

Les Automates Finis



Jean-Paul ARCANGELI

Jean-Baptiste RACLET

Jean-Paul.Arcangeli@irit.fr

Jean-Baptiste.Raclet@irit.fr

D[i] | Département
Informatique

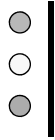


LANGAGES ET AUTOMATES
UPS – Licence 3 Informatique – S5
2020-2021



Plan du chapitre

1. Introduction aux automates finis (AF)
2. Définition
3. Langage reconnu par un automate fini
4. Automates finis complets (AFC)
5. Automates finis déterministes (AFD)
6. Langages reconnaissables par les AF
7. Grammaires linéaires à droite et AF
8. Systèmes d'équations de langages - Opérations



1- Introduction

- Modélisation/formalisation de systèmes (automatiques) à transition d'état

- État
- Évènement (action sur le système)

Exemple (M0)



- Le système est décrit par une machine abstraite
 - Un ensemble fini d'états
 - Un ensemble d'évènements
 - Identifiés comme pouvant influencer sur l'état du système
 - Un ensemble de règles de transition qui décrivent l'effet d'un évènement sur l'état du système
 - L'effet d'un évènement ne dépend que de l'état courant

3



1- Introduction

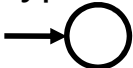


- Remarques
 - Modélisation => abstraction
 - AF pour la conception d'applications et de systèmes
 - Diagrammes « état-transition » en UML
 - Modélisation de systèmes réels
 - AF pour supporter l'analyse lexicale (cf. chapitre 4)
 - Il existe d'autres formes plus complexes d'automates et de systèmes de transition
 - p. ex. les automates « à pile » ...

Exemple (M0')

4



1- Introduction

- Un automate est une « machine abstraite »
 - Qui traite une suite ou séquence d'évènements en entrée (ordre !)
 - À partir d'un état « initial »
 - Qui peuvent le conduire dans un état privilégié (état « final »)
- Différents types d'état
 - Initial 
 - Final 
 - Autre (ni initial, ni final) 
- Remarque
 - Nous considérerons ici des automates avec un seul état initial (sans perte d'expressivité)

5



1- Introduction

- Et les « langages » et la théorie des langages dans tout ça ?
 - Ensemble des évènements possibles = alphabet
 - Une séquence d'évènements = un mot
 - Ensemble des mots dont le « traitement » conduit à un état final = langage reconnu par l'automate
 - D'où le lien avec l'analyse lexicale

6



2- Définition formelle

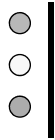
DEF

- Un automate fini (AF) est un quintuplet $\langle X, Q, q_0, F, t \rangle$ avec :
 - X : alphabet = ensemble fini de symboles ou lettres (qui représentent les différents évènements possibles)
 - Q : ensemble fini d'états
 - $F \subseteq Q$: ensemble des états finals (ou « finaux »)
 - $q_0 \in Q$: état initial (unique)
 - $t : Q \times X \rightarrow \mathcal{P}(Q)$: fonction de transition

Exemple (M0')

- Remarque
 - Un AF peut être représenté sous forme de graphe orienté

7



2- Définition formelle (suite)

- Remarque
 - Pour $q \in Q$ et $x \in X$, $t(q, x)$ décrit le ou les effets possibles de l'évènement « x » sur le système quand celui-ci est dans l'état q
 - $|t(q, x)| = 0$: l'effet de « x » n'est pas défini (transition non autorisée)
 - $|t(q, x)| = 1$: l'effet de « x » est défini de manière unique
 - $|t(q, x)| > 1$: « x » a plusieurs effets possibles sur l'état du système

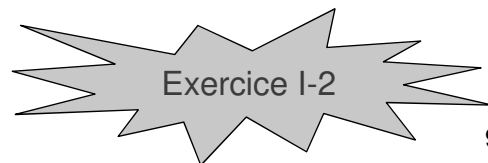
Exemple (M1)

Exercice I-1

8

3- Langage reconnu par un automate fini

- Intuitivement et informellement
 - Langage reconnu = ensemble des mots de X^* dont « l'effet » (l'effet cumulé des lettres -événements- prises de gauche à droite) est de faire passer le système de l'état initial à un état final
 - Un mot reconnu décrit un « chemin » (ou plusieurs) dans le graphe entre l'état initial et un état final
 - Un AF peut être vu comme une procédure de décision qui prend en entrée un mot de X^* et qui détermine son « acceptation » (sa « reconnaissance »)
 - Le mot est-il reconnu par l'AF : oui ou non ?



9

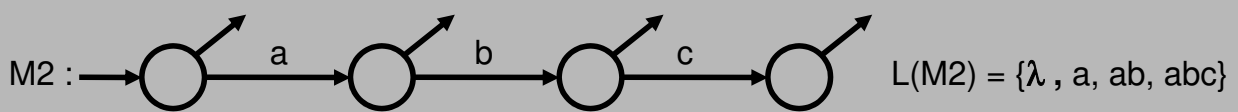
3- Langage reconnu par un automate fini

- Soit T l'extension de t à X^* DEF
 - $T : Q \times X^* \rightarrow \mathcal{P}(Q)$
 - $\forall q \in Q, T(q, \lambda) = \{q\}$
 - $\forall q \in Q, \forall x \in X, \forall w \in X^*, T(q, x.w) = \bigcup_{q_x \in t(q,x)} T(q_x, w)$
- Langage reconnu à partir d'un état $q \in Q$ (noté L_q)
 - $L_q = \{w \in X^* / T(q, w) \cap F \neq \emptyset\}$ DEF
- Langage reconnu par un AF $M = \langle X, Q, q_0, F, t \rangle$ (noté $L(M)$)
 - $L(M) = L_{q_0} = \{w \in X^* / T(q_0, w) \cap F \neq \emptyset\}$ DEF

3- Langage reconnu par un automate fini

- Remarque (d'après la définition de $L(M)$)
 - $\lambda \in L(M) \Leftrightarrow q_0 \in F$

Exemple :



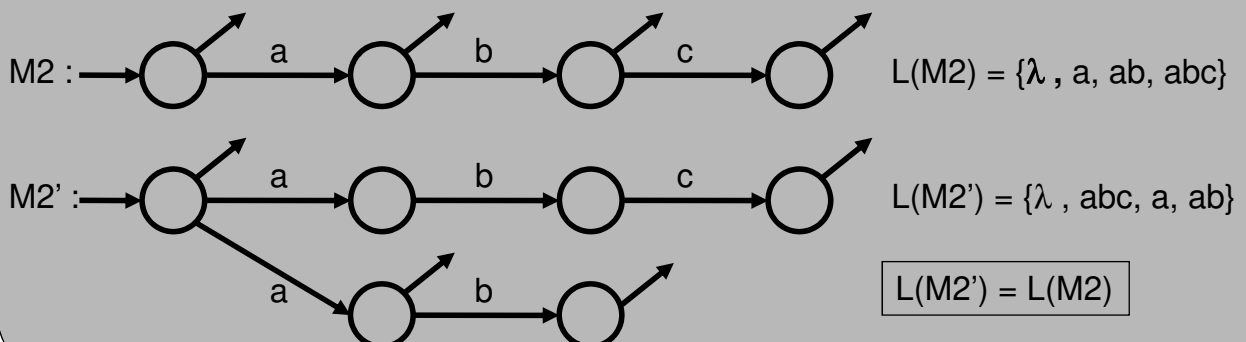
11

3- Langage reconnu par un automate fini

DEF

- Deux automates M et M' sont dits équivalents si $L(M) = L(M')$

Exemple :



12