Université Toulouse III | Année 2018-2019
Mathématiques discrètes | **Durée : 2h**

Examen

Les documents et les calculatrices ne sont pas autorisés pour l'épreuve.

Exercice 1 - Dénombrabilité (4pt). Soit $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}$ la fonction définie par

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ est pair} \\ -\frac{n+1}{2} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

1. Calculer $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$ et $f(4)$.
2. Est-ce que f est bien définie pour tout $n \in \mathbb{N}$?
3. Montrer que f est bijective.
4. Montrer que $\mathbb{Z}$ est dénombrable.

Exercice 2 - Relations d'équivalence (5pt).

1. On définit une relation $\sim$ sur $\mathbb{Z}$ comme suit :

$$x \sim y \iff 3 \text{ divise } (x - y).$$

   On rappelle que 3 divise $z \in \mathbb{Z}$ s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $z = 3k$.

   (a) Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence.
   (b) Donner quatre éléments de $\mathbb{Z}$ qui sont dans la classe d'équivalence de 0 pour $\sim$.
   (c) Décrire toutes les classes de $\sim$ et donner le cardinal de $\mathbb{Z}/\sim$.

2. Soit $E = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ et $\mathcal{R}$ la relation sur E définie par

$$x\mathcal{R}y \iff \big(3 \text{ divise l'un des } (x-y), (x-y+5) \text{ ou } (y-x+5)\big).$$

   (a) Dessiner le diagramme sagittal de $\mathcal{R}$.
   (b) Montrer que $\mathcal{R}$ est réflexive et symétrique.
   (c) Est-ce-que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence ?

Exercice 3 - Relations d'ordre (4pt). Soit $\mathcal{R}$ la relation sur $\mathbb{N}^*$ définie par :

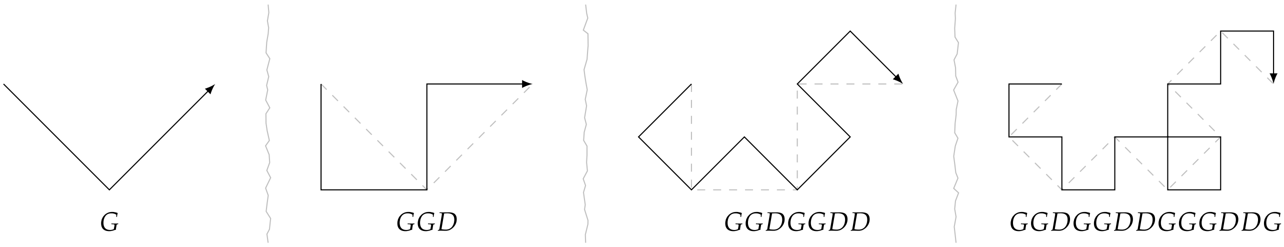
$$x\mathcal{R}y \iff \big((x = y) \text{ ou } (3 \text{ ne divise pas } x \text{ et } x < y)\big).$$

1. Montrer que si $x, y, z \in \mathbb{N}^*$ sont tels que x n'est pas divisible par 3, $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$ alors $x \leq z$.
2. Montrer que $\mathcal{R}$ est transitive.
3. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre.
4. Dessiner le diagramme de Hasse de $\mathcal{R}$ restreint à $\{1, \ldots, 10\}$.
5. Donner un élément minimal de $\mathbb{N}^*$ pour $\mathcal{R}$. Est-ce un plus petit élément ?
6. Donner un élément maximal de $\mathbb{N}^*$ pour $\mathcal{R}$. Est-ce un plus grand élément ?

Exercice 4 - Codes (3pt). Un cadenas possède un code à 3 chiffres, chacun des chiffres pouvant être un chiffre de 0 à 9.

1. Combien y a-t-il de codes possibles ?
2. Combien y a-t-il de codes se terminant par un chiffre pair ?
3. Combien y a-t-il de codes contenant au moins un chiffre 4 ?
4. Combien y a-t-il de codes contenant uniquement des chiffres différents ?

Exercice 5 - Courbe du dragon (6pt). Le dragon de papier est une courbe fractale obtenue en répétant un procédé de construction assez simple : on plie en deux une bande de papier et on itère ce procédé n fois puis on déplie la bande de papier en ouvrant chaque pli à angle droit. On décrit la courbe obtenue par un mot sur l'alphabet $\mathcal{A} = \{G, D\}$: on suit la courbe de gauche à droite et à chaque croisement, on note D si on tourne a droite et G si on tourne à gauche. Le but de cet exercice est de comprendre certaines propriétés de ce mot. Les questions qui suivent ne demandent pas de comprendre la construction physique de la courbe, on s'intéresse aux propriétés combinatoires des mots.



