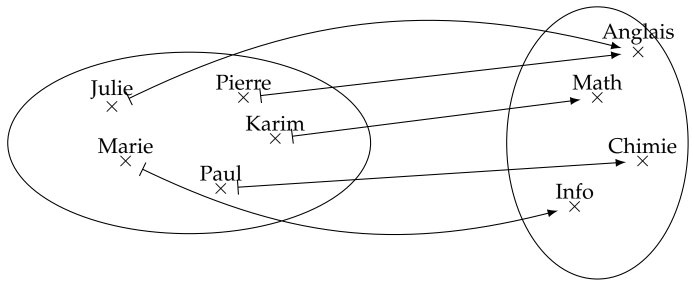
Fonctions et applications

Exercice 1. Soient $A = \{\text{Julie,Karim,Marie,Paul,Pierre}\}$ et $B = \{\text{Anglais,Math,Info,Chimie}\}$. On considère les fonctions suivantes :

— la fonction $f : A \longrightarrow B$ qui à chaque élève donne la matière suivie définie à l'aide du diagramme de Venn suivant :

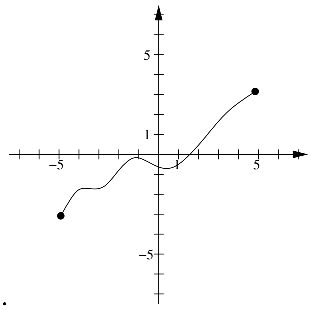


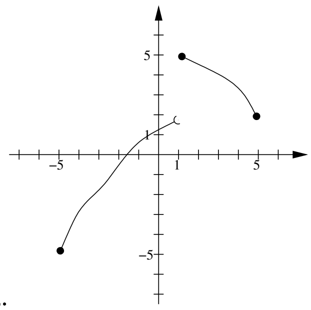
— la fonction $g : B \longrightarrow [0, 24[$ qui à chaque matière donne l'horaire du début du cours donnée par le tableau suivant :

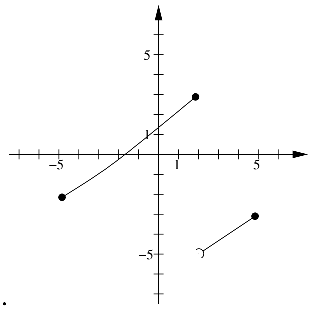
x	Anglais	Math	Info	Chimie
g(x)	8,25	16,5	13,5	9,75

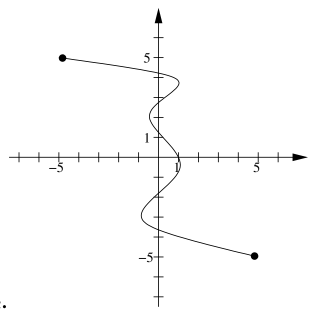
1. Déterminer $g \circ f$ et dire à quoi correspond cette fonction.
2. Déterminer si f, g et $g \circ f$ sont injectives ou surjectives.

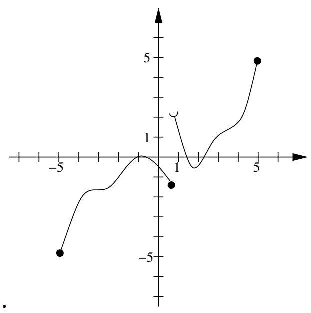
Exercice 2. Dire, en justifiant, si les graphes suivants représentent une fonction de $[-5; 5]$ dans $[-5; 5]$. Si c'est le cas, dire si la fonction est injective, surjective ou bijective.


1.


2.


3.


4.


5.

Exercice 3. Parmi les fonctions suivantes, déterminer celles qui sont injectives, surjectives ou bijectives.

