Université Toulouse III — Année 2017-2018
Mathématiques discrètes — **Durée : 2h**

Examen

Les documents et les calculatrices ne sont pas autorisés pour l'épreuve.

Exercice 1 - Parties paires et impaires (4pt). Soient E un ensemble fini non vide et a un élément fixé de E. On note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E et on considère l'application

$$f: \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(E) & \longrightarrow & \mathcal{P}(E) \\ A & \longmapsto & \begin{cases} A \cup \{a\} & \text{si } a \notin A \\ A \setminus \{a\} & \text{si } a \in A \end{cases} \end{array}$$

1. Montrer que pour tout $A \in \mathcal{P}(E)$ on a $f \circ f(A) = A$.
2. Montrer que f est bijective.
3. Soit $A \in \mathcal{P}(E)$. Montrer que si $\mathrm{Card}(A)$ est pair alors $\mathrm{Card}(f(A))$ est impair. Montrer que si $\mathrm{Card}(A)$ est impair alors $\mathrm{Card}(f(A))$ est pair.
4. En déduire que l'ensemble E a autant de parties de cardinal pair que de parties de cardinal impair.
5. On suppose que $\mathrm{Card}(E) = n$. Quel est le cardinal de $\mathcal{P}(E)$, l'ensemble des parties de E ? En déduire le cardinal de l'ensemble suivant :

$$P = \{A \in \mathcal{P}(E) \text{ tel que } \mathrm{Card}(A) \text{ est pair}\} \qquad \text{et} \qquad I = \{A \in \mathcal{P}(E) \text{ tel que } \mathrm{Card}(A) \text{ est impair}\}.$$

Exercice 2 - Groupe d'étudiants (3pt). Un groupe de TD contient 8 étudiants.

1. On décide de partager ce groupe de TD en deux groupes de TP de 4 étudiants. Combien y a-t-il de possibilités ?
2. On décide de partager ce groupe de TD en deux groupes de TP pas forcément avec le même nombre d'étudiants. Combien y a-t-il de possibilités ?
3. Dans ce groupe de TD, on décide de choisir un étudiant pour ouvrir la salle et un autre différent pour fermer la salle. Combien y a-t-il de possibilités ?
4. Dans ce groupe de 8 étudiants, est-il possible que 4 d'entre eux aient chacun exactement trois amis, 2 d'entre eux en aient exactement quatre, et 3 d'entre eux exactement cinq ? Pour cette question, on pourra modéliser la situation avec un graphe non orienté et on déterminera le nombre de sommets et d'arêtes.

Exercice 3 - Relation d'équivalence (4pt). Soient E et F deux ensembles et $f : E \to F$ une application. On définit sur E la relation $\mathcal{R}$ par

$$x\mathcal{R}y \text{ si et seulement si } f(x) = f(y).$$

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
2. Pour la suite, on considère que la fonction f est définie sur $E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ et $F = \{a, b, c, d\}$ par :

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$f(x)$	a	c	d	b	a	c	d	a	b

   (a) Est-ce que f est injective ? Est-ce que f est surjective ?

   (b) Donner les classes d'équivalences de $\mathcal{R}$. En déduire le cardinal de $E/\mathcal{R}$, l'ensemble des classes d'équivalences de $\mathcal{R}$.

   (c) On définit la fonction

$$\widetilde{f}: \begin{array}{ccc} E/\mathcal{R} & \longrightarrow & F \\ \mathrm{Cl}(x) & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

   Montrer que si $y \in \mathrm{Cl}(x)$ alors $\mathrm{Cl}(x)$ et $\mathrm{Cl}(y)$ ont bien la même image par $\widetilde{f}$.

   (d) Montrer que $\widetilde{f}$ est une bijection.

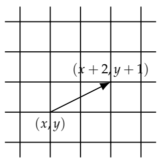
Exercice 4 - Relation d'ordre sur les mots (5pt). Soit $\mathcal{A} = \{a, b\}$. Sur l'ensemble des mots $\mathcal{A}^*$, on définit la relation suivante pour $u, v \in \mathcal{A}^*$ par :

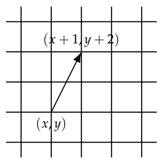
$u\mathcal{S}v$ si et seulement si le nombre de a dans le mot u est plus petit ou égal au nombre de a dans v.

Par exemple on a $ababb\mathcal{S}abaa$.

