Exercices de méthodes numériques[1]
L1 Informatique

Jérôme MENGIN[2] Sophie JAN[3] Youchun QIU[4]

Janvier 2019

[1]La plupart des exercices qui suivent sont tirés des dossiers d'exercices réalisés par Jean-Paul Calvi les années passées

[2]mengin@irit.fr
[3]sophie.jan@math.univ-toulouse.fr
[4]youchun.qiu@math.univ-toulouse.fr

Chapter 1

Recherche de zéros

1.1 Exercices à traiter impérativement en TD

1. (a) Montrer que l'équation $x^4 + x^3 - 1 = 0$ admet une et une seule solution dans $[0, 1]$.

   (b) Trouver une valeur approchée avec une décimale exacte en utilisant l'algorithme de dichotomie.

2. (a) Montrer que l'équation $\cos(x) + \dfrac{1}{10} = x$ admet une unique solution r dans $\left[0, \dfrac{3\pi}{8}\right]$.

   (b) Déterminer les 3 premières décimales exactes de r en utilisant la méthode de Newton.

3. On considère l'équation
$$x^4 + 2x^2 - 1 = 0. \tag{1.1}$$

   (a) Montrer que l'équation (1.1) admet une unique solution r dans $[0, 1]$.

   (b) Montrer en utilisant la méthode de dichotomie que $r \in]0.5, 0.75[$.

   (c) On cherche maintenant à affiner l'approximation de r en utilisant la méthode de Newton. On note (x_n) la suite de Newton. Calculer x_1 et x_2.

4. Dans cet exercice, on étudie une modification de la méthode de Newton : ayant obtenu x_0, x_1, ..., x_n, on construit x_{n+1} en prenant l'intersection avec l'axe des abscisses de la droite passant par le point de coordonnées $(x_n, f(x_n))$ et parallèle à la tangente au graphe de f en x_0.

   (a) On suppose que la fonction f est strictement croissante et strictement convexe sur $[a, b]$ et qu'elle admet une racine dans $]a, b[$. On prend $x_0 = b$. Faire un dessin qui permet de comparer la méthode de Newton et la méthode de Newton modifiée décrite ci-dessus.

   (b) Donner l'expression de x_{n+1} en fonction de x_n.

   (c) Quels sont les avantages pratiques de cette modification ? et ses inconvénients ?

1.2 Exercices pour s'entrainer

1. **Exercice tiré de l'examen de 2017-2018**

   On considère la fonction f_1 définie sur $\mathbb{R}$ par $f_1(x) = x^3 - 3x^2 + 12x - 12$.

   (a) Montrer que l'équation $f_1(x) = 0$ admet au moins une solution r dans l'intervalle $[-1, 3]$.

   (b) Montrer que r est l'unique solution de $f_1(x) = 0$ dans l'intervalle $[-1, 3]$.

   (c) Déterminer, en justifiant soigneusement, un intervalle de longueur exactement 1 contenant r.

   (d) En partant de $x_0 = 2$, calculer le premier itéré x_1 de la méthode de Newton, en prenant soin de préciser la formule utilisée.

2. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 4x + 1$.

   (a) Calculer f' et f''.

   (b) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution r dans $]0, 1[$.

   (c) Utiliser la dichotomie pour localiser r dans un intervalle I de longueur $\leq \frac{1}{4}$.

   (d) Tracer l'allure du graphe de f sur I et donner la formule de récurrence pour la méthode de Newton appliquée dans l'intervalle I. Proposer un point de départ qui vous semble adapté.

   (e) En déduire les 3 premières décimales de r.

3. On considère l'intervalle $I = [0, 1]$ et les fonctions f et g définies par

$$f(x) = -2x^3 + 3x^2 + 12x - 7$$

   (a) Déterminer $f'(x)$ et $f"(x)$.

   (b) Montrer que f admet exactement une racine r dans I.

   (c) Montrer très soigneusement que dans l'intervalle $J = [\frac{1}{2}, 1] \subset I$

   - f s'annule exactement une fois,
   - f' ne change pas de signe et f'' non plus.

   (d) Quel point de départ de la méthode de Newton choisiriez-vous dans J et pourquoi ?

   (e) Calculer les premiers itérés nécessaires à l'obtention de 4 décimales exactes de r.

