnée** ou i-ème **entrée** de x. On note souvent

$$x[i] = x_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Si $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_n)$ sont des éléments de $\mathbb{R}^n$,

$x + y = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$,	L'addition des vecteurs s'effectue coordonnée par coordonnée
$0_{\mathbb{R}^n} = (0, \dots, 0)$,	Le vecteur nul est le vecteur dont toutes les coordonnées sont nulles
$-x = (-x_1, \dots, -x_n)$,	
$\lambda \cdot x = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$	Pour multiplier un vecteur par un nombre , on multiplie chacune de ces coordonnées par ce. nombre

On peut aussi écrire,

$$(x+y)[i] = x[i] + y[i], \quad 0_{\mathbb{R}^n}[i] = 0, \quad (-x)[i] = -x[i], \quad (\lambda \cdot x)[i] = \lambda x[i], \quad i = 1, \dots, n.$$

On remarquera que $\mathbb{R}$ lui-même est un espace vectoriel.

2.2 $M_{n,m}(\mathbb{R})$ - *tableaux de nombres réels à* n *lignes et* m *colonnes*

On appelle ces tableaux des **matrices** à n lignes et m colonnes et on les note traditionnellement en mathématiques entre deux parenthèses, sans utiliser de séparateur autre que l'espace, comme ceci

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}.$$

En général, lorsque n et m ne sont pas très petits, il n'est pas possible d'écrire le tableau de manière explicite et on définit alors M en précisant simplement la valeur de a_{ij} pour chaque valeur de i et de j. On écrit

$$M = (a_{ij})_{1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant m} \text{ ou, lorsque les valeurs de } n \text{ et } m \text{ sont claires, } M = (a_{ij}).$$

Par exemple, la formule suivante définit complètement une matrice particulière :

$$M = \left((i-j)^2\right)_{1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant m}.$$

Nous rencontrerons plus loin d'autres manières de définir des matrices.

Les nombres a_{ij} sont les **coefficients** de la matrice M. On dit aussi, plus précisément que a_{ij} est le coefficient (i, j) de M. On écrit aussi très souvent, notamment dans l'écriture des algorithmes,

$$M[i, j] = a_{ij}, \quad 1 \leqslant i \leqslant n,\ 1 \leqslant j \leqslant m.$$

Certains types de matrices reçoivent une dénomination particulière.

A. Lorsque $n = m$, on dit que la matrice est **carrée** et on écrit $M_n(\mathbb{R})$ plutôt que $M_{n,n}(\mathbb{R})$. Le nombre n est souvent appelé l'**ordre** de A.

B. Lorsque $n = 1$ la matrice est de la forme

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \end{pmatrix},$$

et, à cause de la similarité formelle avec les éléments de $\mathbb{R}^m$, on l'appelle traditionnellement un **vecteur ligne**. On peut tout aussi bien dire une **matrice ligne**.

C. Lorsque $m = 1$ la matrice est de la forme

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix},$$

et on l'appelle traditionnellement un **vecteur colonne**. Là encore, on peut tout aussi bien dire une **matrice colonne**.

Si

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad N = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & \dots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & \dots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & \dots & b_{nm} \end{pmatrix}$$

sont des éléments de $M_{nm}(\mathbb{R})$,

(1.1)

$$M + N = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & \dots & a_{1m} + b_{1m} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & \dots & a_{2m} + b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ a_{n1} + b_{n1} & a_{n2} + b_{n2} & \dots & \dots & a_{nm} + b_{nm} \end{pmatrix},$$

L'addition des matrices s'effectue coefficient par coefficient

(1.2)

$$0_{M_{n,m}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

La matrice nulle est la matrice dont toutes les coefficients sont nuls.

(1.3)

$$-M = \begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12} & \dots & \dots & -a_{1m} \\ -a_{21} & -a_{22} & \dots & \dots & -a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \dots & \dots & -a_{nm} \end{pmatrix},$$

(1.4)

$$\lambda \cdot M = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \dots & \lambda a_{1m} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & \dots & \lambda a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ \lambda a_{n1} & \lambda a_{n2} & \dots & \dots & \lambda a_{nm} \end{pmatrix}$$

Multiplier une matrice par un nombre, c'est multiplier tous. ses coefficients par ce nombre

On pourrait écrire, beaucoup plus simplement,

$$[(M+N)[i,j] = M[i,j] + N[i,j], \quad 0_{M_{nm}(\mathbb{R})}[i,j] = 0, \quad (-M)[i,j] = -M[i,j], \quad (\lambda \cdot M)[i,j] = \lambda M[i,j],$$

en omettant même de spécifier les intervalles entiers d'appartenance de i et j lorsque ceux-ci sont clairs.

2.3 $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ *- Polynômes à coefficients réels*

Ce sont les fonctions p définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ par une relation de la forme

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j.$$

Lorsque $a_n \neq 0$, on dit que p est de **degré** n et on note $\deg p = n$.

Les nombres a_i sont les **coefficients** du polynôme p. Si p et q sont des éléments de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$,

$p + q =$ la fonction somme habituelle définie par $(p+q)(x) = p(x) + q(x)$,
$O_{\mathcal{P}(\mathbb{R})} = 0$ (la fonction constante égale à 0),
$-p =$ la produit habituel de la fonction p par -1, définie par $(-p)(x) = -p(x))$,
$\lambda \cdot p =$ la produit habituel de la fonction p par λ, définie par $(\lambda \cdot p)(x) = \lambda p(x))$.

2.4 $\mathcal{F}(X)$ *- Fonctions à valeurs réelles définies sur un ensemble non vide* X

si $f : X \to \mathbb{R}$ et $g : X \to \mathbb{R}$ alors

$f + g =$ la fonction somme ordinaire définie par $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$,
$0_{\mathcal{F}(X)} =$ la fonction constante égale à 0 en tout point de X,
$-f =$ l'opposé ordinaire de la fonction f, définie par $(-f)(x) = -f(x)$,
$\lambda \cdot f =$ la produit habituel de la fonction f par λ, définie par $(\lambda \cdot f)(x) = \lambda f(x))$,

2.5 Produit cartésien

Si V_1 et V_2 sont deux espaces vectoriels, on peut former un troisième espace vectoriel, noté $V_1 \times V_2$ et appelé le **produit cartésien** de V_1 par V_2. Les éléments de $V_1 \times V_2$ sont les listes de deux éléments

$v = (v_1, v_2)$ où $v_1 \in V_1$ et $v_2 \in V_2$. Si $v = (v_1, v_2)$ et $w = (w_1, w_2)$ sont deux éléments de $V_1 \times V_2$ alors

$$\begin{aligned} v + w &= (v_1 + w_1, v_2 + w_2), \\ 0_{V_1 \times V_2} &= (0_{V_1}, 0_{V_2}), \\ -v &= (-v_1, -v_2), \\ \lambda \cdot v &= (\lambda \cdot v_1, \lambda \cdot v_2). \end{aligned}$$

Que sera $V_1 \times V_2 \times V_3$? Plus généralement ?

3 De $\mathbb{R}$ à $\mathbb{C}$

Dans la définition d'espace vectoriel donnée ci-dessus, l'ensemble des réels joue un rôle important. il intervient dans la définition de la loi externe et dans les axiomes qui régissent cette loi. Dans cette définition, on peut remplacer $\mathbb{R}$ par $\mathbb{C}$ et on obtient alors la définition d'un **$\mathbb{C}$-espace vectoriel**.

Tous les exemples précédents sont des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels qui ont un "correspondant complexe" facile à définir : faites-le !

Dans toute la suite, les définitions et théorèmes sont donnés dans le cadre des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels, les étudiants sont invités à s'entraîner en écrivant dans chaque cas leur correspondant dans le cadre des $\mathbb{C}$-espaces vectoriels.

4 Combinaisons linéaires

Soient $v_1, \dots, v_k$ des éléments de V. On dit que $v \in V$ est une **combinaison linéaire** des vecteurs v_i, $i = 1, \dots, k$, lorsqu'il existe des réels λ_i, $i = 1, \dots, k$, tels que

$$v = \lambda_1 \cdot v_1 + \lambda_2 \cdot v_2 + \dots \lambda_k \cdot v_k = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \cdot v_i,$$

que l'on écrit aussi, en simplifiant l'écriture de la loi externe,

$$v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots \lambda_k v_k = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i.$$

Par exemple, dans $\mathbb{R}^3$, $v = (3, 3, 8)$ est une combinaison linéaire de $v_1 = (1, 1, 1)$ et $v_2 = (0, 0, 1)$ puisque $v = 3v_1 + 5v_2$.

5 Sous-espaces vectoriels

Un sous-ensemble non vide F d'un espace vectoriel $(V, +, \cdot)$ est un **sous-espace vectoriel** de V lorsque les restrictions de $+$ à $F \times F$ et de $\cdot$ à $\mathbb{R} \times F$ sont des lois internes et externes qui font de F un espace vectoriel à part entière.

Grâce au théorème suivant, il est généralement facile de vérifier qu'un ensemble donné est un sous-espace vectoriel.

6 Théorème * (Caractérisation des sous-espaces vectoriels)

► Pour qu'un sous-ensemble F **non vide** soit un sous-espace vectoriel de V il faut et il suffit que pour tous $u, v \in F$, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ on ait $u + \lambda v \in F$. ◄

Toute combinaison linéaire d'éléments d'un sous-espace F est encore un élément de F. Traduire cette phrase en formule mathématique et justifiez-la.

6.1 Exemple : un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$

Soit $F = \{(x, y, 0) \ : \ x, y \in \mathbb{R}\}$. F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. On le montre en utilisant le théorème ci-dessus.

A. F est évidemment non vide (par exemple $(0, 0, 0) \in F$).

B. (a) Nous prenons λ quelconque dans $\mathbb{R}$, u, v quelconques dans F et nous montrons que $u + \lambda v$ est un élément de V.

(b) Nous exploitons la définition de F. Puisque $u \in F$, il s'écrit $u = (x, y, 0)$ et de même $v = (x', y', 0)$ de sorte que

$$u + \lambda v = (x, y, 0) + \lambda(x', y', 0) = (x + \lambda x', y + \lambda y', 0)$$

donc $u + \lambda v$ possède bien la forme caractéristique des éléments de F donc $u + \lambda v \in F$. □

6.2 Schéma de démonstration

On retiendra la démarche générale à suivre pour montrer qu'un ensemble donné est un sous-ensemble vectoriel.

A. On vérifie que F est un sous-ensemble **non vide dans** V.

B. (a) **On pose le problème** : nous prenons λ quelconque dans $\mathbb{R}$, u, v quelconques dans F et nous montrons que $u + \lambda v$ est un élément de V.

(b) **On exploite la définition** de F pour obtenir que $u + \lambda v \in F$.

> En s'inspirant de l'exemple ci-dessus, trouver un sous-espace vectoriel simple de chacun des espaces vectoriels donnés au point 2, rédiger la démonstration.

D'autres classes de sous-espaces vectoriels, liés aux applications linéaires seront considérés plus avant.

6.3 $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$

L'ensemble des polynômes dont le degré est inférieur ou égal à n, noté $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$, est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.
Lorsque $m \leqslant n$, $\mathcal{P}_m(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$.

7 Opérations sur les sous-espaces vectoriels : intersection et addition

Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de V, on peux considérer l'**intersection** $F \cap G$ formée des éléments qui appartiennent à la fois à F et à G. On considère aussi souvent la **somme** de F et de G qui est définie comme suit

$$F + G = \{u + v \ : \ u \in F, \ v \in G\},$$

autrement dit, $F + G$ est obtenu en rassemblant toutes les sommes possibles obtenues en additionnant un élément de F à un élément de G.

8 Théorème $*$ (Somme et intersection de sous-espaces vectoriels)

► Si F et G sont des sous-espaces vectoriels de V alors $F \cap G$ et $F + G$ sont aussi des sous-espaces vectoriels de V. ◄

§ 2. Applications linéaires

Ce sont les applications, définies entre deux espaces vectoriels, qui respectent les lois interne et externe. Ce sont les généralisations des fonction linéaires $x \to ax$ des mathématiques élémentaires. La définition précise est donnée ci-dessous.

Il est essentiel de savoir reconnaître les applications linéaires. La compétence doit être acquise à l'issue du cours.

1 Définition

Soient E et F deux espaces vectoriels et $f : E \to F$ une fonction définie sur E à valeurs dans F. On dit que f est une **application linéaire** lorsque les deux conditions suivantes sont satisfaites

A. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et tout $u \in E$, $f(\lambda u) = \lambda f(u)$.

B. Pour tout $u \in E$ et tout $v \in E$, $f(u+v) = f(u) + f(v)$.

On déduit facilement de ces axiomes que $f(0_E) = 0_F$.

Lorsque l'espace d'arrivée F n'est autre que l'espace vectoriel $\mathbb{R}$, on dit que f est une **forme linéaire**.

> L'image d'une combinaison linéaire de vecteurs par une application linéaire est une combinaison linéaire de l'image des vecteurs. Traduire cette phrase en formule mathématique et justifiez-la !

2 Exemples

2.1 L'application 0

L'application nulle qui a $x \in E$ fait correspondre 0_F est une application linéaire. (Par contre, toutes les autres applications constantes ne sont pas linéaires).

2.2 L'identité

L'application identité, notée $I : E \to E$, définie par $I(x) = x$ est une application linéaire.

2.3 La transposition

La **transposée** d'une matrice $M \in M_{nm}(\mathbb{R})$ est la matrice obtenue en échangeant les lignes et les colonnes. Cette matrice est notée M^T ou $T(M)$. C'est un élément de M_{mn}. Ainsi,

$$\text{si} \quad M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \quad \text{alors} \quad M^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{1m} & a_{2m} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

On pourrait plus simplement écrire que si M est la matrice de coefficients a_{ij} pour $1 \leqslant i \leqslant n$ et $1 \leqslant j \leqslant m$ alors $T(M)$ est la matrice de coefficient $b_{ij} = a_{ji}$ pour $1 \leqslant i \leqslant m$ et $1 \leqslant j \leqslant n$, ou encore

$$T(M)[i,j] = M[j,i].$$

On remarquera que la définition implique immédiatement que

$$T(T(M)) = M.$$

L'application transposée, aussi appelée **transposition**, joue un rôle important dans l'étude des matrices.

Cette application $T : M_{nm}(\mathbb{R}) \to M_{mn}(\mathbb{R})$ *est une application linéaire.*

Démontrons cette affirmation.

A. On prend deux éléments M et N de l'espace de départ,

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \quad N = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & \dots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & \dots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & \dots & b_{nm} \end{pmatrix}$$

et un élément λ de $\mathbb{R}$ et on doit montrer deux propriétés :

(a) $T(\lambda \cdot M) = \lambda \cdot T(M)$.

(b) $T(M+N) = T(M) + T(N)$.

B. On établit chacune des deux égalités en utilisant la définition de T.

(a)

$$\lambda \cdot M = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \dots & \lambda a_{1m} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & \dots & \lambda a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ \lambda a_{n1} & \lambda a_{n2} & \dots & \dots & \lambda a_{nm} \end{pmatrix} \implies T(\lambda \cdot M) = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{21} & \dots & \lambda a_{n1} \\ \lambda a_{12} & \lambda a_{22} & \dots & \lambda a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \lambda a_{1m} & \lambda a_{2m} & \dots & \lambda a_{nm} \end{pmatrix}$$

D'un autre côté,

$$\begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{21} & \dots & \lambda a_{n1} \\ \lambda a_{12} & \lambda a_{22} & \dots & \lambda a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \lambda a_{1m} & \lambda a_{2m} & \dots & \lambda a_{nm} \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{1m} & a_{2m} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} = \lambda T(M),$$

et on a bien établi $T(\lambda \cdot M) = \lambda \cdot T(M)$.

(b) On sait (voir 1.1) que

$$M + N = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & \dots & a_{1m}+b_{1m} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & \dots & a_{2m}+b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ a_{n1}+b_{n1} & a_{n2}+b_{n2} & \dots & \dots & a_{nm}+b_{nm} \end{pmatrix}$$

$$\implies T(M+N) = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{21}+b_{21} & \dots & a_{n1}+b_{n1} \\ a_{12}+b_{12} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{n2}+b_{n2} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{1m}+b_{1m} & a_{2m}+b_{2m} & \dots & a_{nm}+b_{nm} \end{pmatrix}.$$

Mais dans la dernière matrice, on reconnaît,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{1m} & a_{2m} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{21} & \dots & b_{n1} \\ b_{12} & b_{22} & \dots & b_{n2} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ b_{1m} & b_{2m} & \dots & b_{nm} \end{pmatrix} = T(M) + T(N).$$

On a ainsi bien établi $T(M+N) = T(M) + T(N)$.

La rédaction proposée est lourde car il est nécessaire d'écrire de nombreuses grandes matrices. On devine qu'il est possible d'écrire les manipulations de manière plus économe. Comment proposeriez-vous de faire ?

2.4 L'évaluation en un point

Soit $a \in \mathbb{R}$. L'application $\Delta_a : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ définie par $\Delta_a(p) = p(a)$ est une forme linéaire.

2.5 La dérivation

L'application $D : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}(\mathbb{R})$ définie par $Dp = p'$ où p' désigne la dérivée du polynôme p est une application linéaire.

3 Schéma de démonstration

On retiendra la démarche générale à suivre pour montrer qu'une application donnée $f : E \to F$ est une application linéaire.

A. On vérifie que f est bien définie pour tous les éléments de E et prend bien ses valeurs dans F.

B. (a) **On pose le problème** : nous prenons λ quelconque dans $\mathbb{R}$, u, v quelconques dans E et nous montrons que

   i. $f(\lambda \cdot u) = \lambda \cdot f(u)$

   ii. $f(u + v) = f(u) + f(v)$.

   (b) **On exploite la définition** de f pour vérifier les deux égalités ci-dessus.

4 Opérations sur les applications linéaires : somme, multiplication par un scalaire, composition

Soient $f : E \to F$ et $g : E \to F$ deux applications linéaires avec les mêmes espaces vectoriels de départ et d'arrivée. On peut former la somme $f + g : E \to F$ qui sera définie par $(f + g)(u) = f(u) + g(u)$ pour $u \in E$. De même, pour $\lambda \in \mathbb{R}$, on peut définir l'application $\lambda \cdot f$ ou, pour utiliser une écriture plus simple, λf qui sera définie par $(\lambda f)(u) = \lambda f(u)$.

Pour pouvoir définir la composée de deux applications linéaires, il faut se placer dans un cadre différent. Prenons $f : E \to F$ et $g : F \to G$ où E, F et G sont trois espaces vectoriels. On peut alors considérer $g \circ f$ qui est définie, rappelons-le, par $(g \circ f)(u) = g(f(u))$.

5 Théorème (Somme et multiplication par un scalaire pour les applications linéaires)

► Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $f : E \to F$, $g : E \to F$ deux applications linéaires de E dans F alors $f + g$ et λf sont des applications linéaires de E dans F. ◄

Si on note $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F alors $(\mathcal{L}(E, F), +, \cdot)$ est un espace vectoriel. C'est un nouvel exemple d'espace vectoriel très important.

