Reponses exam (a verifier et completer). Il est tres utile de faire un dessin pour avoir une representation visuelle de ce dont on cause !

1 Part I

Q1 L'ensemble $\{a, b, c\}$, qui possede 3 elements, a donc $2^3 = 8$ sous ensembles. Le graphe que l'on considere a donc exactement 8 sommets:

$$\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$$

Q2 La relation U que l'on considere est l'**inclusion stricte**. Donc le graphe est oriente car si $A \subset B$, on n'a pas $B \subset A$.

- L'ensemble vide $\emptyset$ est inclu strictement dans tous les autres mais pas dans lui meme donc 7 arcs partent de l'ensemble vide.
- De l'ensemble $\{a\}$ partent 3 arcs: $\{a, b\}$, $\{a, c\}$ et $\{a, b, c\}$. Idem avec $\{b\}$ et $\{c\}$ soit un total de $3 \times 3 = 9$ arcs
- De l'ensemble $\{a, b\}$ part un seul arc vers $\{a, b, c\}$. Idem avec $\{a, c\}$ et $\{b, c\}$ soit un total de 3 arcs.
- Enfin aucun arc ne part de $\{a, b, c\}$.

Au total $7 + 9 + 3 = 19$ arcs.

Q3 Evidemment $\{a, b, c\}$ a le plus fort degre entrant car il contient strictement les 7 autres elements. Son degre entrant est exactement 7. Degre sortant: 0.

2 Part II

D'apres les listes d'adjacence, on voit que G est oriente car, par exemple, le degre sortant de 7 est 0 mais 7 est dans la liste d'adjacence de 4 par exemple. Il y a donc un arc de 4 vers 7 mais pas de 7 vers 4.

Q1 On a $(x, y) \in U^2$ si et seulement si $\exists z$ tel que $(x, z) \in U$ et $(z, y) \in U$. La relation U^2 indique simplement pour chaque paire (x,y) s'il existe au moins un chemin au sens de U de longueur exactement 2 allant de x a y. Etre adjacent au sens de U^2 signifie avoir un chemin de longueur 2 au sens de U. Il suffit donc maintenant de regarder les listes d'adjacence de U, de faire le parcours et d'en deduire les listes d'adjacence de U^2. Par exemple, en partant de 1 on peut faire:

$1 \to 3 \to 1 - 1 \to 3 \to 8$

$2 \to 8 \to 1 - 2 \to 8 \to 2$ $2 \to 8 \to 7$

$3 \to 1 \to 3 - 3 \to 8 \to 1 - 3 \to 8 \to 2 - 3 \to 8$ -$\to 7$

$4 \to 6 \to 4$

$5 \to 1 \to 3 - 5 \to 3 \to 1 - 5 \to 3 \to 8 - 5 \to 8 \to 1$

$5 \to 8 \to 2 - 5 \to 8 \to 7$

$6 \to 4 \to 6 - 6 \to 4 \to 7$

$8 \to 1 \to 3 - 8 \to 2 \to 8$

$9 \to 2 \to 8 - 9 \to 4 \to 6 - 9 \to 4 \to 7$

$9 \to 5 \to 1 - 9 \to 5 \to 3 - 9 \to 5 \to 7 - 9 \to 5 \to 8$

$10 \to 4 \to 6 - 10 \to 4 \to 7 - 10 \to 6 \to 4$

$10 \to 9 \to 2 - 10 \to 9 \to 4 - 10 \to 9 \to 5$

D'ou la table demandee.

Par exemple, $\Gamma^+(1) = adj(1) = \{1, 8\}$ et $\Gamma^+(10) = adj(10) = \{6, 7, 4, 2, 5\}$ pour la relation U^2.