4. On souhaite trouver une valeur approchée de la solution de l'équation

$$\frac{e^{-x}}{x} = 1. \tag{1.2}$$

   On définit la fonction f sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x - e^{-x}$.

(a) Montrer que x est solution de (1.2) si et seulement si $f(x) = 0$.

(b) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution r dans $\mathbb{R}$ et qu'elle se trouve dans l'intervalle $]0, 1[$.

(c) En étudiant les propriétés de croissance et de convexité de f, déduire le schéma adéquat pour appliquer la méthode de Newton à l'approximation de r.

(d) Calculer les 4 premiers itérés de la suite de Newton notée (x_n).

(e) Montrer que les 4 premières décimales de x_3 sont aussi celles de r.

1.3 Pour aller plus loin

1. Soit f une fonction continue de $[a, b]$ dans $[a, b]$. Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une solution dans $[a, b]$.

Chapter 2

Interpolation polynomiale

2.1 Exercices à traiter impérativement en TD

1. (Séance 3) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$.

   (a) Calculer le polynôme p d'interpolation de f aux points 1 et 2.

   (b) Calculer le polynôme q d'interpolation de f aux points 0, 1 et 2.

   (c) Calculer le polynôme r d'interpolation de f aux points -1, 0 et 1.

   (d) Calculer le polynôme s d'interpolation de f aux points -1, 0, 1 et 2.

2. (Séance 3) **Algorithme de Hörner**

   Soit $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_{n-1}x^{n-1} + a_n x^n$ et $c \in \mathbb{R}$. On définit la suite $(b_k)_{k=0,...,n}$ par

   $$\left\{ \begin{array}{lcl} b_n & = & a_n \\ b_k & = & b_{k+1}c + a_k \quad \forall k = 0, 1, ..., n-1. \end{array} \right.$$

   (a) Montrer que $p(x) = (x - c)(b_n x^{n-1} + b_{n-1}x^{n-2} + ... + b_2 x + b_1) + b_0$.

   (b) Décompter le nombre d'opérations nécessaires pour calculer $p(c)$.

3. (Séance 3, si possible)

   (a) Montrer qu'il existe une infinité de polynômes passant par les points $M_0 = (0, 0)$ et $M_1 = (1, 1)$.

   (b) Trouver 4 réels f_0, f_1, f_2, f_3 tels qu'aucun graphe de polynôme de $\mathcal{P}_2$ ne passe par les 4 points $M_0 = (-1, f_0)$, $M_1 = (0, f_1)$, $M_2 = (1, f_2)$ et $M_3 = (2, f_3)$.

4. (Séance 4) Reprendre l'exercice 1 en utilisant la formule donnée en cours, basée sur les polynômes fondamentaux de Lagrange.

5. (Séance 4) On considère trois réels deux à deux distincts a_0, a_1 et a_2.

   (a) On note $A = \{a_0, a_1\}$. Montrer que pour tout réel x, $l_{0,1}(x) + l_{1,1}(x) = 1$

   (b) Si $A = \{a_0, a_1, a_2\}$, montrer que pour tout réel x, $l_{0,2}(x) + l_{1,2}(x) + l_{2,2}(x) = 1$.

6. (Séance 4, si possible)

   Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, on définit $f_n(x) = x^n$ et p_n le polynôme d'interpolation de f_n aux points $\{-1, 0, 1\}$.

   (a) Déterminer p_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   Indication : on pourra traiter à part le cas $n = 0$, puis distinguer les cas n pair et n impair.

   (b) On considère la fonction polynomiale f définie par $f(x) = a_{2K}x^{2K} + a_{2K-1}x^{2K-1} + ... + a_1x + a_0$ avec K entier, $K \geq 1$. **Déduire de la question précédente** une formule pour le polynôme d'interpolation p de f aux points $\{-1, 0, 1\}$, en fonction des coefficients a_i, $i = 0, 1, ..., n$.

7. (Séance 5)

   On note $a_0 = -1$, $a_1 = 2$, et $a_2 = 3$. Soient p, q et r les 3 polynômes définis par

   $$p(x) = x^2 + 3, \quad q(x) = x^4, \quad r(x) = 3x^4 + 7x^2 + 21.$$

   (a) Quel est le polynôme d'interpolation de Lagrange m_p de p relativement aux 3 points a_0, a_1 et a_2 ?

