Université Toulouse III Année 2018-2019
TD Mathématiques discrètes **Feuille n° 1**

Premières notions sur les ensembles

Exercice 1 - Ensembles définis par extension et compréhension.

1. Définir les ensembles suivants en extension :
   (a) $A = \{x \in \mathbb{Z} : 10 \leq x \leq 17\}$;
   (b) $B = \{x \in \mathbb{Z} : x^2 \leq 24\}$;
   (c) $C = \{x \in \mathbb{Z} : 6x^2 + x - 1 = 0\}$ (indice : $6x^2 + x - 1 = (3x-1)(2x+1)$) ;
   (d) $D = \{x \in \mathbb{R} : 6x^2 + x - 1 = 0\}$.
2. Définir les ensembles suivants compréhension :
   (a) $E = \{1; 2; 7; 14\}$
   (b) $F = \{2; 5; 8; 11; 14; 17; \ldots\}$;
   (c) $G = \{1; \frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{8}; \frac{1}{16}; \frac{1}{32}; \ldots\}$.

Exercice 2 - Egalité entre ensembles. Dans chacun des cas suivants, déterminer si les ensembles sont égaux ou pas :

1. $A = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$ et $B = \{x \in \mathbb{R} : x \geq |x|\}$;
2. $A = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$ et $B = \{x \in \mathbb{R} : x \geq |x|\}$;
3. $A = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$ et $B = \{x \in \mathbb{R} : x \leq |x|\}$;
4. $A = \mathbb{Z}$ et $B = \{x \in \mathbb{Z} : x^2 - x \text{ pair}\}$;
5. $A = \{x \in \mathbb{N} : x \leq 20, x \text{ impair et non divisible par } 3\}$ et $B = \{x \in \mathbb{Z} : x \leq 20 \text{ et } 24 \text{ divise } x^2 - 1\}$.

Exercice 3 - Union et intersection. Dans chacun des cas suivants, donner faire l'union et l'intersection des ensembles A et B suivants.

1. $A = \{x \in \mathbb{N} : x \text{ est impair}\}$ et $B = \{x \in \mathbb{N} : x \text{ est divisible par } 3\}$.
2. $A = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 3\}$ et $B = \{x \in \mathbb{R} : -2 < x \leq 1\}$.
3. $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \leq 2\}$ et $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2 < 3x - y\}$ (on pourra représenter le résultat sur un repère orthonormé).

Exercice 4 - Ensemble des parties.

1. Quel est le nombre d'éléments de $\{\}$? Et de $\{\{\}\}$?
2. Quel ensemble contient plus d'éléments : $\{1,2,3,4\}$ ou $\{\{1,2\},\{3\}\}$?
3. Est-ce que $\{\} \in \{\{1,2\},\{3,4,5\}\}$? Et $\{\} \subseteq \{\{1,2\},\{3,4,5\}\}$?
4. On rappelle que $\mathcal{P}(A)$ est l'ensemble des parties de l'ensemble A. Si $A = \{\alpha\}$, déterminer $\mathcal{P}(A)$ et $\mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$.
5. Est-ce qu'il existe un ensemble A tel que $\mathcal{P}(A) = \{\}$?
6. Soit $a \in A$. Est-ce que le suivant est toujours vrai / toujours faux / ni l'un ni l'autre (dans ce cas, donnez des exemples et contre-exemples) :

$$a \in \mathcal{P}(A) \quad , \quad \{a\} \in \mathcal{P}(A) \quad , \quad a \subseteq \mathcal{P}(A) \quad , \quad \{a\} \subseteq \mathcal{P}(A).$$

Exercice 5 - Compréhension d'ensemble et lien avec la logique. Soient $P(x)$ et $Q(x)$ deux propriétés sur l'entier x. On définit les ensembles $A = \{x \in \mathbb{N} : P(x)\}$ et $B = \{x \in \mathbb{N} : Q(x)\}$.

1. Par exemple, on peut considérer, $P(x)$ la propriété "x est divisible par 4" et $Q(x)$ la propriété "x est divisible par 2". Définir les ensembles A et B par extension ?

2. En général, si pour tout $x \in \mathbb{N}$, la propriété $P(x)$ implique $Q(x)$, alors quel est le rapport entre A et B ?
3. Écrivez les ensembles $\{x \in \mathbb{N} : \neg P(x)\}$ et $\{x \in \mathbb{N} : P(x) \wedge Q(x)\}$ et $\{x \in \mathbb{N} : P(x) \vee \neg Q(x)\}$ à l'aide des opérateurs ensemblistes sur A et B.

Exercice 6 - Une nouvelle opération sur les ensembles. On définit un opérateur $*$ sur les ensembles de la manière suivante :

$$A * B = \overline{A \cap B}.$$

1. Dessiner, sous la forme de diagramme de Venn la représentation de $A * B$.
2. Employer les lois de l'algèbre des ensembles pour démontrer les expressions suivantes :
   (a) $A * A = \overline{A}$;
   (b) $(A * A) * (B * B) = A \cup B$;
   (c) $(A * B) * (A * B) = A \cap B$.