1. Tracer le diagramme sagittal de $\mathcal{S}$ lorsqu'on se restreint à l'ensemble
$$E = \{a, b, ab, aa, aab, aba, aaa\}.$$
2. Montrer que la relation binaire $\mathcal{S}$ sur $\mathcal{A}^*$ est réflexive et transitive.
3. Est-ce que $\mathcal{S}$ est une relation d'ordre sur $\mathcal{A}^*$?
4. On définit sur $\mathcal{A}^*$ la relation suivante :
$$u \sim v \text{ si et seulement si } u\mathcal{S}v \text{ et } v\mathcal{S}u.$$
Montrer que $\sim$ est une relation d'equivalence sur $\mathcal{A}^*$.
5. Tracer le diagramme sagittal de $\sim$ lorsqu'on se restreint à l'ensemble E.
6. Donner les classes d'équivalence de $\sim$ lorsqu'on se restreint à E que l'on notera Cl_0, Cl_1, Cl_2 et Cl_3.
7. Sur l'ensemble $E' = E/\sim = \{\mathrm{Cl}_0, \mathrm{Cl}_1, \mathrm{Cl}_2, \mathrm{Cl}_3\}$ on définit la relation suivante :
$$\mathrm{Cl}_i\mathcal{S}'\mathrm{Cl}_j \text{ si et seulement s'il existe } x \in \mathrm{Cl}_i \text{ et } y \in \mathrm{Cl}_j \text{ tel que } x\mathcal{S}y.$$
Montrer que $\mathcal{S}'$ est une relation d'ordre sur E'.
8. Tracer le diagramme de Hasse de la relation d'ordre $\mathcal{S}'$ sur E'.

Exercice 5 - Déplacement d'un pion (4pt). On considère un pion qui se déplace sur des coordonnées entières ($x \geq 0$ et $y \geq 0$). Au départ, le pion se trouve à la position $(0, 0)$ et il y a deux mouvements possibles :
- soit x augmente de 2 et y de 1 ;
- soit y augmente de 1 et x de 2.





On note $M \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N} = \mathbb{N}^2$, l'ensemble des coordonnées accessibles par le pion.

1. Montrer que M peut être défini inductivement par :
Base : $B = \{(0, 0)\}$
Induction les opérations $\varphi_1 : (x, y) \longmapsto (x+1, y+2)$ et $\varphi_2 : (x, y) \longmapsto (x+2, y+1)$.
2. Parmi les couples suivants, dire (en justifiant) quels couples appartiennent à M :
$$(1, 2) \qquad (2, 4) \qquad (3, 3) \qquad (1, 1) \qquad (4, 2)$$
3. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $(n, 2n) \in M$.
4. Considérons l'ensemble
$$M' = \{(2n+p, n+2p) \in \mathbb{N}^2 \text{ tel que } n \in \mathbb{N} \text{ et } p \in \mathbb{N}\}.$$
Montrer par induction en utilisant la structure inductive de M que $M \subset M'$.
5. Montrer que tout élément de M' peut s'écrire à l'aide de φ_1, φ_2 et $(0, 0)$. En déduire que $M = M'$.
6. Déterminer les points de la diagonale qui sont accessibles par le pion, c'est à dire $M \cap \Delta$ où
$$\Delta = \{(n, n) \in \mathbb{N}^2 \text{ tel que } n \in \mathbb{N}\}.$$

Examen (Solutions)

Correction 1 1. **(1 point)** Soit $A \in \mathcal{P}(E)$ on a deux cas :
— si $a \in A$, on a $f(A) = A \setminus \{a\}$ donc $f \circ f(A) = (A \setminus \{a\}) \cup \{a\} = A$;
— si $a \notin A$, on a $f(A) = A \cup \{a\}$ donc $f \circ f(A) = (A \cup \{a\}) \setminus \{a\} = A$.
Dans tout les cas, on a $f \circ f(A) = A$.

2. **(1 point)** Soit $A, B \in \mathcal{P}(E)$ tels que $f(A) = f(B)$, on a $A = f \circ f(A) = f \circ f(B) = B$ donc f est injective. Soit $A \in \mathcal{P}(E)$, on a $A = f \circ f(A) = f(f(A))$. Donc $f(A)$ est un antécédent de A par f. On en déduit que f est surjective. Ainsi f est bijective car injective et surjective.
Remarque : On peut aussi dire directement que comme $f \circ f = \mathrm{Id}$, la fonction f est bijective et admet f comme fonction réciproque.
3. **(1 point)** Pour construire $f(A)$ on ajoute ou on enlève un élément à A. On en déduit que $\mathrm{Card}(f(A)) = \mathrm{Card}(A) - 1$ ou $\mathrm{Card}(f(A)) = \mathrm{Card}(A) + 1$. Ainsi, si $\mathrm{Card}(A)$ est pair alors $\mathrm{Card}(f(A))$ est impair et si $\mathrm{Card}(A)$ est impair alors $\mathrm{Card}(f(A))$ est pair.
4. **(0,5 point)** Le fonction f réalise une bijection entre les parties paires et les parties impaires. On en déduit qu'il y a autant de parties de cardinal pair que de parties de cardinal impair.
5. **(1 point)** Si $\mathrm{Card}(E) = n$ alors $\mathrm{Card}(\mathcal{P}(E)) = 2^n$. Comme il y a autant de partie paire que de partie impaire, on en déduit que $\mathrm{Card}(P) = \mathrm{Card}(I) = 2^{n-1}$.