G $\quad$ GGD $\quad$ $GGDGGDD$ $\quad$ $GGDGGDDGGGDDGDD$

On rappelle les notations suivantes : ϵ est le mot vide, $\mathcal{A}^*$ est l'ensemble des mots sur l'alphabet $\mathcal{A}$ et $u.v$ est la concaténation des mots $u, v \in \mathcal{A}^*$.

PARTIE I : **Une fonction préliminaire**

On définit la fonction $\varphi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$ par $\varphi(G) = D$ et $\varphi(D) = G$.
On définit de manière récursive la fonction $f : \mathcal{A}^* \longrightarrow \mathcal{A}^*$ par :

Initialisation : $f(\epsilon) = \epsilon$

Héridité $f(a.u) = f(u).\varphi(a)$ pour $u \in \mathcal{A}^*$ et $a \in \mathcal{A}$.

1. Calculer $f(G)$ et $f(GGD)$.
2. Dire pourquoi $\mathbb{N}$ est un ordre bien fondé.
3. Utiliser cette propriété pour montrer que f est bien définie.

PARTIE II : $n^{\text{ème}}$ **mot de la courbe du dragon**

On définit la fonction $g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathcal{A}^*$ tel que pour $n \in \mathbb{N}$, $g(n)$ est le mot obtenu à la $n^{\text{ème}}$ itération de pliage du dragon. On admet que g est définie de la manière suivante :

Initialisation : $g(0) = \epsilon$

Héridité $g(n+1) = g(n).G.f(g(n))$.

Les questions suivantes sont indépendantes :

1. Calculer $g(1)$, $g(2)$, $g(3)$, $g(4)$ et $g(5)$.
2. Montrer par récurrence que pour $n \in \mathbb{N}$ le mot $g(n)$ est de longueur $2^n - 1$.
3. Montrer que si $n \leq m$ alors $g(n)$ est un préfixe de $g(m)$.
4. Montrer que le mot $GGGG$ n'apparait dans aucun mot $g(n)$ pour $n \in \mathbb{N}$ (autrement dit la feuille ne s'enroule pas sur elle même).
5. **Question bonus :** Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $m \in \mathbb{N}$ tel que $1 \leq m \leq 2^n - 1$. Montrer que pour déterminer la $m^{\text{ème}}$ lettre de $g(n)$, notée $g(n)_m$, on écrit m sous la forme $k.2^l$ avec k impair et

$$g(n)_m = \begin{cases} G & \text{si } k = 1 \bmod 4 \\ D & \text{sinon} \end{cases}$$

Université Toulouse III Année 2018-2019
Mathématiques discrètes **Durée : 2h**

Examen (Solutions)

Correction 1 1. *(1pt)* $f(0) = 0$, $f(1) = -1$, $f(2) = 1$, $f(3) = -2$ et $f(4) = 2$.

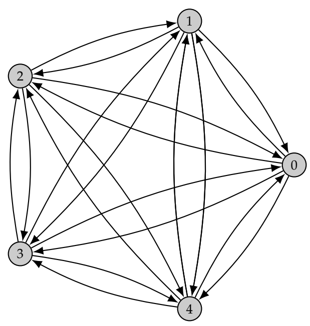
2. *(1pt)* Si n est pair, $\frac{n}{2}$ est un entier. Si n est impair, $n+1$ est pair et $\frac{n+1}{2}$ est un entier.
3. *(1.5pt)* **Injectivité :** Soit x, x' tels que $f(x) = f(x')$. Comme $f(x)$ et $f(x')$ ont le même signe, x et x' ont la même parité. On en déduit que $\frac{x}{2} = \frac{x'}{2}$ si x et x' pair ou $\frac{x+1}{2} = \frac{x'+1}{2}$ si x et x' impair. Dans les deux cas $x = x'$ donc f est injective.
   Surjectivité : Soit $y \in \mathbb{Z}$. Si $y \geq 0$, on a $f(2y) = y$. Si $y < 0$, on a $f(-2y-1) = y$. Dans les deux cas on a trouvé un antécédent de y donc f est surjective.
   Comme f est injective et surjective, elle est bijective.
4. *(0.5pt)* f réalise une bijection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{Z}$ donc $\mathbb{Z}$ est dénombrable.

Correction 2 1. (a) *(1pt)* **Réflexivité :** Pour tout $x \in \mathbb{Z}$, on a $x - x = 0$ qui est divisible par 3. Donc $\sim$ est réflexive.
Symétrie : Soit $x, y \in E$ tels que $x\mathcal{R}y$ donc $x - y$ est divisible par 3. En multipliant par -1 on obtient que $y - x$ est divisible par 3. Donc $\sim$ est symétrique.
Transitivité : Soit $x, y, z \in E$ tels que $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$. Ainsi il existe $k, k' \in \mathbb{Z}$ tels que $x - y = 3k$ et $y - z = 3k'$. On a donc $x - z = (x-y) + (y-z) = 3(k+k')$. Ainsi $x\mathcal{R}z$ et donc $\mathcal{R}$ est transitive.