6 Théorème (Composée d'application linéaires)

► Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications linéaires. La composée $g \circ f$ est à son tour une application linéaire de E dans G. ◄

Il est souvent possible de s'assurer qu'une application donnée est une application linéaire en la regardant comme une somme, multiplication par un scalaire, ou une composée, d'applications linéaires connues. Cela permet d'éviter le recours à la méthode du point 3.

7 Injectivité, surjectivité, bijectivité, isomorphismes, automorphismes

Rappelons qu'une application linéaire $f : E \to F$ est **injective** lorsque deux éléments de l'espace de départ ne peuvent avoir la même image : $u \neq u' \implies f(u) \neq f(u')$. On établit le plus souvent cette propriété en passant par la contra-posée.

A. $f : E \to F$ est **injective** lorsque l'égalité $f(u) = f(u')$ implique $u = u'$.

B. $f : E \to F$ est **surjective** lorsque tout élément de l'espace d'arrivée F est l'image d'un élément de E : pour tout $v \in F$, il existe $u \in E$ tel $f(u) = v$.
   On note $\mathrm{Im}(f)$, l'ensemble image de f.

$$\mathrm{Im}(f) = \{v \in F \ : \ \text{il existe } u \in E \text{ tel que } v = f(u)\}$$

On pourra librement écrire, plus simplement,

$$\mathrm{Im}(f) = f(E).$$

Dire que f est surjective revient à dire que $f(E) = F$.

C. $F : E \to F$ est dite **bijective** lorsque elle est à la fois injective et surjective ou, ce qui revient au même, lorsque pour tout $v \in F$ il existe un **et un seul** $u \in E$ tel $v = f(u)$.

D. Une application linéaire $f : E \to F$ bijective s'appelle un **isomorphisme**. Lorsque F coïncide avec E, on dit que f est un **automorphisme** de E.

Ces définitions coïncident avec celles que le lecteur a sans doute déjà rencontrées dans le cadre de l'étude des fonctions générales. Le point important c'est que, dans le cas des applications linéaires, leur vérification est souvent simplifiée comme nous le verrons plus loin.

> Le lecteur se souvient sans doute que l'intérêt principal des bijections, c'est qu'il est possible de définir une bijection réciproque $f \rightsquigarrow f^{-1}$. Quelle question naturelle se pose alors dans le cadre des applications linéaires bijectives ?

8 Définition

Soient $f : E \to F$ une application linéaire. L'ensemble des éléments u de F tels que $f(u) = 0_F$ s'appelle le **noyau** de E et est noté $\ker f$,

$$\ker f = \{u \in E \ : \ f(u) = 0_F\}.$$

9 Théorème † (Noyau et image d'une application linéaire)

▶

A. Le noyau d'une application linéaire $f : E \to F$ est un sous-espace vectoriel de E.

B. L'image $f(E)$ d'une application linéaire $f : E \to F$ est un sous-espace vectoriel de F.

◀

Ce théorème donne deux nouveaux exemples très importants de sous-espace vectoriel.

10 Théorème † (Critère d'injectivité par le noyau)

▶ Pour qu'une application linéaire $f : E \to F$ soit injective il faut et il suffit que son noyau se réduise au neutre (au vecteur nul), *id est* $\ker f = \{0_E\}$. ◀

§ 3. Bases

1 Familles génératrices et familles libres

On dit qu'un espace vectoriel V — non réduit à 0_V — est engendré par une famille **finie** (non vide) de vecteurs $v_1, \ldots, v_k$ lorsque tout élément de V peut s'écrire comme une combinaison linéaire des v_i. Autrement dit, quel que soit $v \in E$, il existe des coefficients λ_i, $i = 1, \ldots, k$, tels que $v = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i$. On dit alors que

A. $S = \{v_i \ : \ i = 1, \ldots, k\}$ est une **famille génératrice** de V, et

B. V est de dimension finie (positive).

Il est évidemment souhaitable de choisir des familles génératrices contenant le plus petit nombre possible d'éléments. Pour les rechercher, on introduit la notion de **famille libre**.

Quelle que soit la famille $S = \{v_i \ : \ i = 1, \dots, k\}$, il est toujours possible d'écrire le vecteur nul 0_V comme une combinaison linéaire des éléments de S comme ceci

$$0_V = \sum_{i=1}^{k} 0 \cdot v_i.$$

On dit que cette écriture de 0_V comme combinaison linéaire d'éléments de S est triviale. Une famille $S = \{v_i \ : \ i = 1, \dots, k\}$ est libre lorsque il existe une seule manière d'écrire 0_V comme combinaison linéaire de vecteur de S et cette unique combinaison est la combinaison triviale.

Autrement dit, $S = \{v_i \ : \ i = 1, \dots, k\}$ *est une famille libre si la relation* $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i = 0_V$ *entraîne* $\lambda_i = 0$ *pour* $i = 1, \dots, k$.

2 Définition

Soit V un espace vectoriel de dimension finie (positive). On appelle **base** de V toute famille S qui est à la fois génératrice et libre.

3 Théorème $*$ (Existence des bases)

► Soit V un espace vectoriel de dimension finie (positive). De toute famille génératrice S de V on peut extraire une famille S', *id est* $S' \subset S$, qui soit une base. En particulier, tout espace vectoriel de dimension finie (positive) admet une base. ◄

4 Théorème $*$ (Unicité de l'écriture dans une base)

► Soit V un espace vectoriel de dimension finie (positive). Si $S = \{v_1, \dots, v_k\}$ est une base de V alors tout élément de V s'écrit d'une manière et d'une seule comme combinaison linéaire d'éléments de S. ◄

5 Théorème $*$ (Dimension)

► Dans un espace vectoriel V de dimension finie (positive), toutes les bases ont le même nombre d'éléments. Ce nombre est appelé la **dimension** de l'espace et est noté $\dim V$. ◄

On convient que l'espace vectoriel réduit à 0_V est de dimension nulle.

6 Théorème $*$ (Familles contenant le bon nombre d'éléments)

► Soit V de dimension $n > 0$.

A. Toute famille génératrice contenant n éléments est une base.

B. Toute famille libre contenant n éléments est une base.

◄

> Pourquoi a-t-on dans toute la discussion sur les bases supposé que l'espace V ne se réduisait pas à son vecteur nul 0_V ?

7 Exemples

7.1 *Base de* $\mathbb{R}^n$

Pour $i = 1, \dots, n$, notons e_i la liste dont toutes les entrées sont nulles sauf la i-ème qui vaut 1,

$$e_i = (0, \dots, 0, \underbrace{1}_{\text{i-ème}}, 0, \dots, 0),$$

ou encore

$$e_i[j] = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}, \quad 1 \leqslant j \leqslant n.$$

Il est souvent commode de faire intervenir cette quantité δ avec δ_{ij} qui vaut 1 si $i = j$ et 0 sinon. Elle s'appelle le **symbole de Kronecker**. *La famille* $S = \{e_i \ : \ i = 1\dots, n\}$ *est une base de* $\mathbb{R}^n$*, appelée **base canonique**.*

Pour le prouver, nous observons d'abord que

A. S une famille génératrice.
En effet, si $u = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ alors

$$x = x_1\ (1,0,0,\dots,0) + \dots x_i\ (0,\dots,0,\underbrace{1}_{\text{i-ème}},0,\dots,0) + \dots + x_n\ (0,\dots,0,1) = \sum_{i=1}^{k} x_i e_i.$$

Nous avons exprimé un élément quelconque u de $\mathbb{R}$ comme une combinaison linéaire des e_i ce qui établit que S est une partie génératrice.

B. S est une famille libre.
Nous partons de la supposition que $\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i = 0_{\mathbb{R}^n}$ et nous en tirons que chaque λ_i vaut 0. En fait $\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ et $\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i = 0_{\mathbb{R}^n}$ équivaut à $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = (0, 0, \dots, 0)$ ou encore $\lambda_i = 0$ pour $i = 1, \dots, n$ ce qu'il fallait démontrer.

On particulier on a

$$\dim \mathbb{R}^n = n.$$

7.2 Base de $M_{nm}(\mathbb{R})$

Définissons pour $1 \leqslant i \leqslant n$ et $1 \leqslant i \leqslant j$ la matrice E^{ij} dont tous les coefficients sont nuls sauf celui qui se trouve à l'intersection de la i-ème ligne et la j-ème colonne. Par exemple, lorsque $n = 3$ et $m = 3$, on a

$$E^{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

De manière générale E^{ij} peut être défini par

$$E^{ij}[k,l] = \delta_{ik} \cdot \delta_{jl}, \quad 1 \leqslant k \leqslant n, \quad 1 \leqslant l \leqslant m,$$

où δ désigne le symbole de Kronecker introduit au point 7.1.

La famille $S = \{E^{ij} \ : \ 1 \leqslant i \leqslant n, \ 1 \leqslant j \leqslant m\}$ *est une base de* $M_{nm}(\mathbb{R})$.

En particulier,

$$\dim M_{nm}(\mathbb{R}) = nm.$$

Écrire la matrice E^{ij} dans le cas général (en utilisant les points $\dots$ ou (et) $\vdots$ comme au point 2.2.

7.3 Base de $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$

Pour tout i compris entre 0 et n, on note m_i le polynôme (ou plutôt monôme) défini par $m_i(x) = x^i$. Notez que la valeur $i = 0$ donne le polynôme constant égal à 1.

La famille $S = \{m_i \ : \ i = 0, \dots, n\}$ *est une base de* $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$.

En particulier

$$\dim \mathcal{P}_n(\mathbb{R}) = n + 1.$$

8 Schéma de recherche d'une base

Il y a deux stratégies selon que l'on connaît ou pas la dimension de l'espace dont on doit chercher une base.

A. Cas où l'on ne connaît pas la dimension de l'espace vectoriel.
   (a) On cherche une famille génératrice. Dans les cas simples que nous considérerons la forme des éléments suggérera cette famille.
   (b) On vérifie que cette famille est libre. Si ce n'est pas le cas, on retire des éléments superflus.

B. Cas (rare) où l'on connaît la dimension de l'espace vectoriel.
   (a) Si n est la dimension, on recherche une famille génératrice de n éléments. Celle-ci sera nécessairement une base d'après le Théorème 6
   (b) On pourrait tout aussi bien rechercher une famille libre de n éléments (mais cette recherche est en général moins naturelle, voyez cependant la question ci-dessous).

> La stratégie ci-dessus s'applique lorsque l'on doit trouver une base d'un espace donné. Parfois, on doit effectuer le travail plus simple de *vérifier* qu'une famille donnée est une base. Modifiez la stratégie ci-dessus pour traiter ce cas.

9 Théorème † (Bases et Applications linéaires)

▶ Soit $f : E \to F$ une application linéaire.
Si $S = \{u_1, \dots, u_n\}$ est une base de E, par définition, l'image de S par f est la famille $\{f(u_1), \dots, f(u_n)\}$.

A. L'image d'une base S de E par f est une famille génératrice de $f(E)$.
B. Si f est injective, l'image d'une base S de E par f est une base de $f(E)$.
C. Si f est un isomorphisme, l'image d'une base S de E par f est une base de F.
D. Réciproquement, si l'on peut trouver une base S de E dont l'image est une base de F alors f est un isomorphisme.

◀

10 Théorème $*$ (Suffisance de l'injectivité, de la surjectivité)

▶ Soit $f : E \to F$ une application linéaire. Si $\dim E = \dim F$ et f est injective alors f est un isomorphisme.

Plus généralement, lorsque $\dim E = \dim F$, les concepts de *bijectivité*, *injectivité* et *surjectivité* d'une application linéaire de E dans F sont synonymes. ◀

11 Théorème $**$ (Formule du rang)

▶ Soit $f : E \to F$ une application linéaire. On a

$$\dim E = \dim \ker f + \dim f(E).$$

◀

L'entier $\dim f(E)$ s'appelle le **rang** de l'application linéaire f, on le note $\mathrm{rang}(f)$.

EXERCICES

§ 4. Exercices : Le langage vectoriel

Au niveau du L2 Informatique, seuls les exercices marqués † sont obligatoires. Ils seront prioritairement traités en Travaux Dirigés.

Exercice 1 (†). — On considère les vecteurs u, v et w de $\mathbb{R}^3$ définis par $u = (1, -1, 2)$, $v = (-1, 1, -1)$ et $w = (-1, 1, 1)$. Écrire w comme une combinaison linéaire de u et v.

Exercice 2 (†). — Dans $\mathbb{R}^3$ on considère les quatre vecteurs $a = (2, 3, -1)$, $b = (1, -1, -2)$, $c = (3, 7, 0)$ et $d = (5, 0, -7)$. Exprimer c et d comme combinaison linéaire de a et b, puis a et b comme combinaison linéaire de c et d.

Pour s'entraîner, traiter l'exercice 23. [Queysanne, 1964]

Exercice 3 (†). — On donne trois vecteurs a, b et c dans $\mathbb{R}^3$ et on demande si c peut s'exprimer comme combinaison linéaire de a et b. Le nombre α est un paramètre réel.

A. $a = (\alpha, 1, 1)$, $b = (1, \alpha, 1)$, $c = (1, 1, \alpha)$.

B. $a = (\alpha, 1, 1)$, $b = (-1, -\alpha, -1)$, $c = (-1, -1, \alpha)$.

[Queysanne, 1964]

Exercice 4 (†). — On note V l'ensemble des vecteurs (x_1, x_2, x_3, x_4) de $\mathbb{R}^4$ tels que $x_1 = x_2 - 3x_3$ et $x_3 = 2x_4$.

A. Montrer que V est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

B. Quels vecteurs doit-on mettre dans les boites pour que pour tout $v \in V$ on ait

$$v = x_1 \boxed{} + x_4 \boxed{} ?$$

C. Quels vecteurs doit-on mettre dans les boites pour que pour tout $v \in V$ on ait

$$v = x_2 \boxed{} + x_3 \boxed{} ?$$

Exercice 5 (†). — On note $F(a) = \{v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n \ : \ v_1 + v_2 + \cdots + v_n = a\}$.

A. Montrez que $F(a)$ est un sous-espace de $\mathbb{R}^n$ si et seulement si $a = 0$.

B. Quelle relation existe-t-il entre $F(a)$ et $F(0)$.

C. Quels vecteurs doit-on mettre dans les boites pour que pour tout $v \in F(0)$ on ait

$$v = v_1 \boxed{} + v_2 \boxed{} + \cdots + v_{n-1} \boxed{} ?$$

D. Quels vecteurs doit-on mettre dans les boites pour que pour tout $v \in F(0)$ on ait

$$v = v_2 \boxed{} + v_3 \boxed{} + \cdots + v_n \boxed{} ?$$

Exercice 6 (†). — On considère l'ensemble C des matrices M dans $M_2(\mathbb{R})$ de la forme

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

où a et b sont deux nombres réels.

A. Montrer que C est un sous-espace vectoriel de $M_2(\mathbb{R})$.

B. Trouver deux matrices B_1 et B_2 telles que si $M = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ alors $M = aB_1 + bB_2$.

Exercice 7 (†). — Nous définissons quatre sous-ensembles V d'un espace vectoriel E et nous demandons, dans chaque cas soit de démontrer que V est un sous-espace vectoriel ou bien d'expliquer pourquoi il ne l'est pas.

A. $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y = z^2\}$.

B. $V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 = x_3 + x_4 \text{ et } x_1 = x_4\}$.

C. $V = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & c & d \\ 0 & e & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}) : a, b, c, d, e \in \mathbb{R} \right\}$.

D. $V = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ |a| & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) : a, b \in \mathbb{R} \right\}$

Exercice 8 (†). — Décrire le résultat de l'algorithme ci-après et calculer sa complexité (nombre d'opérations effectuées).

```
Data: x, y ∈ R^n, λ ∈ R
for i = 1 : n do
 | y(i) = y(i) + λx(i)
end
return y
```

Exercice 9 (†). — Nous définissons quatre applications T d'un espace vectoriel dans un autre et nous demandons de calculer son noyau lorsque T est une application linéaire ou de donner une explication lorsque ce n'est pas une application linéaire.

A. $T = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \to (x - 2y, x + z) \in \mathbb{R}^2$.

B. $T : \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \to (a + b, c + d) \in \mathbb{R}^2$.

C. $T : \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \to abcd \in \mathbb{R}$.

D. $T : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \to \max(x + y, x + z) \in \mathbb{R}$ où $\max(a, b)$ désigne le plus grand des deux nombres réels a et b.

Exercice 10 (†). — On donne un certain nombre d'applications de $\mathbb{R}^2$ dans lui-même. Pour chacune d'entre elle dites (a) si c'est un application linéaire, (b) si oui, s'agit-il d'un automorphisme ? (c) si oui, quel est l'automorphisme réciproque ?

A. $T_1(x, y) = (a, y)$, $a \in \mathbb{R}$ fixé.

B. $T_2(x, y) = (\alpha x + y, \beta y)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, fixés.

C. $T_3(x, y) = (2x, y^2)$,

D. $T_4(x, y) = (x, x)$.

Cooke and Bez [1984]

Exercice 11 (†). — ← 10] Déterminer les noyaux des applications linéaires trouvées à l'exercice 10.

Exercice 12 (†). — ← 10] Avec les notations de l'exercice 10, calculer $T_4 \circ T_2$ et $T_2 \circ T_4$.

Exercice 13 (†). — On considère les applications linéaires $T : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \to (x+y, y+z, z+x, -x) \in \mathbb{R}^4$ et $L : (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \to (x, y, x + y + z + t) \in \mathbb{R}^3$. Calculer $(L \circ T)(x, y, z)$.

EXERCICE 14 (†). — Soit M une matrice de $M_{20}(\mathbb{R})$ définie par $M[i,j] = (i/j)$. Calculer $(M + 2M^T)[8,7]$. On peut donner le résultat sous la forme d'une fraction non simplifiée. On rappelle que M^T désigne la transposée de M.

EXERCICE 15 (†). — Soit $n \geqslant 3$. On définit

$$V = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{2n} \;:\; x_1 = x_2, x_3 + \cdots + x_n = 0\}.$$

On admet que V est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{2n}$. Donnez-en une base $\mathcal{B}$. Quelle est la dimension de V ?

EXERCICE 16 (†). —

A. Montrer que l'ensemble S des matrices M de $M_n(\mathbb{R})$ telle que $M = T(M)$ forme un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R})$. Donnez-en une base. Quelle est sa dimension ?

   Les éléments de S sont appelées **matrices symétriques**. On les rencontrera souvent par la suite.

B. On considère l'application $f : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ définie par

$$f(M) = \frac{1}{2}\left(M + T(M)\right).$$

   (a) Montrer que f est une application linéaire.
   (b) Montrer que $\mathrm{Im}(f) = S$.
   (c) Déterminer le noyau de f et calculer sa dimension.
   (d) Trouver une base de $\ker f$.

