Graphes — Support de cours L3

2018–2019

Table des matières

Chapitre 1

Introduction et definitions

1.1 Graphes orientés

Définition 1.1 (graphe orienté) *Un graphe orienté G est un couple (X, U) où*

- *X est un ensemble fini d'éléments appelés* sommets *$X = \{x_i, i = 1..n\}$, n fini (le nombre de sommets n est appelé l'*ordre *du graphe)*
- *$U \subset X \times X$ est un ensemble de couples de sommets de X appelés* arcs. *(U est donc le graphe d'une relation binaire sur X.)*

Étant donné un arc $u = (x, y) \in U$, x est appelée origine *de u (ou* extrémité initiale*) et y est l'*extremité terminale *de u.*

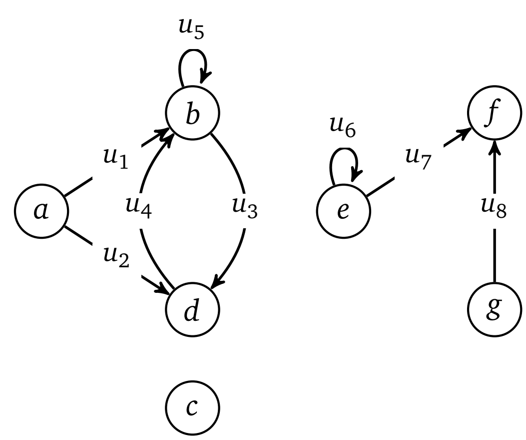
Si $x = y$ alors l'arc est une boucle.

Deux sommets reliés par un arc sont dits adjacents. *Deux arcs sont adjacents s'ils ont une extrémité commune.*

Abus : si $x \in X$ et $(x, y) \in U$ on dira aussi $x \in G$ et $(x, y) \in G$.

Exemple 1 $G = (X, U)$

$X = \{a, b, c, d, e, f, g\}$,
$U = \{(a, b), (a, d), (b, b), (b, d), (d, b), (e, e), (e, f), (g, f)\}$



Définition 1.2 (Multigraphe, hypergraphe, graphe simple)

— *Un* multigraphe *est un couple* (X,U) *avec* X *un ensemble fini de sommets et* U *une famille*[1] *d'arcs* $(u_i)_{i=1..m}$ *de* $X \times X$*. Un élément particulier* (x,y) *de* $X \times X$ *peut apparaître plusieurs fois dans la famille* U*.*

— *Un* hypergraphe *est un couple (sommets, arcs) dont les arcs peuvent relier plus de deux sommets.*

— *Un* graphe simple *est un multigraphe tel qu'il n'y a au plus qu'un seul arc d'un sommet vers un autre et ne contenant pas de boucles.*

Définition 1.3 (Graphe complet, graphe partiel, sous-graphe)

— *Un graphe orienté simple* $G=(X,U)$ *est dit* complet *si* $\forall x,y \in X$*, si* $x \neq y$ *et* $(x,y) \notin U$ *alors* $(y,x) \in U$*.*

— *Soit* $G=(X,U)$ *un graphe, le graphe* $G'=(X,U')$ *avec* $U' \subset U$ *est un graphe partiel de* G*.*

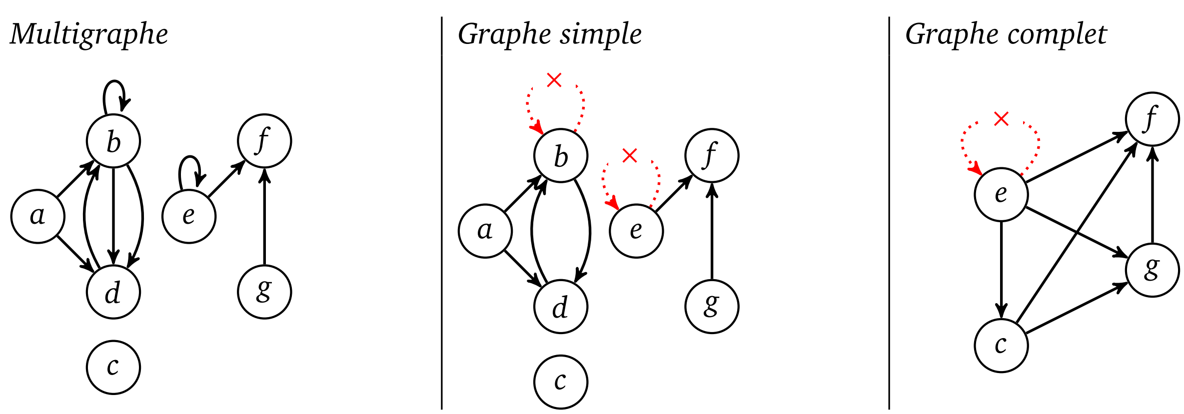
— *Soit* $G=(X,U)$ *un graphe, le graphe* $G_{X'}=(X',U_{X'})$ *avec* $X' \subset X$ *et*