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ n & \longmapsto & 2n+1 \end{array} \qquad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ n & \longmapsto & \begin{cases} 2n-3 & \text{si } n \geq 1 \\ n+1 & \text{si } n < 1 \end{cases} \end{array} \qquad h : \begin{array}{ccc} \mathbb{Q} & \longrightarrow & \mathbb{Q} \\ x & \longmapsto & 5x-1 \end{array}$$

Exercice 4. Un langage de programmation fonctionnel manipule des symboles en se servant de fonctions primitives. La puissance de ces langages repose sur leur aptitude à construire des processus complexes à partir de processus simples par composition de fonctions primitives de base.
On va s'intéresser aux opérations sur les mots qui peuvent être vues d'un point de vue informatique comme des opérations sur les chaînes de caractères. On considère l'alphabet $\mathcal{A} = \{a, b, c, \ldots, z\}$, l'ensemble des caractères minuscules de l'alphabet latin. Supposons que les fonctions primitives suivantes sont disponibles :

- `Char` : $\mathcal{A}^* \to \mathcal{A}$ où $\texttt{Char}(u)$ est le premier caractère du mot u.
- `Rest` : $\mathcal{A}^* \to \mathcal{A}^*$ où $\texttt{Rest}(u)$ est le mot obtenu à partir de u en enlevant la première lettre.
- `AddChar` : $\mathcal{A} \times \mathcal{A}^* \to \mathcal{A}^*$ où $\texttt{AddChar}(a, u)$ est le mot obtenu en ajoutant la lettre a au début du mot u.

1. On considère le mot u="bat". Evaluez $\texttt{AddChar}(\texttt{Char}(u),\texttt{AddChar}(o,\texttt{Rest}(u)))$.
2. Donner le domaine de définition et l'ensemble image des fonctions précédentes.
3. Déterminer si les fonctions précédentes sont injectives ou surjectives.
4. Une fonction `Third` est nécessaire pour extraire la troisième lettre d'un mot de longueur au moins trois. Exprimer `Third` en fonction des fonctions primitives.
5. Une fonction `Reverse2` : $\mathcal{A}^* \to \mathcal{A}^*$ est nécessaire pour inverser les deux premiers caractères d'une chaîne d'entrée de longueur 2 ou plus. Exprimer `Reverse2` en fonction des fonctions primitives et donner le domaine de définition ainsi que l'ensemble image.
6. Après avoir conjecturé ce que fait l'algorithme suivant sur un exemple, étudier la terminaison, la correction et la complexité.

Algorithm 1: Algorithme mystère.

Input : $w \in \mathcal{A}^*$;
$u \leftarrow \varepsilon$;
$v \leftarrow w$;
while $v \neq \varepsilon$ **do**
  $u \leftarrow \texttt{AddChar}(\texttt{Char}(v), u)$;
  $v \leftarrow \texttt{Rest}(v)$;
Output : $u \in \mathcal{A}^*$;

Exercice 5. Soient $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux applications.

1. On suppose que $g \circ f$ est surjective, montrer que g est surjective. Est-ce que f est obligatoirement surjective ?
2. On suppose que $g \circ f$ est injective, montrer que f est injective. Est-ce que g est obligatoirement injective ?
3. On suppose que $g \circ f$ est injective et f surjective, montrer que g est injective.

Exercice 6. Soit Ω un ensemble pour tout $A \subset \Omega$ on définit la *fonction caractéristique* de l'ensemble A par

$$\begin{array}{rccl} \mathbf{1}_A : & \Omega & \longrightarrow & \{0,1\} \\ & x & \longmapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases} \end{array}$$