EXERCICE 17 (†). — On considère l'application **trace**, notée tr, définie sur $M_n(\mathbb{R})$ par

$$\mathrm{tr}(M) = \sum_{i=1}^{n} M[i,i],$$

de sorte que $\mathrm{tr}(M)$ est la somme des éléments sur le diagonale de M (et est donc un élément de $\mathbb{R}$). Montrer que tr est une application linéaire et déterminer son noyau. Quelle est la dimension du noyau ?

EXERCICE 18 († Matrices magiques). — On dit qu'une matrice $M \in M_3(\mathbb{R})$ est **magique** lorsque coïncident les sommes des éléments sur chaque ligne, chaque colonne, la diagonale principale et la seconde diagonale, autrement dit les huit nombres suivants sont égaux ;

$$\begin{aligned} &M[1,1] + M[1,2] + M[1,3] = M[2,1] + M[2,2] + M[2,3] \\ &= M[3,1] + M[3,2] + M[3,3] = M[1,1] + M[2,1] + M[3,1] \\ &= M[1,2] + M[2,2] + M[3,2] = M[1,3] + M[2,3] + M[3,3] \\ &\qquad\qquad = M[1,1] + M[2,2] + M[3,3] = M[1,3] + M[2,2] + M[3,1]. \end{aligned}$$

La matrice

$$M = \begin{pmatrix} a & a & a \\ a & a & a \\ a & a & a \end{pmatrix}$$

est magique. On note $\mathcal{M}$ l'ensemble des matrices magiques et si $M \in \mathcal{M}$, $\sigma(M)$ désigne la valeur commune des huit sommes ci-dessus. Dans le cas de l'exemple ci-dessus, on a $\sigma(M) = 3a$.

A. Montrer que $\mathcal{M}$ est un sous-espace vectoriel de $M_3(\mathbb{R})$.

B. Que peut-on dire de $T(M)$ lorsque $M \in \mathcal{M}$?

C. On rappelle qu'un matrice M est antisymétrique lorsque $T(M) = -M$. Si M est une matrice antisymétrique de $\mathcal{M}$, quelle est la valeur de $\sigma(M)$?

D. Déterminer l'ensemble de toutes les matrices symétriques de $\mathcal{M}$. On commencera par chercher les matrices M symétriques pour lesquelles $\sigma(M) = 0$.

E. Déterminer une base et la dimension de $\mathcal{M}$.

Exercice 19 (†). — Soit $n \geqslant 4$. On note U l'ensemble des matrices M de $M_n(\mathbb{R})$ telles que $M[i, j] = 0$ pour $|i - j| > 2$. On admet que U est un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R})$. Calculer la dimension de U. Proposer une base de U.

Exercice 20. — On donne des opérations sur les listes souvent intégrées aux langages informatiques. Pour chacune de ces opérations on donne a) le nom, b) l'espace vectoriel de départ E et c) la définition.

A. On demande d'indiquer dans chaque cas l'ensemble d'arrivée et lorsque celui-ci est un espace vectoriel si l'opération est une application linéaire.

B. Lorsque la réponse est positive, préciser le noyau et l'image de l'application.

Nom	E (Départ)	Définition	Arrivée	Linéaire ?
append	$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$	$\text{append}(L_1, L_2) = (L_{11}, \dots, L_{1n}, L_{21}, \dots, L_{2m})$		
first	$\mathbb{R}^n$	$\text{first}(L) = L_1$		
delete	$\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$	$\text{delete}(a, L)$ = liste obtenue en retirant toutes les occurrences de a dans L		
join	$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$	$\text{join}(L_1, L_2) = (L_{11}, L_{21}, L_{12}, L_{22}, L_{13}, L_{23}, \dots)$		
cons	$\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$	$\text{cons}(a, L) = (a, L_1, \dots, L_n)$		
reverse	$\mathbb{R}^n$	$\text{reverse}(L) = (L_n, L_{n-1}, \dots, L_1)$		
unique	$\mathbb{R}^n$	$\text{unique}(L)$ = la liste des entrées de L, dans l'ordre, qui apparaissent une seule fois		

Exercice 21 (Mesurer la longueur d'un vecteur). —
Pour $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, on définit

$$x \bullet y = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

Le réel $x \bullet y$ s'appelle le **produit scalaire** des vecteurs x et y. Lorsque $x \bullet y = 0$, on dit que les vecteurs sont **orthogonaux**.

A. Démontrer les propriétés suivantes.
   (a) Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $x \bullet x \geqslant 0$ et $x \bullet x = 0$ si et seulement si $x = 0_{\mathbb{R}^n}$.
   (b) Pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$, $x \bullet y = y \bullet x$.
   (c) Pour tous $x, y, z \in \mathbb{R}^n$, $x \bullet (y + z) = x \bullet y + x \bullet z$.
   (d) Pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$, et tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda(x \bullet y) = (\lambda x) \bullet y = x \bullet (\lambda y)$.

   On pose $\|x\| = \sqrt{x \bullet x}$, c'est un nombre positif appelé la **norme** ou la **longueur** du vecteur x.

B. **Inégalité de Cauchy-Schwarz**.
   (a) Démontrer que pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$, $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2(x \bullet y) + \|y\|^2$.
   (b) Soient $x, y \in \mathbb{R}^2$. Pour $t \in \mathbb{R}$, on pose $p(t) = \|x + ty\|^2$. Montrer que $p(t)$ est un trinôme du second degré en t qui ne change jamais de signe. Que peut-on en déduire sur son discriminant ?
   (c) Déduire de la question précédente l'inégalité de Cauchy-Schwarz qui dit que pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$ on a

$$|x \bullet y| \leqslant \|x\| \times \|y\|.$$

(d) À l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz démontrer l'**inégalité triangulaire** :

$$\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|, \quad x, y \in \mathbb{R}^n.$$

C. Angle de deux vecteurs. Soient x et y deux vecteurs non nuls. Montrer, en utilisant les résultats précédents que

$$-1 \leqslant \frac{x \bullet y}{\|x\| \times \|y\|} \leqslant 1.$$

D. En déduire qu'il existe un unique $\theta \in [0, \pi]$ tel que

$$\cos\theta = \frac{x \bullet y}{\|x\| \times \|y\|}.$$

Cet angle θ s'appelle l'**angle** des vecteurs x et y.

E. Que peut-on dire de l'angle de deux vecteurs identiques ? de deux vecteurs opposés ? de deux vecteurs orthogonaux ?

Exercice 22. — Décrire le résultat de l'algorithme ci-après et calculer sa complexité (nombre d'opérations effectuées).

```
Data: x, y ∈ ℝⁿ
c = 0;
for i = 1 : n do
 |  c = c + x(i)y(i)
end
return c
```

Exercice 23. — Même question qu'à l'exercice 2 mais dans $\mathbb{R}^4$ avec les quatre vecteurs $a = (2, 3, -1, 0)$, $b = (-3, 1, 0, 2)$, $c = (-4, 5, -1, 4)$ et $d = (9, 8, -3, -2)$. [Queysanne, 1964]

Exercice 24. — On donne une liste de couples d'espaces vectoriels isomorphes (E, F). Dans chaque cas, donner un isomorphisme linéaire explicite de E dans F ainsi que son isomorphisme réciproque. Les lettres n et m désignent des éléments de $\mathbb{N}^\star$.

A. $E = M_{n,m}(\mathbb{R})$, $F = M_{m,n}(\mathbb{R})$,

B. $E = \mathbb{R}^{nm}$, $F = M_{n,m}(\mathbb{R})$.

C. $E = \mathcal{P}_n(\mathbb{R})$, $F = \mathbb{R}^{n+1}$.

Exercice 25 $(*)$. — En général, les langages informatiques refusent les additions de listes de longueurs différentes. Pourrait-on changer cela ? Autrement dit, existe-il une structure d'espace vectoriel sur l'ensemble $E = \cup_{n=1}^{\infty}\mathbb{R}^n$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ soit un sous-espace vectoriel de E.

Exercice 26 $(*)$. — On note $R_{n,m}$ l'ensemble des fonctions définies sur $[-1, 1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ qui peuvent s'écrire comme le quotient d'un polynôme de degré $\leqslant n$ par un polynôme de degré $\leqslant m$. S'agit-il d'un sous espace vectoriel de l'espace des fonctions réelles définies de $[-1, 1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ muni de l'addition habituelle des fonctions et du produit habituel d'une fonction par un constante. On pourra commencer par les cas $n = m = 1$.

Exercice 27. — On dit qu'une application $P : V \to V$ est une projection lorsqu'elle vérifie $P \circ P = P$. Dans cet exercice, on s'intéresse aux projection de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$.

A. Soient a, b, c, d des nombres réels. On suppose que $a \neq b$. Montrer que la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$f(x, y) = \left(\frac{1}{a-b}(ax - y + c), \frac{b}{a-b}(ax - y + c) + c\right)$$

est une projection.

B. L'application f est-elle une application linéaire ?

C. Parmi les applications T_i définies à l'exercice 10, lesquelles sont des projections ?

[Cooke and Bez, 1984]

Exercice 28 $(*)$. — Vrai ou faux : la somme de deux automorphismes de $\mathbb{R}^n$ est ou bien l'application nulle ou bien un automorphisme.

Exercice 29. — Soit $X = \{x_1, \dots, x_m\}$ un ensemble de $m \geqslant 1$ points (deux à deux distincts) dans $\mathbb{R}$. On définit

$$V(X) = \{p \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \ : \ p(x_i) = 0, \ i = 1, \dots, m\} \quad \text{et} \quad V_n(X) = V(X) \cap \mathcal{P}_n(\mathbb{R})\}$$

A. Montrer que $V(X)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ et $V_n(X)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$.

B. Quel est le nombre maximal de racines que peut posséder un polynôme de degré $\leqslant n$?

C. Dans cette partie, on suppose que $m = n + 1$. Montrer que l'application $f : \mathcal{P}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^{n+1}$ définie par $f(p) = (p(x_1), p(x_2), \dots, p(x_{n+1}))$ est une application linéaire bijective.

D. Montrer que pour $m > n$, $V_n(X) = \{0\}$.

À partir de maintenant on suppose que $m < n$.

E. Donnez une base de $V_n(X)$.

F. On pose $Y = \{y_1, \dots, y_m\}$. Est-il vrai que les espaces $V_n(X)$ et $V_n(Y)$ sont isomorphes ? Si oui, donnez un isomorphisme explicite entre les deux espaces.

Exercice 30. —

A. Comment faut-il choisir X pour que $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ soit un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(X)$?

B. Comment faut-il choisir X pour que $\mathbb{R}^n$ soit isomorphe à $\mathcal{F}(X)$?

C. Comment faut-il choisir X pour que $M_{nm}(\mathbb{R})$ soit isomorphe à $\mathcal{F}(X)$?

Exercice 31. — Soient n_1 et n_2 deux entiers positifs tels que $n_1 + n_2 = n$. Trouver un isomorphisme entre $\mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2}$ et $\mathbb{R}^n$.

Exercice 32. — Montrer que l'ensemble des polynômes pairs de degré $\leqslant n$, c'est-à-dire vérifiant $p(x) = p(-x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$. Donnez-en une base.

LE CALCUL MATRICIEL

§ 5. Produit de matrices

1 Définition

Si $A = (a_{ij})$ est une matrice à n lignes et m colonnes, *id est*, $A \in M_{nm}(\mathbb{R})$ et $B = (b_{ij})$ est une matrice à m lignes et p colonnes, *id est*, $B \in M_{mp}(\mathbb{R})$, on peut multiplier A par B pour obtenir la matrice

$$C = AB = A \cdot B = A \times B,$$

à n lignes et p colonnes avec $C = (c_{ij})$ donné par la formule suivante dans laquelle on souligne et surligne les indices pour bien mettre en évidence le rôle de chacun d'entre eux

$$\begin{aligned} c_{\underline{i}\,\bar{j}} &= a_{\underline{i}\,1}b_{1\,\bar{j}} + a_{\underline{i}\,2}b_{2\,\bar{j}} + a_{\underline{i}\,3}b_{3\,\bar{j}} + \cdots + a_{\underline{i}\,m}b_{m\,\bar{j}} \\ &= \sum_{k=1}^{m} a_{\underline{i}\,k}b_{k\,\bar{j}} \end{aligned}$$

Les indices i et j sont fixes, l'indice k parcourt la plage $\{1, \dots, m\}$.

On peut aussi écrire

$$C = AB \quad \Longleftrightarrow \quad c_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik}b_{kj} \quad 1 \leqslant i \leqslant n, \quad 1 \leqslant j \leqslant p,$$

ou encore,

$$\boxed{(AB)[i,j] = C[i,j] = \sum_{k=1}^{m} A[i,k] \cdot B[k,j],}$$

et, pour mémoriser, les conditions de compatibilités

$$\boxed{M_{nm} \times M_{mp} \subset M_{np}.}$$

Certains visualisent mieux la définition du produit à l'aide du schéma de la Figure 1.

▌ Dans quels cas peut-on former simultanément le produit AB et le produit BA ?

La formule du produit qui est ici donnée sans explication est en réalité très naturelle. C'est le lien entre *application linéaire* et *matrice* que nous verrons plus bas qui éclaire cette définition.
Nous explicitons le calcul du produit dans quelques cas simples et importants.

1.1 Cas où $A, B \in M_2(\mathbb{R})$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{12} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}.$$

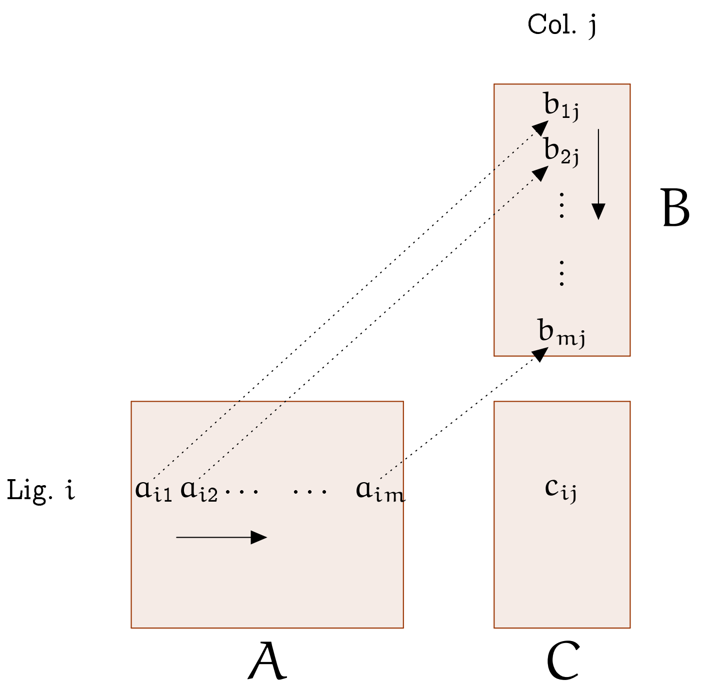


FIGURE 1 – Schématisation du produit matriciel : $C = AB$

▌ Écrire la relation correspondante lorsque $A, B \in M_3(\mathbb{R})$.

1.2 Cas où $A \in M_{nm}(\mathbb{R})$ *et* $B = X \in M_{m1}$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & \dots & a_{im} \\ \vdots & \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2m}x_m \\ \vdots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{im}x_m \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nm}x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{m} a_{1k}x_k \\ \sum_{k=1}^{m} a_{2k}x_k \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^{m} a_{ik}x_k \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^{m} a_{nk}x_k \end{pmatrix}$$

▌ Expliciter le cas où $n = 1$.

1.3 Cas où $X \in M_{1n}$ *et* $B \in M_{nm}$

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_i & \dots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & \dots & a_{im} \\ \vdots & \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{n} x_k a_{k1} & \sum_{k=1}^{n} x_k a_{k2} & \dots & \sum_{k=1}^{n} x_k a_{kj} & \dots & \sum_{k=1}^{n} x_k a_{km} \end{pmatrix}$$

▌ Expliciter le cas où $m = 1$.

Il est important de comprendre que pour effectuer le produit de A par B des *conditions de compatibilités* des dimensions sont requises : le nombre de colonnes de A doit coïncider avec le nombres de lignes de B.

2 Théorème (Associativité du produit matriciel)

► Soient $A \in M_{nm}(\mathbb{R})$, $B \in M_{mp}(\mathbb{R})$ et $C \in M_{ps}(\mathbb{R})$. On a

$$A(BC) = (AB)C.$$

Le produit des matrices est donc une opération associative. ◄

On note $A^2 = A \cdot A$ et, le théorème précédent permet de définir

$$A^3 = A^2 \cdot A = A \cdot A^2.$$

Plus généralement la puissance n-ème d'une racine est définie par récurrence par la relation

$$A^n = A \cdot A^{n-1}.$$

Grâce à l'associativité, on a

$$A^n = A^{n_1} \cdot A^{n_2}, \quad n_1 + n_2 = n.$$

On peut aussi se demander si le produit matriciel est commutatif : A-t-on toujours $AB = BA$?

D'abord, il faut noter que la question n'est légitime que lorsque A et B sont des matrices carrées de même dimension

▌ Expliquer !

Cependant, même dans ce cas, le produit matriciel n'est pas une loi commutative comme le montre le contre-exemple suivant :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{mais} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

▌ Trouvez un autre contre-exemple !

3 Théorème (Distributivité du produit matriciel)

► Sous réserve de l'existence des produits (compatibilité des dimensions), on a

$$A(B + C) = AB + AC, \quad (B + C)A = BA + CA.$$

◄

4 Théorème † (Produit et transposition)

► S'il est possible de former le produit AB alors il est possible de former le produit $T(B)T(A)$ et on a

$$T(AB) = T(B) \cdot T(A) \quad \text{ou} \quad (AB)^T = B^T A^T.$$

◄

On peut retenir que la transposée d'un produit est le produit des transposées dans l'ordre inverse.

§ 6. Caractère fondamental des matrices

1 Liens systèmes linéaires / relation matricielle

La résolution des systèmes linéaires est un des problèmes fondamentaux des mathématiques. Il n'y a guère d'application des mathématiques qui ne nécessite la résolution d'un système linéaire. On apprend à résoudre des systèmes simples dès le collège. Rappelons qu'un système S de n équations à m inconnues se présente sous la forme suivante.

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ \vdots \\ L_i \\ \vdots \\ L_n \end{array} \quad \left\{ \begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1m}x_m & = & c_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2m}x_m & = & c_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}x_1 & + & a_{i2}x_2 & + & \dots & + & a_{im}x_m & = & c_i \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \dots & + & a_{nm}x_m & = & c_m \end{array} \right. .$$

Les a_{ij}'s sont appelés les **coefficients** du système S, les x_i's sont les inconnues (ou les solutions) et les c_i's forment le **second membre**. L'expression

$$L_i \ : \ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{im}x_m = c_i$$

s'appelle la i-ième **ligne** du système. Le système S se représente aussi sous la forme compacte

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij}x_j = c_i, \qquad i = 1, 2, \dots, n.$$

Grâce au produit matriciel, le système S peut se mettre sous la forme de l'identité matricielle suivante :

$$AX = C,$$

où la matrice A et les vecteurs colonne (matrices colonne) X et C sont définis par

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{im} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_i \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix}.$$

Nous verrons que des connaissances sur les matrices permettent souvent de considérablement simplifier la résolution d'un système linéaire.

