Contrôle Terminal Méthodes Numériques, session 1, Durée : 2h

Aucun document n'est autorisé, sauf une feuille A4 recto-verso comportant vos nom et prénom.
Les calculatrices, téléphones, tablettes, ordinateurs et objets connectés sont interdits.
Le simple fait d'avoir un de ces objets à vos côtés est assimilé à une tentative de fraude.
Le barème n'est qu'indicatif et pourra être modifié.

Exercice 1 (7 points)

1. Soit la fonction f définie par $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4x + 1$.

   (a) Montrez que l'équation $f(x) = 0$ a une solution unique r sur l'intervalle $[-1, 1]$.

   Solution :

   i. f est un polynôme, donc continue sur $\mathbb{R}$, $f(-1)$= -7, $f(1)$=3, $f(-1) * f(1) < 0$ d'après le Théorème des valeurs intermédiaires, Il existe au moins une racine r dans l'intervalle $]-1,\ 1[$.

   ii. $f'(x)$= $3x^2 - 6x + 4$, un trinôme de degré 2, son détermniant Δ=$(-6)^2 - 4 * 3 * 4$ = -12 < 0, donc $f'(x)$ ne change pas de signe. Conclusion : f est strictement monotone, d'où r est unique.

   Barème : 1,5pt = 0,5 pour chaque argument : continue, change de signe, strictement monotone

   (b) En partant de l'intervalle $[-1,\ 1]$, appliquez la méthode dichotomique jusqu'à déterminer un intervalle de longueur $\frac{1}{2}$ contenant r.

   Solution : Soient a_0=-1, $b_0 = 1$, on calcule $c_0 = \dfrac{a_0 + b_0}{2} = 0$. $f(c_0) = 1 > 0$. Sachant que $f(b_0) > 0$, donc on prendra $a_1 = a_0$ =-1 et $b_1 = c_0$ =0. On calcule $c_1 = \dfrac{a_1 + b_1}{2}$ = -$\dfrac{1}{2}$. f(-$\dfrac{1}{2}$)= -$\dfrac{3}{2}$ < 0, donc on prendra $a_2 = c_1$ = -$\dfrac{1}{2}$ et $b_2 = b_1 = 0$.

   Comme b_2 - a_2 = $\dfrac{1}{2}$ et r $\in [a_2,\ b_2]$, c'est l'intervalle demandé.

   Barème : 1,5pt $\approx$ 0,25 pour initialisation + 0,5 par itération + 0,25 pour conclusion

   On rappelle que $\log_2(10) = \dfrac{\ln 10}{\ln 2} \approx 3,32$.

   (c) Combien d'itérations de la méthode dichotomique faudrait-il pour avoir une précision de 10^{-5} ?

   Solution : Si on effectue n itérations de dichotomie, on a $|r - c_n| \leq \dfrac{b-a}{2^{n+1}} < 10^{-5}$.

   On a : $\dfrac{1-(-1)}{2^{n+1}} < 10^{-5}$, d'où, n > $\dfrac{5 \ln 10}{\ln 2}$ = 16.6, on peut prendre n = 17.

   Barème : 1,5pt : 0,75pt pour la formule + 0,75 pour la résolution, on ne fait pas attention si mal arrondi

   (d) Donner l'expression permettant de calculer x_{n+1} en fonction de x_n pour résoudre cette équation avec la méthode de Newton.

   Solution : Soit x_0 donné, $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \dfrac{x_n^3 - 3x_n^2 + 4x_n + 1}{3x_n^2 - 6x_n + 4} = \dfrac{2x_n^3 - 3x_n^2 - 1}{3x_n^2 - 6x_n + 4}$

   Barème : 0,5pt

   (e) En partant de $x_0 = 0$, calculez une itération de la méthode de Newton pour résoudre cette équation.

   Solution : $x_0 = 0$, $x_1 = -\dfrac{1}{4}$.