1. Soient $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$, montrer que pour tout $x \in \Omega$ on a :
   (a) $\mathbf{1}_{A\cap B}(x) = \min(\mathbf{1}_A(x), \mathbf{1}_B(x)) = \mathbf{1}_A(x) \times \mathbf{1}_B(x)$.
   (b) $\mathbf{1}_{A\cup B}(x) = \max(\mathbf{1}_A(x), \mathbf{1}_B(x)) = \mathbf{1}_A(x) + \mathbf{1}_B(x) - \mathbf{1}_{A\cap B}(x)$.
   (c) $\mathbf{1}_{\overline{A}}(x) = 1 - \mathbf{1}_A(x)$.
2. Soient A, B et C trois parties d'un ensemble Ω. En utilisant les fonctions caractéristiques, montrer que si $A \cap B = A \cap C$ et $A \cup B = A \cup C$ alors $B = C$.
3. Soient A, B et C trois parties d'un ensemble Ω. En utilisant les fonctions caractéristiques, montrer que $A \cap \overline{B} = A \cap \overline{C}$ si et seulement si $A \cap B = A \cap C$.

Exercice 7. Soit $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ définie par $f(n) = n + (-1)^n$.

1. Montrer que n et $f(n)$ sont toujours de parité différente.
2. Calculer $f(f(n))$.
3. En déduire que f est bijective et donner une expression de la fonction réciproque f^{-1}.
4. Résoudre l'équation $n + (-1)^n = 2017$.

Exercice 8. Soit $f : E \to F$ une application. Pour toute partie A de E, on note $f(A) = \{f(x) : x \in A\}$. Soient A, B deux sous-ensembles de E. Montrer que :

1. Si $A \subset B$ alors $f(A) \subset f(B)$.
2. $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.
3. $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.

Exercice 9. Soit $f : E \to F$ une application. Montrer que les trois propositions suivantes sont équivalentes :

(i). f est injective

(ii). pour toutes parties A et B de E on a $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$,

(iii). pour toutes parties A et B de E, si $f(A \cap B) = \emptyset$ alors $f(A) \cap f(B) = \emptyset$.

Exercice 10. Soit E un ensemble non vide. On se donne deux parties A et B de E et on définit l'application

$$f : \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(E) & \longrightarrow & \mathcal{P}(E) \\ X & \longmapsto & (A \cap X^c) \cup (B \cap X) \end{array}$$

1. Résoudre l'équation $f(X) = \emptyset$. C'est à dire trouver les ensembles $X \subset E$ pour lesquels $f(X) = \emptyset$.
2. Donner une condition nécessaire reliant B et A^c pour que f soit bijective (en particulier que $\emptyset$ ait un unique antécédent).
3. On suppose dans la suite de l'exercice que $B = A^c$. Exprimer f à l'aide de la différence symétrique.
4. Montrer que $f \circ f = \mathrm{Id}$.
5. Montrer que f est bijective et préciser la fonction réciproque.

Exercice 11. Soient E et F deux ensembles non vides.

1. Montrer que $\mathcal{P}(E \cap F) = \mathcal{P}(E) \cap \mathcal{P}(F)$.
2. Est-ce que $\mathcal{P}(E \cup F) = \mathcal{P}(E) \cup \mathcal{P}(F)$?
3. Considérons l'application suivante

$$f : \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(E) \cup \mathcal{P}(F) & \longrightarrow & \mathcal{P}(E \cup F) \\ A & \longmapsto & A \end{array}$$

   Montrer que f est bien définie. Est-ce que f est injective ? Est ce que f est surjective ?

4. Donner une application injective de $\mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(F)$ dans $\mathcal{P}(E \times F)$.

Remarque : S'il est difficile de travailler sur des ensembles abstraits, on pourra d'abord travailler sur l'exemple $E = \{1, 2\}$ et $F = \{2, 3\}$.

Fonctions et applications (Méthodes)

☞ **Comment montrer qu'une table de valeur ou une représentation graphique est une fonction ?**
On montre que tout élément de l'ensemble de départ a au plus une image.

☞ **Comment montrer que $f : E \to F$ est surjective ?**
Pour chaque élément $y \in F$ on cherche s'il existe un élément $x \in E$ tel que $f(x) = y$.

