Contrôle Terminal Logique 1 (corrigé)

L1, Année 2016/2017

Durée : 2 heures.

Aucun document n'est autorisé

1 Modélisation en logique propositionnelle – TouIST (4 points)

Exercice 1. Considérons une liste ordonnée de n cartes portant chacune un numéro dans l'ensemble $\{1..n\}$. La proposition $p_{i,j}$ indique que la $i^{ème}$ carte de la liste porte le numéro j. Pour chacune des formules ci-dessous, dites quelle phrase elle formalise. Chaque formule correspond à exactement une phrase, mais une même phrase peut correspondre à plusieurs formules. Vous devez remplir la Table 1 fournie en annexe.

1. $\bigwedge_{i\in\{1..n\}} \bigwedge_{j\in\{1..n\}/i\neq j} \bigwedge_{k\in\{1..n\}} (\neg p_{i,k} \vee \neg p_{j,k})$
2. $\bigwedge_{i\in\{1..n\}} \bigwedge_{j\in\{1..n\}/i\neq j} \bigwedge_{k\in\{1..n\}} (\neg p_{k,i} \vee \neg p_{k,j})$
3. $\bigwedge_{i\in\{1..n\}} \bigvee_{j\in\{1..n\}} p_{i,j}$
4. $\bigwedge_{i\in\{1..n\}} \bigwedge_{j\in\{1..n\}} \left(p_{i,j} \rightarrow \bigwedge_{k\in\{1..n\}/j\neq k} \neg p_{i,k}\right)$

a. Deux cartes ne peuvent porter le même numéro.

b. Chaque carte porte au plus un numéro.

c. Chaque carte porte au moins un numéro.

d. Toutes les cartes portent le même numéro.

Formule	Phrase
1	a
2	b
3	c
4	b

1pt par correspondance correcte

TABLE 1 – Tableau pour correspondance Formule/Phrase (Exercice 1)

2 Raisonnement en logique propositionnelle (6 points)

Exercice 2. **(2pts)** En utilisant une table de vérité, déterminez si la formule $\neg(a \wedge b) \rightarrow (\neg b \wedge \neg a)$ est *valide*. Donnez-en un contre-modèle si ce n'est pas le cas. Utilisez l'annexe pour répondre (Table 2).

a	b	$\neg(a \wedge b)$	$\neg b \wedge \neg a$	$\neg(a \wedge b) \rightarrow (\neg b \wedge \neg a)$
0	0	1	1	1
0	1	1	0	0
1	0	1	0	0
1	1	0	0	1

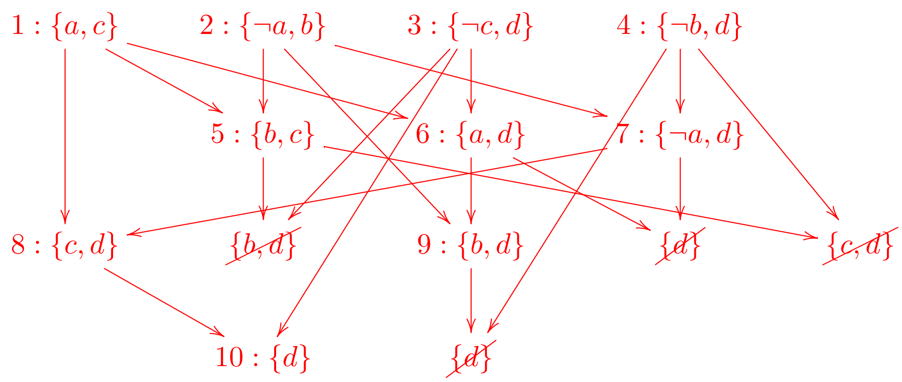
Justification de la validité ou contre-modèle de la formule :
Seules des interprétations (v(a)=0 et v(b)=1, v(a)=1 et v(b)=0) sont acceptées comme contre-modèle.
On veut le contre-modèle sous forme de valuation des symboles.
Par exemple, les formules $\neg a \wedge b$ et $a \wedge \neg b$ ne sont pas acceptées.

1pt : table de vérité (si totalement correcte, sinon 0)

1pt : contre-modèle

TABLE 2 – Table de vérité (Exercice 2)

Exercice 3. **(2pts)** Appliquez à l'ensemble de clauses suivant l'algorithme de résolution jusqu'à son arrêt : $\{\{a, c\}, \{\neg a, b\}, \{\neg c, d\}, \{\neg b, d\}\}$. Quelle est la signification du résultat obtenu ?



