Feuille de TD. Généralités sur les graphes

Pour les 4 exercices suivants, dire
- **si la relation associée est réflexive, transitive, symétrique, antisymétrique**
- **s'il existe un puits, une source,**
- **si le graphe est connexe.**

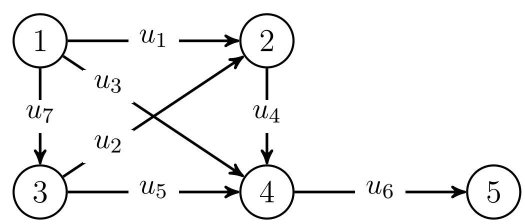
puis déterminer la densité, et le cas échéant, le diamètre et le degré de connexité.

I Les poignées de main

Un couple reçoit chez lui trois autres couples. Lorsqu'elles se rencontrent pour la première fois dans la soirée, certaines personnes se serrent la main. A la fin de la soirée, l'hôte demande à chaque personne, y compris son épouse combien elle a serré de mains. Il obtient des réponses toutes différentes. Sachant que personne ne serre sa propre main ni ne serre la main de son conjoint, le problème consiste à trouver combien de mains a serré la femme de l'hôte.
1. On représente le problème par un graphe G. Les sommets sont les participants, un arc x,y représente le fait que x a serré la main de y.
Combien de sommets y a t'il dans G ? Quelles sont les degrés possibles des sommets de G ? Tout le monde ayant donné une réponse différente que peut on en déduire sur les degrés des sommets de G ? Que peut-on dire du degré du sommet représentant l'hôte qui questionne ?
2. Dessiner le graphe correspondant au problème. Donner les conjoints des personnes qui ont serré 6 mains, 5 mains, ... Combien de mains a serré la femme de l'hôte ? Combien y a-t-il eu de poignées de mains en tout ?

II Représentations d'un graphe

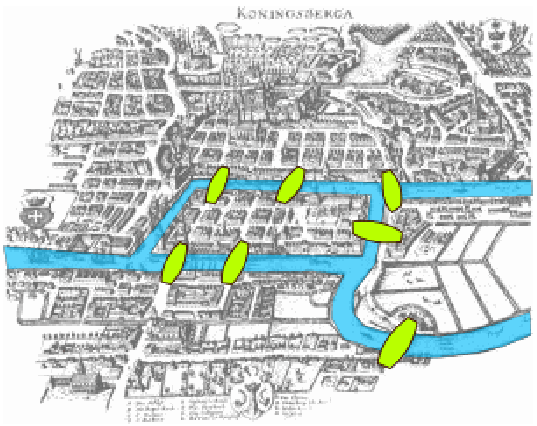
On considère le graphe orienté G_1 suivant :

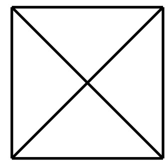
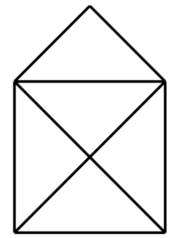


1. Donnez sa représentation sous forme de *dictionnaire.*
2. Donnez la représentation de G_1 par une *matrice d'adjacence* (sommet-sommet), nommée A. Calculez A^2 puis A^3. Que représente $A^p(i,j)$?
3. Donnez la représentation de G_1 par une *matrice d'incidence* (sommet-arcs).

III Le problème des ponts de Koenigsberg (Euler 1736)

La ville russe de Koenigsberg (aujourd'hui appelée Kaliningrad) est traversée par la Pregel, qui coule de part et d'autre de l'île de Kneiphof, et qui possède sept ponts, comme le montre la figure ci-dessous. Un piéton peut-il en se promenant traverser une fois et une seule chaque pont ? Autre problème : est-il possible de tracer les deux dessins ci-dessous sans soulever la plume ni passer deux fois par le même trait ?



1. Créez un multi-graphe dont les sommets sont les quartiers de la ville et les arcs sont les ponts. Exprimez les problèmes en termes de graphes.
2. Une chaîne eulérienne est une chaîne qui passe une fois et une seule par chacun des arcs d'un graphe. Si un graphe admet une chaîne eulérienne alors que peut-on dire des degrés des sommets du graphe ? Résoudre les 3 problèmes.

V Dénombrement

1. Quel est le nombre d'arêtes d'un graphe simple non orienté complet de n sommets (complet : deux sommets quelconques sont adjacents) ?
2. Quel est le nombre de graphes simples non orientés que l'on peut définir sur un ensemble de n sommets ?
3. Dans un graphe orienté, quelle est la relation entre le nombre d'arcs et la somme des degrés de chacun des sommets ? En déduire qu'un graphe à n sommets avec $n \geq 2$, possède un nombre pair de sommets de degré impair.