☞ **Comment montrer que $f : E \to F$ est injective ?**
On considère deux éléments génériques $x_1, x_2 \in E$ tels que $f(x_1) = f(x_2)$ et on montre que nécessairement $x_1 = x_2$.

☞ **Comment montrer que $f : E \to F$ n'est pas injective ?**
Il suffit d'exhiber deux éléments $x_1, x_2 \in E$ tels que $x_1 \neq x_2$ et $f(x_1) \neq f(x_2)$.

☞ **Comment montrer que $f : E \to F$ est bijective ?**
On montre que f est surjective puis que f est injective.

Fonctions et applications (Solutions)

Correction 1 1. La fonction $g \circ f$ est définie sur A et à valeurs dans $[0, 24[$:

$$g \circ f : A \to [0, 24[\,.$$

Les valeurs qu'elle prend sont les suivantes :
- $g \circ f(\text{Julie}) = g \circ f(\text{Pierre}) = 8,25$,
- $g \circ f(\text{Karim}) = 16,5$,
- $g \circ f(\text{Marie}) = 13,5$,
- $g \circ f(\text{Paul}) = 9,75$.

La fonction $g \circ f$ donne l'horaire de début du cours suivi à chaque élève.

2. La fonction f n'est pas injective car $f(\text{Julie}) = f(\text{Pierre})$, elle est surjective car tous les cours sont suivis par au moins un élève, et elle n'est pas bijective car pas injective.
   La fonction g est injective car chaque matière commence à une heure différente, elle n'est pas surjective car aucun cours ne commence à 10h (par exemple), et elle n'est pas bijective car pas surjective.
   La fonction $g \circ f$ n'est pas injective car Julie et Pierre commencent leur cours à la même heure, elle n'est pas surjective car aucun élève ne commence à 10h (par exemple), et elle n'est pas bijective car pas injective (ni surjective d'ailleurs).

Correction 2 1. La fonction n'est ni injective, ni surjective, ni bijective.
2. La fonction est injective, surjective et bijective.
3. La fonction est injective, n'est pas surjective, ni bijective.
4. Ce graphe ne représente pas une fonction (plusieurs images pour 0, par exemple).
5. La fonction n'est pas injective, est surjective, mais pas bijective.

Correction 3 1. La fonction f est injective. En effet, si $n \neq p$, alors $2n + 1 \neq 2p + 1$. Elle n'est pas surjective car 2 n'a pas d'antécédent par f. Elle n'est donc pas non plus bijective.
2. La fonction g n'est pas injective. En effet, $g(0) = 1 = g(2)$. Elle n'est pas non plus surjective, car 2 n'a pas d'antécédent par g. Elle n'est donc pas bijective.
3. La fonction h est injective, car si $x, y \in \mathbb{Q}$ sont tels que $x \neq y$, alors $5x - 1 \neq 5y - 1$. Elle est également surjective, car, pour tout $z \in \mathbb{Q}$, on a $\frac{z+1}{5} \in \mathbb{Q}$ et $h\left(\frac{z+1}{5}\right) = z$, donc z admet un antécédent par h. Elle est donc bijective.

Correction 4 1. $u = \text{bat}$. Alors

$$\text{AddChar}\left(\text{Char}(u), \text{AddChar}\left(o, \text{Rest}(u)\right)\right) = \text{boat}$$