(b) *(0.5pt)* Quelques éléments dans la classe d'équivalence de 0 sont : -6,-3,0,3,6...

(c) *(1pt)* L'ensemble $\mathbb{Z}/\sim$ a trois éléments :
— $\mathrm{Cl}(0) = \{3k : k \in \mathbb{Z}\}$,
— $\mathrm{Cl}(1) = \{3k+1 : k \in \mathbb{Z}\}$,
— $\mathrm{Cl}(2) = \{3k+2 : k \in \mathbb{Z}\}$.

2. (a) *(0.75pt)*



(b) *(1pt)* **Réflexivité :** Pour tout $x \in E$, on a $x - x = 0$ qui est divisible par 3. Donc $\mathcal{R}$ est réflexive.
Symétrie : Soit $x, y \in E$ tels que $x\mathcal{R}y$ on a trois possibilités :
— si 3 divise $x - y$ alors 3 divise $y - x$ donc $y\mathcal{R}x$;
— si 3 divise $x - y + 5$ alors on a aussi $y\mathcal{R}x$;
— si 3 divise $y - x + 5$ alors on a aussi $y\mathcal{R}x$.
On en déduit que $\mathcal{R}$ est symétrique.

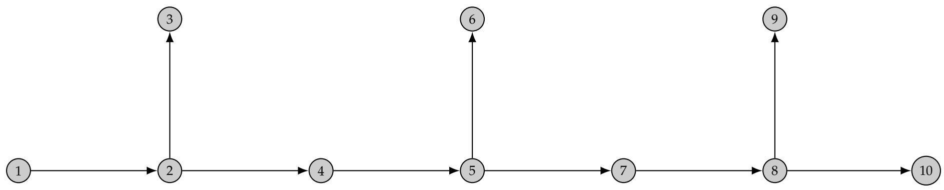
(c) *(0.75pt)* Soit $x, y, z \in E$ tels que $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$, pour chaque aires on a trois possibilités qu'on résume dans le tableau précédent :

	$3 \mid x-y$	$3 \mid x-y+5$	$3 \mid y-x+5$
$3 \mid y-z$	$3 \mid x-y+y-z$	$3 \mid x-y+5+y-z$	$3 \mid y-x+5-y+z$
$3 \mid y-z+5$	$3 \mid x-y+y-z+5$	$3 \mid x-y+5+y-z$	$3 \mid y-x+5-y+z$
$3 \mid z-y+5$	$3 \mid z-y+5-x+y$	$3 \mid z-y+5-x+y$	$3 \mid y-z-5+x-y-5+15$

Dans tout les cas on obtient que $x\mathcal{R}z$ donc $\mathcal{R}$ est transitive.
On en déduit que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre.
Attention : Mettre des points si les étudiants ont lu les propriétés sur le diagramme sagittal.

Correction 3 1. *(0.5pt)* Soit $x, y, z \in \mathbb{N}^*$ tels que x n'est pas divisible par 3, $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$. Comme 3 ne divise pas x, on a $x \leq y$. Comme $y\mathcal{R}z$, on a $y = z$ ou y ne divise pas 3 et $y < z$. Dans les deux cas $y \leq z$. Ainsi $x \leq z$.

2. *(0.5pt)* Soit $x, y, z \in \mathbb{N}^*$ tels que $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$.
   Si x n'est pas divisible par 3, par la question précédente $x \leq z$ et donc $x\mathcal{R}z$.
   Si x est divisible par 3 alors $x = y$ comme $y\mathcal{R}z$, on a y divisible par 3 donc $y = z$. On a donc $x = z$, autrement dit $x\mathcal{R}z$.
   On en déduit que $\mathcal{R}$ est transitive.
3. *(1pt)* $\mathcal{R}$ est réflexive car $x = x$ et donc $x\mathcal{R}x$.
   Soient $x, yfflinE$ tels que $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}x$. Si x est divisible par 3 et $x < y$, on ne peut pas avoir $y\mathcal{R}x$. On en déduit que $x = y$ et donc $\mathcal{R}$ est antisymétrique.
   Comme $\mathcal{R}$ est transitive, réflexive et antisymétrique, c'est une relation d'ordre.
4. *(1pt)*



5. *(0.5pt)* 1 est minimal et c'est le plus petit élément.
6. *(0.5pt)* 3,6, et 9 sont des éléments maximaux mais il n'y a pas de plus grand élément.

