Université Paul Sabatier - L1 info et L1 MIASHS 12 avril 2018

Contrôle Terminal Méthodes Numériques, Durée : 2h

Aucun document n'est autorisé, sauf une feuille A4 recto-verso comportant vos nom et prénom.
Les calculatrices, téléphones, tablettes, ordinateurs et objets connectés sont interdits.
Le simple fait d'avoir un de ces objets à vos côtés est assimilé à une tentative de fraude.
Le barème n'est qu'indicatif et pourra être modifié.

Exercice 1 (5 points)

On considère la fonction f_1 définie sur $\mathbb{R}$ par $f_1(x) = x^3 - 3x^2 + 12x - 12$.

1. Montrer que l'équation $f_1(x) = 0$ admet au moins une solution r dans l'intervalle $[-1, 3]$.
2. Montrer que r est l'unique solution de $f_1(x) = 0$ dans l'intervalle $[-1, 3]$.
3. Déterminer, en justifiant soigneusement, un intervalle de longueur exactement 1 contenant r.
4. En partant de $x_0 = 2$, calculer le premier itéré x_1 de la méthode de Newton, en prenant soin de préciser la formule utilisée.

Exercice 2 (4 points)

Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ et les abscisses $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ et $a_2 = 2$.

1. En évitant les calculs inutiles, calculer le polynôme d'interpolation de Lagrange p_g de g relativement à a_0, a_1 et a_2.
2. On rappelle que pour tout $x \in [0, 2]$, on a $|g(x) - p_g(x)| \leq \frac{\|g'''\|_{\infty,[0,2]}}{3!}|(x-a_0)(x-a_1)(x-a_2)|$.
   En déduire un réel qui majore l'erreur d'interpolation $|g(1/5) - p_g(1/5)|$, **sans calculer ni** $g(1/5)$**, ni** $p_g(1/5)$.

Exercice 3 (4 points)

Important : avant de vous lancer dans les calculs, prenez le temps de lire l'intégralité de l'énoncé de cet exercice afin de choisir la méthode la plus adaptée pour le calcul du polynôme d'interpolation de Lagrange.

Sophie fait des relevés quotidiens de température dans son jardin. Hier, elle a noté :

Heure du relevé	8h	12h	20h
Température relevée (en degrés Celsius)	13	15	11

1. En justifiant votre démarche, donner l'expression du polynôme p interpolant les trois données contenues dans le tableau ci-dessus. Plus précisément, $p(x)$ donnera une estimation de la température à l'heure x.
2. Quelle est la température prévue à 16h par ce polynôme p ?

Youchun, le voisin de Sophie, l'informe que la température à minuit (24h) était de 11 degrés Celsius. On dispose donc maintenant des données suivantes.

Heure du relevé	8h	12h	20h	24h
Température relevée (en degrés Celsius)	13	15	11	11

3. Donner l'expression du polynôme q interpolant les quatre données contenues dans le tableau ci-dessus.
4. Quelle est la température prévue à 16h par ce polynôme q ?

Tourner la page SVP

Exercice 4 (7 points)

On se donne 2 réels $a < b$, une fonction f définie, continue et indéfiniment dérivable sur $[a, b]$ et on note

$$t_1 = a + \frac{b-a}{3}, \quad t_2 = a + 2\frac{b-a}{3}, \quad I(f, a, b) = \int_a^b f(x)dx.$$

On définit aussi

$$p_f(x) = \frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1}(x - t_1) + f(t_1)$$

et

$$J(f, a, b) = \frac{b-a}{2}\left(f\left(a + \frac{b-a}{3}\right) + f\left(a + 2\frac{b-a}{3}\right)\right).$$

1. Montrer que p_f est le polynôme d'interpolation de Lagrange de f relativement aux abscisses t_1 et t_2.
2. Calculer $\displaystyle\int_a^b p_f(x)dx$ et montrer que cette intégrale est égale à $J(f, a, b)$.

   On peut donc considérer maintenant que $J(f, a, b)$ est une nouvelle formule élémentaire d'intégration numérique de f sur $[a, b]$.
   Notons $J^C(f, a, b, n)$ la formule composite associée lorsqu'on découpe l'intervalle $[a, b]$ en n sous-intervalles de même longueur.

3. (bonus) On admet que $|I(f, a, b) - J(f, a, b)| \leq \dfrac{(b-a)^3}{3^3}\|f''\|_{\infty,[a,b]}$. Montrer que

$$|I(f, a, b) - J^C(f, a, b, n)| \leq \frac{1}{n^2}\frac{(b-a)^3}{3^3}\|f''\|_{\infty,[a,b]}.$$

4. Dans cette question, on fixe $f(x) = \cos(3x)$, $a = 0$ et $b = \pi$.
   (a) Calculer $I(f, a, b)$.
   (b) Quelle est la valeur de $J^C(f, a, b, 2)$?
   (c) Calculer le plus petit entier n qui permet de garantir une erreur d'intégration numérique inférieure ou égale à $\varepsilon = \dfrac{\pi^3}{3}10^{-4}$ pour approcher $I(f, a, b)$ par $J^C(f, a, b, n)$.