   (b) Quel est le polynôme d'interpolation de Lagrange m_q de q relativement aux 3 points a_0, a_1 et a_2 ?

   (c) Quel est le polynôme d'interpolation de Lagrange m_r de r relativement aux 3 points a_0, a_1 et a_2 ?

   (d) Calculer $\|r'''\|_{\infty,[-1,3]}$.

   (e) En déduire une majoration de $|r(0) - m_r(0)|$, **sans calculer ni** $r(0)$**, ni** $m_r(0)$.

8. (Séance 5) On considère la fonction $f = \ln$. On note p_f le polynôme d'interpolation de Lagrange de f aux points de $A := \{1, 2, 3\}$.

   (a) Déterminer p_f.

   (b) Calculer la dérivée troisième de f et sa norme infinie sur $[1, 3]$.

   (c) En déduire une majoration de $|f(5/2) - p_f(5/2)|$, sans calculer ni $f(5/2)$, ni $p_f(5/2)$.

   (d) A l'aide de la calculatrice, contrôler la précision de la majoration obtenue ci-dessus.

9. (Séance 6)

   On considère la fonction définie par $f(x) = \sqrt{x}$. Calculer la forme de Newton du polynôme d'interpolation p_f de Lagrange de f aux points $\{100, 121, 144\}$.

10. (séance 6) **Exercice tiré de l'examen de 2017-2018**

    Important : avant de vous lancer dans les calculs, prenez le temps de lire l'intégralité de l'énoncé de cet exercice afin de choisir la méthode la plus adaptée pour le calcul du polynôme d'interpolation de Lagrange.

    Sophie fait des relevés quotidiens de température dans son jardin. Hier, elle a noté :

Heure du relevé	8h	12h	20h
Température relevée (en degrés Celsius)	13	15	11

(a) En justifiant votre démarche, donner l'expression du polynôme p interpolant les trois données contenues dans le tableau ci-dessus. Plus précisément, $p(x)$ donnera une estimation de la température à l'heure x.

(b) Quelle est la température prévue à 16h par ce polynôme p ?

Youchun, le voisin de Sophie, l'informe que la température à minuit (24h) était de 11 degrés Celsius. On dispose donc maintenant des données suivantes.

Heure du relevé	8h	12h	20h	24h
Température relevée (en degrés Celsius)	13	15	11	11

(a) Donner l'expression du polynôme q interpolant les quatre données contenues dans le tableau ci-dessus.

(b) Quelle est la température prévue à 16h par ce polynôme q ?

11. (séance 6) **Exercice tiré de l'examen de 2016-2017**

Considérons les abscisses $a_0 = -1, a_1 = 0, a_2 = 2$, et les réels f_0, f_1 et f_2. Notons $A = \{a_0, a_1, a_2\}$.

(a) i. Écrire tous les polynômes fondamentaux de Lagrange associés à l'ensemble A.

ii. Donner l'expression du polynôme p qui interpole les points M_0, M_1, M_2 de coordonnées respectives (a_0, f_0), (a_1, f_1) et (a_2, f_2).

iii. Donner $p(2)$, **en justifiant précisément**.

(b) Cette question est indépendante de la précédente.
Désormais, on considère que $f_i = f(a_i)$ avec $f(x) = x^4 - x^3$.

i. Donner l'expression du polynôme p sous sa forme de Newton.

ii. On ajoute maintenant le point M_3 de coordonnées $(a_3, f(a_3))$ avec $a_3 = 1$. Donner l'expression du polynôme q qui interpole les points M_0, M_1, M_2 et M_3.

iii. On ajoute maintenant le point M_4 de coordonnées $(a_4, f(a_4))$ avec $a_4 = 978$. Donner l'expression du polynôme r qui interpole les 5 points M_0, M_1, M_2, M_3 et M_4.

2.2 Exercices pour s'entrainer

1. **Exercice tiré de l'examen de 2017-2018**

Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ et les abscisses $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ et $a_2 = 2$.

(a) En évitant les calculs inutiles, calculer le polynôme d'interpolation de Lagrange p_g de g relativement à a_0, a_1 et a_2.

