Relations d'ordre

Exercice 1. On considère l'ensemble $E = \mathcal{P}(\{1, 2, 3\})$.

1. Quel est le cardinal de E.
2. Montrer que l'inclusion, noté $\subset$, défini une relation d'ordre sur E.
3. Tracer le diagramme de Hasse de $(E, \subset)$.
4. Remplir le tableau suivant :

	A	B	C
Eléments minimaux			
Eléments maximaux			
Plus petit élément			
Plus grand élément			
Borne inférieure			
Borne supérieure			

Pour les ensembles :

$A = \{\{1\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}\}$
$B = \{\{2\}, \{3\}, \{2, 3\}\}$
$C = A \cup B$

Exercice 2. Soit $\mathcal{A}$ l'alphabet composé des 26 lettres usuelles $a, b, c, \ldots$ On note $\mathcal{A}^*$ l'ensemble des mots (finis) formés à l'aide des éléments de $\mathcal{A}$; ε désignera le mot vide, de longueur 0. On définit sur $\mathcal{A}^*$ la relation préfixe, notée $\sqsubset$, par la condition suivante :

$$u \sqsubset v \text{ si et seulement si le mot } v \text{ commence par le mot } u.$$

1. Démontrer que la relation $\sqsubset$ définit un ordre sur $\mathcal{A}^*$. Cet ordre est appelé ordre préfixe.
2. Cet ordre est-il total ?
3. Comparer cet ordre avec l'ordre lexicographique (celui du dictionnaire) c'est à dire est ce que $u \sqsubset v \Longrightarrow u \leq_{lex} v$ ou bien $u \leq_{lex} v \Longrightarrow u \sqsubset v$.
4. L'ensemble ordoné $(\mathcal{A}^*, \sqsubset)$ possède-t-il un plus petit élément ? Et un plus grand élément ?
5. Déterminer, s'ils existent, les mots suivants :
   (a) $\max\{\texttt{mer}, \texttt{merveille}\}$, $\sup\{\texttt{mer}, \texttt{merveille}\}$,
   (b) $\min\{\texttt{mer}, \texttt{merveille}\}$, $\inf\{\texttt{mer}, \texttt{merveille}\}$,
   (c) $\max\{\texttt{toto}, \texttt{totem}\}$, $\sup\{\texttt{toto}, \texttt{totem}\}$,
   (d) $\min\{\texttt{toto}, \texttt{totem}\}$, $\inf\{\texttt{toto}, \texttt{totem}\}$,
   (e) $\max\{\texttt{malicieux}, \texttt{malveillant}, \texttt{maternel}\}$, $\sup\{\texttt{malicieux}, \texttt{malveillant}, \texttt{maternel}\}$
   (f) $\min\{\texttt{malicieux}, \texttt{malveillant}, \texttt{maternel}\}$, $\inf\{\texttt{malicieux}, \texttt{malveillant}, \texttt{maternel}\}$.

Exercice 3. Sur $\mathbb{N}^*$ on considère la relation $\mathcal{R}$ définie par

$$x\mathcal{R}y \Longleftrightarrow (x = y) \text{ ou bien } (x \text{ est impair et } x < y)$$

.

1. Montrer que la relation $\mathcal{R}$ est un ordre.
2. Dessiner le diagramme de Hasse pour les entiers inférieurs à 8.
3. Y a-t-il pour cet ordre des éléments minimaux ? maximaux ? un plus petit élément ? un plus grand élément ?

Exercice 4. Soit A et B deux ensembles munis respectivement des relations d'ordre $\preceq_A$ et $\preceq_B$ tel que $\preceq_A$ est total. Montrer qu'une application $f : A \to B$ strictement croissante est injective.

Exercice 5. Soit $\mathcal{A}$ un alphabet fini, on rappelle que $\leq_{lex}$ est l'ordre lexicographique sur $\mathcal{A}^*$. On définit l'ordre militaire sur $\mathcal{A}^*$ par

$$u \leq_{mil} v \Longleftrightarrow \begin{cases} |u| < |v| \\ \text{ou} \\ |u| = |v| \text{ et } u \leq_{lex} v \end{cases}$$

1. Montrer que $\leq_{mil}$ est une relation d'ordre.
2. Montrer que $\leq_{mil}$ est un ordre bien fondé mais pas $\leq_{lex}$.