On dira que A est la matrice du système S, on notera

$$A = \mathrm{MAT}(S),$$

et on retiendra

► $\mathrm{MAT}(S)[i, j]$ = coefficient de x_j dans la i-ème ligne de S. ◄

On remarquera que, lorsqu'on permute les lignes d'un système, on ne change rien au système lui-même ; par contre la matrice du système s'en trouve modifiée : deux de ses lignes sont échangées. Il peut arriver que des modifications aussi simples que celle-là simplifient considérablement la matrice d'un système.

Quelle est la matrice du système suivant

$$\begin{cases} \alpha x_1 + \alpha x_2 + \cdots + \alpha x_{n-1} + \beta x_n = c_1 \\ \alpha x_1 + \alpha x_2 + \cdots + \beta x_{n-1} + \alpha x_n = c_2 \\ \qquad \dots \\ \beta x_1 + \alpha x_2 + \cdots + \alpha x_{n-1} + \alpha x_n = c_n \end{cases} \quad ?$$

2 Liens applications linéaires / relation matricielle

Soient E un espace vectoriel de dimension m, F un espace vectoriel de dimension n et $L : E \to F$ une application linéaire de E dans F. Si $\{e_1, \dots, e_m\}$ est une base de E alors tout élément u de E s'écrira d'une manière et d'une seule,

$$u = \sum_{j=1}^{m} u_j e_j,$$

et, puisque L est une application linéaire, on aura

$$v = L(u) = \sum_{j=1}^{m} u_j L(e_j).$$

Maintenant, si $\{f_1, \dots, f_n\}$ est d'une base de F, chaque $L(e_j)$ qui est élément de F s'écrira d'une manière et d'une seule comme combinaison linéaire des f_j, ou

$$L(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} f_i, \quad j = 1, \dots, m.$$

En insérant cette relation dans la précédente, nous obtenons

$$L(u) = \sum_{j=1}^{m} u_j L(e_j) = \sum_{j=1}^{m} u_j \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij} f_i \right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{m} a_{ij} u_j \right) f_i,$$

et cette dernière relation donne les coordonnées de $v = L(u)$ dans la base des f_i. Précisément si $v = \sum_{i=1}^{n} v_i f_i$ alors

$$v_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} u_j, \quad i = 1, \dots, m.$$

Si on note U le vecteur colonne formé des coordonnées de u et V le vecteur colonne formé des coordonnées de $v = f(u)$,

$$U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \quad V = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix},$$

il vient

$$V = AU, \quad A = (a_{ij}).$$

Ainsi,

$$v = L(u) \iff V = AU,$$

et on voit ainsi, qu'une fois un choix de bases effectué, le calcul de l'image d'un vecteur par une application linéaire est équivalent à un calcul de produit matriciel.

La matrice A ci-dessus s'appelle la matrice de L relativement aux bases (ordonnées) $e_1, \ldots, e_m$ et $f_1, \ldots, f_n$. On note

$$A = \mathrm{MAT}\,(L \mid e_1, \ldots, e_m\ ;\ f_1, \ldots, f_n)$$

et on retiendra

▶ $\mathrm{MAT}\,(L \mid e_1, \ldots, e_m\ ;\ f_1, \ldots, f_n)\,[i,j] =$ le coefficient de $L(e_j)$ sur f_i. ◀

On peut encore schématiser le résultat précédent comme ceci

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} \underset{\downarrow}{\underline{L(e_1)}} & \underset{\downarrow}{\underline{L(e_2)}} & & \underset{\downarrow}{\underline{L(e_m)}} \end{array} \\ \begin{array}{c} f_1 \to \\ f_2 \to \\ \\ f_n \to \end{array} & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nm} \end{pmatrix} \end{array}, \qquad \begin{array}{c} L(e_1) = a_{11}f_1 + a_{21}f_2 + \cdots + a_{n1}f_n \\ L(e_2) = a_{12}f_1 + a_{22}f_2 + \cdots + a_{n2}f_n. \\ \ldots \end{array}$$

La propriété d'être une base ne varie pas si l'on écrit les éléments de la base dans un ordre différent. Par contre, la matrice de f en sera changée : l'ordre des vecteurs est essentiel dans l'écriture de la matrice d'une application linéaire. L'étude de l'influence des changements de base sur la matrice d'une application linéaire est proposée en exercice.

2.1 Exemple de l'application identique

Soit $I : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ définie par $f(x) = x$ (I est l'application Identité de $\mathbb{R}^n$, voir le point 2.2). On a

$$\mathrm{MAT}\,(I \mid e_1, \ldots, e_n\ ;\ e_1, \ldots, e_n) = I_n = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix},$$

où tous les coefficients de I_n qui ne sont pas spécifiés sont nuls (et tous ceux de la diagonale valent 1).

2.2 Exemple : la matrice d'une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$

Soit $v = (1,1,0)$ et $P = \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par

$$P(x) = (x \bullet v) \cdot v,$$

où $x \bullet v = x_1 + x_2$ (voir Exercice 21). On vérifie que p est une application linéaire et

$$\mathrm{MAT}\,(P \mid e_1, e_2, e_3\ ;\ e_1, e_2, e_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2.3 Exemple de la dérivation sur $\mathcal{P}_2$

L'application $D : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_1$ définie par $D(p) = p'$ est une application linéaire. On a

$$\mathrm{MAT}\,(D \mid m_0, m_1, m_2\ ;\ m_0, m_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad m_i(x) = x^i.$$

En effet $Dm_0 = 0 = 0m_0 + 0m_1$ qui donne la première colonne, $Dm_1 = 1 = 1m_0 + 0m_1$ qui donne la seconde colonne, $Dm_2 = 2m_1 = 0m_0 + 2m_1$ qui donne la troisième colonne.

▌ Trouver le matrice correspondante lorsque $D : \mathcal{P}_3 \to \mathcal{P}_2$ et, plus généralement, $D : \mathcal{P}_n \to \mathcal{P}_{n-1}$

3 Théorème $**$ **(Matrice d'une combinaison linéaire d'applications linéaires)**

► Soient E et F des espaces vectoriels de dimensions respectives m et n et leurs bases formées respectivement des vecteurs e_i et des vecteurs f_i comme au-dessus. Si $L_1 : E \to F$ et $L_2 : E \to F$ sont deux applications linéaires et $\lambda \in \mathbb{R}$ alors on a

$$\begin{aligned} &\mathrm{MAT}\,(L_1 + \lambda L_2 \mid e_1, \dots, e_m \; ; \; f_1, \dots, f_n) \\ &\qquad = \mathrm{MAT}\,(L_1 \mid e_1, \dots, e_m \; ; \; f_1, \dots, f_n) \; + \; \lambda\, \mathrm{MAT}\,(L_2 \mid e_1, \dots, e_m \; ; \; f_1, \dots, f_n)\,. \end{aligned}$$

Autrement dit, à la somme et au produit par un réel des applications linéaires correspond la somme et le produit par un réel des matrices. ◄

Une autre manière d'énoncer le même résultat serait de dire que l'application $\phi : \mathcal{L}(E, F) \to M_{nm}(\mathbb{R})$ définie par

$$\phi(L) = \mathrm{MAT}\,(L \mid e_1, \dots, e_m \; ; \; f_1, \dots, f_n)$$

est une application linéaire. On peut montrer que c'est un isomorphisme.

4 Théorème $**$ **(Matrice d'une composée d'applications linéaires)**

► Soient E, F et G des espaces vectoriels de dimensions respectives m, n et p et leur base formée respectivement des vecteurs e_i, des vecteurs f_i et des vecteurs g_i. Si $L : E \to F$ et $R : F \to G$ sont deux applications linéaires alors on a

$$\begin{aligned} &\mathrm{MAT}\,(R \circ L \mid e_1, \dots, e_m \; ; \; g_1, \dots, g_p) \\ &\qquad = \mathrm{MAT}\,(R \mid f_1, \dots, f_n \; ; \; g_1, \dots, g_p) \; \cdot \; \mathrm{MAT}\,(L \mid e_1, \dots, e_m \; ; \; f_1, \dots, f_n)\,. \end{aligned}$$

Autrement dit, à la composition des applications linéaires correspond la multiplication des matrices. ◄

C'est ce résultat qui explique l'origine de la formule du produit pour les matrices : elle n'est que la traduction matricielle de la composition des applications linéaires.

§ 7. Matrices spéciales d'ordre n

Nous définissons quelques classes de matrices carrées qui jouent un rôle important dans l'étude des autres matrices.

1 Matrices diagonales

Une matrice est M est **diagonale** si tous ses coefficients sont nuls sauf éventuellement ceux qui se trouvent sur la diagonale, autrement dit $M[i, j] = 0$ pour $i \neq j$. Si $M[i, i] = \lambda_i$, on écrit

$$M = \mathrm{DIAG}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n).$$

La matrice identité est un cas particulier de matrice diagonale puisque $I_n = \mathrm{DIAG}(1, 1, \dots, 1)$. On peut représenter une matrice diagonale comme ceci :

$$\mathrm{DIAG}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Le produit des matrices diagonales est extrêmement simple puisque

$$\mathrm{DIAG}(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n)\cdot\mathrm{DIAG}(\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_n)=\mathrm{DIAG}(\lambda_1\beta_1,\lambda_2\beta_2,\dots,\lambda_n\beta_n).$$

On remarquera que, restreint aux matrices diagonales, le produit matriciel est commutatif.

2 Matrices triangulaires

Une matrice $U \in M_n(\mathbb{R})$ est dite **triangulaire supérieure** lorsque tous les coefficients en dessous de la diagonale sont nuls, autrement dit $U[i,j] = 0$ pour $i > j$. On peut représenter U sous la forme suivante

$$U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \dots & u_{2n} \\ \vdots & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & u_{nn} \end{pmatrix}.$$

On définit de manière similaire, une matrice **triangulaire inférieure** L qui n'est que la transposée d'une matrice triangulaire inférieure.

$$L = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 0 \\ l_{n1} & l_{n2} & \dots & \dots & l_{nn} \end{pmatrix}$$

▌ Quelles sont les matrices qui sont à la fois triangulaires supérieures et triangulaires inférieures ?

3 Matrices symétriques

Une matrice $S \in M_n(\mathbb{R})$ est **symétrique** lorsque $M[i,j] = M[j,i]$ pour tous i,j, autrement dit M est symétrique si elle est égale à sa transposée :

$$M = T(M) \quad \mathrm{ou} M = M^T.$$

Elle se représente comme ceci :

$$S = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & \dots & \dots & s_{1n} \\ s_{12} & s_{22} & \dots & \dots & s_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & s_{n-1\,n} \\ s_{1n} & s_{2n} & \dots & s_{n-1\,n} & s_{nn} \end{pmatrix}.$$

▌ Pour toute matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$, A^TA est symétrique : prouvez-le.

4 Matrices de permutation

Une matrice carrée P est appelée matrice de **permutation** lorsque sur chaque ligne, il y a une seul élément non nul qui vaut 1 et les éléments non nuls ne se trouvent jamais sur un même colonne. Par exemple,

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

est une matrice de permutation. D'une manière plus précise, P est une matrice de permutation de $M_n(\mathbb{R})$ s'il existe une bijection $h : \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\}$ telle que $P[i, j] = \delta_{h(i)j}$. Dans l'exemple ci-dessus, on a $h : \{1, 2, 3, 4\} \to \{1, 2, 3, 4\}$ avec $h(1) = 2$, $h(2) = 3$, $h(3) = 1$ et $h(4) = 4$.

Écrire la matrice de permutation correspondant à la bijection $h : \{1, 2, 3, 4, 5\} \to \{1, 2, 3, 4, 5\}$ telle que $h(1) = 1$, $h(2) = 3$, $h(3) = 4$, $h(4) = 5$, $h(5) = 2$.

Écrire toutes les matrices de permutation de $M_3(\mathbb{R})$.

§ 8. Blocs

1 Définition

Il est souvent commode de définir une matrice en spécifiant des blocs d'éléments plutôt que chaque élément. Plutôt que

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 16 & 17 & 18 & 19 & 20 \end{pmatrix},$$

on pourra écrire

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix},$$

avec

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 11 & 12 & 13 \\ 16 & 17 & 18 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} 14 & 15 \\ 19 & 20 \end{pmatrix}.$$

Les blocs peuvent être de n'importe quelle dimension pourvu que ce soient des matrices de tailles compatibles les unes avec les autres.

L'addition et la multiplication par un réel peuvent s'effectuer par blocs, à la condition que les blocs soient de mêmes dimensions (même nombre de colonnes et même nombre de lignes). Si, en faisant apparaître les dimensions des blocs, on écrit

$$M = \begin{array}{c} \\ n_1 \\ \\ n_q \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} m_1 & & m_r \end{array} \\ \begin{pmatrix} M_{11} & \dots & M_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ M_{q1} & \dots & M_{q_r} \end{pmatrix} \end{array}, \quad N = \begin{array}{c} \\ n_1 \\ \\ n_q \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} m_1 & & m_r \end{array} \\ \begin{pmatrix} N_{11} & \dots & N_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ N_{q1} & \dots & N_{q_r} \end{pmatrix} \end{array},$$

alors

$$M + \lambda N = \begin{array}{c} \\ n_1 \\ \\ n_q \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} m_1 & & m_r \end{array} \\ \begin{pmatrix} M_{11} + \lambda N_{11} & \dots & M_{1r} + \lambda N_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ M_{q1} + \lambda N_{q1} & \dots & M_{q_r} + \lambda N_{qr} \end{pmatrix} \end{array}.$$

Ici, les matrices, M, N et $M + \lambda N$ sont des éléments de $M_{nm}(\mathbb{R})$ où $n = \sum_{i=1}^{q} n_i$ et $m = \sum_{j=1}^{r} m_j$.

Que dire de la transposée de la matrice M ci-dessus ?

La propriété la plus remarquable est celle du produit.

2 Théorème † (Multiplication par blocs)

$$A = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} m_1 & m_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} n_1 \\ n_2 \end{array} & \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \end{array}, \quad B = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} p_1 & p_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} m_1 \\ m_2 \end{array} & \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\Longrightarrow AB = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} p_1 & p_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} n_1 \\ n_2 \end{array} & \begin{pmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{pmatrix} \end{array}$$

Ainsi, formellement la règle de calcul valable pour les matrices ordinaires s'étend aux matrices définies par blocs. Il est essentiel de vérifier la compatibilité des dimensions de chaque bloc.

Montrer que

$$\begin{pmatrix} 0_n & I_n \\ -I_n & 0_n \end{pmatrix}^2 = -I_{2n}.$$

Plus généralement, si

$$A = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} m_1 & & m_r \end{array} \\ \begin{array}{c} n_1 \\ \\ n_q \end{array} & \begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{q1} & \dots & A_{qr} \end{pmatrix} \end{array}, \quad B = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} p_1 & & p_s \end{array} \\ \begin{array}{c} m_1 \\ \\ m_r \end{array} & \begin{pmatrix} N_{11} & \dots & N_{1s} \\ \vdots & & \vdots \\ N_{q1} & \dots & N_{qs} \end{pmatrix} \end{array},$$

alors $C = AB$ est donnée par

$$C = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} p_1 & & p_s \end{array} \\ \begin{array}{c} n_1 \\ \\ n_q \end{array} & \begin{pmatrix} C_{11} & \dots & C_{1s} \\ \vdots & & \vdots \\ C_{q1} & \dots & C_{qs} \end{pmatrix} \end{array}, \quad C_{ij} = \sum_{k=1}^{q} A_{ik}B_{kj}.$$

Quelle serait la définition d'une matrice diagonale par blocs, d'une matrice triangulaire par blocs ?

§ 9. Inversion et déterminant des matrices carrées

1 Definition

Une matrice carrée $A \in M_n(\mathbb{R})$ est dite **inversible** ou **régulière** lorsqu'il existe $B \in M_n(\mathbb{R})$ telle que

$$BA = AB = I_n.$$

Il est facile de voir qu'une telle matrice B est nécessairement unique. On la note A^{-1} et on dit que $B = A^{-1}$ est l'**inverse** de A.

Une matrice qui n'est pas régulière est dite **singulière** ou **non inversible**.

Montrer que si $AB = I_n$ et $B'A = I_n$ alors $B = B'$.

On saisit immédiatement l'intérêt des matrices inverses dans l'application aux systèmes linéaires. On a vu que résoudre le système S au point 61 revenait à chercher un vecteur colonne X tel que $AX = C$ mais, en multipliant des deux cotés cette équation par A^{-1}, on obtient $X = A^{-1}B$ et l'expression des inconnus x_i qui forment X s'en déduit aussitôt.

1.1 Exemple : la matrice identité

Puisque $I_n \times I_n = I_n$, la matrice identité d'ordre n est inversible et a pour inverse elle-même.

1.2 Exemple : les matrices diagonales

Si $\lambda_i \neq 0$ pour $i = 1, \dots, n$, $\mathrm{DIAG}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ est inversible et

$$(\mathrm{DIAG}(\lambda_1, \dots, \lambda_n))^{-1} = \mathrm{DIAG}(1/\lambda_1, \dots, 1/\lambda_n).$$

1.3 Exemple : les matrices d'ordre 2

Soit

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \quad \text{avec} \quad ad - bc \neq 0.$$

Alors M est inversible et

$$M^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

On verra que dans les deux exemples précédents, les conditions posées ne sont pas seulement suffisantes mais aussi nécessaires.

1.4 Exemple : Les matrices de permutations

Toute matrice de permutation P est inversible et son inverse n'est autre que P^T.

1.5 Exemple de matrices singulières

Si M est une matrice dont la première ligne est constituée de 0 alors elle est nécessairement singulière. En effet la relation $MB = I_n$ est impossible puisque la première ligne de MB sera elle aussi uniquement formée de 0.

Donnez un argument similaire pour montrer que toute matrice dont la première colonne est formée de 0 est singulière.

2 Théorème † (Inverse d'un produit)

► Si A_1 et A_2 sont régulières, A_1A_2 l'est aussi et on a

$$(A_1A_2)^{-1} = A_2^{-1}A_1^{-1}.$$

L'inverse d'un produit est le produit inversé des inverses. ◄

3 Théorème † (Inverse d'une transposée)

► Si A est régulière, A^T l'est aussi et on a

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T.$$

L'inverse de la transposée est la transposée de l'inverse. ◄

4 Rang et Noyau

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. L'application $\mathcal{A} : M_{n1}(\mathbb{R}) \to M_{n1}(\mathbb{R})$ définie par

$$\mathcal{A}(X) = AX$$

est une application linéaire. On peut montrer $(*)$ que A est régulière si et seulement si cette application linéaire est un isomorphisme, et pour cela, il suffit d'établir qu'elle est injective, autrement dit que son noyau est réduit au vecteur nul de M_{n1}. Ce noyau est aussi appelé le noyau de A. Il suffit aussi d'établir qu'elle est surjective, c'est-à-dire que $\mathcal{A}\in(M_{n1}(\mathbb{R})) = M_{n1}(\mathbb{R})$. Or, on peut voir que l'image est engendrée par les vecteurs colonne formés par les colonnes de la matrice A, à savoir

$$C_i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Pour que $\mathcal{A}(M_{n1}(\mathbb{R})) = M_{n1}(\mathbb{R})$, il suffit alors que ces n vecteurs soient linéairement indépendants. Plus généralement, on appelle **rang** de A et on note $\mathrm{rang}(A)$ le nombre d'élément de la plus grande sous-famille des C_i qui forme une famille libre.