(b) On rappelle que pour tout $x \in [0, 2]$, on a $|g(x) - p_g(x)| \leq \frac{\|g'''\|_{\infty,[0,2]}}{3!}|(x - a_0)(x - a_1)(x - a_2)|$. En déduire un réel qui majore l'erreur d'interpolation $|g(1/5) - p_g(1/5)|$, **sans calculer ni** $g(1/5)$**, ni** $p_g(1/5)$.

2. On considère le polynôme p défini par $p(x) = x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 2x$.

   (a) Calculer $p(1)$, $p'(1)$ et $p''(1)$.

   (b) Trouver toutes les racines de p.

   (c) Factoriser p.

3. Soient a et b 2 réels. On considère le polynôme p défini par $p(x) = x^4 + ax^3 - 2x^2 + bx - 3$.

   (a) Quel est le nombre maximum de racines de p ?

   (b) On suppose que -1 et 3 sont racines de p. Quelles sont les valeurs de a et b ?

   (c) Trouver toutes les racines de p. (Indication : on pourra effectuer une division euclidienne de polynômes)

4. Déterminer le polynôme d'interpolation de Lagrange de la fonction définie par $f(x) = (x+1)^4$ relativement aux points $A = \{-3, -1, 0\}$.

5. Déterminer le polynôme d'interpolation de Lagrange de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$ relativement aux points 0, 3/4, 1.

6. Déterminer le polynôme d'interpolation de Lagrange de la fonction définie par $f(x) = \sqrt{x-2}$ relativement aux points $A = \{2, 6, 11\}$.

7. Trouver une condition sur le couple $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ pour que la proposition suivante soit vraie : quel que soit le triplet $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ il existe un unique $p \in \mathcal{P}_2$ tel que

$$p(a) = \alpha, \quad p(b) = \beta, \quad p(a) + p'(b) = \gamma. \tag{2.1}$$

   Indication : on pourra considérer que p s'écrit $p(x) = A + Bx + Cx^2$ et résoudre le système linéaire correspondant aux équations (2.1). Au cours de la résolution apparaîtra la condition à imposer sur (a, b) pour que le système linéaire ait une solution unique.

Chapter 3

Intégration numérique

3.1 Exercices à traiter impérativement en TD

1. Supposons que l'on dispose des valeurs suivantes d'une fonction f indéfiniment dérivable sur $I = [0,1]$:
$$f(0) = 1, \quad f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{4}{5}, \quad f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{3}, \quad f(1) = \frac{1}{2}.$$
Donner une approximation J de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx$ en utilisant les 4 valeurs connues de f.

2. On considère f une fonction continue sur $[-1,2]$. Notons p_f le polynôme d'interpolation de f relativement aux 2 abscisses $a_1 = 0$ et $a_2 = 1$ et $I(f) = \displaystyle\int_{-1}^2 f(x)dx$.

   (a) Calculer $J(f) = \displaystyle\int_{-1}^2 p_f(x)dx$.

   (b) Illustrer graphiquement l'approximation de $I(f)$ par $J(f)$.

   (c) On note $Q(f) = \dfrac{3}{2}\left(f(0) + f(1)\right)$. Trouver le plus grand entier d pour lequel
$$Q(p) = I(p) \text{ pour tout } p \in \mathcal{P}_d.$$

3. On considère l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^3 f(x)dx$ avec $f(x) = (x-2)^3$.

   (a) Calculer I.

   (b) Quelle est la valeur de l'approximation J de I par la méthode élémentaire du trapèze.

   (c) Représenter graphiquement le graphe de f et le trapèze qui intervient dans l'approximation J de I. Hachurer ce dernier.

   (d) Que prévoyait la théorie comme majorant de $|I - J|$?

4. Soit $I = \int_0^1 \sqrt{x}dx$.
   (a) Donner la valeur exacte de I.
   (b) Donner une approximation de I en utilisant la méthode de Simpson avec $n = 2$ sous-intervalles.
   (c) La théorie permettait-elle de prédire l'erreur commise ?
5. On considère la fonction f définie sur $[-1, +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{1+x}$. On souhaite calculer une valeur approchée de
$$I = \int_0^1 f(x)dx,$$
avec une erreur inférieure ou égale à $\varepsilon = 10^{-6}$.
   (a) Pour la méthode du point milieu composite, estimer le nombre de sous-intervalles n_m nécessaire pour obtenir une approximation de I à ε près.
   (b) Même question avec la méthode des trapèzes. On note n_t le nombre d'intervalles.
   (c) Même question avec la méthode de Simpson. On note n_s le nombre d'intervalles.