Correction 2 Attention, il y a différentes interprétations possibles pour la question. Mettre les points si c'est cohérent.

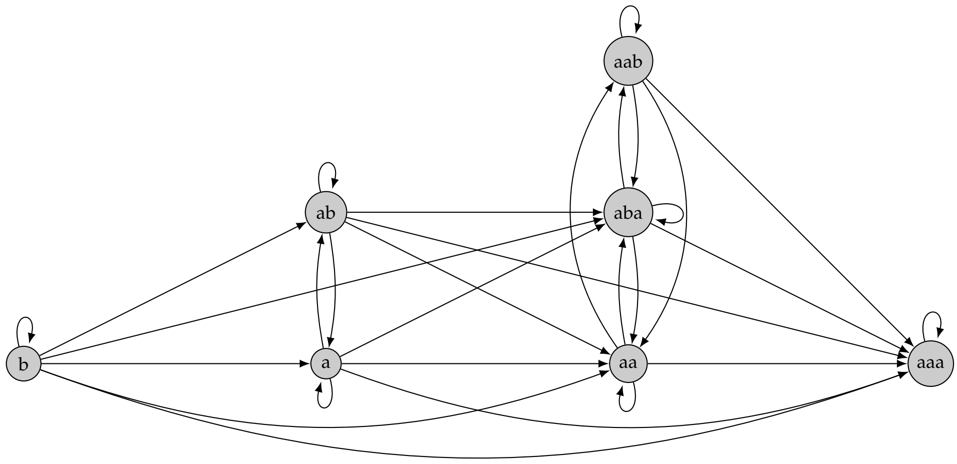
1. **(1 point)** Pour faire deux groupes de TP de 4 étudiants, il suffit de choisir 4 étudiants parmi 8 sans remise et dans ordre le nombre de possibilité est donc :
$$C_8^4 = \frac{8*7*6*5}{4*3*2} = 7*2*5 = 70.$$
2. **(1 point)** Pour construire un groupe de TP, pour chaque étudiant on a le choix de le prendre ou pas. Il y a 2^8 possibilités.
3. **(1 point)** On 8 possibilité pour choisir celui qui ouvre la porte et 7 pour celui qui la ferme. Il y a donc $8*7 = 56$ possibilités.
4. **(1 point)** On modélise le problème par un graphe ou les sommets sont les étudiants et il y a une arête entre deux sommets si les deux étudiants sont amis. Le nombre d'arête a vérifie donc $2a = 4*3+2*4+3*5 = 35$ ce qui est impossible.

Correction 3 1. **(1 point)** $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence car :
— Réflexivité : Pour tout $x \in E$ on a $f(x) = f(x)$ donc $x\mathcal{R}x$.
— Symétrie : Soient $x, y \in E$ tels que $x\mathcal{R}y$. On a $f(x) = f(y)$, donc $f(y) = f(x)$ et donc $y\mathcal{R}x$.
— Transitivité : Soient $x, y, z \in E$ tels que $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$. On a $f(x) = f(y)$ et $f(y) = f(z)$ donc $f(x) = f(z)$ et donc $x\mathcal{R}z$.