5 Théorème $*$ (Critères de singularité)

▶ Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. Les trois assertions suivantes sont équivalentes.

A. A est singulière.

B. Il existe $X \neq 0$ dans $M_{n1}(\mathbb{R})$ tel que $AX = 0$.

C. $\mathrm{rang}(A) < n$.

◀

5.1 Exemple : singularité des matrices diagonales

Si $\lambda_i = 0$ pour un certain i dans $1, \dots, n$, alors $\mathrm{DIAG}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ est singulière. En effet

$$\mathrm{DIAG}(\lambda_1, \dots, \lambda_{i-1}, 0, \lambda_{i+1}, \dots, \lambda_n) \times \begin{array}{c} \\ \\ \\ L_i \\ \\ \\ \\ \end{array}\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = 0,$$

ce qui montre l'existence d'un vecteur colonne non nul dans le noyau.

5.2 Exemple : singularité des matrices d'ordre 2

Si

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \quad \text{avec} \quad ad - bc = 0$$

alors M est singulière. En effet on a

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d \\ -c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

qui montre l'existence d'un vecteur colonne non nul dans le noyau lorsque un des quatre coefficients est non nul. N'importe quel vecteur non nul convient dans le cas où tous les coefficients sont nuls.

5.3 *Exemple d'utilisation du rang*

La matrice

$$M = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} C_1 & C_2 & C_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 8 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

est singulière car ses 3 colonnes ne sont pas linéairement indépendantes, on a $C_3 = C_1 + 2C_2$ donc $\text{rang}(M) < 3$. En fait $\text{rang}(M) = 2$ car les deux premières colonnes sont linéairement indépendantes.

6 Le déterminant

On démontre qu'il existe une unique application, appelée **déterminant** et notée $\det : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ vérifiant les propriétés suivantes :

A. $\det(I_n) = 1$

B. det *dépend linéairement de chaque colonne* :

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1(i-1)} & a_{1i} + \lambda b_{1i} & a_{1(i+1)} & \dots a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2(i-1)} & a_{2i} + \lambda b_{2i} & a_{2(i+1)} & \dots a_{2n} \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n(i-1)} & a_{ni} + \lambda b_{ni} & a_{n(i+1)} & \dots a_{nn} \end{pmatrix}$$
$$= \det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1(i-1)} & a_{1i} & a_{1(i+1)} & \dots a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2(i-1)} & a_{2i} & a_{2(i+1)} & \dots a_{2n} \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n(i-1)} & a_{ni} & a_{n(i+1)} & \dots a_{nn} \end{pmatrix}$$
$$+ \lambda \cdot \det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1(i-1)} & b_{1i} & a_{1(i+1)} & \dots a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2(i-1)} & b_{2i} & a_{2(i+1)} & \dots a_{2n} \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n(i-1)} & b_{ni} & a_{n(i+1)} & \dots a_{nn} \end{pmatrix}.$$

C. *L'échange de deux colonnes de la matrice change le signe du déterminant :*

$$\det \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} \phantom{a_{11}} & & C_i & & C_j & & \phantom{a_{1n}} \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2i} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{ni} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \end{array} = - \det \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} \phantom{a_{11}} & & C_j & & C_i & & \phantom{a_{1n}} \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2i} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{ni} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \end{array}.$$

On note souvent

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Des propriétés ci-dessus on peut déduire que pour $A \in M_n(\mathbb{R})$, $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$? Comment ?

Le théorème fournit (en principe, voir Exercice 21) une schéma récursif pour calculer les déterminants.

7 Théorème ** (Réduction dimensionnelle des déterminants)

▶ Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$.

$$\det(A) = \begin{cases} a_{11} & \text{si n=1} \\ a_{11}\det(A_{[11]}) - a_{21}\det(A_{[21]}) + \cdots + (-1)^{n+1} a_{n1}\det(A_{[n1]}) & \text{si n>1} \end{cases},$$

où $A_{[ij]}$ désigne la matrice de $M_{n-1}(\mathbb{R})$ obtenue en retirant la i-ème ligne et la j-ème colonne à A. ◀

> En permutant les deux premières colonnes, trouver une réduction qui fasse intervenir les nombres a_{i2} et les matrices $A_{[i2]}$. Généraliser.

7.1 Déterminants des matrices d'ordre 2

$$\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc.$$

On notera que cette quantité $ad - bc$ a déjà été rencontrée plusieurs fois au dessus.

7.2 Déterminants des matrices diagonales

$$\det(\mathrm{DIAG}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)) = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n = \prod_{j=1}^{n} \lambda_i.$$

7.3 Déterminants des matrices triangulaires supérieures

Le déterminant d'une matrice triangulaire supérieure est égal au produit des coefficients de la diagonale.

> Démontrez-le !

8 Théorème ** (Propriétés fondamentales du déterminant)

▶ Toutes les matrices sont carrées d'ordre n.

A. $\det(M) = \det(M^T)$.
Cela implique que toute les propriétés sur les colonnes indiquées dans la définition ci-dessus restent vraies pour les lignes.

B. $\det(M \cdot N) = \det(M)\det(N)$: le déterminant d'un produit est le produit des déterminants.

C. La matrice M est singulière si et seulement si $\det(M) = 0$.

◀

> Énoncer précisément les propriétés relatives aux opérations sur les lignes satisfaites par l'application déterminant.

> Quel est le rapport entre $\det(A)$ et $\det(A^{-1})$?

> Utiliser le théorème pour montrer que le produit de deux matrices régulières est encore une matrice régulière. La même propriété est-elle vraie pour la somme ?

9 Matrices orthogonales

Un matrice $M \in M_n(\mathbb{R})$ est dite **orthogonale** lorsqu'elle est régulière et que son inverse n'est autre que sa transposée. L'ensemble des matrice orthogonale est notée $O(n)$. Ainsi,

$$M \in O(n) \iff M \cdot M^T = M^T \cdot M = I_n.$$

Les matrices orthogonales ont l'avantage d'avoir un inverse immédiat.

Le déterminant d'une matrice orthogonale vaut toujours 1 ou -1 : justifiez !

9.1 Exemple : matrices diagonales orthogonales

$\mathrm{DIAG}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in O(n)$ si et seulement si $\lambda_i = \pm 1$ pour $i = 1, \dots, n$.

9.2 Exemples

Les matrices de permutations sont des matrices orthogonales.

9.3 Exemple : matrices orthogonales d'ordre 2

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \in O(2).$$

9.4 Autres exemples de matrices orthogonales d'ordre n

$$M = \begin{pmatrix} I_p & & & & & \\ & -I_q & & & & \\ & & \begin{pmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 \end{pmatrix} & & & \\ & & & \begin{pmatrix} \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 \\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2 \end{pmatrix} & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \begin{pmatrix} \cos\theta_s & -\sin\theta_s \\ \sin\theta_s & \cos\theta_s \end{pmatrix} \end{pmatrix} \in O(p+q+2s),$$

les parties vides désignant des plages de 0.

10 Théorème † (Opérations sur les matrices orthogonales)

▶ A. Le produit de deux matrices orthogonales est encore une matrice orthogonale.

B. L'inverse d'une matrice orthogonale est encore une matrice orthogonale.

◀

Montrer que si $A \in O(p)$ et $B \in O(n)$ alors

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \in O(n+p).$$

11 Matrices symétriques définies positives

Une matrice symétrique $A \in M_n(\mathbb{R})$ est dite **définie positive** lorsque pour tout $X \in M_{n1}(\mathbb{R})$ on a

$$X^T A X > 0 \quad \text{dès que } X \neq 0.$$

La définition est sensée puisque $X^T A X$ est une matrice de $M_1(\mathbb{R})$, elle se réduit donc à un nombre et on demande que ce nombre soit strictement positif pour tout vecteur colonne X non nul.

Une application du Théorème 5 montre que tout matrice symétrique définie positive est régulière : expliquez !

12 Théorème † (Exemple de matrice symétrique définie positive)

► Si $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice régulière alors AA^T est une matrice symétrique définie positive. ◄

EXERCICES

§ 10. Exercices : Le calcul matriciel

Au niveau du L2 Informatique, seuls les exercices marqués † sont obligatoires. Ils seront prioritairement traités en Travaux Dirigés.

Exercice 1 (†). — Décrire le résultat de l'algorithme ci-après et calculer le nombre de multiplications qu'il emploie. On désigne par $\mathrm{col}(A)$ le nombre de colonnes de A et par $\mathrm{row}(A)$ son nombre de lignes.

```
Data: A, B des matrices quelconques
if col(A) ≠ row(B) then
 | ERROR (dimensions incompatibles)
else
 |  for i = 1 : row(A) do
 |  |  for j = 1 : col(B) do
 |  |  |  C[i,j]=0;
 |  |  |  for k = 1 : col(A) do
 |  |  |   | C[i, j] = C[i, j] + A[i, k] · B[k, j]
 |  |  |  end
 |  |  end
 |  end
 |  return C
end
```

Exercice 2 (†). — Soit $A = (a_{ij}) \in M_5(\mathbb{R})$ et

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On pose ensuite

$$M = DAP.$$

Calculer M. On exprimera ses coefficients en fonctions de ceux de A.

Exercice 3 (†). — On dispose d'un ensemble $E = \{A, B, C, D, E\}$ formé de cinq matrices $A \in M_{3,5}(\mathbb{R})$, $B \in M_{4,6}(\mathbb{R})$, $C \in M_{3,9}(\mathbb{R})$, $D \in M_{6,3}(\mathbb{R})$ et $E \in M_{5,4}(\mathbb{R})$ avec lesquelles on peut former des produits. Écrire la liste de tous les produits $\square \times \triangle$ possibles avec $\square \in E$ et $\triangle \in E$. (On ne demande pas d'effectuer les produits.)

Exercice 4 (†). — On considère trois matrices $A_1 \in M_{10,100}$, $A_2 \in M_{100,5}$ et $A_3 \in M_{5,50}$. Les deux calculs $(A_1A_2)A_3$ et $A_1(A_2A_3)$ donnent le même résultat. Calculer le nombres de multiplications nécessaires pour effectuer chacun des deux calculs ? Quelle problématique le résultat soulève-t-il ?

Exercice 5 (†). — On appelle **matrice tridiagonale** une matrice carrée dont tous les coefficients sont nuls sauf éventuellement ceux qui se trouvent sur la diagonale et immédiatement au-dessus ou au-dessous de la diagonale. Donner une définition rigoureuse d'une matrice tridiagonale M en indiquant les conditions sur les coefficients $M[i, j]$.

Exercice 6 († Matrices Markoviennes (stochastiques) / → 32). — On dit qu'une matrice $P \in M_n(\mathbb{R})$ est une **matrice markovienne** ou **matrice stochastique** lorsque tous ses coefficients sont positifs ou nuls et la somme des coefficients sur chaque ligne vaut 1, autrement dit

$$\sum_{j=1}^{n} P[i,j] = 1, \quad i = 1, \dots, n.$$

Ces matrices jouent un rôle important en théorie des probabilités. Montrer que le produit de deux matrices markoviennes est encore une matrice markovienne.

Exercice 7 (†). — Donner la forme matricielle du système suivant :

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + \cdots + (n-1)x_{n-1} + nx_n = c_1 \\ x_1 + 2^2x_2 + \cdots + (n-1)^2x_{n-1} + n^2x_n = c_2 \\ \cdots \\ x_1 + 2^nx_2 + \cdots + (n-1)^nx_{n-1} + n^nx_n = c_n \end{cases}$$

Exercice 8 (†). — On considère l'application $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ définie par

$$f(x,y,z) = (x-y, x+y+z, 2y-z, z-y).$$

A. Montrer que f est une application linéaire et déterminer sa matrice avec les bases canoniques de $\mathbb{R}^4$ et $\mathbb{R}^3$, c'est-à-dire $\mathrm{MAT}\,(f \mid e_1, e_2, e_3\ ;\ e_1, e_2, e_3, e_4)$.

B. Déterminer le noyau de f.

C. On considère maintenant l'application linéaire $g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ définie par

$$g(x,y,z,t) = (x-y, x-z, x-t).$$

Montrer que la matrice de $f \circ g$ avec les bases canoniques, notée M, *id est*

$$M = \mathrm{MAT}\,(f \circ g \mid e_1, e_2, e_3, e_4\ ;\ e_1, e_2, e_3, e_4)$$

est donnée par

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

D. Vérifier que

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{4} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{4}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

E. Expliquer, sans faire les calculs, pourquoi cette décomposition permet de facilement résoudre une équation de la forme $MX = B$ où X est un vecteur colonne inconnu et B un vecteur colonne donné.

Exercice 9 († Produit de deux matrices triangulaires). — Montrer que le produit de deux matrices triangulaires supérieures est encore une matrice triangulaire supérieure. Étendre de la manière la plus économique possible le résultat aux matrices triangulaires inférieures.

Exercice 10 (†). — Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ et $D = \mathrm{DIAG}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ diagonale d'ordre n. Décrire simplement DA et AD.

EXERCICE 11 (†). — Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ et P une matrice de permutation d'ordre n. Décrire simplement PA et AP.

EXERCICE 12 (†). — On note tr la trace d'une matrice, c'est-à-dire la somme des éléments diagonaux de sorte que si $M \in M_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{tr}(M) = \sum_{i=1}^{n} M[i,i]$. Démontrer que pour tous $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ on a

$$\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA).$$

EXERCICE 13 (†). — Soit A et B deux matrices inversibles de $M_n(\mathbb{R})$. Démontrer les identités suivantes :

$$A + B = A(A^{-1} + B^{-1})B = B(A^{-1} + B^{-1})A = A(A^{-1} + A^{-1}BA-1)A = B(B^{-1} + B^{-1}AB^{-1})B$$

EXERCICE 14 († Matrices Hamiltoniennes). — On pose

$$J = \begin{pmatrix} 0_n & I_n \\ -I_n & 0_n \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix},$$

où A, B, C et D sont des blocs dans $M_n(\mathbb{R})$, de sorte que $M \in M_{2n}(\mathbb{R})$. On suppose que

$$JMJ^T = -M^T.$$

Démontrer que B et C sont des matrices symétriques et que $D = -A^T$.

Les matrices de cette forme sont appelées matrices **hamiltoniennes**.

EXERCICE 15 (†). — On donne une matrice D définie par blocs, avec tous les blocs dans $M_n(\mathbb{R})$ comme ceci

$$M = \begin{pmatrix} I_n & A & 0 \\ 0 & I_n & B \\ 0 & 0 & I_n \end{pmatrix}$$

Montrer que M est inversible d'inverse

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} I_n & -A & AB \\ 0 & I_n & -B \\ 0 & 0 & I_n \end{pmatrix}$$

EXERCICE 16 (†). — Montrer que si A est une matrice symétrique régulière alors son inverse est aussi une matrice symétrique.

EXERCICE 17 (†). —

A. Trouver deux matrices symétriques S_1 et S_2 de $M_2(\mathbb{R})$ telles que S_1S_2 ne soit pas symétrique.
B. Donnez la preuve de la propriété suivante : si S_1 et S_2 sont deux matrices symétriques de $M_n(\mathbb{R})$ telles que $S_1S_2 = S_2S_1$ alors S_1S_2 est symétrique.

EXERCICE 18 (†). — Soit $X \in M_{n1}(\mathbb{R})$, $X \neq O$.

A. Expliciter les coefficients de la matrice $U = X \cdot X^T$.
B. Montrer que $\mathrm{rang}(U) = 1$.
C. La matrice U est-elle régulière ou singulière ?

EXERCICE 19 (†). — On suppose que

$$M = A \times \mathrm{DIAG}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \times A^{-1}$$

ou toutes les matrices sont d'ordre n. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$M^k = A \times \mathrm{DIAG}(\lambda_1^k, \ldots, \lambda_n^k) \times A^{-1}.$$

On suppose que les coefficients de A^{-1} sont connus. Combien d'opérations nécessite le calcul de M^k avec la formule ci-dessus ? Combien d'opérations pour M^k si on ne disposait pas de cette formule ?

Exercice 20. — Calculer le déterminant des matrices ci-dessous et dire si elle sont inversibles.

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}, \quad a, b \in \mathbb{R},$$

$$B = \begin{pmatrix} a & a & 0 \\ b & b & b \\ 0 & c & c \end{pmatrix}, \quad a, b, c \in \mathbb{R},$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & c & b & 0 \\ 0 & c & b & 0 \\ d & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad a, b, c \in \mathbb{R}.$$

Exercice 21 († Impraticabilité de la réduction dimensionnelle des déterminants). —
Calculer (en fonction de n) le nombre de multiplications nécessaires pour calculer les déterminants par la relation de récurrence

$$\det(A) = a_{11} \det A_{[11]} - a_{21} \det(A_{[21]}) + \cdots + (-1)^{n+1} a_{n1} \det(A_{[n1]}).$$

Combien de temps prendrait le calcul si on utilise un ordinateur (ultra-performant) capables d'effectuer 10^{15} multiplications à la seconde. On pourra utiliser l'inégalité

$$n! \geqslant (n/e)^n.$$

Exercice 22 (†). — On considère la matrice $J \in M_n(\mathbb{R})$ définie par

$$J[i,j] = \begin{cases} 1 & \text{si } j = n - i + 1 \\ 0 & \text{si } j \neq n - i + 1 \end{cases}, \qquad i, j = 1, \ldots, n.$$

A. Représenter la matrice J
B. Dans la liste ci-dessous quelles sont les affirmations exactes ?
   (a) J est une matrice diagonale
   (b) J est une matrice triangulaire supérieure.
   (c) J est une matrice triangulaire inférieure.
   (d) J est symétrique.
   (e) J est antisymétrique.
   (f) J est inversible.
   (g) J est une matrice de permutation.
C. Expliquer et justifier l'énoncé suivant.
   Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. La matrice JA^T s'obtient à partir de A en effectuant une rotation des entrées de 90 degrés dans le sens inverse des aiguilles d'une montre.

Exercice 23. — À quelle(s) condition(s), la matrice $\mathrm{DIAG}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ est-elle une matrice symétrique définie positive ?

Exercice 24. — On suppose que $A \in M_n(\mathbb{R})$ est symétrique définie positive. Montrer que si $M \in M_n(\mathbb{R})$ est régulière alors $M^T AM$ est symétrique définie positive.

Exercice 25. — On considère l'application linéaire transposition $T : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$. Montrer que

$$M = \mathrm{MAT}\left(T \mid E^{11}, E^{12}, E^{21}, E^{22} \ ; \ E^{11}, E^{12}, E^{21}, E^{22}\right),$$

est une matrice de permutation. Calculer M^2. Pouvait-on prévoir le résultat ? Expliquer brièvement pourquoi le résultat s'étend au cas ou $M_2(\mathbb{R})$ est remplacé par $M_n(\mathbb{R})$.