$$U_{X'} = \{(x,y) \in U | x,y \in X'\} = U \cap (X' \times X')$$

est un sous-graphe de G *engendré par* X'*.*

On peut également définir un sous-graphe partiel (sous-graphe dans lequel on élimine des arcs).

Exemple 2 *Transformer le graphe de l'exemple 1 pour qu'il devienne un multigraphe, un graphe simple. Et construisez un graphe complet à partir du sous-graphe engendré par l'ensemble de sommet* $\{c,e,f,g\}$*.*



1. Une famille $(x_i)_{i \in I}$ indexée par un ensemble I d'éléments x_i d'un ensemble E est une application définie sur I à valeurs dans E ; l'image de i est notée x_i.

À partir de maintenant, sauf indication contraire, *les graphes considérés sont tous des graphes simples.*

Définition 1.4 (Chemin-Circuit) *S'il existe une suite d'au moins deux sommets* $(s_1, \ldots, s_p)$ *où* $\forall i \in [\![1, p-1]\!]$, (s_i, s_{i+1}) *est un arc de* U *alors la séquence de ces arcs est appelée* chemin. *Ses* extrémités *sont* s_1 *et* s_p.

La longueur *(ou cardinalité) d'un chemin est son nombre d'arcs. (Par définition, un chemin de longueur 0 n'existe pas.)*

L'ensemble des chemins de x *à* y *est noté* $\mathscr{C}_G(x, y)$.

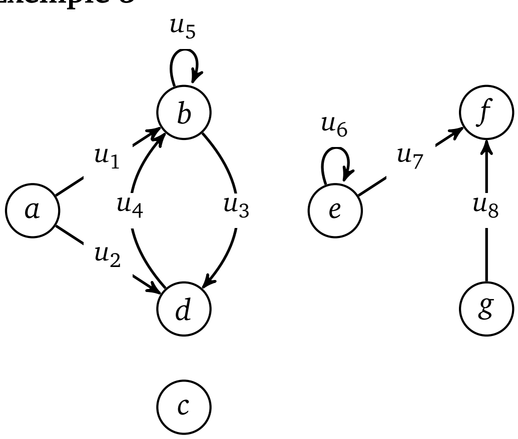
Un chemin est dit simple *si ses arcs sont tous différents.*

Un circuit *est un chemin simple dont les deux extrémités coïncident.*

Un chemin est élémentaire *si tous les sommets sont distincts (sauf eventuellement* $x = y$ *(circuit élémentaire)).*

N.B. si $(x, y) \in G$ alors $(x, y) \in \mathscr{C}_G(x, y)$.

Exemple 3



La séquence (u1,u3,u4,u3,u4) est un chemin non simple. (u1,u3,u4) est un chemin simple mais non élémentaire. $(u3, u4)$ *est un chemin élémentaire.* $\{u3, u4\}$ *est un circuit (il correspond à plusieurs chemins* $(u3, u4)$ *et* $(u4, u3)$*).*

Remarque 1 *Un chemin élémentaire est simple (mais pas l'inverse).*

Si on a n sommets et si $x \neq y$ alors un chemin élémentaire de x à y est de cardinalité $\leq n-1$. Si $x = y$ un chemin élémentaire de x à y est de cardinalité $\leq n$.

Propriété 1.1 *Il existe un chemin dans* G *de* x *vers* y $\Longleftrightarrow$ *il existe un chemin élémentaire de* x *vers* y *dans* G.