Res($1 : \{a, c\}$, $2 : \{\neg a, b\}$) $= 5 : \{b, c\}$
Res($1 : \{a, c\}$, $3 : \{\neg c, d\}$) $= 6 : \{a, d\}$
Res($2 : \{\neg a, b\}$, $4 : \{\neg b, d\}$) $= 7 : \{\neg a, d\}$
Res($1 : \{a, c\}$, $7 : \{\neg a, d\}$) $= 8 : \{c, d\}$
Res($2 : \{\neg a, b\}$, $6 : \{a, d\}$) $= 9 : \{b, d\}$
Res($3 : \{\neg c, d\}$, $5 : \{b, c\}$) $= 9 : \{b, d\}$ (déjà présente)
Res($3 : \{\neg c, d\}$, $8 : \{c, d\}$) $= 10 : \{d\}$
Res($4 : \{\neg b, d\}$, $5 : \{b, c\}$) $= 8 : \{c, d\}$ (déjà présente)
Res($4 : \{\neg b, d\}$, $9 : \{b, d\}$) $= 10 : \{d\}$ (déjà présente)
Res($6 : \{a, d\}$, $7 : \{\neg a, d\}$) $= 10 : \{d\}$ (déjà présente)

L'ensemble des résolvantes est saturé et ne contient pas la clause vide donc l'ensemble de clauses est satisfiable.

0,25pt par résolvante ($5 : \{b, c\}$**,** $6 : \{a, d\}$**,** $7 : \{\neg a, d\}$**,** $8 : \{c, d\}$**,** $9 : \{b, d\}$**,** $10 : \{d\}$**)**
+ 0,5pt pour la conclusion

Exercice 4. **(2pts)** La conséquence logique $\{a \vee b, a \rightarrow c, \neg b \vee c\} \models c$ est-elle vraie ? Vous pouvez utiliser la méthode qui vous semble la plus appropriée, mais il faut justifier la réponse.

Toute solution est acceptée à partir du moment où la justification est correcte **(2pts si tout est juste, sinon 1pt si le raisonnement est correct mais avec une erreur)**.
Solutions possibles :

1) En utilisant une table de vérité :

a	b	c	$a \vee b$	$a \rightarrow c$	$\neg b \vee c$	$\{a \vee b, a \rightarrow c, \neg b \vee c\}$
0	0	0	0	1	1	0
0	0	1	0	1	1	0
0	1	0	1	1	0	0
0	1	$\boxed{1}$	1	1	1	$\boxed{1}$
1	0	0	1	0	1	0
1	0	$\boxed{1}$	1	1	1	$\boxed{1}$
1	1	0	1	0	0	0
1	1	$\boxed{1}$	1	1	1	$\boxed{1}$

Tout modèle des hypothèses est aussi un modèle de la conclusion donc la conséquence logique est vraie.

2) Par résolution :
$\{a \vee b, a \rightarrow c, \neg b \vee c\} \models c$ est vraie si et seulement si $\{a \vee b, a \rightarrow c, \neg b \vee c, \neg c\}$ est insatisfiable.
On considère la base de clauses $\{\{a, b\}, \{\neg a, c\}, \{\neg b, c\}, \{\neg c\}\}$.
$Res(\{a, b\}, \{\neg a, c\}) = \{b, c\}$, $Res(\{b, c\}, \{\neg b, c\}) = \{c\}$, $Res(\{c\}, \{\neg c\}) = \{\}$

3) Par raisonnement sur les interprétations :
Considérons un modèle des hypothèses. En particulier, nous avons $v(a \vee b) = max(v(a), v(b)) = 1$. Il est donc impossible d'avoir $v(a) = 0$ et $v(b) = 0$.
Cas 1 : $v(a) = 1$
$v(a \rightarrow c) = max(1 - v(a), v(c)) = max(0, v(c)) = v(c)$, or $v(a \rightarrow c) = 1$ par hypothèse donc $v(c) = 1$.
Cas 2 : $v(b) = 1$
$v(\neg b \vee c) = max(1 - v(b), v(c)) = max(0, v(c)) = v(c)$, or $v(\neg b \vee c) = 1$ par hypothèse donc $v(c) = 1$.
Dans les deux cas, le modèle des hypothèses est aussi un modèle de la conclusion, donc la conséquence logique est vraie.

3 Modélisation en logique des prédicats (5 points)

Exercice 5. Soit un langage de la logique des prédicats défini par les fonctions suivantes :

$$FON_0 = \{\text{jean}, \text{luc}, \text{odile}\} \quad \text{(ce sont les constantes)}$$

et les prédicats suivants (qu'on pourra abréger par leur première lettre) :

$$PRED_1 = \{\text{Homme}, \text{Femme}, \text{Vieux}\} \qquad PRED_2 = \{=, \text{Père}, \text{Mère}\}$$

Pour cet exercice, on suppose des relations de famille simples (un père, une mère, pas de demi-frère ni de demi-sœur). On est frère/sœur dès que l'on a un parent commun, car si on en a un, on en a deux. La signification de Père(a, b) est : a est le père de b. La signification de Mère(a, b) est : a est la mère de b.