Exercice 26. — Une famille de réels $u_0, \dots, u_{n+1}$ est définie par les conditions suivantes

$$\begin{cases} u_0 = \alpha \text{ et } u_{N+1} = \beta \\ \dfrac{u_{j-1} - 2u_j + u_{j+1}}{h^2} - p_j \dfrac{u_{j+1} - u_{j-1}}{2h} - q_j u_j = r_j, \quad j = 1, \dots, N \end{cases},$$

où h, p_j, q_j, r_j sont des paramètres.

Expliciter la matrice A du système dont $u_1, \dots, u_N$ sont les solutions.

Exercice 27 ($\to$ 28 41). — Dans cet exercice, toutes les matrices sont carrées d'ordre n. On rappelle que E^{ij} désigne la matrice dont tous les coefficients sont nuls sauf le coefficient (i, j) qui vaut 1.

A. Calculer $E^{ij}M$, pour $M \in M_n(\mathbb{R})$.

B. On pose $T^{ij} = I + E^{ij}$. Qu'obtient-on en multipliant à gauche M par T^{ij}.

C. Même question avec $T^{ij}(\alpha) = I + \alpha E^{ij}$ où $\alpha \in \mathbb{R}$.

D. Reprenez les questions précédentes en effectuant des multiplications à droite.

Les matrices $T^{ij}(\alpha)$ s'appellent des **transvections**.

Exercice 28 ($\leftarrow$ 27 / Recherche du centre). — Nous avons dit que le produit matriciel dans $M_n(\mathbb{R})$ n'était pas une opération commutative (dès que $n > 1$). Il est naturel de se demander s'il existe des matrices Z qui commutent avec toutes les autres. Autrement dit, on cherche les matrices $Z \in M_n(\mathbb{R})$ telles que pour tout $M \in M_n(\mathbb{R})$, on a $ZM = MZ$. L'ensemble $\mathcal{C}$ de ces matrices Z s'appelle le **centre** de $M_n(\mathbb{R})$. Ce centre n'est pas vide car il contient I_n. On se propose de déterminer l'ensemble des éléments de $\mathcal{C}$. On suppose que $Z \in \mathcal{C}$.

A. Calculer ZE^{ij} et $E^{ij}Z$.

B. De l'identité $ZE^{ij} = E^{ij}Z$, déduire la forme de Z.

Exercice 29 (**Formule de Sherman-Morrison**). — Soient $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice inversible et $X, Y \in M_{n1}(\mathbb{R})$, **non nuls**. On considère la matrice

$$B = A + XT(Y) \in M_n(\mathbb{R}).$$

A. Quel est le type de la matrice $T(Y)A^{-1}X$?

B. Montrer que s'il existe $U \in \ker B$ alors $1+T(Y)A^{-1}X = 0$. En déduire que si B est non inversible alors $1+T(Y)A^{-1}X = 0$.

C. Montrer que si $1 + T(Y)A^{-1}X \neq 0$ alors B est inversible d'inverse

$$B^{-1} = A^{-1} - \frac{1}{1 + T(Y)A^{-1}X}\left(A^{-1}XT(Y)A^{-1}\right)$$

Cette formule explicite pour l'inverse de $A + XT(Y)$ s'appelle la formule de Sherman-Morrison.

Exercice 30. — On rappelle la formule du **binôme de Newton** :

$$(a + b)^m = \sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} a^j b^{m-j}.$$

Soit x_i, $i = 1, \dots, m+1$, $m+1$ nombres réels deux à deux distincts.

A. Écrire les relations suivantes sous la forme d'une identité matricielle.

$$(1 + x_i)^m = \sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} x_i^j, \quad i = 0, \dots, m.$$

B. Peut-on écrire similairement une relation matricielle avec $(a_i + b_i)^m$ à la place de $(1 + x_i)^m$?

Exercice 31 (†). — Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. On définit l'application d_A de $M_n(\mathbb{R})$ dans $M_n(\mathbb{R})$ par

$$d_A(M) = AM - MA.$$

A. Montrer que $d_A(MN) = d_A(M)N + Md_A(N)$ pour $M, N \in M_n(\mathbb{R})$.

B. On définit maintenant une application Φ de $M_n(\mathbb{R})$ dans $M_{2n}(\mathbb{R})$ par

$$\phi(M) = \begin{pmatrix} M & d_A(M) \\ 0_n & M \end{pmatrix}.$$

(a) Montrer que Φ est une application linéaire injective. Est-elle surjective ?

(b) Montrer que pour toutes matrices $M_1, M_2 \in M_n(\mathbb{R})$, on a

$$\Phi(M_1M_2) = \Phi(M_1)\Phi(M_2).$$

Exercice 32 ($\leftarrow 6$). — Imaginons un objet qui peut prendre n positions S_i, $i = 0, \ldots, n$, et en change aléatoirement à chaque seconde. On note p_{ij} la probabilité qu'il passe en S_j lorsqu'il se trouve en S_i. On note $P_k(S_j)$ la probabilité qu'il se trouve en S_j à la k-ième seconde.

A. Que dire de la matrice $P = (p_{ij})$?

B. Exprimer $P_{k+1}(S_i)$ en fonction des $P_k(S_j)$.

C. Donner une formulation matricielle de la relation trouvée au dessus.

D. Comment calculer $P_k(S_i)$ si l'on sait que l'objet se trouvait en S_1 au départ ?

Exercice 33 (Matrice de Vandermonde). — Soient $a_0 < a_1 < \cdots < a_n$ $n+1$ nombres réels. On considère l'application linéaire (voir Exercice 29) $f : \mathcal{P}_n \to \mathbb{R}^{n+1}$ définie par

$$f(p) = (p(a_0), p(a_1), \ldots, p(a_n)).$$

Déterminer

$$\mathrm{MAT}\,(f \mid m_0, \ldots, m_n \ ; \ e_1, \ldots, e_{n+1})\,, \quad m_i(x) = x^i,\ e_1, \ldots, e_{n+1} \text{ base canonique de } \mathbb{R}^{n+1}$$

La matrice obtenue s'appelle une matrice de **Vandermonde**.

Exercice 34. — On considère l'application $f : \mathcal{P}_n \to \mathbb{R}^{n+1}$ définie par

$$f(p) = (p(a), p'(a), \ldots, p^{(n)}(a)),$$

ou a est un réel fixé et $p^{(j)}$ désigne la dérivée j-ème de p.

A. Montrer que f est une application linéaire.

B. Déterminer

$$\mathrm{MAT}\,(f \mid m_0, \ldots, m_n \ ; \ e_1, \ldots, e_{n+1})\,, \quad m_i(x) = x^i,\ e_1, \ldots, e_{n+1} \text{ base canonique de } \mathbb{R}^{n+1}$$

C. Pour $i = 0, \ldots, n$, on définit le polynôme t_i par $t_i(x) = (x - a)^i$. Montrer que $\{t_0, \ldots, t_n\}$ est une base de $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$.

D. Déterminer

$$\mathrm{MAT}\,(f \mid t_0, \ldots, t_n \ ; \ e_1, \ldots, e_{n+1})\,, \quad e_1, \ldots, e_{n+1} \text{ base canonique de } \mathbb{R}^{n+1}$$

Exercice 35. — On considère l'application $f : \mathcal{P}_n \to \mathcal{P}_n$ définie par

$$f(p)(x) = p(x+1),$$

A. Montrer que f est une application linéaire.

B. Calculer $f(m_i)$ pour $i = 1, \ldots, n$ où $m_i(x) = x^i$ en utilisant le formule du binôme de Newton.

C. Déterminer

$$\mathrm{MAT}\,(f \mid m_0, \ldots, m_n \ ; \ m_0, \ldots, m_n)\,.$$

D. On considère maintenant $g : \mathcal{P}_n \to \mathcal{P}_n$ définie par $g(p) = f(p) - p$. Montrer que g est une application linéaire.

E. Déterminer

$$\mathrm{MAT}\,(g \mid m_0, \ldots, m_n \ ; \ m_0, \ldots, m_n)\,.$$

Exercice 36 ($*$ Stockage des matrices symétriques Golub and Loan [2013]). — Si on sait qu'une matrice A est symétrique, il est inutile de stocker tous ses coefficients puisque la connaissance de a_{ij} implique celle de a_{ji}. Ainsi, Au lieu de mettre

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

en mémoire, on enregistrera la liste

$$A_{[V]} = (1, 2, 3, 4, 5, 6).$$

On associe ainsi à une matrice de 9 coefficients une liste de 6 coefficients. On s'intéresse à cette procédure dans le cas général.

A. Montrer que dans le cas ou A est une matrice symétrique d'ordre n, on peut définir $A_{[V]}$ par

$$A_{[V]}[(n - j/2)(j-1) + i] = a_{ij}, \quad 1 \leqslant j \leqslant i \leqslant n.$$

B. La question qui se pose ensuite est de savoir comment effectuer les opérations matricielles courantes avec A si celle-ci est stockée sous forme de liste comme au-dessus. Vérifiez que l'algorithme suivant substitut au vecteur colonne y le vecteur colonne $y + Ax$ où x est un autre vecteur colonne.

```
Data: A ∈ M_n(R) matrice symétrique sous la forme A_[V], x, y ∈ M_n1(R).
for j = 1 : n do
    for i = 1 : j − 1 do
        y[i] = y[i] + A_[V][(i − 1)n − i(i − 1)/2 + j] · x[j]
    end
    for i = j : n do
        y[i] = y[i] + A_[V][(j − 1)n − j(j − 1)/2 + i] · x[j]
    end
end
return y
```

C. Calculer la complexité de cet algorithme.

Exercice 37. — Soit p, q deux nombres réels. Pour tous x, y, z, t dans $\mathbb{R}$ on définit les matrices

$$A(x,y) = \begin{pmatrix} x & py \\ y & x \end{pmatrix}, \quad B(z,t) = \begin{pmatrix} z & -pt \\ t & -z \end{pmatrix}, \quad M(x,y,z,t) = \begin{pmatrix} A(x,y) & qB(z,t) \\ B(z,t) & A(x,y) \end{pmatrix}.$$

Montrer que si x, y, z, t et x', y', z', t' sont des éléments quelconques de $\mathbb{R}$ alors il existe d'autres réels x'', y'', z'', t'' tels que

$$M(x,y,z,t)M(x',y',z',t') = M(x'',y'',z'',t'').$$

Exercice 38 ($*$ Changement de base). — Soient E un espace vectoriel de dimension m avec la base $S = \{e_1, \ldots, e_m\}$ et F un espace vectoriel de dimension m avec la base $\sigma = \{f_1, \ldots, f_n\}$. On considère $L : E \to F$ une application linéaire et on pose

$$M = \mathrm{MAT}\,(L \mid e_1, \ldots, e_m\ ;\ f_1, \ldots, f_n) \in M_{nm}(\mathbb{R}).$$

Si au lieu de travailler avec la base S, on travaillait avec la base $S' = \{e'_1, \ldots, e'_m\}$ on obtiendrait une matrice

$$M' = \mathrm{MAT}\,(L \mid e'_1, \ldots, e'_m\ ;\ f_1, \ldots, f_n) \in M_{nm}(\mathbb{R}).$$

Il est alors naturel de se demander quelle sera la relation entre M et M'.

A. Puisque chaque e'_j est un élément de E, il peut s'écrire d'une unique manière comme combinaison linéaire des vecteurs e_i et il existe des coefficients (uniquement déterminés) p_{ij} tel que

$$e'_j = \sum_{i=1}^{m} p_{ij} e_i, \quad j = 1, \ldots, m.$$

À l'aide de ces coefficients p_{ji} nous pouvons définir une matrice $P \in M_m(\mathbb{R})$ par

$$P[i,j] = p_{ij}.$$

Démontrer que l'on a

$$M' = MP$$

B. Supposons maintenant qu'on ait gardé la base S mais changé la base σ en $\sigma' = \{f'_1, \ldots, f'_n\}$, on aura une troisième matrice

$$M'' = \mathrm{MAT}\,(L \mid e_1, \ldots, e_m\ ;\ f'_1, \ldots, f'_n) \in M_{nm}(\mathbb{R}).$$

Quelle sera la relation entre M et M''

C. Quelle est alors la relation entre

$$\mathrm{MAT}\,(L \mid e'_1, \ldots, e'_m\ ;\ f'_1, \ldots, f'_n) \text{ et } = \mathrm{MAT}\,(L \mid e_1, \ldots, e_m\ ;\ f_1, \ldots, f_n).$$

Exercice 39 ($*$). — Soient $A, B \in M_n(\mathbb{R})$. On sait que $(AB)^n = I$. A-t-on $(BA)^n = I$?

Exercice 40 ($\leftarrow$ 8). — En utilisant les propriétés démontrées dans l'exercice 8, calculer très simplement la valeur du déterminant de la matrice M considérée dans cet exercice.

Exercice 41 ($\leftarrow$27). — Que vaut le déterminant d'une transvection ?

Exercice 42 (Matrices triangulaires). — Démontrer les assertions suivantes.

A. Une matrice triangulaire inférieure est inversible si et seulement si tous les coefficients de sa diagonale sont non nuls.

B. L'inverse d'une matrice triangulaire inversible est elle-même triangulaire (du même type).

Exercice 43 (Déterminants des matrices diagonales par blocs). — Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ et $B \in M_m(\mathbb{R})$. On définit $M \in M_{n+m}(\mathbb{R})$ par

$$M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}.$$

A. Préciser la taille ds matrices nulles qui apparaissent dans la définition de M.

B. Montrer que

$$M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I_m \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}.$$

C. Montrer que

$$\det(M) = \det(A) \times \det(B).$$

D. Étendre le résultat aux matrices diagonales par blocs quelconques.

EXEMPLES DE FACTORISATION MATRICIELLE

§ 11. Décomposition en produit de matrices triangulaires

1 Systèmes triangulaires

Un système triangulaire est un système linéaire dont la matrice est une matrice triangulaire ; on distingue naturellement les systèmes triangulaires supérieurs et inférieurs. Ces systèmes sont très simples à résoudre, et la plus importante des stratégies pour résoudre un système linéaire est de le réduire à un système triangulaire. Un système triangulaire inférieur de n équations à n inconnues est de la forme

$$\begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \vdots \\ L_n \end{array} \quad \begin{cases} l_{11}x_1 & & & & & = & c_1 \\ l_{21}x_1 & + & l_{22}x_2 & & & = & c_2 \\ l_{31}x_1 & + & l_{32}x_2 & + & l_{33}x_2 & = & c_3 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ l_{n1}x_1 & + & l_{n2}x_2 & + & \quad + \; l_{nn}x_n & = & c_n \end{cases},$$

ou, en écriture matricielle,

$$\begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & 0 \\ l_{n1} & l_{n2} & & \dots & \dots & l_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}.$$

Un tel système se résout facilement par l'algorithme de **substitutions successives** suivant (sous réserve qu'aucun élément diagonal ne soit nul).

> **Data:** L matrice triangulaire inférieure dans $M_n(\mathbb{R})$ avec $ł_{ii} \neq 0$ pour $i = 1, \dots, n$.
> $x_1 = \frac{c_1}{l_{11}}$;
> **for** $i = 2 : n$ **do**
> $\quad x_i = \dfrac{1}{l_{ii}}\left(c_i - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij}x_j\right)$
> **end**
> **return** $x = (x_1, \alpha_2, \dots, x_n)$

† ► la résolution d'un système triangulaire inférieur d'ordre n (régulier) par la méthode de substitutions successives de l'algorithme précédent emploie n^2 opérations élémentaires. ◄

▌ Rédiger le paragraphe correspondant pour les systèmes triangulaires inférieurs.

2 Factorisation LU

On note couramment les matrices triangulaires inférieures par un L (à cause de l'anglais *Lower*) et les matrices triangulaires supérieures par un U (anglais *Upper*). Le paragraphe précédent montre l'intérêt qu'il y a à écrire une matrice A sous la forme d'un produit LU. Cet intérêt est résumé dans le schéma suivant :

$$A = LU \implies \left(\underbrace{AX = C}_{\text{difficile}} \iff \begin{cases} \underbrace{LY = C}_{\text{facile}} \\ \underbrace{UX = Y}_{\text{facile}}. \end{cases} \right)$$

La factorisation LU permet de transformer la résolution d'un système difficile $AX = C$ en la résolution de deux systèmes triangulaires donc faciles.

Pourquoi ne s'intéresse-ton pas aux factorisation LL', UU' ?

La recherche d'une décomposition LU est en réalité équivalente à l'algorithme de Gauss qui permet de triangulariser un système en effectuant des opérations sur les lignes.

Une factorisation LU n'est pas toujours directement possible. Les objets suivant servent à établir la condition qui assure l'existence d'une factorisation LU.

On appelle **mineur principal** d'une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ les n déterminants δ_i définis par

$$\delta_i = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1i} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2i} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ii} \end{vmatrix}, \quad i = 1, \dots, n.$$

On remarquera que le déterminant lui-même est le dernier des mineurs principaux.

Par matrice triangulaire **unitaire**, on entend une matrice triangulaire avec des 1 sur la diagonale.

3 Théorème † (Factorisation LU)

► Une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ dont tous les mineurs principaux sont non nuls possède une et une seule décomposition LU, id est

$$A = LU,$$

avec L triangulaire inférieure unitaire et U triangulaire supérieure. ◄

En permutant les lignes d'une matrice régulière A, il est toujours possible d'obtenir une matrice dont tous les mineurs principaux sont non nuls. Cela conduit au résultat suivant.

4 Théorème (Factorisation PLU)

► Si $A \in M_n(\mathbb{R})$ est régulière alors il existe une matrice de permutation P, une matrice triangulaire L triangulaire inférieure unitaire L et une triangulaire supérieure U telles que

$$PA = LU.$$

◄

Dans le cas des matrices symétriques, la forme de la décomposition peut être davantage précisée.

5 Théorème (Factorisation LDL^T des matrices symétriques)

► Si A est une matrice symétrique dont tous les mineurs principaux sont non nuls alors A possède une unique factorisation

$$A = LDL^T$$

où D est une matrice diagonale et L est une matrice triangulaire inférieure unitaire. ◄

6 Théorème (Factorisation LL^T des matrices symétriques définies positives)

► Si A est une matrice symétrique définie positive alors A possède une unique factorisation

$$A = LL^T$$

où L est une matrice triangulaire inférieure avec des réels (strictement) positifs sur la diagonale. ◄

§ 12. Diagonalisation

1 Valeurs propres et vecteurs propres

On dit qu'un vecteur colonne *non nul* $X \in M_{n1}(\mathbb{R})$ est un **vecteur propre** de $M \in M_n(\mathbb{R})$ pour la **valeur propre** $\lambda \in \mathbb{R}$ lorsque

$$MX = \lambda X.$$

Si M est singulière alors 0 est valeur propre de M et tout élément non nul du noyau de M est un vecteur propre pour la valeur propre nulle.