Avant d'énoncer la proposition suivante, un petit rappel sur les relations binaires et leur composition. Soient $U, V \subset X \times X$ des relations binaires sur l'ensemble X. Alors :

$$U \circ V = \{(x, z) \in X \times X / \exists y \in X\, t.q. (x, y) \in U, (y, z) \in V\}.$$

On définit ensuite $U^1 = U$, $U^2 = U \circ U$, puis, par récurrence, $U^{i+1} = U^i \circ U$. En fait, $U^{i+j} = U^i \circ U^j$ donc on aurait aussi bien pu définir $U^{i+1} = U \circ U^i$. Explication intuitive : si $(x, y) \in U$ signifie “x est un enfant de y”, alors $(x, y) \in U^2$ signifie “x est un petit-enfant de y”, $(x, y) \in U^3$ signifie “x est un arrière-petit-enfant de y”, etc. Si de plus $(y, z) \in V$ signifie “z est un frère de y”, alors $(x, z) \in U \circ V$ signifie “z est un oncle de x”.

Propriété 1.2 *Pour $i \in \mathbb{N}^\star$, on a $(x,y) \in U^i \Leftrightarrow \exists$ un chemin de x vers y de cardinalité i dans le graphe $G = (X,U)$.*

> **Démonstration :** Preuve par récurrence sur i :
> $i = 1$ $(x,y) \in U \Leftrightarrow \exists c \in \mathscr{C}_G(x,y)$ t.q. $|c| = 1$
> HR : la propriété (l'équivalence) est vraie pour $i \in \mathbb{N}^\star$ (i fixé). Montrons qu'elle est vraie pour $i+1$:
> $(x,y) \in U^{i+1} = U^i \circ U \Rightarrow \exists z \in X : (x,z) \in U^i$ et $(z,y) \in U$.
> $(x,z) \in U^i \Rightarrow \exists c \in \mathscr{C}_G(x,y)$ avec $|c| = i$ (HR)
> $(z,y) \in U \Rightarrow$ chemin de cardinalité 1 de z vers y dans G.
> $c.(z,y) =$ chemin de cardinalité $i+1$ de x vers y dans G.
> $(\Leftarrow)$ $c \in \mathscr{C}_G(x,y)$ t.q. $|c| = i+1$ nommons les sommets successifs de c de la façon suivante : $c = x_0 = x, x_1, \ldots x_i, x_{i+1} = y$, $x_0, \ldots x_i$ est un chemin de x vers x_i de cardinalité i, par HR, $(x,x_i) \in U^i$ de plus $(x_i,y) \in U$ donc $(x,y) \in U^i \circ U = U^{i+1}$.
> □

Suite des rappels sur les relations binaires : on définit la *fermeture transitive* de U :

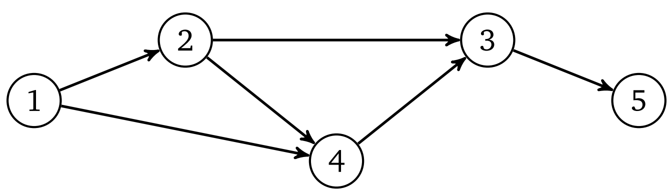
$$U^+ = \bigcup_{i \geq 1} U^i.$$

Dans l'exemple de la relation "enfant", $(x,y) \in U^+$ signifie "x est un descendant de y". La même notion s'applique bien entendu aux graphes.

Propriété 1.3 *Soit $G = (X,U)$ avec $|X| = n$ alors $U^+ = \cup_{i=1}^n U^i$.*

> **Démonstration :** $\cup_{i=1}^n U^i \subseteq \cup_{i \in \mathbb{N}^\star} U^i = R^+$. Montrons que $\cup_{i \in \mathbb{N}^\star} U^i \subseteq \cup_{i=1}^n U^i$.
> Soit $(x,y) \in \cup_{i \in \mathbb{N}^\star} U^i$ alors $\exists j \in \mathbb{N}^\star$ t.q. $(x,y) \in U^j$
> $\Rightarrow \exists$ un chemin de x vers y de cardinalité j
> $\Rightarrow$ (prop) il existe un chemin élémentaire de x à y (donc de cardinalité $\leq n$), donc $(x,y) \in U^k$ avec $k \leq n$ donc $(x,y) \in \cup_{i=1}^n U^i$. □

Exemple 4 *Donnez la fermeture transitive du graphe suivant :*



Définition 1.5 (Descendants et ascendants) *On dit que y est un descendant de x s'il existe un chemin de x à y. On dit que y est un ascendant de x s'il existe un chemin de y à x. On convient qu'un sommet x est son propre ascendant et son propre descendant (même s'il n'y a pas de chemin de x à x). On note $D(x)$ et $A(x)$ les ensembles respectifs de descendants et d'ascendants du sommet x.*

