Exercice 1

(1) f_1 polynôme $\Longrightarrow f_1$ continue sur $\mathbb{R}$

0,5 (continue) 0,5 $f(a)f(b)<0$ 0,5 TVI

$$\left.\begin{array}{l} f_1 \text{ polynôme} \Longrightarrow f_1 \text{ continue sur } \mathbb{R} \\ f_1(-1) = -1 -3 -12 -12 = -28 < 0 \\ f_1(3) = 27 - 27 + 36 - 12 = 24 > 0 \end{array}\right\} \xrightarrow{TVI}$$

il existe $r \in [-1, 3]$ t.q $f_1(r) = 0$.

(2) $f_1'(x) = 3x^2 - 6x + 12$

0,25

$$= 3(x^2 - 2x + 4)$$
$$= 3\left[(x-1)^2 + 3\right] > 0$$

0,25 donc f_1 est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

On peut en déduire l'unicité de la racine r

(3) On applique la méthode de la dichotomie :

$a_0 = -1$	$m_0 = 1$	$b_0 = 3$
$f(a_0) < 0$	$f(m_0) = -2 < 0$.	$f(b_0) > 0$.

2

$a_1 = 1$	$m_1 = 2$.	$b_1 = 3$
$f(a_1) < 0$	$f(m_1) = 8 - 12 + 24 - 12 = 8 > 0$.	$f(b_1) > 0$.

On en déduit que $r \in [1, 2]$.

(4) $x_0 = 2$.

0,5 + 0,5

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 2 - \frac{8}{12} = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}.$$

Exercice 2

(1) $P_g(x) = \cancel{g(0)\,\ell_{0}(x)} + g(1)\,\ell_{1,2}(x) + \cancel{g(2)\,\ell_{2}(x)}$

1.5

$= 1 \cdot \ell_{1,2}(x)$

$= \dfrac{x\,(x-2)}{1\,(-1)} = x(2-x)$

(2) $\left|g\left(\frac{1}{5}\right) - P_g\left(\frac{1}{5}\right)\right| \leqslant \dfrac{\|g'''\|_{\infty,[0,2]}}{3\times 2} \left|\left(\frac{1}{5}-0\right)\left(\frac{1}{5}-1\right)\left(\frac{1}{5}-2\right)\right|$

$= \dfrac{\|g'''\|_{\infty,[0,2]}}{3\times 2}\ \dfrac{1}{5}\ \dfrac{4}{5}\ \dfrac{9}{5}$

0,25

$= \|g'''\|_{\infty,[0,2]}\ \dfrac{2\times 3}{5^3}$

Comme $g'(x) = \frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$, on a

3×0,25

$g''(x) = -\frac{\pi^2}{4}\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ et enfin

$g'''(x) = -\frac{\pi^3}{8}\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $|g'''(x)| = \frac{\pi^3}{8}\left|\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right| \leqslant \frac{\pi^3}{8}$.

1

On a donc $\|g'''\|_{\infty,[0,2]} \leqslant \frac{\pi^3}{8}$.

0,5

Bilan : $\left|g\left(\frac{1}{5}\right) - P_g\left(\frac{1}{5}\right)\right| \leqslant \dfrac{2\times 3}{5^3}\ \dfrac{\pi^3}{8} = \dfrac{3\pi^3}{5^3\times 4}$

Exercice 3

2 (1)

$$
\begin{array}{c|c}
8 & 13 \\
12 & 15 \quad \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2} \\
20 & 11 \quad \dfrac{-4}{8} = -\dfrac{1}{2} \quad \dfrac{-1}{12}.
\end{array}
$$

donc $p(x) = 13 + \frac{1}{2}(x-8) - \frac{1}{12}(x-8)(x-12)$.

0,5 (2) $p(16) = 13 + 4 - \dfrac{8 \times (4)}{12} = 17 - \dfrac{8}{3} = 15 - \dfrac{2}{3} = \dfrac{43}{3}$

(3) La ligne supplémentaire dans le tableau des différences divisées est la suivante :

$$
1 \qquad
\begin{array}{c|c}
24 & 11 \quad 0 \quad \dfrac{\frac{1}{2}}{12} = \dfrac{1}{24} \quad \dfrac{\frac{3}{24}}{16}
\end{array}
$$

donc $q(x) = p(x) + \dfrac{1}{8 \times 16}(x-8)(x-12)(x-20)$.

0,5 (4) $q(16) = \dfrac{43}{3} + \dfrac{1}{8 \times 16}(8)(4)(-4) = \dfrac{43}{3} - 1 = \dfrac{40}{3}$.