   Barème : 1pt = 0,5pt si formule bien appliquée + 0,5 si calculs corrects

2. On considère maintenant la fonction $g(x) = (x-1)^3$. On suppose qu'on veut résoudre l'équation $g(x) = 0$ avec la méthode de Newton. Que vaut $g'(1)$? Peut-on garantir une convergence quadratique de la méthode de Newton sur cet exemple ? Pourquoi ?

   Solution : $g'(x) = 3(x-1)^2$, $g'(1) = 0$. Le théorème pour garantir la convergence quadratique de la méthode de Newton nécessite la dérivée différente de zéros, ce n'est pas le cas.

   Barème : 1pt = 0,25 pour le calcul de g'(x) + 0,25 pour g'(1)=0 + 0,5 pour justif.

Exercice 2 (5 points)

1. On considère les points M_0, M_1 et M_2 de coordonnées respectives $(1,0)$, $(2,1)$ et $(\frac{1}{2},-1)$.
   Calculer les polynômes d'interpolation pour les ensembles de points suivants :
   Barème : 2pt = 1pt par polynôme ; pour chacun = 0,5 si méthode choisie semble comprise + 0,5 pour forme finale exacte.

   (a) M_0 et M_1 (Notons ce polynôme P_1) ;
   Solution : On utilise la méthode des différences divisées :

   $$\begin{array}{c|cccc} 1 & 0 & & & \\ & & \ddots & & \\ 2 & 1 & \cdots & \dfrac{1-0}{2-1} = 1 & \end{array}$$

   puis on aboutit au polynôme :

   $$P_1(x) = (x-1)$$

   (b) M_0, M_1 et M_2 (Notons ce polynôme P_2).
   Solution : On utilise la méthode des différences divisées :

   $$\begin{array}{c|cccccc} 1 & 0 & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ 2 & 1 & \cdots & \dfrac{1-0}{2-1} = 1 & & & \\ & & \ddots & & \ddots & & \\ \dfrac{1}{2} & \text{-1} & \cdots & \dfrac{-1-1}{1/2-2} = \dfrac{4}{3} & \cdots & \text{-}\dfrac{2}{3} \end{array}$$

   puis on aboutit au polynôme :

   $$P_2(x) = (x-1) - \frac{2}{3}(x-1)(x-2).$$

   Autres formes acceptables : $-\dfrac{2}{3}x^2 + 3x - \dfrac{7}{3}$, ou avec polyn. de L. :

   $$-\frac{(x-1)(x-2)}{(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)} + \frac{(x-\frac{1}{2})(x-1)}{(2-\frac{1}{2})(2-1)} = -\frac{4}{3}(x-1)(x-2) + \frac{2}{3}(x-\frac{1}{2})(x-1)$$

   ou toute forme intermédiaire correcte.

2. Soit la fonction f définie par $f(x) = \log_2(x)$. On rappelle que $\log_2(x)$ désigne le logarithme en base 2 de x : $\log_2(x) = \ln(x)/\ln(2)$.

   (a) Sachant que que $\log_2(2^\alpha) = \alpha$, calculer $f(\frac{1}{2})$, $f(1)$ et $f(2)$.
   Solution : $f(1/2) = -1, \quad f(1) = 0, \quad f(2) = 1.$
   Barème : 1pt = 0,5 si principe compris + 0,5 si résultats corrects

   (b) Donner le polynôme d'interpolation P de f en $\frac{1}{2}$, 1, et 2.
   Solution : Même polynôme que précédemment.
   Barème : 0,5pt si polynôme correct, en ayant remarqué que c'est le même qu'avant ou en ayant refait les calculs

   (c) En déduire une approximation de $\log_2(\frac{3}{2})$.
   Solution : $\log_2(\dfrac{3}{2}) \approx P(3/2) = \dfrac{2}{3}$.
   Barème : 0,5pt : 0,25 si x bien remplacé par $\frac{3}{2}$ + 0,25 si résultat correct

(d) Sachant que $(\log_2(x))' = \frac{1}{x\ln 2}$, donner une expression du majorant de l'écart $|f(x) - P(x)|$ pour $x \in [\frac{1}{2}, 2]$.