Remarque 2 *On note $\Gamma^+(x) = \{y \in X/(x,y) \in U\}$ et $\Gamma^-(x) = \{y \in X/(y,x) \in U\}$ (respectivement "successeurs" et "prédécesseurs" de x ; on retrouvera ces notions en 1.5). Alors :*

$$\Gamma^+(x) \subseteq D(x) \quad et \quad \Gamma^-(x) \subseteq A(x).$$

1.2 Graphes non orientés

Rappelons qu'une *paire* $\{x, y\}$ d'éléments de X est formée de deux éléments distincts et que l'ordre ne compte pas, ce qui la différencie du *couple* (x, y). par exemple $\{1, 2\} = \{2, 1\}$ alors que $(1, 2) \neq (2, 1)$. C'et pourquoi, si l'on veut modéliser des situations où l'orientation ne compte pas, les arcs (x, y) sont remplacés par des "arêtes" $\{x, y\}$.

Définition 1.6 (Graphe non orienté) *Un graphe non orienté G est un couple (X, U), où*
- *X est un ensemble fini de* sommets *$X = \{x_i, i = 1..n\}$,*
- *U est un ensemble de paires d'éléments de X appelées* arêtes *de G. Une arête $u = \{x, y\} \in U$ symbolise un lien non dirigé entre les sommets x et y qui en sont les* extrémités.

Lorsque l'on a un graphe orienté et que l'on oublie l'orientation, on obtient le *graphe non orienté sous-jacent*. Cela revient à remplacer chaque arc (x, y) par l'arête $\{x, y\}$ correspondante (donc à enlever les flèches sur le dessin).

Définition 1.7 (Chaîne et cycle) *S'il existe une suite d'au moins deux sommets $(s_1, \ldots s_p)$ telle que $\forall i \in [\![1, p-1]\!]$, $\{s_i, s_{i+1}\} \in U$) alors la séquence de ces arêtes est appelée* chaîne.

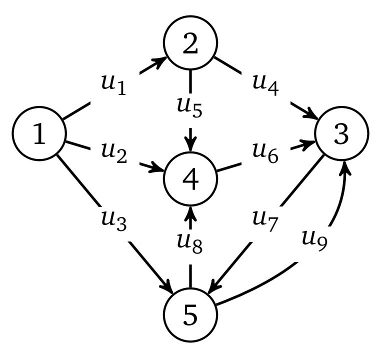
Une chaîne est simple *si elle ne contient pas deux fois la même arête.*

Un cycle *est défini par l'ensemble des arêtes d'une chaîne simple dont les extrémités coïncident.*

Une chaîne est élémentaire *si elle ne contient pas deux fois le même sommet (sauf eventuellement $x = y$ (cycle élémentaire)).*

Remarque 3 *Si l'on part d'un graphe orienté, on peut appliquer cette notion au graphe non orienté sous-jacent. Un chemin est une chaîne dont tous les arcs sont orientés dans le même sens.*

Exemple 5 *NB : graphe orienté.*



La séquence (u1,u4,u6,u5,u1) est une chaîne non simple, (u1,u4,u6,u5) est une chaîne simple mais pas élémentaire, (u1,u4,u6,u8) est une chaîne élémentaire. $\{u2, u3, u8\}$ est un cycle.

Définition 1.8 (Graphe non orienté complet, Clique et Stable) *Un graphe non orienté est* complet *s'il existe une arête entre deux sommets quelconques. Une* clique *est un sous-graphe complet. Un* stable *est un ensemble de sommets tel que deux sommets distincts ne sont pas adjacents.*

Exemple 6 *Dessinez un graphe complet à 4 sommets, 5 sommets. Sur le graphe non orienté associé à l'exemple précédent trouver le cardinal de la plus grande clique, celui du plus grand stable.*

1.3 Connexité, graphe réduit

Définition 1.9 (Composantes connexes ou s-connexes) *Soit $G = (X, U)$ un graphe orienté ou non. La relation binaire R sur X (dite relation de connexité) définie par*

$$(x, y) \in R \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \text{ ou} \\ \text{il existe une chaîne entre } x \text{ et } y \end{cases}$$