1. Traduisez les formules suivantes par des phrases en français :
   Ici, on accepte la paraphrase, mais la phrase en français doit dans ce cas être grammaticalement correcte. Notation binaire.
   (a) $\forall x.\forall y.\ \text{Mère}(x, y) \rightarrow \neg\text{Mère}(y, x)$;
   Solution: On ne peut pas être la mère de sa mère **(0,5pt)**
   (b) $\forall x.\ (\exists y.\exists z.\ \text{Père}(x, y) \wedge (\text{Père}(y, z) \vee \text{Mère}(y, z))) \rightarrow \text{Vieux}(x)$;
   Solution: Tous les grand-pères sont vieux. **(0,5pt)**
   (c) $\exists x.\ \text{Père}(\text{jean}, x) \wedge \text{Père}(x, \text{odile})$;
   Solution: Jean est le grand-père paternel de Odile. **(0,5pt)**
   (d) $\forall x.\forall y.\ (\exists z.\ \text{Père}(z, x) \wedge \text{Père}(z, y)) \wedge \text{Homme}(y) \rightarrow \neg\text{Père}(y, x)$
   Solution: Le frère d'une personne ne peut pas être en même temps le père de cette personne. **(0,5pt)**
2. Écrivez une formule qui définit un nouveau prédicat *Sœur*, de la forme « $\textit{Sœur}(x, y) \leftrightarrow \ldots$ » avec x et y comme variables libres, en utilisant les prédicats définis pécédemment.
   Solution: $\textit{Sœur}(x, y) \leftrightarrow (\exists z.\text{Père}(z, x) \wedge \text{Père}(z, y) \wedge \text{Femme}(x))$ **(1pt)**
3. Traduisez les phrases suivantes par des formules de la logique des prédicats :
   (a) « Toute personne a un père. »
   Solution: $\forall x.\exists y.\text{Père}(y, x)$ **(1pt)**
   (b) « Odile est la sœur de Luc et il n'a pas d'autre sœur. »
   Solution: $\textit{Sœur}(\text{odile}, \text{luc}) \wedge (\forall x.\textit{Sœur}(x, \text{luc}) \rightarrow x = \text{odile})$ **(1pt)**

4 Sémantique de la logique des prédicats (5 points)

Exercice 6. Les figures 1, 2, 3 et 4 représentent quatre interprétations I_1, I_2, I_3 et I_4 d'un langage constitué des trois prédicats E, C et R. Le prédicat E représente la propriété *"être une étoile"*, C la propriété *"être un carré"* et $R(x, y)$ le fait que "x est relié à y" (il y a une flèche de x vers y). Bien sûr, les deux formes (étoile et carré) s'excluent mutuellement. Prenez en compte que les arcs sont orientés. Ainsi, la figure 1 représente un modèle de la formule $\forall x.E(x) \vee C(x)$ (car en effet dans cette figure, tout objet est une étoile ou un carré) et un contre-modèle de la formule $\exists x.\exists y.x \neq y \wedge R(x, y) \wedge R(y, x)$ (car il n'y a pas deux objets distincts reliés dans les deux sens).

Pour chaque figure vous direz si elle est un modèle ou un contre-modèle de chacune des cinq formules qui suivent les figures (ne vous trompez pas dans les numéros de figure !).

Respectez les consignes suivantes :

— Remplissez le tableau (Table 3 fournie en annexe) en inscrivant $\boxed{\text{M}}$ pour modèle, $\boxed{\text{C}}$ pour contre-modèle dans chacune des cases.

— Les réponses fausses compteront négativement !

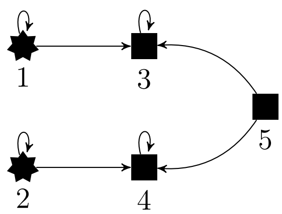


FIGURE 1 – Interprétation I_1

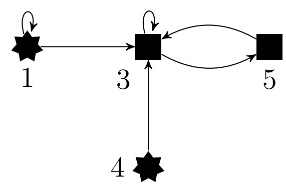


FIGURE 2 – Interprétation I_2

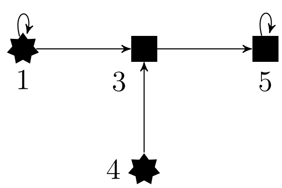


FIGURE 3 – Interprétation I_3

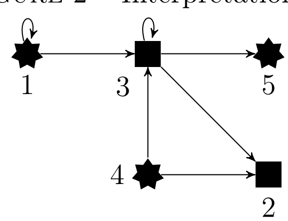


FIGURE 4 – Interprétation I_4

1. $\forall x.E(x) \rightarrow R(x, x)$
2. $\forall x.E(x) \rightarrow \exists y.C(y) \wedge R(x, y)$
3. $\exists y.\forall x.E(x) \rightarrow C(y) \wedge R(x, y)$
4. $\forall x.(\neg\exists y.R(y, x)) \rightarrow E(x)$
5. $\forall x.\forall y.\forall z.x \neq y \wedge E(x) \wedge E(y) \wedge C(z) \wedge R(x, z) \wedge R(y, z) \rightarrow R(z, z)$

	I_1	I_2	I_3	I_4
1	M	C	C	C
2	M	M	M	C
3	C	M	M	C
4	C	M	M	M
5	M	M	C	M

1pt pour une formule (une ligne) pour laquelle les 4 réponses (cases) sont correctes.

0,5pt pour une formule (une ligne) pour laquelle seulement 3 réponses (cases) sont correctes.

0pt pour une formule (une ligne) pour laquelle au plus 2 réponses (cases) sont correctes.

TABLE 3 – Tableau pour Modèle/Contre-modèle (Exercice 6)