Exercice 4

① P_f est un polynôme de degré 1 et 1 est bien $\leqslant$ au nombre de points d'interpolation -1

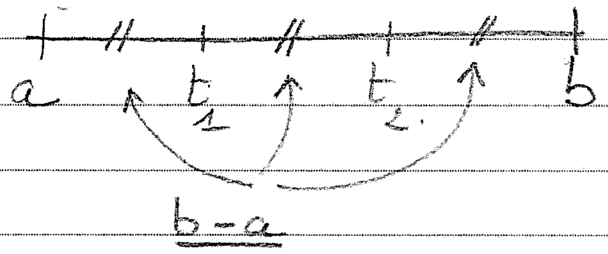
1

$P_f(t_1) = f(t_1)$
$P_f(t_2) = f(t_2)$.

② $$\int_a^b P_f(x)\,dx = \frac{f(t_2)-f(t_1)}{t_2-t_1}\left[\frac{(x-t_1)^2}{2}\right]_a^b + f(t_1)(b-a).$$

$$= \frac{f(t_2)-f(t_1)}{2(t_2-t_1)}\left((b-t_1)^2-(a-t_1)^2\right) + f(t_1)(b-a).$$

2



$$\int_a^b P_f(x)\,dx = 3\frac{f(t_2)-f(t_1)}{2(b-a)}\left(4\frac{(b-a)^2}{9} - \frac{(b-a)^2}{9}\right) + f(t_1)(b-a)$$

$$= \cancel{3}\frac{f(t_2)-f(t_1)}{2(b-a)}\frac{1}{\cancel{3}}(b-a)^2 + f(t_1)(b-a)$$

$$= \frac{(b-a)}{2}\left(f(t_2)-f(t_1)+2f(t_1)\right)$$
$$= J(f, a, b)$$

(3) $\left| I(f,a,b) - J^C(f,a,b,n) \right|$

2 (points bonus)

$$= \left| \sum_{i=0}^{n-1} \left(I(f, a_i, a_{i+1}) - J(f, a_i, a_{i+1}) \right) \right|$$

où $a_i = a + i\,\dfrac{b-a}{n}$

$$\leqslant \sum_{i=0}^{n-1} \left| I(f, a_i, a_{i+1}) - J(f, a_i, a_{i+1}) \right|$$

par l'inégalité triangulaire

$$\leqslant \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(a_{i+1}-a_i)^3}{3^3} \|f''\|_{\infty,[a_i,a_{i+1}]}.$$

$$= \frac{(b-a)^3}{3^3 n^3} \sum_{i=0}^{n-1} \|f''\|_{\infty,[a_i,a_{i+1}]}$$

$$\leqslant \frac{(b-a)^3}{3^3 n^3}\, n\, \|f''\|_{\infty,[a,b]}.$$

$$= \frac{(b-a)^3}{3^3 n^2} \|f''\|_{\infty,[a,b]}$$

(4)

0,5 a) $I(f,a,b) = \left[\dfrac{\sin(3x)}{3} \right]_0^{\pi} = 0.$

0,5 b). $J^C(f,0,\pi,2) = J\left(f,0,\frac{\pi}{2}\right) + J\left(f,\frac{\pi}{2},\pi\right).$

$$= \frac{\pi}{4}\left(f\left(\frac{\pi}{6}\right) + f\left(\frac{2\pi}{6}\right) \right) + \frac{\pi}{4}\left(f\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\right) + f\left(\frac{\pi}{2}+\frac{2\pi}{6}\right) \right)$$

1

$$= \frac{\pi}{4}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \cos(\pi) + \cos(2\pi) + \cos\left(\frac{5\pi}{2}\right) \right)$$

$$= \frac{\pi}{4}\left(0 + (-1) + (1) + (0) \right)$$

$$= 0.$$

③ On cherche un entier n t.q.

$$\left| I(f,a,b) - J^C(f,a,b,n) \right| \leqslant \varepsilon$$

1 Or $f'(x) = -3\sin(3x)$ et $f''(x) = -3^2\cos(3x)$.
donc $\|f''\|_{\infty,[0,\pi]} = \max_{x\in[0,\pi]} |f''(x)| \leqslant 3^2$

Donc $\left| I(f,a,b) - J^C(f,a,b,n) \right| \leqslant \dfrac{(\pi-0)^3}{n^2\, 3^3}\, 3^2$

1 Le plus petit entier n vérifiant

$$\frac{\pi^3}{n^2\, 3^3}\, 3^2 \leqslant \varepsilon = \frac{\pi^3}{3} 10^{-4}$$

est tq $\dfrac{1}{10^{-4}} \leqslant n^2$

soit $n = 100$