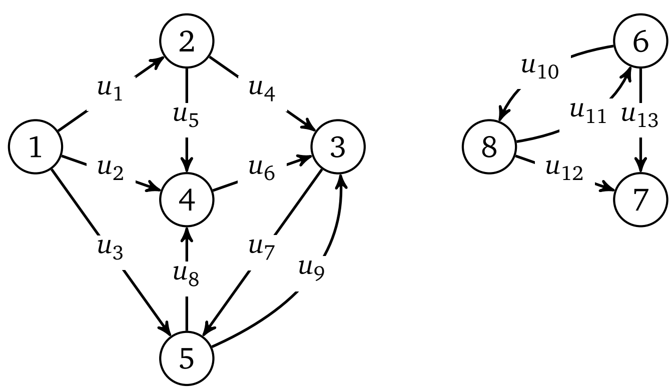
est une relation d'équivalence (réflexive, symétrique et transitive).

Les classes d'équivalence $X_1, \ldots X_p$ $(1 \leq p \leq |X|)$ de la relation de connexité sont les composantes connexes de G.

On appelle également composantes connexes de G les sous-graphes G_{X_i} engendrées par les ensembles de sommets X_i.

Un graphe est dit *connexe* s'il ne possède qu'une composante connexe, c'est-à-dire que deux sommets distincts quelconques sont reliés par une chaîne ; les sous-graphes G_{X_i} sont connexes.

Exemple 7 *Quelles sont les composantes connexes du graphe suivant ?*



Définition 1.10 (Composantes fortement connexes ou f-connexes) *Soit $G = (X, U)$ un graphe orienté. La relation binaire R_f sur X définie par :*

$(x, y) \in R_f \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \text{ ou} \\ \text{il existe une chemin de } x \text{ vers } y \text{ et un chemin de } y \text{ vers } x \end{cases}$ *est une relation d'équivalence (réflexive, symétrique et transitive).*

Les classes d'équivalence $X_1, \ldots X_p$ $(1 \leq p \leq |X|)$ de la relation de forte connexité sont les composantes fortement connexes de G.

Un graphe est fortement connexe s'il n'a qu'une seule composante fortement connexe, c'est-à-dire qu'il existe un chemin entre deux sommets distincts quelconques.

Exemple 8 *Donnez les composantes fortement connexes du graphe précédent.*
($\{1\}$; $\{2\}$; $\{3,4,5\}$; $\{6,8\}$; $\{7\}$)

Définition 1.11 (Graphe réduit) *Soit $G = (X,U)$ un graphe orienté, le graphe réduit $G_R = (X_R, U_R)$ est défini par*
— $X_R = \{X_i, i = 1...p | X_i$ *est une composante f-connexe de* $G\}$ *et*
— $U_R = \{(X_i, X_j) | X_i, X_j \in X_R,\ X_i \neq X_j$ *et* $\exists x \in X_i, \exists y \in X_j, (x,y) \in U\}$

Exemple 9 *Donnez les composantes f-connexes du graphe de l'exemple 7 et son graphe réduit.*

Propriété 1.4 *Un graphe réduit est sans-circuit.*

1.4 Mesures sur les graphes

À part le nombre d'arcs, le nombre de sommets, le nombre de composantes connexes, on peut définir plusieurs mesures caractérisant un graphe :

Définition 1.12 (Densité) *La* densité *d'un graphe est le nombre d'arcs du graphe divisé par le nombre d'arcs possibles : si le graphe est simple et orienté c'est $\frac{m}{n*(n-1)}$. Pour un graphe non nécessairement simple ce nombre est $\frac{m}{n^2}$ souvent exprimé en pourcentage. (Pour un graphe simple non orienté, la densité devient égale à $\frac{2m}{n*(n-1)}$)*

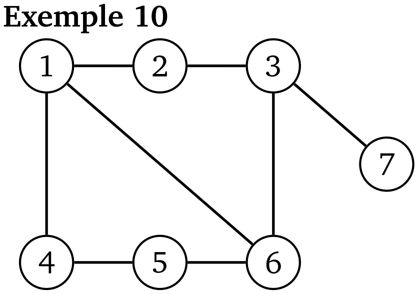
La plupart des graphes rencontrés dans les applications pratiques sont peu denses. Les cartes routières ont des sommets de degré 3 en moyenne cela donne donc une densité de $\frac{3}{n-1}$.