Correction 4 1. *(0,75pt)* Il y a 3 chiffres à choisir parmi 10, on s'autorise les remises et l'ordre des chiffres est important. Il y a $10^3 = 1000$ possibilités.

2. *(0,75pt)* Il y a 5 possibilités pour choisir le dernier chiffre puis on a 10 possibilités pour les deux premiers chiffres. Il a donc $5 * 10 * 10 = 500$ possibilités.
3. *(0,75pt)* Il y a $9 * 9 * 9 = 729$ codes sans chiffres 4 (on choisi 3 chiffres parmi 9 avec remise et dans l'ordre. Il y a donc $1000 - 729 = 271$ codes avec au moins un chiffre 4.
4. *(0,75pt)* Pour choisir un code avec uniquement des chiffres différents, on choisi 3 chiffre parmi 10 sans répétition et dans l'ordre. Il y a $A_1^30 = 10 * 9 * 8 = 720$ codes possibles.

Correction 5 PARTIE I :

1. *(0,75pt)* $f(G) = f(\epsilon).\varphi(G) = D$ et $f(GGD) = f(GD).\varphi(G) = f(D).\varphi(G)\varphi(G) = f(\epsilon).\varphi(D).\varphi(G).\varphi(G) = GDD$.
2. *(0,5pt)* $\mathbb{N}$ est bien fondé car il n'y a pas de suite infinie strictement décroissante.
3. *(0.75pt)* $f(u)$ est bien définit si $|u| = 0$ car dans ce cas $u = \epsilon$. L'appel récursif de f fait décroitre de 1 la longueur du mot. Comme $\mathbb{N}$ est bien fondé, on ne peut pas appelé la propriété d'hérédité une infinité de fois.

PARTIE II :

1. *(1pt)* $g(1) = G$, $g(2) = GGD$, $g(3) = GGDGGDD$, $g(4) = GGDGGDDGGGDDGDD$, $g(5) = GGDGGDDGGGDDGDDGGGDGGDDDGGDDGDD$.
2. *(1pt)* **Initialisation :** Pour $n = 0$, on a $|g(0)| = 0 = 2^0 - 1$.
   Héridité : On suppose que pour $n \in \mathbb{N}$ on a $|g(n)| = 2^n - 1$. On a $|g(n+1)| = 2|g(n)| + 1 = 2 * 2^n - 2 + 1 = 2^{n+1} - 1$.
   Par récurrence on déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $|g(n)| = 2^n - 1$.
3. *(1pt)* Montrons par récurrence sur $m \in \mathbb{N}$ que pour tout $n \leq m$ in a $g(n)$ préfixe de $g(m)$.
   Initialisation : Pour $m = 0$, on a $g(0) = \epsilon$ est préfixe de lui même.
   Héridité : On suppose que pour $m \in \mathbb{N}$ la propriété est vraie. On a $g(m+1) = g(m)Gf(g(m))$ donc $g(m)$ est un préfixe de $g(m+1)$. Par hypothèse de récurrence, pour tout $n \leq m$ on a $g(n)$ qui est préfixe de $g(m)$ et donc de $g(m+1)$.
   Par récurrence on déduit que la propriété est vraie pour tout $m \in \mathbb{N}$.

4. *(1pt)* Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que les mots $GGGG$ et $DDDD$ apparaissent dans aucun mot de $g(n)$.

   Initialisation : Pour $n = 0, 1$ et 2 le mot $GGGG$ et $DDDD$ n'apparaissent pas dans $g(n)$.

   Héridité : On suppose la propriété vraie au rang n, on a $g(n+1) = g(n)Gf(g(n))$. Comme ni $GGGG$, ni $DDDD$ n'apparaissent dans $g(n)$, on en déduit qu'ils n'apparaissent pas dans $f(g(n))$ car f prend le miroir puis inverse les lettres G et D.

   D'après la question précédente pour $n \geq 3$. $g(1) = G$ est un préfixe de $g(n-1)$ et donc D est un suffixe de $f(g(n-1))$. Autrement dit $g(n) = g(n-1)Gg(n-1)$ termine par D.

   D'après la question précédente pour $n \geq 3$. $g(2) = GGD$ est un préfixe de $g(n-1)$ et donc GDD est un suffixe de $f(g(n-1))$. Autrement dit $g(n) = g(n-1)Gf(g(n-1))$ termine par GDD. On en déduit que GGD est un préfixe de $f(g(n))$.

   Ainsi au centre de $g(n+1) = g(n)Gf(g(n))$ apparait le mot $DGGGD$ et donc il ne peut pas y avoir 4 lettres consécutives dans $g(n+1)$.

   Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$ il n'y a pas quatre lettres consécutives dans $g(n)$.