2. La fonction Char est définie sur $\mathcal{A}^+$ et admet pour ensemble image $\mathcal{A}$. La fonction Rest est définie sur $\mathcal{A}^+$ et admet pour ensemble image $\mathcal{A}^*$. La fonction AddChar est définie sur $\mathcal{A} \times \mathcal{A}^*$ et admet pour ensemble image $\mathcal{A}^+$.
3. Char n'est pas injective car $\text{Char}(ab) = a = \text{Char}(ac)$.
   Char est surjective car pour tout $\alpha \in \mathcal{A}$ on a $\text{Char}(\alpha) = \alpha$
   `Rest` n'est pas injective car $\text{Rest}(aba) = ba = \text{Char}(bba)$.
   Rest est surjective car pour tout $u \in \mathcal{A}^*$ on a $\text{Rest}(a.u) = u$
   AddChar est injective car pour $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{A}$ et $\omega_1, \omega_2 \in \mathcal{A}^*$ tels que $\text{AddChar}(\alpha_1, \omega_1) = \text{AddChar}(\alpha_2, \omega_2)$, on a donc $\alpha_1.\omega_1 = \alpha_2.\omega_2$. Comme les deux mots commencent par la même lettre, on a $\alpha_1 = \alpha_2$ et donc après simplification $\omega_1 = \omega_2$.
4. Si $u \in \mathcal{A}^*$,

$$\text{Third}(u) = \text{Char}\left(\text{Rest}\left(\text{Rest}(u)\right)\right).$$

5. Si $u \in \mathcal{A}^*$,

$$\text{Reverse2}(u) = \text{AddChar}\left(\text{Char}\left(\text{Rest}(u)\right), \text{AddChar}\left(\text{Char}(u), \text{Rest}\left(\text{Rest}(u)\right)\right)\right).$$

6. En essayant sur quelques exemples l'algorithme semble inverser les mots en argument.
   - Terminaison : A chaque passage dans la boucle la longueur du mot v diminue de 1. Au bout de $|v|$ passages v sera le mot vide.
   - Correction : Soit $v = v_1 \dots v_n$ le mot en entrée du programme. Montrons par récurrence sur $i \in [0, n]$ que lorsqu'on ait passé i fois dans la boucle, il y a le mot $v_{i+1} \dots v_n$ dans la variable v et le mot $v_i \dots v_1$ dans la variable u. La propriété est vrai pour $i = 0$, supposons qu'elle soit vraie au rang $i \in [0, n-1]$. Lors du passage $i+1$, on enlève la première lettre de la variable v pour la mettre au début de la variable u. Ainsi dans u il y a $v_{i+1} \dots v_1$ et dans v il y a $v_{i+2} \dots v_n$.
   - Complexité : En considérant que les opérations Char, Rest et AddChar sont de même complexité (élémentaire), pour un mot de longueur n, chaque fois qu'on passe dans la boucle while la longueur du mot diminue de un, on passe donc n fois dans la boucle. L'algorithme effectue donc $3n$ opérations élémentaires.

Correction 5 1. Soient $f : X \to Y$ et $g : Y \to Z$ deux applications telles que $g \circ f : X \to Z$ est surjective. Alors, pour tout $z \in Z$, il existe $x \in X$ tel que $g(f(x)) = z$, $f(x)$ est donc un antécédent (dans Y) de z par g, ce qui prouve que g est surjective.

En revanche, f n'est pas nécessairement surjective. En effet, en prenant $X = Z = \{1, 2\}$, et $Y = \{1, 2, 3\}$, et en définissant les fonctions f et g de la façon suivante :

$$f(1) = 1,\ f(2) = 2,\ g(1) = 1 \text{ et } g(2) = g(3) = 2,$$

alors

$$g \circ f(1) = 1 \text{ et } g \circ f(2) = 2.$$

On remarque que $g \circ f$ est surjective, ainsi que g, mais pas f.

2. Soient $f : X \to Y$ et $g : Y \to Z$ deux applications telles que $g \circ f : X \to Z$ est injective. Alors, pour tous $x_1, x_2 \in X$ tels que $x_1 \neq x_2$,

$$g\left(f\left(x_1\right)\right) \neq g\left(f\left(x_2\right)\right).$$

Par conséquent, $f\left(x_1\right) \neq f\left(x_2\right)$, leur image par g étant différente.

En revanche, g n'est pas nécessairement injective. En effet, en considérant l'exemple précédent, $g \circ f$ est injective, f l'est aussi, mais g ne l'est pas.