Définition 1.13 (Distance) *Dans un graphe* connexe *on appelle* distance *entre deux sommets du graphe la cardinalité de la plus courte chaîne qui relie ces deux sommets. On appelle* diamètre *du graphe la plus grande distance entre deux sommets quelconques du graphe.*

Définition 1.14 (Degré de Connexité) *Si G est un graphe simple connexe, la connectivité ou le* degré de connexité *d'un graphe est le nombre minimum de sommets dont l'élimination déconnecte G.*

Cela permet, par exemple, de mesurer la résistance aux pannes d'un réseau informatique.

Exemple 10



Ce graphe a pour diamètre 4 : (distance de 4 à 7) et pour degré de connexité 1. Si on ajoute l'arête (6,7), il a pour diamètre 3 et son degré de connexité passe à 2.

Définition 1.15 (Coloration et Nombre chromatique) *Une coloration de G est une fonction associant à tout sommet de G une couleur, généralement un élément de l'ensemble d'indices des couleurs* $\{1,2,...,n\}$*, telle que deux sommets adjacents n'ont pas la même couleur (où n est le nombre de sommets du graphe). Le nombre minimum de couleurs nécessaire pour obtenir une coloration de G est appelé le* nombre chromatique *de G.*

Remarque 4 *Une coloration de G correspond à une partition de son ensemble de sommets en stables.*

Il y a aussi une mesure intéressante qui permet de connaître le nombre de chemins différents (plus exactement linéairement indépendants) que le graphe possède, c'est le *nombre cyclomatique* que nous étudierons dans le chapitre suivant.

1.5 Representation des graphes

Soit $G = (X, U)$ un graphe orienté.

Définition 1.16 (Dictionnaire d'un graphe) *On appelle* successeur *d'un sommet* x*, tout sommet* y *tel que* $(x, y) \in U$*. Un* prédecesseur *d'un sommet* x *est un sommet* y *tel que* $(y, x) \in U$*. L'ensemble des successeurs d'un sommet* x *est noté* $\Gamma^+(x)$*, l'ensemble de ses prédecesseurs* $\Gamma^-(x)$*.* $\Gamma(x) = \Gamma^+(x) \cup \Gamma^-(x)$ *est l'ensemble des* voisins *de* x*. Un sommet qui n'a pas de voisin est un sommet* isolé.

Le degré sortant $d^+(x)$ *(resp. entrant* $d^-(x)$*) de* x *est le nombre d'arcs d'origine* x *(resp. d'extrémité). Le degré de* x *est* $d(x) = d^+(x) + d^-(x)$*.*

Les sources *d'un graphe sont les sommets de degré entrant nul (*$d^-(x) = 0$*), les* puits *sont ceux de degré sortant nul (*$d^+(x) = 0$*).*

Le dictionnaire d'un graphe (orienté) *est soit un tableau qui à chaque sommet fait correspondre l'ensemble de ses successeurs :* $\begin{array}{c|c} x_i & \Gamma^+(x_i) \\ \hline & \end{array}$ *soit un tableau qui à chaque sommet fait correspondre l'ensemble de ses prédecesseurs :* $\begin{array}{c|c} x_i & \Gamma^-(x_i) \\ \hline & \end{array}$.

Remarque 5 *Attention* $d(x)$ *peut être différent de* $|\Gamma(x)|$ *puisque un successeur peut être à la fois un prédecesseur. D'autre part, dans le cas d'un multi-graphe* $d^+(x)$ *peut différer de* $\Gamma^+(x)$*.*

Exemple 11 *Dictionnaire du graphe de l'exemple 1, sources, puits, degré de b ?*

Pour les notions suivantes, on suppose que l'on a indexé (c'est-à-dire numéroté) les sommets : $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ et les arcs : $U = \{u_1, \ldots, u_m\}$.