3.2 Exercices pour s'entrainer

1. **Exercice tiré de l'examen de 2017-2018**

   On se donne 2 réels $a < b$, une fonction f définie, continue et indéfiniment dérivable sur $[a, b]$ et on note
$$t_1 = a + \frac{b-a}{3}, \quad t_2 = a + 2\frac{b-a}{3}, \quad I(f, a, b) = \int_a^b f(x)dx.$$
   On définit aussi
$$p_f(x) = \frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1}(x - t_1) + f(t_1)$$
   et
$$J(f, a, b) = \frac{b-a}{2}\left(f\left(a + \frac{b-a}{3}\right) + f\left(a + 2\frac{b-a}{3}\right)\right).$$
   (a) Montrer que p_f est le polynôme d'interpolation de Lagrange de f relativement aux abscisses t_1 et t_2.
   (b) Calculer $\int_a^b p_f(x)dx$ et montrer que cette intégrale est égale à $J(f, a, b)$.

   On peut donc considérer maintenant que $J(f, a, b)$ est une nouvelle formule élémentaire d'intégration numérique de f sur $[a, b]$.
   Notons $J^C(f, a, b, n)$ la formule composite associée lorsqu'on découpe l'intervalle $[a, b]$ en n sous-intervalles de même longueur.

(c) (bonus) On admet que $|I(f,a,b) - J(f,a,b)| \leq \dfrac{(b-a)^3}{3^3}\|f''\|_{\infty,[a,b]}$. Montrer que

$$|I(f,a,b) - J^C(f,a,b,n)| \leq \frac{1}{n^2}\frac{(b-a)^3}{3^3}\|f''\|_{\infty,[a,b]}.$$

(d) Dans cette question, on fixe $f(x) = \cos(3x)$, $a = 0$ et $b = \pi$.

i. Calculer $I(f,a,b)$.

ii. Quelle est la valeur de $J^C(f,a,b,2)$?

iii. Calculer le plus petit entier n qui permet de garantir une erreur d'intégration numérique inférieure ou égale à $\varepsilon = \dfrac{\pi^3}{3}10^{-4}$ pour approcher $I(f,a,b)$ par $J^C(f,a,b,n)$.

2. Soit $a < b$. Déterminer tous les points $\omega \in [a,b]$ tels que l'approximation

$$\int_a^b p(x)dx \approx (b-a)p(\omega)$$

soit exacte pour tout $p \in \mathcal{P}_1$.

3. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et p_f son polynôme d'interpolation relativement aux abscisses $a_0 = -1$ et $a_1 = 1$.

(a) Calculer $\displaystyle\int_{-2}^{2} p_f(x)dx$.

(b) Illustrer graphiquement l'approximation $\displaystyle\int_{-2}^{2} f(x)dx \approx 2\Big(f(-1) + f(1)\Big)$.

4. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{4}{1+x^2}$.

Estimer le nombre de sous-intervalles n nécessaire pour obtenir une approximation de

$$I = \int_0^1 f(x)dx$$

avec une erreur moindre que $\varepsilon = 10^{-6}$, en utilisant

(a) la méthode du point milieu composite,

(b) la méthode des trapèzes composite,

5. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$. On note

$$I(f) = \int_{-2}^{2} f(x)dx \quad \text{et} \quad J(f) = f(r_1) + wf(0) + f(r_2).$$

(a) Trouver un triplet (r_1, r_2, w) de réels tel que J soit exacte sur $\mathcal{P}_2$.
(*Rappel : J est dite exacte sur l'ensemble $\mathcal{P}_k$ des polynômes de degré inférieur ou égal à k si pour tout $p \in \mathcal{P}_k$, $I(p) = J(p)$.*)

(b) Montrer qu'avec ce choix J est en fait exacte sur $\mathcal{P}_3$, mais pas sur $\mathcal{P}_4$.