Quelques problèmes sur les graphes

Un graphe $G = (S, A)$ est définit par un ensemble de sommet S et un ensemble d'arêtes A telles que chaque arête relie deux sommets. Autrement dit on a une relation symétrique sur l'ensemble des sommets. Les graphes servent à modéliser beaucoup de problèmes et sont très étudiés d'un point de vu mathématique et informatique.

Exercice 1. On organise un tournois de Football organisé sous forme de poule de n équipes où chaque équipe doit rencontrer toutes les autres.

1. Représenter la situation par un graphe lorsque $n = 4$. Combien de matchs joue chaque équipe ? Combien de matchs y a-t-il en tout ?
2. Que deviennent ces résultats avec des poules de 5 équipes ?
3. Dans une des poules les cinq équipes ont gagné respectivement 3,2,2,1,1 matchs. Combien y a-t-il eu de match(s) nul(s) ?
4. Le nombre de matches étant trop important les organisateurs décident de faire jouer seulement 3 matchs à chaque équipe. Comment l'organiser ?

Exercice 2. Dans un groupe de vingt enfants, est-il possible que sept d'entre eux aient chacun exactement trois amis, neuf d'entre eux en aient exactement quatre, et quatre d'entre eux exactement cinq ?

Coloriage

On colore les sommets S d'un graphe $G = (S, A)$ de telle sorte que deux sommets reliés par une arête soient de couleurs différentes, le *nombre chromatique*, noté $\chi(G)$ est le nombre minimal de couleurs nécessaire pour colorier un graphe.

Exercice 3 - Animosité. On considère un groupe d'élèves de 7 élèves appelés A, B, C, D, E, F et G. Pour un exposé, les élèves se mettent en équipes mais il faut respecter les incompatibilités entre les élèves. Dans le tableau ci-dessous, chaque croix indique une incompatibilité entre les élèves correspondants. Combien d'équipes faudra-t-il créer au minimum ?

	A	B	C	D	E	F	G
A		X			X	X	
B	X		X				
C		X		X	X	X	
D			X		X	X	X
E	X		X	X		X	X
F	X		X	X	X		
G				X	X		

Exercice 4 - Radio pirate. On désire implanter 7 stations radio dans 7 endroits dont les distances mutuelles en km sont données dans le tableau ci-dessous. En sachant que deux stations interférent si elles se trouvent à moins de 100 km l'une de l'autre, quel est alors le nombre minimum de longueurs d'onde qu'il faut prévoir pour éviter toute interférence ?

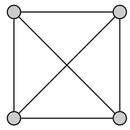
	A	B	C	D	E	F	G
A	0	55	110	108	60	50	88
B		0	87	142	133	98	139
C			0	77	111	85	193
D				0	75	114	82
E					0	107	41
F						0	63

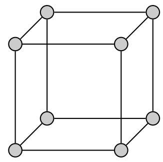
PLANARITÉ

Un graphe est *planaire* s'il existe une représentation sur le plan tel qu'aucune arête ne se croise.

Exercice 5 - Exemple de graphe planaire.

1. Montrer que les graphes suivants sont planaires :





2. Montrer qu'un arbre est toujours un graphe planaire

Exercice 6 - Faces d'une représentation planaire. Soit G un graphe planaire connexe. On fixe une représentation planaire de ce graphe. Une *face* de cette représentation planaire est une des régions du plan délimitées par le dessin du graphe. Etant donné une face F, son *bord* est le plus court chemin fermé passant par toutes les arêtes qui touchent la face (le bord peut avoir à parcourir certaines arêtes plusieurs fois). Le *degré* d'une face est la longueur de son bord. Montrer que la somme des degrés de toutes les faces est égal au double du nombre d'arêtes (en particulier ce nombre ne dépend pas de la représentation planaire choisie !) :

$$\sum_{F \text{ face}} \deg(F) = 2a.$$

Exercice 7 - Formule d'Euler. Soit G un graphe planaire connexe, dont on fixe une représentation planaire. On note f le nombre de faces de G, s le nombre de sommets et a le nombre d'arêtes. Montrer la formule d'Euler :

$$s - a + f = 2.$$

Exercice 8 - $K_{3,3}$ n'est pas planaire. Trois maisons doivent être reliées à 3 usines qui leur fournissent l'eau, le gaz et l'électricité ; on demande de tracer le plan du réseau de telle manière que les tuyaux ne se croisent pas.

Exercice 9 - K_5 n'est pas planaire. Est-il possible que dans un pays, il existe cinq villes toutes reliées aux quatre autres par des routes différentes qui ne se croisent pas ?

Exercice 10 - Ballon de football. Un ballon de football est fabriqué en cousant ensemble des pièces de cuir. Traditionnellement, il s'agit de pentagones et d'hexagones. Montrer que c'est impossible en n'utilisant que des hexagones (si l'on exclut l'assemblage de deux hexagones identiques l'un sur l'autre).

Exercice 11 - Graphe planaire coloriable avec 5 couleurs.

1. Prouver que si G est un graphe simple et planaire, ayant un nombre fini de sommets, alors G possède au moins un sommet de degré ne dépassant pas 5.
2. Montrer par récurrence sur le nombre de sommets que pour un graphe simple planaire G on a $\chi(G) \leq 6$.
3. En analysant plus finement le passage de la récurrence, montrer que l'on peut avoir $\chi(G) \leq 5$.