Définition 1.17 (Matrice d'adjacences (sommet-sommet) et matrice d'incidence (sommet-arcs)) *La* matrice d'adjacences sommet-sommet *associée à un graphe ou* matrice booléenne *est une matrice* $n \times n$ *(n étant le nombre de sommets) dont les termes sont* $a_{ij} = \begin{cases} 1 & si\ (x_i, x_j) \in U \\ 0 & sinon \end{cases}$

La matrice d'incidence sommet-arcs *associée à un graphe* simple *est une matrice $n \times m$ (n étant le nombre de sommets, m le nombre d'arcs) dont les termes sont*

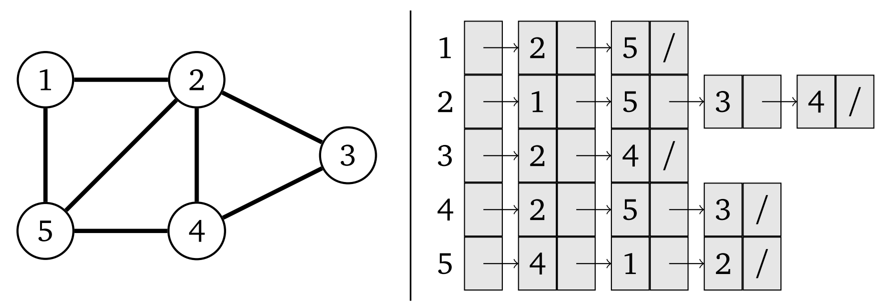
$$b_{ij} = \begin{cases} 1 & \textit{si } x_i \textit{ est l'origine de l'arc } u_j \\ -1 & \textit{si } x_i \textit{ est l'extremité terminale de } u_j \\ 0 & \textit{sinon} \end{cases}$$

Remarque 6 *La matrice d'incidence sommet-arcs est inintéressante pour l'algorithmique car elle est lourde, mais sur le plan théorique elle permet de faire le lien entre les flots et la programmation linéaire.*

Exemple 12 *Matrices d'incidences de l'exemple 1.*

Representation des graphes dans la memoire d'un ordinateur

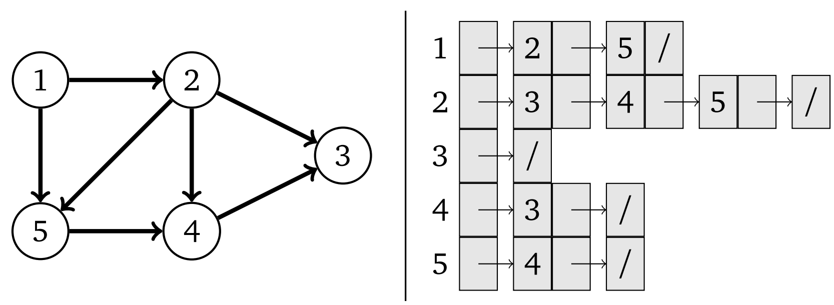
Selon la tâche et la densité d'un graphe nous pouvons utiliser soit une liste d'adjacences soit une matrice d'adjacences. Pour un graphe $G = (X, U)$ *peu dense* ($|U|$ très inférieur à $|X|^2$) la représentation par une liste d'adjacences est souvent préférée car elle fournit un moyen peu encombrant de representer les graphes. La representation apr matrice d'adjacences sera preferable si le graphe est *dense* ($|U|$ proche de $|X|^2$). La representation par liste d'adjacences consiste en un tableau `Adj[`u`]` de X listes, une pour chaque sommet. Pour chaque $u \in S$ la liste d'adjacences `Adj[`u`]` est une liste des sommets v tel qu'il existe un arc $(u, v) \in A$. Dans les figures 1.1 et 1.2 nous donnons les representations pour un graphe non-orienté et orienté respectivement.



	1	2	3	4	5
1	0	1	0	0	1
2	1	0	1	1	1
3	0	1	0	1	0
4	0	1	1	0	1
5	1	1	0	1	0

FIGURE 1.1 – Deux representation d'un graphe non-orienté, par liste d'adjacences et matrice d'adjacences

Si G est un graphe orienté, la somme des longueurs de toutes les listes d'adjacences vaut U, puisque l'existence d'un arc de la forme (u, v) se traduit par la présence de v dans `Adj[`u`]`. Si G est un graphe non orienté, la somme des longueurs de toutes les listes d'adjacences vaut $2|U|$, puisque si (u, v) est une arête, u apparaît dans la liste d'adjacences de v, et vice versa. Qu'un graphe soit orienté ou non, la représentation par listes d'adjacences possède la propriété avantageuse de ne demander qu'une quantité de mémoire en $O(max(X, U)) = O(X + U)$.



	1	2	3	4	5
1	0	1	0	0	1
2	0	0	1	1	1
3	0	0	0	0	0
4	0	0	1	0	0
5	0	0	0	1	0

FIGURE 1.2 – Deux representation d'un graphe orienté, par liste d'adjacences et matrice d'adjacences