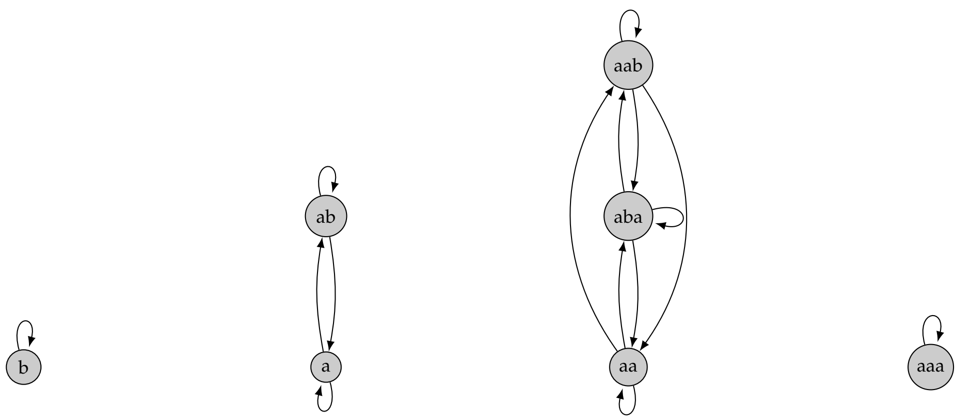
2. (a) **(0,75 point)** f est surjectif car tout élément de F admet un antécédent. f n'est pas injectif car a admet plusieurs pré-image : 0,4 et 7.
(b) **(1 point)** Les classes d'équivalences de $\mathcal{R}$ sont : $\mathrm{Cl}(0) = \{0,4,7\}$, $\mathrm{Cl}(1) = \{1,5\}$, $\mathrm{Cl}(2) = \{2,6\}$ et $\mathrm{Cl}(3) = \{3,8\}$. On a donc $\mathrm{Card}(E/\mathcal{R}) = 4$.
(c) **(0,75 point)** Soit $y \in \mathrm{Cl}(x)$ on a $x\mathcal{R}y$ donc $f(x) = f(y)$. Ainsi $\tilde{f}(\mathrm{Cl}(x)) = \tilde{f}(\mathrm{Cl}(y))$.
(d) **(1 point)** Comme f est surjective, tout élément de $y \in F$ admet un antécédent x, c'est à dire $f(x) = y$, donc $\tilde{f}(\mathrm{Cl}(x)) = y$. On en déduit que f est surjective.
Soit $\mathrm{Cl}(x), \mathrm{Cl}(y) \in E/\mathcal{R}$ tels que $\tilde{f}(\mathrm{Cl}(x)) = \tilde{f}(\mathrm{Cl}(y))$. On a donc $f(x) = f(y)$ donc $x\mathcal{R}y$ d'ou $\mathrm{Cl}(x)) = \mathrm{Cl}(y)$. On en déduit que $\tilde{f}$ est injective.
Comme $\tilde{f}$ est injective et surjective, elle est bijective.

Correction 4

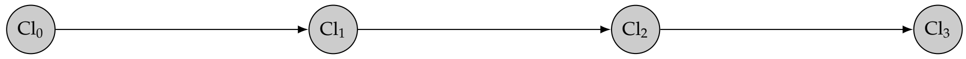
1. **(0,75 point)** On a :



2. **(0,75 point)** Réflexivité : Soit $u \in \mathcal{A}^*$, u a le même nombre de a que u donc $u\mathcal{S}u$.
Transitivité : Soient $u, v, w \in \mathcal{A}^*$, u a moins de a que v qui a moins de a que w. Donc u a moins de a que w. Ainsi $u\mathcal{S}v$.
3. **(0,5 point)** $\mathcal{S}$ n'est pas une relation d'ordre car elle n'est pas antisymétrique. En effet $a\mathcal{S}ab$ et $ab\mathcal{S}a$ mais $a \neq ab$.
4. **(1 point)** $\sim$ est une relation d'équivalence car :
Réflexivité : Soit $u \in \mathcal{A}^*$, on a $u\mathcal{S}u$ donc $u \sim u$
Transitivité : Soient $u, v, w \in \mathcal{A}^*$ tel que $u \sim v$ et $v \sim u$. On a $u\mathcal{S}v$ et $v\mathcal{S}w$ donc par transitivité de $\mathcal{S}$ on a $u\mathcal{S}w$. De même on a $v\mathcal{S}u$ et $w\mathcal{S}v$ donc par transitivité de $\mathcal{S}$ on a $w\mathcal{S}u$. Ainsi $u \sim w$.
Symétrie : Soient $u, v \in \mathcal{A}^*$ tel que $u \sim v$. On a $u\mathcal{S}v$ et $v\mathcal{S}u$ donc $v \sim u$.
5. **(0,5 point)** On a