Exercice 7 - Arbres. On considère les affirmations suivantes :

— J'ai planté tous mes arbres onéreux l'an passé.
— Tous mes arbres fruitiers sont dans mon verger.
— Aucun des arbres fruitiers n'a été planté l'an passé.
— J'ai un orme, qui est un arbre onéreux, mais pas dans mon verger.

En utilisant la notion d'ensembles, dire si les affirmations suivantes sont justes ou fausses ou impossibles à répondre.

1. Aucun de mes arbres fruitiers n'est onéreux.
2. Tous mes arbres plantés l'an passé l'ont été dans le verger.
3. J'ai planté au moins un arbre l'an passé.

Premières notions sur les ensembles (Méthodes)

☞ **Comment définir un ensemble ?**

Il y a quatre façons de définir un ensemble :

— On donne la liste des éléments constituant cet ensemble, on dit qu'il est défini en *extension*.
— On donne une propriété qui caractérise les éléments constituant cet ensemble, on dit qu'il est défini en *compréhension*.
— On construit un ensemble en appliquant des opérations sur d'autres ensembles.
— On verra plus tard qu'on peu définir un ensemble par induction.

☞ **Comment montrer que** $A \subset B$ **?**

— Si A est défini en extension, pour tout élément de A on vérifie qu'il appartient à B.
— Si A et B sont définis en compréhension, on considère un élément x qui vérifie la propriété définissant les éléments de A et on montre qu'il vérifie aussi la propriété définissant les éléments de B.

☞ **Comment montrer que** $A \not\subset B$ **?**

On exhibe un élément qui est dans A mais pas dans B.

☞ **Comment montrer que** $A = B$ **?**

On montre que $A \subset B$ puis $B \subset A$.

☞ **Rappels sur les relations ensemblistes :**

Quelques propriétés sur les opérations sur les ensembles qui doivent facilement être retrouvées à partir des diagrammes de Venn. On considère que A, B et C sont des sous-ensembles d'un univers Ω.

$$\begin{array}{r|l}
A \cap \emptyset = \emptyset & A \cup \emptyset = A \\
A \cap \Omega = A & A \cup \Omega = \Omega \\
A \cap A = A & A \cup A = A \\
A \cap B = B \cap A & A \cup B = B \cup A \\
\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B} & \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} \\
A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C & A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C \\
A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) & A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \\
A \cap \overline{A} = \emptyset & A \cup \overline{A} = \Omega \\
\text{Si } B \subset A \text{ alors } A \cap B = B & \text{Si } B \subset A \text{ alors } A \cup B = A
\end{array}$$

Premières notions sur les ensembles (Solutions)

Correction 1 1. (a) $A = \{10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17\}$;
(b) $B = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$;
(c)

$$\begin{aligned} 6x^2 + x - 1 = 0 &\Leftrightarrow (3x-1)(2x+1) = 0 \\ &\Leftrightarrow 3x - 1 = 0 \text{ ou } 2x + 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{1}{3} \text{ ou } x = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Or on remarque que $\frac{1}{3}$ et $-\frac{1}{2}$ ne sont pas des entiers, ainsi $C = \emptyset$.
(d) D'après la question précédente, $D = \left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right\}$.

2. (a) $E = \left\{2^p 7^q \ : \ (p,q) \in \{0,1\}^2\right\}$ ou $E = \{n \in \mathbb{N} \ : \ n \text{ divise } 14\}$.
(b) $F = \{3n + 2 \ : \ n \in \mathbb{N}\}$.
(c) $G = \left\{\frac{1}{2^n} \ : \ n \in \mathbb{N}\right\}$.

Correction 2 1. A et B ne sont pas égaux : $A \neq B$. En effet, $0 \notin A$ alors que $0 \in B$. Dans les faits, $A = \mathbb{R}_+^*$ et $B = \mathbb{R}_+$.
2. $A \subset B$ car si $x \geq 0$ on a $|x| = x$.
$B \subset A$ car si $x \geq |x|$ alors $x \geq 0$ puisque $|x| \geq 0$.
3. A et B ne sont pas égaux : $A \neq B$. En effet, $0 \notin A$ alors que $0 \in B$. Dans les faits, $A = \mathbb{R}_+^*$ et $B = \mathbb{R}_-$.
4. A et B sont égaux : $A = B$. En effet, $B \subset A$ car tous les éléments de B sont par définition des éléments de $\mathbb{Z} = A$.
Soit maintenant $x \in A$, alors il y a deux possibilités :
- soit x est pair, alors il existe $p \in \mathbb{Z}$ tel que $x = 2p$. Donc $x^2 = 4p^2$, et

$$x^2 - x = 4p^2 - 2p = 2(2p^2 - p)$$

est pair. Dans ce cas, $x \in B$.
- Soit x est impair, alors il existe $p \in \mathbb{Z}$ tel que $x = 2p + 1$. Donc $x^2 = 4p^2 + 4p + 1$, et

$$x^2 - x = 4p^2 + 4p + 1 - 2p - 1 = 4p^2 + 2p = 2(2p^2 + p)$$

est pair. Dans ce cas, $x \in B$.

