

Graph Exercises

Gilles

September 6, 2020

1 Objectifs

On veut comprendre... c'est quoi un graphe et a quoi ca peut servir.

2 Exemple 1

On considere le graphe $G = (X, U)$ ¹ **non oriente** ou:

- $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$
- $U = \{\{x_1, x_2\}, \{x_1, x_3\}, \{x_1, x_4\}, \{x_1, x_5\}, \{x_2, x_3\}, \{x_2, x_4\}, \{x_2, x_5\}, \{x_3, x_4\}\}$

1. Calculer la densite $d(G)$ de ce graphe G .

SOL.: On utilise la formule pour les graphes non orientes: $\frac{2 \times |U|}{|X|(|X|-1)}$ et on obtient $\frac{4}{5}$.

2. Quelles sont les aretes manquantes pour avoir une densite de 1?

SOL: Il manque 2 aretes (x_3, x_5) et (x_4, x_5) pour avoir un graphe complet de densite 1. Dans ce cas, tous les sommets sont relies par une arete a tous les autres.

3. Construire la matrice d'adjacence pour ce graphe.

SOL.: C'est une matrice 5x5 facile a construire. Matrice symetrique car graphe non oriente.

4. Ce graphe est-il connexe?

SOL.: Oui... Il y a tjs un chemin de n'importe quel noeud a n'importe quel autre... ahahaha.

3 Dénombrement

1. Combien y a t'il de graphes orientes ayant n sommets?

SOL.: on doit simplement choisir une partie de $X \times X$ qui contient exactement 2^n (ou $n = \#X$) elements. On peut retrancher 1 si on ne considere pas la relation vide.

2. Combien y a t'il de graphes orientes simples ayant n sommets?

SOL.: C'est la meme idee sauf que on ne s'interesse plus a la diagonale (x, x) donc on obtient $2^{n(n-1)}$ graphes orientes simples a n sommets.

3. Combien y a t'il de graphes non orientes ayant n sommets?

SOL.: Dans ce cas, on cherche a construire des listes de couples parmi $\frac{n^2}{2}$ couples distincts possibles, on doit simplement choisir une partie de cet ensemble. Il y a donc $2^{\frac{n^2}{2}}$ graphes possibles. On peut retrancher 1 si on ne considere pas un graphe sans arete.

4. Combien y a t'il de graphes non orientes simples ayant n sommets?

SOL.: La meme idee mene a supprimer n elements $\{x, x\}$ et donc il reste $2^{\frac{n(n-1)}{2}}$ graphes possibles.

5. Quel est le nombre d'arêtes d'un graphe simple non orienté complet de n sommets ?

SOL.: Puis qu'il y a une arete entre chaque sommet, il y a $n(n-1)$ aretes dans un graphe simple non oriente complet.

¹Cela peut aider de le dessiner!

6. Quel est la densité d'un graphe simple non orienté complet de n sommets ?

SOL.: ahahahaha.... guess what ? 1 si on ne considère pas les boucles possibles, sinon $\frac{n(n-1)}{n^2} = \frac{n-1}{n}$.

7. Dans un graphe orienté, quelle est la relation entre le nombre d'arcs et la somme des degrés de chacun des sommets ? En déduire qu'un graphe à n sommets avec $n \geq 2$, possède un nombre pair de sommets de degré impair.

SOL.: Si on considère un sommet x et $d^-(x)$ son degré sortant. Chaque arc (x, y) comptant pour $d^-(x)$ compte aussi pour le degré entrant de y , $d^+(y)$. Au total, si on ajoute tous les degrés entrants et sortants de chaque noeud, on obtient 2 fois le nombre d'arcs $2|U|$. Un petit dessin avec $n = 3$ aide à comprendre. Donc évidemment, on ne peut pas avoir un nombre impair de sommets de degré impair (sinon la somme totale serait impaire!).

4 Reunion entre amis

Un couple reçoit chez lui trois autres couples. Lorsqu'elles se rencontrent pour la première fois dans la soirée, certaines personnes se serrent la main. A la fin de la soirée, l'hôte demande à chacune des 7 personnes présentes, combien elle a serré de mains. Il obtient des réponses toutes différentes. Sachant que personne ne serre sa propre main ni ne serre la main de son partner, le problème consiste à trouver combien de mains a serré le partner de l'hôte.

1. On représente le problème par un graphe G . Les sommets sont les participants, un arc (x, y) représente le fait que x a serré la main de y .

Est ce un graphe orienté ou non orienté ? Est-il simple? Combien de sommets a-t-il ? Quelles sont les degrés possibles des sommets de G ?

SOL.: Non orienté, simple (car pas de boucle), 8 sommets, degré max de chaque sommet 6 car on ne serre pas la main de son partner (ici $\text{degré}(x) = \text{nbre d'arêtes } x, y$).

2. Chacun ayant donné une réponse différente, que peut on en déduire sur les degrés des sommets de G ?

SOL.: Les degrés vont de 0 à 6 ce qui représente exactement 7 degrés distinct correspondant aux 7 réponses distinctes.

3. Que peut-on dire du degré du sommet représentant l'hôte qui questionne ?

SOL.: Ce degré est ≥ 1 car il a nécessairement serré la main de la personne qui a serré 6 mains. Ce degré est ≤ 6 car il y a une personne qui n'a serré la main de personne.

4. Dessiner le graphe correspondant au problème. Donner les conjoints des personnes qui ont serré 6 mains, 5 mains, etc.²

SOL.: Le plus simple est de partir de la personne A6, qui a serré 6 mains. Donc tous les noeuds sauf A0, partner de A6, ont un degré ≥ 1 . Donc son partner A0 est nécessairement celui qui n'a pas serré de main (degré 0) car tous les autres ont déjà un degré non nul. Maintenant A5 qui a serré 5 mains (dont celle de A6) a serré la main de tous les autres sauf A0 et son partner A1. Donc tous les autres ont maintenant un degré ≥ 2 , sauf A1 et A0. Donc A1 a un degré 1. On continue avec A4 qui a serré 4 mains et dont le partner a nécessairement degré 2.

5. Combien de mains a serré la femme de l'hôte ?

SOL.: Les personnes du couple ont chacune serré 3 mains, mais pas les memes...ahahah.

²Faire un dessin de préférence!