Correction 6 1. (a) Si $x \in A \cap B$ alors $x \in A$ et $x \in B$, donc $\mathbf{1}_A(x) = 1$ et $\mathbf{1}_B(x) = 1$. Ainsi, on a bien $\mathbf{1}_A(x)\mathbf{1}_B(x) = 1$. Si maintenant, $x \notin A \cap B$ alors $x \notin A$ ou $x \notin B$, donc $\mathbf{1}_A(x) = 0$ ou $\mathbf{1}_B(x) = 0$, et par conséquent $\mathbf{1}_A(x)\mathbf{1}_B(x) = 0$. On a donc bien

$$\mathbf{1}_{A\cap B} = \mathbf{1}_A(x)\mathbf{1}_B(x).$$

(b) On raisonne de même : si $x \in A \cup B$ alors soit $x \in A \cap B$, soit $x \notin A \cap B$. Dans le premier cas, $\mathbf{1}_A(x) = \mathbf{1}_B(x) = \mathbf{1}_{A\cap B}(x) = 1$, donc $\mathbf{1}_A(x) + \mathbf{1}_B(x) - \mathbf{1}_{A\cap B}(x) = 1$.

Si $x \in A \cup B$ et $x \notin A \cap B$ alors $x \in A$ et $x \notin B$ ou $x \in B$ et $x \notin A$, dans les deux cas, $\mathbf{1}_A(x) + \mathbf{1}_B(x) = 1$ et $\mathbf{1}_{A\cap B}(x) = 0$ donc $\mathbf{1}_A(x) + \mathbf{1}_B(x) - \mathbf{1}_{A\cap B}(x) = 1$.

Si maintenant, $x \notin A \cup B$, alors $x \notin A$ et $x \notin B$, par conséquent $\mathbf{1}_A(x) = \mathbf{1}_B(x) = \mathbf{1}_{A\cap B}(x) = 0$, donc $\mathbf{1}_A(x) + \mathbf{1}_B(x) - \mathbf{1}_{A\cap B}(x) = 0$. On a donc bien

$$\mathbf{1}_{A\cup B} = \mathbf{1}_A(x) + \mathbf{1}_B(x) - \mathbf{1}_{A\cap B}(x).$$

(c) Si $x \in \overline{A}$ alors $x \notin A$ et $\mathbf{1}_A(x) = 0$, donc $1 - \mathbf{1}_A(x) = 1$. Sinon, $x \notin \overline{A}$, donc $x \in A$ et $\mathbf{1}_A(x) = 1$ et $1 - \mathbf{1}_A(x) = 0$. On a donc bien

$$\mathbf{1}_{\overline{A}} = 1 - \mathbf{1}_A(x).$$

2. Le fait que $A \cap B = A \cap C$ implique que $\mathbf{1}_{A\cap B} = \mathbf{1}_{A\cap C}$. D'autre part, le fait que $A \cup B = A \cup C$ implique que $\mathbf{1}_{A\cup B} = \mathbf{1}_{A\cup C}$, c'est-à-dire $\mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - \mathbf{1}_{A\cap B} = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_C - \mathbf{1}_{A\cap C}$. En combinant les deux égalités, on obtient $\mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_C$, et donc $\mathbf{1}_B = \mathbf{1}_C$, ce qui revient à dire que $B = C$.