▌ Pourquoi exclut-on la possibilité que X soit nul ?

Puisque

$$MX = \lambda X \iff MX - \lambda X = 0 \iff (M - \lambda I)(X) = 0,$$

dire que λ est valeur propre de M est équivalent à dire que la matrice $M - \lambda I$ est singulière ou encore que son déterminant est nul.

▌ On suppose que $\lambda_i \neq \lambda_j$. Quels sont les valeurs propres et vecteurs propres de la matrice $\mathrm{DIAG}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$?

Si l'on pose

$$P(t) = \det(M - tI)$$

alors λ est valeur propre de M si et seulement si $p(\lambda) = 0$.

On montre que $P(t)$ est un polynôme de degré n (pour $M \in M_n(\mathbb{R})$). Il est appelé **polynôme caractéristique** de la matrice M. On notera $P(t) = \chi_M(t)$.

► Les valeurs propres (réelles) d'une matrices $M \in M_n(\mathbb{R})$ sont les racines réelles (s'il en possède) du polynôme caractéristiques $\chi_M(t)$. ◄

▌ Comment calculer le polynôme caractéristique d'une matrice triangulaire ? Quelles sont les valeurs propres d'une matrice triangulaire ?

2 Sous-espaces propres

Lorsque λ est une valeur propre de $M \in M_n(\mathbb{R})$, on note

$$V(\lambda) = \{X \in M_{n1}(\mathbb{R}) \ : \ MX = \lambda X\}.$$

On montre que $V(\lambda)$ est un sous-espace vectoriel de $M_{n1}(\mathbb{R})$. On parle du **sous-espace propre** associé à la valeur propre λ.

Donner la démonstration du fait que $V(\lambda)$ est un sous-espace vectoriel.

Puisque λ est valeur propre, $V(\lambda)$ n'est pas un sous-espace vectoriel réduit au vecteur nul, sa dimension est donc strictement positive. On note

$$\dim V(\lambda) = d(\lambda).$$

Puisque par ailleurs $V(\lambda)$ est un sous-espace d'un espace de dimension n, on a

$$1 \leqslant d(\lambda) \leqslant n.$$

3 Théorème (Critère de diagonalisation)

▶ Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$. Si la somme des $d(\lambda)$ lorsque λ parcourt l'ensemble des valeurs propres de M est égale à n alors il existe une matrice régulière P telle que

$$D = P^{-1}MP,$$

où D est une matrice diagonale contenant les valeurs propres de M. Si M admet k valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ de sorte que

$$\sum_{j=1}^{k} d_k = n, \quad d_k = d(\lambda_k).$$

La matrice P est construite (par blocs) de la manière suivante

$$P = \begin{pmatrix} C_1(\lambda_1) & \dots & C_{d_1}(\lambda_1) & C_2(\lambda_2) & \dots & C_{d_2}(\lambda_2) & \dots & C_k(\lambda_k) & \dots & C_{d_k}(\lambda_k) \end{pmatrix}$$

où les vecteurs colonnes $C_i(\lambda_i), \dots, C_{d_i}(\lambda_i)$ forment une base de l'espace propre $V(\lambda_i)$. La matrice D est alors donnée (sous forme de blocs) par

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 I_{d_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 I_{d_2} & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_k I_{d_k} \end{pmatrix}.$$

◀

Lorsque la condition du théorème est satisfaite on dit que M est **diagonalisable**.

En général, ce n'est pas D que l'on veut exprimer en fonction de M mais plutôt M en fonction de D. Comment ?

Montrer que $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ n'est pas diagonalisable.

Montrer que $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est diagonalisable. Donner D et P.

4 Théorème (Diagonalisation des matrices symétriques)

▶ Si A est une matrice symétrique alors il existe une matrice orthogonale U telle que

$$D = U^T A U.$$

En particulier toute matrice symétrique est diagonalisable. ◀

§ 13. Décomposition en valeurs singulières

La décomposition en valeurs singulières d'une matrice régulière $A \in M_n(\mathbb{R})$ est liée à la diagonalisation des matrices AA^T et A^TA. Une première approche à ce lien est proposée en exercice.

1 Théorème $*$ **(Décomposition en valeurs singulières)**

► Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ non nécessairement régulière. Il existe des matrices orthogonales U et V et une matrice diagonale Σ,

$$\Sigma = \mathrm{DIAG}(\sigma_1, \dots, \sigma_n), \quad \sigma_1 \geqslant \sigma_2 \geqslant \cdots \geqslant \sigma_n \geqslant 0,$$

telles que

$$U^TAV = \Sigma.$$

◄

Les réels positifs σ_i sont appelées les **valeurs singulières** de A et la relation $U^TAV = \Sigma$ s'appelle la **décomposition en valeurs singulières** de A.

▌ Quelle sont les différences entre la décomposition en valeurs singulières et la diagonalisation ?

EXERCICES

§ 14. Exercices : Factorisations matricielles

Au niveau du L2 Informatique, seuls les exercices marqués † sont obligatoires. Ils seront prioritairement traités en Travaux Dirigés.

Exercice 1 (†). — On dit que deux matrices A et B de $M_n(\mathbb{R})$ sont **semblables** , et on note $A \sim B$ lorsqu'il existe une matrice inversible P (dépendant de A et B) telle que $A = P^{-1}BP$. On note alors $A \sim B$.

On demande de montrer que la relation $\sim$ est une relation d'équivalence, pour cela on établira les trois points suivants.

A. $\sim$ est réflexive : Pour tout $A \in M_n(\mathbb{R})$, $A \sim A$.

B. $\sim$ est symétrique : $A \sim B \implies B \sim A$.

C. $\sim$ est transitive : $(A \sim B \text{ et } B \sim C) \implies A \sim C$.

Exercice 2 (← 1 †). — Montrer que deux matrices semblables ont le même déterminant. La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 3. — A. Trouver la factorisation LU de la matrice

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

B. Trouver la factorisation LU de la matrice

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 4 (†). — On considère une matrice définie par blocs,

$$A = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} r & n-r \end{array} \\ \begin{array}{c} r \\ n-r \end{array} & \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \end{array}$$

dans laquelle on suppose que $A_{11} \in M_r(\mathbb{R})$ est régulière et possède la factorisation

$$A_{11} = L_{11}D_1U_{11}$$

avec L_{11} triangulaire inférieure, U_{11} triangulaire supérieure, les deux unitaires, et D_1 diagonale. On pose

$$\begin{aligned} L_{21} &= A_{21}U_{11}^{-1}D_1^{-1}, \\ U_{12} &= D_1^{-1}L_{11}^{-1}A_{12}, \\ \Delta_2 &= A_{22} - L_{21}D_1U_{12}. \end{aligned}$$

A. Montrer que les trois matrices ci-dessus sont bien définies (compatibilité des dimensions, existence des inverses).

B. Montrer que

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_{11} & 0 \\ L_{21} & I_{n-r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & \Delta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} \\ 0 & I_{n-r} \end{pmatrix}.$$

C. En déduire l'énoncé d'un théorème de factorisation LU par blocs.

Exercice 5 (†). — On se propose d'étudier les suites de points de points de coordonnées (u_n, v_n) dans le plan (muni du repère orthonormé ordinaire) définies par une relation de récurrence de la forme

$$(14.1)\quad \begin{cases} u_n &= \frac{(t+1)}{2}u_{n-1} + \frac{(t-1)}{2}v_{n-1} \\ v_n &= \frac{(t-1)}{2}u_{n-1} + \frac{(t+1)}{2}v_{n-1} \end{cases}, \quad n \geqslant 1;$$

où t est un paramètre réel et u_0, v_0 sont donnés.

A. Pour tout n, on note

$$X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}.$$

Montrer que X_{n+1} s'obtient à partir de X_n par la multiplication par une matrice A qu'on explicitera, autrement dit

$$(14.2)\quad \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}, \quad n \geqslant 0$$

B. Montrer que

$$(14.3)\quad \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}, \quad n \geqslant 0$$

C. Déterminer les valeurs propres puis des vecteurs propres de A et déduire une matrice P telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale.

D. En déduire une formule pour A^n.

E. En déduire une expression pour u_n et v_n ne dépendant que de u_0, v_0 et t.

F. Étudier les limites des suites u_n et v_n en fonction de u_0, v_0 et t. Que dire du point (u_n, v_n) ?

Exercice 6 (†). — Cet exercice est le même que le précédent avec des calculs plus complexes : utiliser un calculateur.

Dans ce problème, on se propose d'étudier les suites de points (u_n, v_n, w_n) récurrentes définies par une relation de la forme

$$(14.4)\quad \begin{cases} u_n &= 9u_{n-1} + 7v_{n-1} - 3w_{n-1} \\ v_n &= -6u_{n-1} - 4v_{n-1} + 3w_{n-1} \\ w_n &= 8u_{n-1} + 8v_{n-1} - 1w_{n-1} \end{cases}, \quad n \geqslant 1;$$

où u_0, v_0 et w_0 sont donnés.

A. Pour tout n, on note

$$X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}.$$

Vérifier que

$$(14.5)\quad \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \\ w_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}, \quad n \geqslant 0$$

B. A l'aide de la fonction précédemment construite vérifier sur plusieurs valeurs de n la relation suivante.

$$(14.6) \quad \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix}, \quad n \geqslant 0$$

C. Diagonaliser la matrice A obtenue en explicitant toutes les étapes.

D. En déduire une formule pour A^n.

E. En déduire une expression pour u_n, v_n et w_n ne dépendant que de n, u_0, v_0 et w_0.

F. Toujours à l'aide de la fonction construite à la première question vérifier la formule trouvée à la question précédente sur plusieurs valeurs de n.

G. Peut-on choisir le point de départ (u_0, v_0, w_0) de telle sorte que les points (u_n, v_n, w_n) restent bornés, autrement dit, de telle sorte que les suites $|u_n|$, $|v_n|$ et $|w_n|$ soient toutes trois majorées ?

Exercice 7 (†). — Si $M \in M_n(\mathbb{R})$ alors $\chi_M = \chi_{M^T}$. Vrai ou faux ?

Exercice 8 (†). — Si $M \in M_n(\mathbb{R})$ est diagonalisable alors M^T l'est aussi. Vrai ou faux ?

Exercice 9 (†). — On considère une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ définie par blocs,

$$A = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} 1 & n-1 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ n-1 \end{array} & \begin{pmatrix} \alpha & w^T \\ v & B \end{pmatrix} \end{array}, \quad \text{avec} \quad B \in M_{n-1}(\mathbb{R}), \quad v \in M_{n-1,1}(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad w \in M_{n-1,1}(\mathbb{R}).$$

On observera que puisque $w \in M_{n-1,1}(\mathbb{R})$ on a $w^T \in M_{1,n-1}(\mathbb{R})$, l'exposant T indiquant comme à l'ordinaire la transposition. Dans tout l'exercice, on suppose que $\alpha \neq 0$.

Quest 1. — Montrer que la matrice $B - \frac{1}{\alpha} v w^T$ est bien définie.

Quest 2. — Montrer que

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{\alpha} v & I_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & B - \frac{1}{\alpha} v w^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & w^T \\ 0 & I_{n-1} \end{pmatrix},$$

où I_{n-1} désigne la matrice identité de $M_{n-1}(\mathbb{R})$.

Quest 3. — Expliciter la factorisation obtenue à la question précédente dans le cas où

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

Quest 4. — Quel est l'intérêt de la décomposition obtenue à la question 2 du point de vue de la décomposition LU de A ?

Exercice 10 (†). — Soit $U^T A V = \Sigma$ la décomposition en valeurs singulières de $A \in M_n(\mathbb{R})$ comme dans le Théorème 1. Montrer que A est régulière si et seulement si $\sigma_n > 0$.

Exercice 11 (†). — Comment se servir d'une décomposition en valeurs singulières $U^T A V = \Sigma$ pour résoudre un système $AX = B$?

Exercice 12 (†). — Soit $U^T A V = \Sigma$ la décomposition en valeurs singulières de $A \in M_n(\mathbb{R})$ comme dans le Théorème 1. On note V_i le vecteur colonne donnée par la i-ème colonne de V et U_i le vecteur colonne donné par la i-ème colonne de U.

A. Démontrer que $AV_i = \sigma_i U_i$ et $A^T U_i = \sigma_i V_i$, $i = 1, \dots, n$.

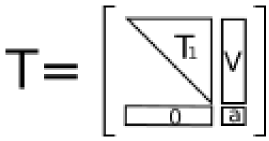
B. En déduire que $A^T A V_i = \sigma_i^2 V_i$ et $A A^T U_i = \sigma_i^2 U_i$.

C. Le résultat ci-dessus donne une stratégie pour trouver U et V : leurs colonnes seront formées de vecteurs propres de AA^T et A^TA. Appliquer cette stratégie pour décomposer en valeurs singulières la matrice

$$A = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 13. — Écrire un algorithme qui, étant donnée une matrice triangulaire supérieur T dans $M_n(\mathbb{R})$ avec $T_{ii} \neq 0$ pour $i = 1, \ldots, n$, retourne T^{-1}. Calculer la complexité de cet algorithme.

On commencera par écrire T comme ci-dessous puis on exprimera l'inverse de T à partir de l'inverse de T_1 .



Exercice 14 (†). — Soit A une matrice de $M_n(\mathbb{R})$ dont tous les mineurs principaux sont non nuls. En partant de la décomposition $A = LU$, montrer qu'il existe deux matrices triangulaires inférieures **unitaires** (ces-à-dire avec des 1 sur la diagonale) L et M et une matrice diagonale D telles que $A = LDM^T$.

Exercice 15 (Factorisation LU des matrices tridiagonales). — On considère une matrice tridiagonales de la forme

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & c_1 & & & & 0 \\ b_2 & a_2 & c_2 & & & \\ & b_3 & a_3 & c_3 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & b_{n-1} & a_{n-1} & c_{n-1} \\ 0 & & & & b_n & a_n \end{pmatrix}.$$

et on suppose que tous ses mineurs principaux sont non nuls de sorte que A possède une décomposition LU. On se propose de donner une algorithme simple calculant L et U.

Data: $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $b = (b_2, b_3, \ldots, b_n)$, $c = (c_1, c_2, \ldots, c_{n-1})$ (trois suites finies de nombres)
$\alpha_1 = a_1$;
for $i = 2 : n$ **do**
  $\beta_i = \dfrac{b_i}{\alpha_{i-1}}$;
  $\alpha_i = a_i - \beta_i c_{i-1}$
end
return $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, $\beta = (\beta_2, \beta_3, \ldots, \beta_n)$

A Modifier l'algorithme ci-dessous pour qu'il stoppe lorsque un α_i nul est produit .

B Montrer que, sous l'hypothèse faite sur A, aucun des α_i n'est nul et que $A = L \cdot U$ où

$$(14.7)\quad L = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ \beta_2 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & \beta_n & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad U = \begin{pmatrix} \alpha_1 & c_1 & & 0 \\ & \alpha_2 & \ddots & \\ & & \ddots & c_{n-1} \\ 0 & & & \alpha_n \end{pmatrix}.$$

C Déterminer en fonction de n le nombre d'opérations employées par l'algorithme ci-dessus pour obtenir les deux suites α et β.

D Montrer que résoudre le système $AX = B$ (d'inconnue X où B est un vecteur colonne quelconque) est *équivalent* à résoudre les systèmes $LY = B$ (d'inconnue Y) *puis* $UX = Y$ (d'inconnue x).

E Montrer que la résolution du système $LY = B$ par substitutions nécessite $2(n-1)$ opérations.

F Montrer que la résolution du système $UX = Y$ par substitutions nécessite $3n - 2$ opérations.

G En combien d'opérations en tout (en fonction de n) peut-on résoudre un système $AX = B$ où A est une matrice tridiagonale à n lignes et n colonnes admettant une décomposition LU ?

H Nous avons dit que toute matrice symétrique définie positive vérifie la condition $A = LL^T$. La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 16 (**Algorithme de Cholesky**). — On étudie une méthode de résolution directe des systèmes linéaires $AX = B$ lorsque la matrice A est *régulière* et peut s'écrire comme le produit d'une matrice triangulaire par sa transposée id est

$$A = LL^T,$$

où $L = (l_{ij})$ est une matrice triangulaire inférieure.

Rappelons que toutes les matrices symétriques définies positives sont de ce type.

Questions préliminaires d'algèbre linéaire.

A. Montrer que $A^T = A$.

B. Montrer que, pour $k = 1, \ldots, n$, on a $l_{kk} \neq 0$.

C. Montrer que si D est une matrice diagonale avec uniquement des 1 ou des -1 sur la diagonale alors on a encore $A = L'(L')^T$ avec $L' = L \cdot D$. En déduire qu'on peut toujours écrire $A = L'(L')^T$ avec $L' = (l'_{ij})$ une matrice triangulaire inférieure telle que $l'_{kk} > 0$ pour $k = 1, \ldots n$.

D. Montrer que résoudre le système $AX = B$ est équivalent à résoudre les deux systèmes $LY = b$ et $L^T X = Y$. En combien d'opérations $(+, -, \times, \div)$ peut-on résoudre ces deux systèmes ?

E. Montrer que

$$\sum_{k=2}^{n} (n-k+1)(k-1) = \frac{n(n^2-1)}{6}.$$

On pourra librement utiliser le fait que $\sum_{j=1}^{n-1} j^2 = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$.

L'algorithme.

Dans cette partie, nous étudions une méthode, dite de Cholesky, pour déterminer L telle que

(14.8) $A = LL^T$ et $l_{kk} > 0, \quad k = 1, \ldots, n.$

Les colonnes de L seront déterminées par récurrence.

F. Montrer à l'aide de (14.8) que, pour $j \leqslant i$, on a

$$a_{ij} = \sum_{s=1}^{j} l_{is} l_{js}.$$

G. En déduire que $l_{11} = \sqrt{a_{11}}$ puis $l_{i1} = \frac{a_{i1}}{l_{11}}$ pour $i = 2, \ldots, n$.

H. On suppose que l'on a construit les $k-1$ premières colonnes de L. Montrer, à l'aide de (F), que

$$l_{kk} = \sqrt{a_{kk} - \sum_{s=1}^{k-1} l_{ks}^2}.$$

I. Montrer

$$l_{ik} = \frac{a_{ik} - \sum_{s=1}^{k-1} l_{is} l_{ks}}{l_{kk}}, \quad i = k+1, \ldots, n.$$

J. Appliquer la méthode décrite dans les trois question précédentes pour trouver la matrice L dans le cas où

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Vérifier que pour la matrice L trouvée, on a bien $A = LL^T$.

Nombre d'opérations.

On détermine le nombre d'opérations élémentaires $+, -, \times, \div$ et aussi la racine carrée $\sqrt{}$ employées par l'algorithme de Cholesky.

K. Déterminer le nombre de racines carrées puis le nombre de divisions employées par l'algorithme de Cholesky.

L. Montrer que le nombre d'additions-soustractions employées par l'algorithme est égal à $\frac{n(n^2-1)}{6}$. Montrer ensuite que le nombre de multiplications employées par l'algorithme est égal à $\frac{n(n^2-1)}{6}$.