6. **(0,5 point)** On a $\mathrm{Cl}_0 = \{b\}$, $\mathrm{Cl}_1 = \{a, ab\}$, $\mathrm{Cl}_2 = \{aa, aab, aba\}$ et $\mathrm{Cl}_3 = \{aaa\}$.
7. **(1 point)** $\mathcal{S}'$ est une relation d'ordre sur E' car :
Réflexivité : Pour tout classe Cl_i, il existe $x \in \mathrm{Cl}_i$ et on a $x\mathcal{S}x$ par réflexivité. Donc $\mathrm{Cl}_i\mathcal{S}'\mathrm{Cl}_i$.
Transitivité : Soient $\mathrm{Cl}_i, \mathrm{Cl}_j, \mathrm{Cl}_k \in E'$ tels que $\mathrm{Cl}_i\mathcal{S}'\mathrm{Cl}_j$ et $\mathrm{Cl}_j\mathcal{S}'\mathrm{Cl}_k$. Il existe donc $x \in \mathrm{Cl}_i$ et $y \in \mathrm{Cl}_j$ tels que $x\mathcal{S}y$. Et il existe donc $y' \in \mathrm{Cl}_j$ et $z \in \mathrm{Cl}_k$ tels que $y'\mathcal{S}z$. Comme $y, y' \in \mathrm{Cl}_j$, on a $y\mathcal{S}y'$. Par transitivité de $\mathcal{S}$ on en déduit que $\mathrm{Cl}_i\mathcal{S}'\mathrm{Cl}_k$.
Antisymétrie : Soient $\mathrm{Cl}_i, \mathrm{Cl}_j \in E'$ tels que $\mathrm{Cl}_i\mathcal{S}'\mathrm{Cl}_j$ et $\mathrm{Cl}_j\mathcal{S}'\mathrm{Cl}_i$. Ainsi il existe $x, x' \in \mathrm{Cl}_i$ et $y, y' \in \mathrm{Cl}_j$ tels que $x\mathcal{S}y$ et $y'\mathcal{S}x'$. Comme $y, y' \in \mathrm{Cl}_j$, on a $y\mathcal{S}y'$ donc par transitivité $y\mathcal{S}x'$. Comme $x, x' \in \mathrm{Cl}_i$, on a $x'\mathcal{S}x$ donc par transitivité $y\mathcal{S}x$. On a donc $x\mathcal{S}y$ et $y\mathcal{S}x$ donc $x \sim y$. Ainxi x et y sont dans la même classe d'équivalence donc $\mathrm{Cl}_i = \mathrm{Cl}_j$.
8. **(0,5 point)** On a



Correction 5 1. **(0,5 point)** Au départ le pion se trouve au point de coordonné $(0,0)$ qui correspond à la base de M. Il peut se déplacer suivant le vecteur $(2,1)$, ce qui correspond à l'opération φ_1, ou suivant le vecteur $(1,2)$, ce qui correspond à l'opération φ_2.

2. **(1 point)** Les points $(1,2)$, $(2,4)$, $(3,3)$ et $(4,2)$ sont des éléments de M car : $(1,2) = \varphi_1(0,0)$, $(2,4) = \varphi_1 \circ \varphi_1(0,0)$, $(3,3) = \varphi_1 \circ \varphi_2(0,0)$, $(4,2) = \varphi_2 \circ \varphi_2(0,0)$.
   Le point $(1,1)$ n'est pas dans M car dès qu'on applique φ_1 ou φ_2, une des deux coordonnées est plus grande que 2.

3. **(0,75 point)** Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que $(n,2n) \in M$.
   Initialisation : pour $n = 0$, on a $(0,0) \in M$
   Héridité : Supposons que $(n,2n) \in M$. On a $\varphi_1(n,2n) = (n+1, 2(n+1)) \in M$.
   Par récurrence, on en déduit que $(n,2n) \in M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4. **(1 point)** Montrons par induction que $M \subset M'$:
   Base : On a $(0,0) \in M'$.
   Héridité : Soit $(2n+p, n+2p) \in M'$. On a
   $$\begin{aligned} \varphi_1(2n+p, n+2p) &= (2n+p+1, n+2p+2) = (2n+(p+1), n+2(p+1)) \in M' \\ \text{et } \varphi_2(2n+p, n+2p) &= (2n+p+2, n+2p+1) = (2(n+1)+p, (n+1)+2p) \in M'. \end{aligned}$$
   Par induction, on en déduit que $M \subset M'$.

5. **(0,75 point)** Pour $n, p \in \mathbb{N}$, on a $(2n+p, n+2p) = \varphi_1^p \circ \varphi_2^n(0,0) \in M$. Donc $M' \subset M$

6. **(0,5 point)** Soient $n, p \in \mathbb{N}$ tels que $(2n+p, n+2p) \in M \cap \Delta$. On a donc $2n+p = n+2p$ autrement dit $n = p$. Ainsi
   $$M \cap \Delta = \{(3n, 3n) \text{ tel que } n \in \mathbb{N}\}.$$