Solution : D'après le cours : $|f(x) - P(x)| \leq \dfrac{||f^{(2+1)}||_{\infty,[1/2,2]}}{(2+1)!}|(x-1)(x-2)(x-1/2)|$ Sachant que $f'(x) = \frac{1}{x\ln 2}$, $f''(x) = -\dfrac{1}{x^2\ln 2}$, $f^{(3)}(x) = \dfrac{2}{x^3\ln 2}$, $f^{(4)}(x) = -\dfrac{6}{x^4\ln 2}$. $f^{(4)}(x)$ est négative sur l'intervalle $[\dfrac{1}{2}, 2]$, donc $f^{(3)}$ est strictement décroissante. D'où, $\max_{x\in[1/2,2]} |f^{(3)}(x)| = \max\{|f^{(3)}(1/2)|, |f^{(3)}(2)|\}$ $= \max\{\dfrac{2^4}{\ln 2}, \dfrac{2}{\ln 2}\} = \dfrac{16}{\ln 2}$, et

$$|f(x) - P(x)| \leq \frac{8}{3\ln 2}|(x-1)(x-2)(x-\frac{1}{2})|$$

Barème : 1pt = 0,5pt si formule bien écrite pour ce cas + 0,25 si dérivée successives bien calculées au moins jusqu'à f''' + 0,25 si résultat final ok

Exercice 3 (8 points)

On considère une fonction f dérivable et de dérivée continue sur un intervalle $[a, b]$. On note

$$I(f, a, b) = \int_a^b f(x)dx \quad \text{et} \quad m = \frac{a+b}{2}.$$

1. Question du cours

(a) Donner l'expression du polynôme P d'interpolation de f relativement au point m.

Solution : $P(x) = f(m)$.

Barème : 0,5pt

(b) Calculer $\displaystyle\int_a^b P(x)dx$. On notera $J_m(f, a, b)$ le résultat.

Solution : $J_m(f, a, b) = \int_a^b f(m)dx = (b-a)f(m)$.

Barème : 0,5pt

(c) Calculer $\displaystyle\int_a^b |x - m|dx$.

Solution :

$$\int_a^b |x-m|dx = \int_a^m |x-m|dx + \int_m^b |x-m|dx = -\int_a^m (x-m)dx + \int_m^b (x-m)dx = \frac{(b-a)^2}{4}.$$

Barème : 1pt : 0,5pt si intégrale bien divisée en 2 + 0,5 si intégrations réussies

(d) En déduire un majorant de l'erreur $|I(f, a, b) - J_m(f, a, b)|$ en utilisant l'erreur d'interpolation rappelée ci-dessous :

$$\forall x \in [a, b], \quad |f(x) - P(x)| \leq \|f'\|_{\infty,[a,b]}|x - m|.$$

Solution : $|I(f, a, b) - J_m(f, a, b)| = |\int_a^b f(x)dx - \int_a^b P(x)dx| = |\int_a^b (f(x) - P(x))dx|$. Et $|\int_a^b (f(x) - P(x))dx| \leq \int_a^b |f(x) - P(x)|dx \leq \int_a^b ||f'||_{\infty,[a,b]}|x-m|dx$.

D'où, en utilisant 1(c),

$$|I(f, a, b) - J_m(f, a, b)| \leq \frac{(b-a)^2}{4}||f'||_{\infty,[a,b]}$$

Barème : 1pt : 0,25 si passage de | | à l'intérieur de l'intégrale correct + 0,5 si majoration avec norme infinie correcte + 0,25 si bon résultat

2. Application numérique :

$$f(x) = \left(x - \frac{3}{4}\right)^2, \quad a = 0, \quad b = 1, \quad I_0 = I(f, a, b).$$

(a) Calculer I_0.