Par conséquent $A \subset B$, et donc $A = B$.
Remarque : Que ce passe t'il si on met $\mathbb{N}$ à la place de $\mathbb{Z}$.
5. $(-5)^2 - 1 = 24$ donc $-5 \in B$ et $-5 \notin A$
Donc $A \neq B$.

Correction 3 1. L'ensemble des nombres entiers naturels impairs est l'ensemble des nombres entiers naturels congrus à 1, 3 ou 5 modulo 6, c'est-à-dire qui peuvent s'écrire $6p + 1$, $6p + 3$ ou $6p + 5$, avec $p \in \mathbb{N}$.
L'ensemble des entiers naturels multiples de 3 est l'ensemble des entiers naturels congrus à 0 ou 3 modulo 6, c'est-à-dire qui peuvent s'écrire $6q$ ou $6q + 3$, avec $q \in \mathbb{N}$.
Donc

$$\begin{aligned} A \cup B &= \{x \in \mathbb{N} \ : \ x \text{ est congru à } 0, 1, 3 \text{ ou } 5 \text{ modulo } 6\} \\ &= \{x \in \mathbb{N} \ : \ \exists p \in \mathbb{N} \ x \in \{6p, 6p+1, 6p+3, 6p+5\}\}. \end{aligned}$$

2. $A \cup B = \{x \in \mathbb{R} \ : \ -2 < x \leq 3\} =]-2, 3]$.
3. $A \cup B = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ y \leq 2 - x \text{ ou } y < 3x + 2\right\}$.

1. $A \cap B$ est l'ensemble des figures géométriques qui sont à la fois des losanges et des rectangles, c'est donc l'ensemble des carrés.
2. $A \cap B = \{x \in \mathbb{R} \ : \ 0 \leq x \leq 1\} = [0, 1]$.
3. $A \cup B = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ y \leq 2 - x \text{ et } y < 3x + 2\right\}$.

Correction 4

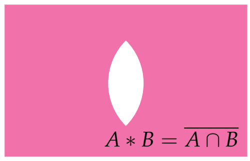
Correction 5

Correction 6

$$A * B = \overline{A \cap B}.$$

Précisons que tous les ensembles sont inclus dans un *univers* Ω.

1. Diagramme de Venn de $A * B$:



2. (a) Soit A un ensemble (inclus dans Ω), alors $A \cap A = A$ (par idempotence de l'intersection). Donc

$$A * A = \overline{A}.$$

(b) Soient A et B deux ensembles (inclus dans Ω), alors, d'après la question précédente, $A * A = \overline{A}$ et $B * B = \overline{B}$. Par conséquent, en utilisant les (deux) lois de Morgan,

$$(A * A) * (B * B) = \overline{A} * \overline{B} = \overline{\overline{A} \cap \overline{B}} = \overline{\overline{A}} \cup \overline{\overline{B}} = A \cup B.$$

(c) Soient A et B deux ensembles (inclus dans Ω), alors, d'après la question précédente, $(A * B) * (A * B) = \overline{A * B}$. Ainsi, en utilisant les lois de Morgan,

$$(A * B) * (A * B) = \overline{\overline{A \cap B}} = A \cap B.$$

Correction 7 On distingue 4 ensembles d'arbres d'après l'énoncé :
- soit A l'ensemble des arbres fruitiers,
- soit B l'ensemble des arbres onéreux,
- soit C l'ensemble des arbres plantés l'an passé,
- soit D l'ensemble des arbres qui sont dans mon verger,

Notons également E l'ensemble des arbres. Les 4 ensembles A, B, C et D sont inclus dans E, c'est notre univers (de travail).
Les affirmations de l'énoncé nous donnent des informations sur ces ensembles :
- la première affirmation nous indique que $B \subset C$,
- la deuxième que $A \subset D$,
- la troisième que $A \cap C = \emptyset$,
- et la quatrième que $B \not\subset D$ et que $B \neq \emptyset$ (c'est-à-dire B contient au moins un élément).

Traduisons maintenant les assertions suivantes en termes mathématiques, et essayons de déterminer si elles sont justes, fausses ou impossibles à répondre.

1. Cette assertion se traduit par $A \cap B = \emptyset$. Elle est vraie car $B \subset C$ et $A \cap C = \emptyset$, ce qui implique, $A \cap B \subset A \cap C = \emptyset$.
2. Cette assertion se traduit par $C \subset D$. Elle est fausse car $B \not\subset D$ ce qui implique qu'il existe $x \in B$ tel qu $x \notin D$. Or $B \subset C$, donc $x \in C$ (et $x \notin D$).
3. Cette assertion se traduit par $C \neq \emptyset$. Elle est vraie car $B \neq \emptyset$, donc B contient au moins un élément, or $B \subset C$, donc C contient au moins un élément.