3.

$$\begin{aligned}
A \cap \overline{B} = A \cap \overline{C} &\Longleftrightarrow \mathbf{1}_{A\cap\overline{B}} = \mathbf{1}_{A\cap\overline{C}} \\
&\Longleftrightarrow \mathbf{1}_A \mathbf{1}_{\overline{B}} = \mathbf{1}_A \mathbf{1}_{\overline{C}} \\
&\Longleftrightarrow \mathbf{1}_A (1 - \mathbf{1}_B) = \mathbf{1}_A (1 - \mathbf{1}_C) \\
&\Longleftrightarrow \mathbf{1}_A - \mathbf{1}_A \mathbf{1}_B = \mathbf{1}_A - \mathbf{1}_A \mathbf{1}_C \\
&\Longleftrightarrow \mathbf{1}_A \mathbf{1}_B = \mathbf{1}_A \mathbf{1}_C \\
&\Longleftrightarrow \mathbf{1}_{A\cap B} = \mathbf{1}_{A\cap C} \\
&\Longleftrightarrow A \cap B = A \cap C.
\end{aligned}$$

Correction 7 Soit $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ définie par $f(n) = n + (-1)^n$.

1. On a deux cas a considérer :
   — si n est pair, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k$ on a $f(n) = f(2k) = 2k + (-1)^{2k} = 2k + 1$ donc $f(n)$ est impair.
   — si n est impair, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k+1$ on a $f(n) = f(2k+1) = 2k+1+(-1)^{2k+1} = 2k+1-1 = 2k$ donc $f(n)$ est pair.
2. On a vu précédemment que pour $k \in \mathbb{N}$, on a $f(2k) = 2k+1$ et $f(2k+1) = 2k$. On en déduit que $f(f(2k+1)) = f(2k) = 2k+1$ et $f(f(2k)) = f(2k+1) = 2k$ donc $f \circ f$ est l'identité.
3. Comme $f \circ f = Id$, on en déduit que f est inversible et que l'application réciproque est $f^{-1} = f$. On peut aussi refaire la preuve comme dans le cours.
4. On cherche $n \in \mathbb{Z}$ tel que $f(n) = n + (-1)^n = 2017$. Donc, $n = f(f(n)) = f(2017) = 2017 - 1 = 2016$.

Correction 8
1. Soit $y \in f(A)$, il existe $x \in A$ tel que $f(x) = y$. Comme $A \subset B$, on en déduit que $x \in B$ donc $y = f(x) \in f(B)$. On en déduit que $f(A) \subset f(B)$.
2. On a $A \subset A \cup B$ donc $f(A) \subset f(A \cup B)$. De même $f(B) \subset f(A \cup B)$. On en déduit que $f(A) \cup f(B) \subset f(A \cup B)$.
   Réciproquement, soit $y \in f(A \cup B)$, il existe donc $x \in A \cup B$ tel que $f(x) = y$. Si $x \in A$ alors $y = f(x) \in f(A)$ et si $x \in B$ alors $y = f(x) \in f(B)$. On en déduit que $y = f(x) \in f(A) \cup f(B)$ autrement dit $f(A \cup B) \subset f(A) \cup f(B)$. On a la double inclusion donc $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.
3. Soit $y \in f(A \cap B)$, il existe $x \in A \cap B$ tel que $f(y) = x$. Comme $x \in A$, on a $y = f(x) \in f(A)$, de même comme $x \in B$, on a $y = f(x) \in f(B)$. On en déduit que $y \in f(A) \cap f(B)$. Ainsi $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$. La réciproque est fausse, c'est à dire que l'on n'a pas nécessairement $f(A) \cap f(B) \subset f(A \cap B)$, on peut facilement construire un exemple en prenant une fonction non injective (voir exercice suivant).

Correction 9 $(i) \Longrightarrow (ii)$. Supposons que f est injective. Soient A et B deux parties de E. D'après l'exercice précédent, on sait que $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$. Montrons l'inclusion réciproque $f(A) \cap f(B) \subset f(A \cap B)$. Soit $y \in f(A) \cap f(B)$, il existe donc $x_1 \in A$ et $x_2 \in B$ tels que $y = f(x_1) = f(x_2)$. Comme f est injective, $x_1 = x_2 \in A \cap B$ et donc $y \in f(A \cap B)$. On en déduit que $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$

$(ii) \Longrightarrow (iii)$. Supposons que pour toutes parties A et B de E on a $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$. Soient A' et B' de E tels que $f(A' \cap B') = \emptyset$ on a donc $f(A') \cap f(B') = f(A' \cap B') = \emptyset$.