Q2 Parcours profondeur en partant du sommet 9 en respectant l'ordre des sommets indiques par la table. En effet, puisque 9 a 3 fils, on peut choisir n'importe lequel pour demarrer MAIS on nous impose de choisir 2.
Premiere descente: $9 \to 2 \to 8 \to 1 \to 3$ (2= premier fils de 9 en profondeur):
On remonte et il nous reste les fils de 8 non deja explores: il n' y a que 7 (qui n'a pas de fils):
7
On remonte jusqu'au noeud 9 et il nous reste son fils 4 a explorer en profondeur:
$4 \to 6$ (4= second fils de 9 en profondeur)
On remonte jusqu'au noeud 9 et il nous reste son fils 5 a explorer en profondeur (qui n'a pas de fils):
5 (5=troisieme fils de 9 en profondeur) - on a fini l'exploration en profondeur de 9. On saute a 10 qui n'est pas un descendant de 9.
10
L'ordre est donc:

$$9 \to 2 \to 8 \to 1 \to 3 \to 7 \to 4 \to 6 \to 5 \to 10$$

Q3 Comme le graphe est oriente, on oublie le sens des fleches et on considere le graphe non oriente pour parler de connexite. On voit que le graphe est connexe puisque l'on va de 9 a tous les autres sommets sauf 10 par un chemin. Mais comme il y a un arc de 10 vers 9, le graphe est **connexe**. Il n'y a donc en ce sens qu'une seule composante connexe (le graphe G lui meme). Quand on le considere a nouveau comme graphe oriente, il n'est **pas fortement connexe** puisqu'il y a un chemin de 4 a 7 mais pas de 7 a 4 par exemple. Donc ca vaut le coup de s'interesser aux composantes fortement connexes et de tenir compte de l'orientation.

Q4 Composantes fortement connexes CC (On devrait noter CFC mais on va suivre notation du cours).

Parcourons les sommets de 1 a 10. Chacun se trouve necessairement dans une composante fortement connexe. Commencons par 1 et ensuite parcourons les sommets a partir de 2 pour savoir s'ils sont dans la CC de 1. Pour cela, on regarde si on peut aller de 1 a ce sommet et vice versa.
$CC1 = \{1, 2, 3, 8\}$ 4: non , 5: non, 6: non , 7 : non, 9: non, 10: non
$CC2 = \{4, 6\}$
$CC3 = \{5\}$
$CC4 = \{7\}$
$CC5 = \{9\}$
$CC6 = \{10\}$
Soit 6 composantes fortement connexes

Q5 Le graphe reduit est facile a dessiner a partir des aretes. Il a donc 6 sommets (1 par CC). Pour contruire les aretes, on ne garde que les aretes du graphe initial qui mene a des sommets n'appartenant pas a la meme composante connexe.
CC1 → CC4 – CC2 → CC4
CC3 → CC1 – CC3 → CC4
CC4 (aucune arete partante)
CC5 → CC1 – CC5 → CC2 – CC5 → CC3
CC6 → CC2 – CC6 → CC5

Q6 **Reflexif NON** Il faut rajouter les 10 boucles.

Q7 **Transitif NON** car $1 \to 3 \to 1$ mais on n'a pas $1 \to 1$ par exemple.

Q8 **Symetrique NON** car $8 \to 7$ mais on n'a pas $7 \to 8$. Verifier que, des que l'on a (x, y), alors on a (y, x). Si on ne l'a pas, alors la rajouter pour la symetrie.

Q9 **Antisymetrique NON** car $1 \to 3$ et $3 \to 1$ mais 1 n'est pas egal a 3. Il faut supprimer des aretes: quand on a 2 aretes du type (x, y) et (y, x), on supprime (x, y) par exemple Si on regarde la table, on voit que l'on doit supprimer les aretes (1,3), (2,8), (4,6).

Q10 **Complet NON** Le graphe contient 20 aretes. Mais comme il a 10 sommets, il peut contenir 10 x 9 = 90 arcs: il en manque donc 70.

3 Part III

$G = (X, \emptyset)$ est symetrique et antisymetrique...ahahah. Pas tres interessant. Mais $G = (X, \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\})$ aussi. Pas tres interessant.
Et il n'y a pas d'autres options. En effet, si on a un arc (x, y) avec $x \neq y$, la symetrie implique que l'on doit avoir un arc (y, x) et l'antisymetrie implique que l'on doit alors avoir $x = y$. Conclusion: aucun arc possible entre sommets distincts. Il ne reste que les boucles.

4 Conclusion Gilles

Ce texte est beaucoup trop long pour etre fait en 45mn MAIS bien sur cela n'empeche pas d'avoir une bonne note car on en tient compte.