Solution : $I_0 = \frac{1}{3}\left[(x - \frac{3}{4})^3\right]_0^1 = \frac{7}{48}$

Barème : 1pt : 0,5pt si bonne primitive + 0,5 si calculs corrects

(b) Calculer une approximation J_0 de I_0 en utilisant la méthode des rectangles au point milieu avec $n = 2$ sous-intervalles.

Solution : $J_0 = J_m(f, 0, \frac{1}{2}) + J_m(f, \frac{1}{2}, 1) = \frac{1}{2}(\frac{1}{4} - \frac{3}{4})^2 + \frac{1}{2}(\frac{3}{4} - \frac{3}{4})^2 = \frac{1}{8}$.

Barème : 1pt : 0,5pt si intégrale bien découpée + 0,5pt pour calculs

On rappelle que $\|f'\|_{\infty,[a,b]} = \max_{z \in [a,b]} |f'(z)|$.

(c) Calculer $\|f'\|_{\infty,[a,b]}$ dans ce contexte.

Solution : $f'(x) = 2(x - \frac{3}{4})$, $f''(x) = 2$. Comme $f''(x) > 0$, $f'(x)$ est strictement croissante. Donc $\|f'\|_{\infty,[a,b]} = \max\{|f'(0)|, |f'(1)|\} = \frac{3}{2}$.

Barème : 1pt : 0,25pt si bonne dérivée + 0,25pt pour f' croissante + 0,25 pour bonne borne + 0,25 pour résultat correct

(d) En déduire un majorant de $|I_0 - J_0|$.

Solution : $|I_0 - J_0| = |I(f, a, m) - J_m(f, a, m) + I(f, m, b) - J_m(f, m, b)|$

$\leq |I(f, a, m) - J_m(f, a, m)| + |I(f, m, b) - J_m(f, m, b)|$ (d'après 1(d))

$\leq \frac{(m-a)^2}{4}\|f'\|_{\infty,[a,m]} + \frac{(b-m)^2}{4}\|f'\|_{\infty,[m,b]}$

$\leq \frac{1}{4}\left(\left(\frac{(b-a)}{2}\right)^2 \|f'\|_{\infty,[A,b]} + \left(\frac{(b-a)}{2}\right)^2 \|f'\|_{\infty,[a,b]}\right)$

$= \frac{(b-a)^2}{8}\|f'\|_{\infty,[a,b]}$.

Donc un de majorant est : $\frac{(1-0)^2}{8} * \frac{3}{2} = \frac{3}{16}$

On accepte aussi la formule du cours : $\frac{(b-a)^3}{24n}\|f''\|_{\infty,[a,b]} = \frac{1^3}{24 * 2} * 2 = \frac{1}{24}$

Barème : 1pt si résultat correct **+ Bonus : 1pt** si résultat obtenu en appliquant la décomposition en 2 et le résultat de 1.d

(e) Estimer le nombre de sous-intervalles n_m nécessaire pour obtenir une approximation de I_0 à ε près.

Solution : On peut généraliser (d) par n sous intervalles égaux (au lieu de 2), on a $|I_0 - J_m^c(f, a, b, n)| \leq \frac{(b-a)^2}{4n}\|f'\|_{\infty,[a,b]}$. On peut déduire n_m par $\frac{(b-a)^2}{4n_m}\|f'\|_{\infty,[a,b]} < \varepsilon$. Soit, $n_m > \frac{(b-a)^2}{4\varepsilon}\|f'\|_{\infty,[a,b]} = \frac{3}{8\varepsilon}$. On peut prendre donc $n_m = \left[\frac{3}{8\varepsilon}\right] + 1$. Où $[x]$ signifie la partie entière de x.

On peut aussi utiliser le résultat du cours : $\frac{(b-a)^3}{24n^2}\|f''\|_{\infty,[a,b]} < \varepsilon$. On peut prendre donc, $n_m = \left[\frac{1}{\sqrt{12\varepsilon}}\right] + 1$

Barème : 1pt