$(iii) \Longrightarrow (i)$. Supposons que pour toutes parties A et B de E, si $f(A \cap B) = \emptyset$ alors $f(A) \cap f(B) = \emptyset$. Montrons que f est injective. Soit $x_1, x_2 \in E$ tels que $y = f(x_1) = f(x_2)$. Si $x_1 \neq x_2$ alors $\{x_1\} \cap \{x_2\} = \emptyset$ et donc $f(\{x_1\} \cap \{x_2\}) = \emptyset$. Mais $f(\{x_1\}) \cap f(\{x_2\}) = \{y\} \cap \{y\} = \{y\} \neq \emptyset$. On obtient une contradiction donc $x_1 = x_2$.

Correction 10
1. Soit $X \subset E$ tel que $f(X) = \emptyset$. On a $A \cap X^c = \emptyset$ et $B \cap X = \emptyset$. Donc $A \subset X$ et $X \subset B^c$ donc $A \subset X \subset B^c$. On a donc

$$\{X \in \mathcal{P}(E) : f(X) = \emptyset\} \subset \{X \in \mathcal{P}(E) : A \subset X \subset B^c\}.$$

Réciproquement, on fait la distinction suivante :
— Si $A \cap B \neq \emptyset$ on n'a pas $A \subset B^c$ donc $\{X \in \mathcal{P}(E) : f(X) = \emptyset\} = \emptyset$.
— Si $A \cap B = \emptyset$ on a $A \subset B^c$. Soit $X \in \mathcal{P}(E)$ tel que $A \subset X \subset B^c$ et montrons que X est solution de $f(X) = \emptyset$. On a $f(X) = (A \cap X^c) \cup (B \cap X) = \emptyset \cup \emptyset$.

On en déduit que

$$\{X \in \mathcal{P}(E) : f(X) = \emptyset\} = \{X \in \mathcal{P}(E) : A \subset X \subset B^c\}.$$

2. Pour que $\emptyset$ ait un seul antécédent il faut que $A = B^c$.
3. On a $f(X) = (A \cap X^c) \cup (A^c \cap X) = A \Delta X$.
4. On a $f(f(X)) = (A \cap (A\Delta X)^c) \cup (A^c \cap (A \Delta X)) = (A \cap X) \cup (A^c \cap X) = X$.
5. On en déduit que f est bijective et que la fonction réciproque de f est f.

Correction 11 1. On a :

$$\begin{aligned} A \in \mathcal{P}(E \cap F) &\iff A \subset E \cap F \\ &\iff A \subset E \text{ et } A \subset F \\ &\iff A \in \mathcal{P}(E) \text{ et } A \in \mathcal{P}(F) \\ &\iff A \in \mathcal{P}(E) \cap \mathcal{P}(F). \end{aligned}$$

2. On a $\mathcal{P}(E \cup F) \neq \mathcal{P}(E) \cup \mathcal{P}(F)$. En effet $\{1,3)\} \subset E \cup F$ mais $\{1,3\} \not\subset E$ et $\{1,3\} \not\subset F$ donc $\{1,3\} \notin \mathcal{P}(E) \cup \mathcal{P}(F)$.
3.
4. On montre que l'application suivante est injective :

$$\begin{array}{rccc} f : & \mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(F) & \longrightarrow & \mathcal{P}(E \times F) \\ & (A, B) & \longmapsto & A \times B \end{array}$$

Il existe une injection de $\mathcal{P}(E) \cup \mathcal{P}(F)$ dans $\mathcal{P}(E \cup F)$: c'est l'injection canonique $A \mapsto A$. en effet, si A est sous-ensemble de E ou de F, il est sous-ensemble de $E \cup F$.