Graph Exercises

Gilles

September 21, 2020

1 Objectifs

On veut manipuler des graphes et faire tourner 'a la main' des algorithmes vus en cours.

2 Exemple 1

On considere le graphe $G = (X, U, \omega)$ **non oriente pondere** ou:

- $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$
- $U = \{(x_1, x_2), (x_1, x_3), (x_1, x_4), (x_1, x_5), (x_2, x_3), (x_2, x_4), (x_2, x_5), (x_3, x_4)\}$
- $\omega((x_1, x_2)) = 6, \omega((x_1, x_3)) = 5, \omega((x_1, x_4)) = 1, \omega((x_1, x_5)) = 10,$
  $\omega((x_2, x_3)) = 4, \omega((x_2, x_4)) = 2, \omega((x_2, x_5)) = 8, \omega((x_3, x_4)) = 7$

1. Calculer la densite $d(G)$de ce graphe G.

   Quelles sont les aretes manquantes pour avoir une densite de 1?

2. Construire la matrice d'adjacence pour ce graphe.

3. Indiquer pourquoi ce graphe admet un MST.

4. Appliquer l'algorithme de Prim qui construit un MST. On representera les etapes k de l'algorithme par une table de $|X|+1$ lignes suivant la Table **??** Cette table permet de dessiner l'arbre ensuite. Donner la representation $T = (X, U', \omega)$

k	*arete selectionnee*	X_k	U_k
0	*aucune*	$\{x_1\}$	$\emptyset$
1	...	....	...

   Table 1: Prim

   de cet arbre. Calculer $\omega(T)$. Calculer sa densite $d(T)$. Donner une formule generale pour la densite d'un arbre couvrant (spanning tree) (minimum ou pas).

5. Peut il y avoir plusieurs MST pour ce graphe G? Justifier votre reponse.

6. Indiquer la liste ordonnee des aretes selon ordre croissant des poids. Appliquer l'algorithme de Kruskal elementaire. On representera les etapes de l'algorithme selon la table **??**.

k	*arete selectionnee*	U_k	X
0	*aucune*	$\emptyset$	X
..	..	..	..

   Table 2: Kruskal basique

7. On implemente maintenant le graphe G avec une structure union-find que l'on represente par la table **??** a 2 lignes et $|X|$ colonnes. L'evolution de la deuxieme ligne de cette table permet de visualiser les etapes de l'algorithme de Kruskal avec cette implementation. La table initiale (etape 0) est donc:

   La deuxieme ligne est censee representer les noeuds pere des sommets correspondant a la premiere ligne. Completer la table **??** en executant l'algorithme de Kruskal avec union-find (sans compression).

etape	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	*arete*
0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\emptyset$
....						

Table 3: Kruskal avec union-find

3 Exemple 2

On execute l'algorithme de Kruskal sur le graphe G de la figure **??**, en utilisant la structure union-find. A une certaine etape de l'algorithme, la table represente l'arborescence de la figure **??**.

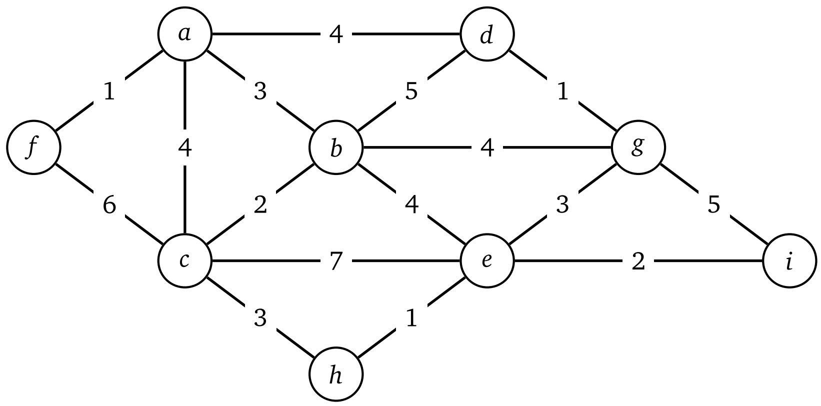

Figure 1: Graphe 1

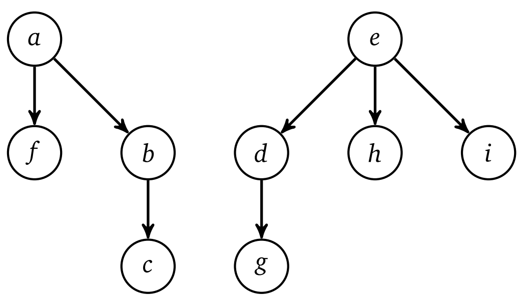

Figure 2: Arborescence courante

En fonction de l'arborescence:

1. Indiquer le nombre d'aretes du graphe initial qui ont ete utilisees.
2. Faire la liste ordonnee par poids croissant des aretes du graphe G.
3. En deduire la liste des aretes qui ont deja ete rajoutees.
4. Completer l'algorithme pour obtenir le MST. Donner le MST sous la forme $T = (X, U)$.

4 Exemple 3

On s'interesse ici a des graphes orientes et a la notion de circuit. L'absence de circuit est indispensable a l'utilisation d'un grand nombre d'algorithmes en theorie des graphes. Il est donc interessant de considerer le probleme de la *detection de circuit.*

1. On considere le graphe G oriente de la figure **??**. Construire la matrice d'adjacence M de ce graphe.
2. Construire la fermeture transitive $\hat{G}$ du graphe G. Rappelons que $\hat{G} = (X, \hat{U})$ ou $(x, y) \in \hat{U}$ si et seulement si il existe une chemin de x vers y.

3. Calculer M^2 et M^3. Est ce que M^2 et M^3 sont toujours des matrices d'adjacence (pourquoi?)
4. Si on remplace tous les elements non nuls de la matrice M^2 par des 1, on obtient donc une matrice d'adjacence M'^2. Quel est le graphe correspondant?
5. Meme question pour M^3 (on obtient M'^3).
6. Considerons maintenant la somme de matrices $M+M'^2+M'^3$, ou au lieu de considerer la somme usuelle des reels, on considere la somme Booleenne ou $1+1=1$ (on considere la somme Booleenne comme interpretant le OU logique et non pas comme le XOR). On obtient donc une matrice d'adjacence. Construire le graphe correspondant. Que remarquez vous?
7. En deduire une relation entre la fermeture transitive d'un graphe G et l'existence d'un circuit dans ce graphe G.
8. Appliquer cette methode pour verifier que le graphe de la figure **??** possede un circuit.

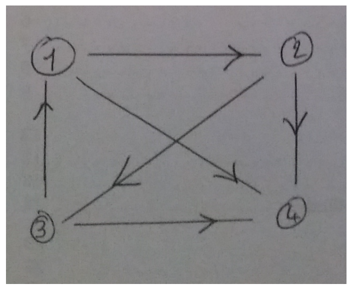

Figure 3: Graphe avec circuit

9. Appliquer cette methode pour verifier que le graphe de la figure **??** est sans circuit.

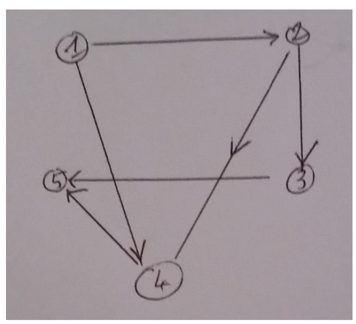

Figure 4: Graphe sans circuit

10. Appliquer la methode des niveaux pour verifier que le graphe de la figure **??** est sans circuit.