Ensembles dénombrables

Exercice 1 - Premiers exemples d'ensembles dénombrables. Montrer que les ensembles suivants sont dénombrable en exhibant une bijection avec $\mathbb{N}$:

1. l'ensemble des entiers naturels non nul noté $\mathbb{N} \setminus \{0\}$;
2. l'ensemble des entiers naturels pairs $2\mathbb{N}$;
3. l'ensemble des entiers naturels impairs $2\mathbb{N} + 1$;
4. l'ensemble des nombres entiers multiples de 3 noté $3\mathbb{N}$;
5. l'ensemble des entiers relatifs $\mathbb{Z}$;
6. l'ensemble des couples d'entiers naturels noté $\mathbb{N}^2$ (on pourra considérer la fonction $(p, q) \longmapsto 2^p(2q + 1) - 1$ ou bien énumérer les cases d'une grille infinie).

Exercice 2 - Critères de dénombrabilité. Montrer que les ensembles suivants sont dénombrable :

1. l'ensemble $\mathbb{N}^k$ pour $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$;
2. l'ensemble des nombres rationnels noté $\mathbb{Q}$;
3. l'ensemble des parties **finies** de $\mathbb{N}$.

Exercice 3 - Existence de nombres transcendants. Un nombre (réel ou complexe) est *algébrique* s'il est racine d'un polynôme à coefficients entiers. Par exemple $\sqrt{2}$ est algébrique car racine de $X^2 - 2$, i est algébrique car racine de $X^2 + 1$...
Un nombre est *transcendant* s'il n'est pas algébrique. Le but de l'exercice est de montrer l'existence de nombre transcendant. En général il est difficile de montrer qu'un nombre est transcendant.

1. On note $\mathbb{Z}_n[X] \subset \mathbb{Z}[X]$ l'ensemble des polynômes entiers de degré inférieur ou égal à n. Montrer que $\mathbb{Z}_n[X]$ est dénombrable.
2. Montrer que l'ensemble des nombres algébriques est dénombrable.
3. En déduire l'existence de nombres transcendants.

Remarque : On peut montrer par des méthodes avancées que π et e sont transcendants.

Exercice 4 - E et $\mathcal{P}(E)$ ne sont pas en bijection. Soient E un ensemble non vide et $f : E \to \mathcal{P}(E)$ une application.

1. Posons $A = \{x \in E : x \notin f(x)\}$. Soit $x \in E$, montrer que $x \in f(x) \cup A$ et que $x \notin f(x) \cap A$.
2. Montrer que l'application f ne peut pas être surjective.
3. En déduire que E et $\mathcal{P}(E)$ ne sont pas équipotents.

Exercice 5 - Existence de langages non reconnu par un algorithme. Soit $\mathcal{A}$ un alphabet fini.

1. Montrer que l'ensemble des mots fini $\mathcal{A}^*$ est dénombrable.
2. Montrer que l'ensemble des langages sur $\mathcal{A}$, c'est à dire $\mathcal{P}(\mathcal{A}^*)$, n'est pas dénombrable.
3. Un langage $\mathcal{L} \subset \mathcal{A}^*$ est reconnu par un programme s'il existe un programme qui prend en entrée un mot $u \in \mathcal{A}^*$ et renvoie 1 si $u \in \mathcal{L}$ et renvoie 0 si $u \notin \mathcal{L}$ (il calcule la fonction caractéristique de $\mathcal{L}$). Montrer qu'il existe des langages qui ne sont pas reconnu par un programme. On dit que le langage est indécidable.

Exercice 6 - Exemples d'ensembles non dénombrables. Montrer que $[0, 1]$, $]0, 1[$, $]0, 1[^2$, $\mathbb{R}$ et $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ sont équipotents deux à deux.

Exercice 7. Soit $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ une application. On définit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite à valeur dans $\{0, 1, \ldots, 9\}$ tel que u_n est le $n^{\text{ème}}$ décimale de $f(n)$.
On définit le nombre réel $r = \overline{0, v_1 v_2 v_3 \ldots v_n \ldots}$ tels que pour fou $n \in \mathbb{N}^*$ on a $v_n = 1$ si $u_n = 0$ et $v_n = 0$ si $u_n \neq 0$.

1. Montrer que r n'a pas d'antécédent par f.
2. En déduire que $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.

Ensembles dénombrables (Méthodes)

☞ **Comment montrer qu'un ensemble est dénombrable ?**

Soit X un ensemble, il y a essentiellement quatre méthodes pour montrer que X est dénombrable :

— on montre qu'il est fini ou on exhibe une bijection entre X et $\mathbb{N}$;
— on exhibe une injection de X dans $\mathbb{N}$;
— on exhibe une surjection de $\mathbb{N}$ dans X ;
— on exprime X comme un produit fini d'ensembles dénombrables ou comme union dénombrable d'ensembles dénombrables.

☞ **Comment montrer qu'un ensemble n'est pas dénombrable ?**

On montre que cet ensemble est en bijection avec un ensemble non-dénombrable.

☞ **Comment montrer que deux ensembles sont équipotents ?**

Pour montrer que deux ensembles A et B sont équipotent (ou on même cardinal), il y a essentiellement deux méthodes :

— on exhibe une bijection de A dans B ;
— on exhibe une injection de A dans B et une injection de B dans A ;