M. La méthode de Cholesky pour résoudre le système $AX = B$ consiste à déterminer une matrice L puis à utiliser utiliser la propriété établie ci-dessus (D) : quelle est sa complexité ?

Exercice 17. — On dit qu'une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ est **nilpotente** lorsqu'il existe un entier k tel que $A^k = 0$.

A. Montrer qu'une matrice nilpotente est singulière.

B. Montrer que 0 est la seule valeur propre d'une matrice nilpotente.

C. Donner des exemples de matrice nilpotente d'ordre 3 et 4.

Exercice 18 ($* \leftarrow 1$). — Deux matrices semblables ont les mêmes valeurs propres : vrai ou faux ?

ÉPREUVES ÉCRITES DES ANNÉES PRÉCÉDENTES

§ 15. Contrôle intermédiaire d'octobre 2016

Exercice 1 (1 pt). — On considère l'application abs qui à la liste $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ fait correspondre la liste des valeurs absolues $\text{abs}(x) = (|x_1|, \dots, |x_n|)$. S'agit-il d'une application linéaire ?

Exercice 2 (2 pts). — On rappelle que la multiplication de $A \in M_{nm}(\mathbb{R})$ par $B \in M_{mp}(\mathbb{R})$ nécessite nmp multiplications. Si $M_1 \in M_{10,100}$, $M_2 \in M_{100,4}$ et $M_3 \in M_{4,60}$, quelle est la méthode de calcul de $M_1M_2M_3$ qui emploie le moins de multiplications ?

Exercice 3 (3 pts). — On considère l'ensemble C des matrices M dans $M_2(\mathbb{R})$ de la forme

$$M = \begin{pmatrix} -a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

où a et b sont deux nombres réels. Montrer que C est un sous-espace vectoriel de $M_2(\mathbb{R})$. Donnez-en une base.

Exercice 4 (3 pts). — On considère le polynôme $p(x) = -x^3 + 2x$ dans $\mathcal{P}_3$ et la famille de polynômes $S = \{x^3, x\}$. On demande de dire (a) si p est une combinaison linéaire des éléments de S, (b) si, en cas de réponse positive, l'écriture de p sous forme de combinaison linéaire d'éléments de S est unique, (c) si S est une base de $\mathcal{P}_3$.

Exercice 5 (4 pts). — On considère l'application $f : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ définie par

$$f(M) = \frac{1}{2}\left(M - T(M)\right).$$

On rappelle que $T(M)$ désigne la transposée de la matrice M.

A. Montrer que f est une application linéaire.

B. Déterminer le noyau de f.

C. Montrer que $f \circ f = f$.

Exercice 6 (7 pts). — $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$f(x, y, z, t) = (x - t, y + z + t).$$

A. Montrer que f est une application linéaire.

B. Déterminer la matrice de f avec les bases canoniques de $\mathbb{R}^4$ et $\mathbb{R}^2$, c'est-à-dire

$$\text{MAT}\left(f \mid e_1, e_2, e_3, e_4 \ ; \ e_1, e_2\right)$$

.

C. On considère maintenant l'application linéaire $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ définie par

$$g(x, y) = (x, x + y, x - y, y).$$

D. Donner la matrice de l'application linéaire $g \circ f : \mathbb{R}^4 \to, \mathbb{R}^4$. (On ne demande pas de montrer que $g \circ f$ est une application linéaire.)

E. L'application linéaire $f \circ g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ est-elle injective ? bijective ?

§ 16. Contrôle terminal de décembre 2016

Exercice 1 (5 pts). — A. On considère les matrices suivantes

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a & c \\ 0 & 1 & 0 & d \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculer MN.

B. On note UT_n^1, l'ensemble des matrices A triangulaires supérieures telles que

— tous les éléments de la diagonale de A valent 1 ;

— tous les éléments (juste) **au dessus** de la diagonale sont nuls, c'est-à-dire $A[i, i+1] = 0$, $i = 1, \dots, n-1$.

Les matrices M et N de la première question sont des éléments de UT_4^1.

(a) Que peut-on dire du déterminant d'une matrice de UT_n^1 ?

(b) Démontrer que le produit de deux éléments de UT_n^1 est encore un élément de UT_n^1. (On pourra librement utiliser le fait que le produit de deux matrices triangulaires supérieures est encore une matrice triangulaire supérieure.)

Exercice 2 (8 points). — On se propose d'étudier les suites de points M_n de points de coordonnées (u_n, v_n) dans le plan (muni du repère orthonormé ordinaire) définies par une relation de récurrence de la forme

$$(16.1) \quad \begin{cases} u_n &= 2u_{n-1} - v_{n-1} \\ v_n &= -u_{n-1} + 2v_{n-1} \end{cases}, \quad n \geqslant 1, \quad \text{où } u_0, v_0 \text{ sont donnés.}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note

$$X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}.$$

A. Montrer que

$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}, \quad n \geqslant 0, \quad \text{avec} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

B. Déterminer

(a) les valeurs propres de A puis

(b) des vecteurs propres de A et

(c) déduire une matrice P telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale.

C. En déduire une formule pour A^n.

D. En déduire une expression pour u_n et v_n ne dépendant que de u_0 et v_0.

E. Comment faut-il choisir M_0 pour que la distance entre l'origine et M_n reste bornée ?

Exercice 3 (8 points). — On considère une matrice définie par blocs,

$$A = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} r & n-r \end{array} \\ \begin{array}{c} r \\ n-r \end{array} & \begin{pmatrix} E & C^T \\ C & B \end{pmatrix} \end{array}, \quad \text{avec} \quad E \in M_r(\mathbb{R}), \quad B \in M_{n-r}(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad C \in M_{n-r,r}(\mathbb{R}).$$

On suppose que E est régulière.

A. Montrer que les trois matrices suivantes sont bien définies.

$$CE^{-1}, \quad E^{-1}C^T, \quad B - CE^{-1}C^T.$$

B. Démontrer que

$$A = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ CE^{-1} & I_{n-r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & B - CE^{-1}C^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_r & E^{-1}C^T \\ 0 & I_{n-r} \end{pmatrix}$$

C. Applications. Les deux questions suivantes sont indépendantes.

(a) Démontrer que

$$\det(A) = \det(E) \times \det(B - CE^{-1}C^T).$$

(b) On suppose qu'on connaît une décomposition LU de A, disons $E = L_1U_1$ et une décomposition LU de $B - CE^{-1}C^T$, disons $B - CE^{-1}C^T = L_2U_2$. Utiliser ces deux décompositions et le résultat de la question (B) pour obtenir une décomposition LU de A.

§ 17. Examen de la seconde session de juin 2017

Exercice 1 (1 pt). — On considère l'application Q qui à la liste $X = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$ fait correspondre la liste $Q(X) = (x_1 + x_2, x_2, x_3 - 1, 2x_4)$. Cette applications est-elle linéaire ? Justifier précisément votre réponse.

Exercice 2 (7,5 pts). — On considère l'application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$f(x, y, z) = (z, x + y - z).$$

A. Déterminer le sous-espace vectoriel $\ker f$. Quelle est sa dimension ?

B. Déterminer la matrice de f avec les bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$, c'est-à-dire

$$\mathrm{MAT}\,(f \mid e_1, e_2, e_3\ ;\ e_1, e_2)\,.$$

C. On considère maintenant l'application linéaire $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ définie par

$$g(x, y) = (x, x + 2y, x - y).$$

Donner la matrice de l'application linéaire $g \circ f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. (On ne demande pas de montrer que $g \circ f$ est une application linéaire.)

D. L'application linéaire $f \circ g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ est-elle injective ? bijective ?

E. Si $f \circ g$ n'est pas bijective déterminer son noyau, si elle est bijective, déterminer sa bijection réciproque.

Exercice 3 (4 pts). — Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$. On note I la matrice identité de $M_2(\mathbb{R})$.

A. Montrer que

$$A^2 - (a + d)A + (ad - bc)I = 0,$$

où le 0 du second membre désigne la matrice nulle.

B. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe des nombres réels α_n et β_n tels que

$$A^n = \alpha_n A + \beta_n I,$$

et trouver une relation liant $(\alpha_{n+1}, \beta_{n+1})$ à (α_n, β_n).

Exercice 4 (7,5 pts). — Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$, $n \geqslant 2$. On appelle **seconde diagonale** de A la ligne des coefficients $A[1, n]$, $A[2, n-1]$, …, $A[n, 1]$. Dans les exemples suivants, on encadre les coefficients de la seconde diagonale pour la mettre en évidence :

$$\begin{pmatrix} 1 & \boxed{2} \\ \boxed{3} & 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & \boxed{3} \\ 4 & \boxed{5} & 6 \\ \boxed{7} & 8 & 9 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \boxed{4} \\ 5 & 6 & \boxed{7} & 8 \\ 9 & \boxed{10} & 11 & 12 \\ \boxed{13} & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix}.$$

On dit qu'une matrice est **per-symétrique** si ses coefficients sont symétriques par rapport à la seconde diagonale. Voici quelques exemples dans lesquels on met en évidence cette symétrie :

$$\begin{pmatrix} \underline{1} & 2 \\ 3 & \underline{1} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \underline{1} & \underline{\underline{2}} & 3 \\ 4 & 5 & \underline{\underline{2}} \\ 8 & 4 & \underline{1} \end{pmatrix}$$

A. Compléter la matrice suivante pour obtenir une matrice per-symétrique :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & \dots \\ 9 & 10 & \dots & \dots \\ 13 & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

(Recopier la matrice complète sur la copie.)

B. Donner un exemple de matrice dans $M_3(\mathbb{R})$ symétrique et per-symétrique. La matrice proposée ne devra contenir aucun coefficient nul et au moins deux coefficients différents.

C. On considère la matrice $E \in M_n(\mathbb{R})$ dont tous les éléments sont nuls sauf ceux sur la seconde diagonale qui valent tous 1. C'est une matrice per-symétrique.

(a) Expliciter E dans le cas $n = 4$.

(b) Calculer E^2 (dans le cas où n est quelconque).

D. Parmi les définitions suivantes, une seule est correcte . Trouver laquelle. On rappelle que $T(A)$ désigne la transposée de A et que I désigne la matrice identité.

(a) A est per-symétrique si $A \cdot T(A) = I$

(b) A est per-symétrique si $A[i, j] = A[j, i]$ pour i, j entre 1 et n.

(c) A est per-symétrique si $A[i, j] = A[n + 1 - j, n + 1 - i]$ pour i, j entre 1 et n.

(d) A est per-symétrique si $A[i, j] = A[n + 1 - i, n + 1 - j]$ pour i, j entre 1 et n.

(e) A est per-symétrique si $A[i, j] = A[j, n + 1 - i]$ pour i, j entre 1 et n.

E. Calculer EA (i.e. donner les coefficients de EA en fonction des coefficients de A) et Calculer $T(A)E$. Montrer que A est per-symétrique si et seulement si $EA = T(A)E$.

§ 18. Contrôle terminal de Décembre 2017

Exercice 5 (8 points). — On se propose d'étudier les suites de points M_n de coordonnées (u_n, v_n) dans le plan (muni du repère orthonormé ordinaire) définies par une relation de récurrence de la forme

$$\begin{cases} u_n &= 5u_{n-1} + 2v_{n-1} \\ v_n &= -12u_{n-1} - 5v_{n-1} \end{cases}, \quad n \geqslant 1, \quad \text{où } u_0,\ v_0 \text{ sont donnés.}$$

Quest 1. — Montrer que

$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}, \quad n \geqslant 0, \quad \text{avec} \quad A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -12 & -5 \end{pmatrix}.$$

Quest 2. — Déterminer

(a) les valeurs propres de A puis

(b) des vecteurs propres de A et

(c) déduire une matrice P telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale.

Quest 3. — En déduire une formule pour A^n.
Quest 4. — En déduire une expression pour u_n et v_n ne dépendant que de u_0 et v_0.
Quest 5. — Les suites x_n et y_n sont-elles bornées ? Que cela signifie-t-il pour le point M_n ?

Exercice 6 (8 points). — On considère la matrice

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Cette matrice possède donc seulement deux coefficients non nuls qui se trouvent au dessus de la diagonale.
Quest 1. — Calculer N^2 et N^3. Plus généralement que vaudra N^k pour $k \geqslant 3$?
Quest 2. — On pose

$$A = I + N + \frac{1}{2}N^2$$

où I désigne la matrice identité de $M_5(\mathbb{R})$.

(a) Expliciter les coefficients de A.

(b) Montrer que

$$A^2 = I + 2N + \frac{1}{2}(2N)^2.$$

Quest 3. — Plus généralement, pour tout $d \in \mathbb{N}$, on pose

$$A(d) = I + dN + \frac{1}{2}(dN)^2.$$

Montrer que pour tous $d, d' \in \mathbb{N}$, on a

$$A(d) \cdot A(d') = A(d + d').$$

Exercice 7 (4 points). — On considère une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ définie par blocs,

$$A = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} 1 & n-1 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ n-1 \end{array} & \begin{pmatrix} \alpha & w^T \\ v & B \end{pmatrix} \end{array}, \quad \text{avec} \quad B \in M_{n-1}(\mathbb{R}), \quad v \in M_{n-1,1}(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad w \in M_{n-1,1}(\mathbb{R}).$$

On observera que puisque $w \in M_{n-1,1}(\mathbb{R})$ on a $w^T \in M_{1,n-1}(\mathbb{R})$, l'exposant T indiquant comme à l'ordinaire la transposition. Dans tout l'exercice, on suppose que $\alpha \neq 0$.

Quest 1. — Montrer que la matrice $B - \frac{1}{\alpha}vw^T$ est bien définie.

Quest 2. — Montrer que

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{\alpha}v & I_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & B - \frac{1}{\alpha}vw^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & w^T \\ 0 & I_{n-1} \end{pmatrix},$$

où I_{n-1} désigne la matrice identité de $M_{n-1}(\mathbb{R})$.

Quest 3. — Expliciter la factorisation obtenue à la question précédente dans le cas où

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

Quest 4. — Quel est l'intérêt de la décomposition obtenue à la question 2 du point de vue de la décomposition LU de A ?

§ 19. Examen de la seconde session de juin 2018

Exercice 8 (3 pts). — Soit $V = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & b \\ 0 & b & a \\ 0 & a & b \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}) : a, b \in \mathbb{R} \right\}$.

A. (1,5 pt) Montrer que V est un sous-espace vectoriel de $M_2(\mathbb{R})$.

B. (1,5 pt) Trouver une base de V et expliquez comment tout élément de V se décompose dans cette base.

Exercice 9 (7,5 pts). — Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par

$$f(x, y, z) = (x + y, y + z, z + x).$$

A. (1 pt) Montrer que f est une application linéaire.

B. (1 pt) Déterminer le noyau de f.

C. (1 pt) Trouver la matrice M de f dans la base canonique.

D. (1 pt) Cette matrice est-elle symétrique ? orthogonale ?

E. (1 pt) Que vaut le déterminant de M ?

F. (2,5 pts) Montrer – en donnant le détail des calculs – que

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Comme s'appelle un telle factorisation ? Utiliser cette factorisation pour contrôler le résultat obtenu à la question précédente.

Exercice 10 (12 pts). — Dans une ville, une enseigne de banque nationale possède deux agences, appelées X et Y.

D'une année sur l'autre, une partie des fonds de l'agence X est transférée à l'agence Y, et réciproquement. De plus, chaque année, le siège de la banque transfère une certaine somme à chaque agence.

Soit n un entier naturel. On note x_n la quantité de fonds détenue par l'agence X, et y_n la quantité de fonds détenue par l'agence Y au premier janvier de l'année $2014+n$, exprimée en millions d'euros. On note U_n la matrice $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ et comme d'habitude, on note la matrice identité $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On suppose que le premier janvier de l'année 2014 ($n = 0$), l'agence X possède 50 millions d'euros et l'agence Y possède 10 millions d'euros.

L'évolution de la quantité de fonds est régie par la relation suivante :

$$U_{n+1} = AU_n + B, \quad \text{où} \quad A = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{3}{20} \\ \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

A. (0,5 pt) Interpréter dans le contexte de l'exercice le coefficient $\frac{3}{5}$ de la matrice A et le coefficient 3 de la matrice B.

B. (0,5 pt) Donner la matrice U_0 puis calculer la quantité de fonds détenue par chacune des agences X et Y en 2015 ($n = 1$), exprimée en millions d'euros.

C. (3 pts) Montrer que la matrice A admet pour valeurs propres les réels $\frac{3}{10}$ et $\frac{7}{10}$. Trouver des vecteurs propres correspondant.

D. (1 pt) On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$. Expliquer sans calcul pourquoi on a

$$D = P^{-1}AP \quad \text{avec} \quad D = \begin{pmatrix} \frac{3}{10} & 0 \\ \\ 0 & \frac{7}{10} \end{pmatrix}.$$

E. (1 pt) Démontrer que pour tout entier naturel non nul n on a $A^n = PD^nP^{-1}$.

F. On pose pour tout entier naturel n, $V_n = U_n - \begin{pmatrix} 5 \\ 20/3 \end{pmatrix}$.

  (a) (1 pt) Démontrer que pour tout entier naturel n, $V_{n+1} = AV_n$.

  (b) (1 pt) Déterminer V_0 puis pour tout entier naturel n, donner l'expression de V_n en fonction de A, n et V_0.

G. (1 pt) Soit n un entier naturel. Démontrer que

$$A^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}\frac{3^n}{10^n} + \frac{3}{4}\frac{7^n}{10^n} & \frac{3}{8}\left(\frac{7^n}{10^n} - \frac{3^n}{10^n}\right) \\ \\ \frac{1}{2}\left(\frac{7^n}{10^n} - \frac{3^n}{10^n}\right) & \frac{3}{4}\frac{3^n}{10^n} + \frac{1}{4}\frac{7^n}{10^n} \end{pmatrix}.$$

H. (1 pt) Déterminer le coefficient de la première ligne de la matrice V_n en détaillant les calculs.

I. (1 pt) En déduire l'expression de x_n en fonction de n.

J. (1 pt) Déterminer la limite de x_n quand n tend vers $+\infty$ et interpréter ce résultat dans le cadre du problème.

Note. Cet exercice est une version adaptée au programme du module de Calcul Matriciel d'un exercice de l'épreuve de Bac S, spécialité "mathématiques", de l'année 2014, dans l'académie Antilles-Guyanne.

Index

Références

D. J. Cooke and H. E. Bez. *Computer Mathematics.* Cambridge University Press, 1984.

T. H. Cormen, C. E. Leiserson, and R. L. Rivest. *Introduction to Algorithms.* The MIT Press, Cambridge, Massachussets, 1998.

G. H. Golub and C. F. Van Loan. *Matrix computations.* The John Hopkins University Press, Baltimore, 2013.

A. Kostrikin. *Introduction à l'algèbre.* Mir, Moscou, 1981.

M. Queysanne. *Algèbre. M. G. P. et Spéciales A.* Collection U ; Série “Mathématiques” dirigée par André Revuz. Librairie Armand Colin, Paris, 1964.