L1S2 Théorie de l'Information

Université de Toulouse

Départements de Mathématique et d'Informatique

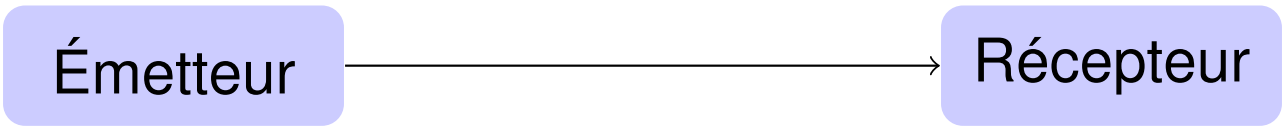
Année 2018/2019

Plan

Plan

Modèle de communication (1)

Modèle naïf :



Question : Comment transmettre l'information ?

Modèle de communication (2)

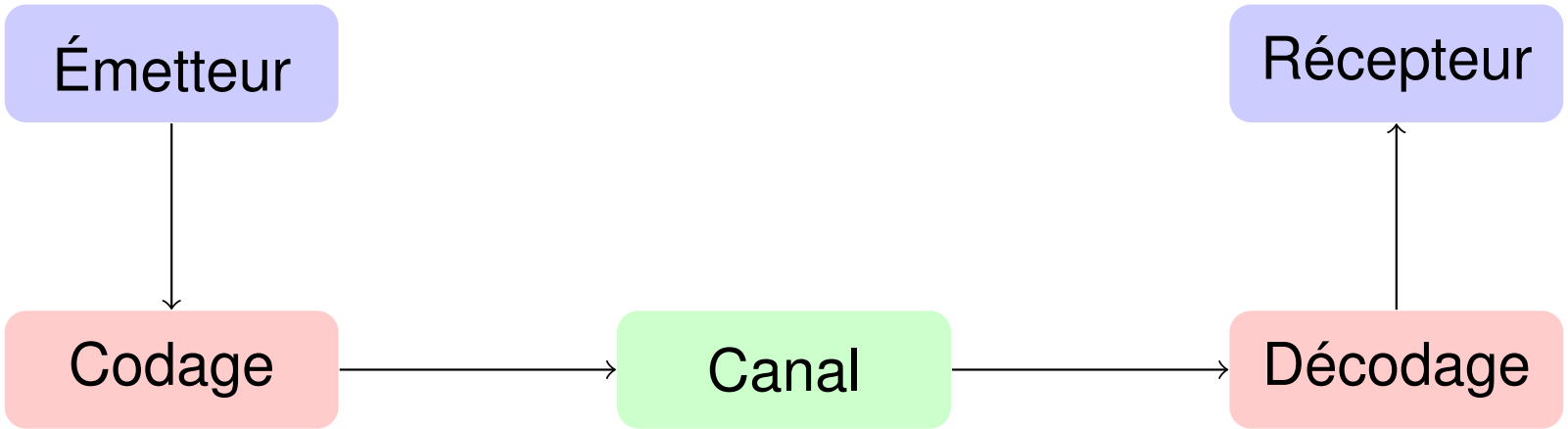
Modèle avec canal :

Questions :

- Quels types de données sont transmissibles ?
  Ex. : comment transmettre une image ?
- Capacité du canal ?
- Canal bruité ?
- Confidentialité du canal ?

Modèle de communication (3)

Modèle avec codage :

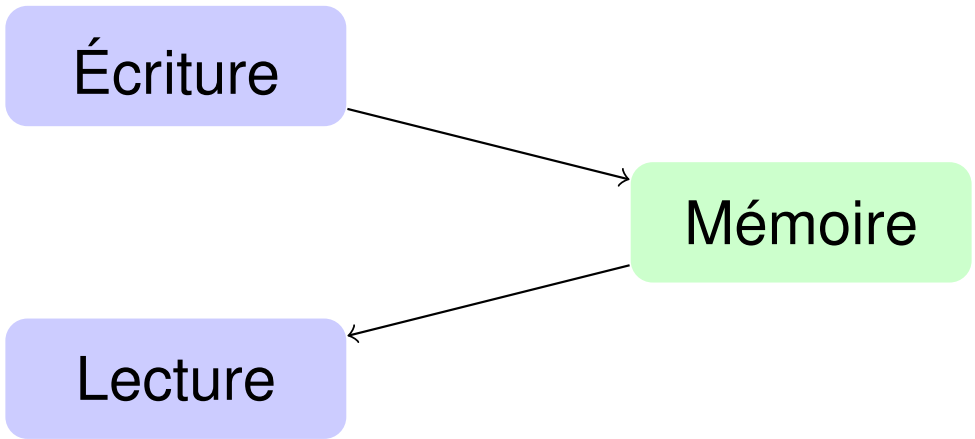


Solutions . . . et nouvelles questions :

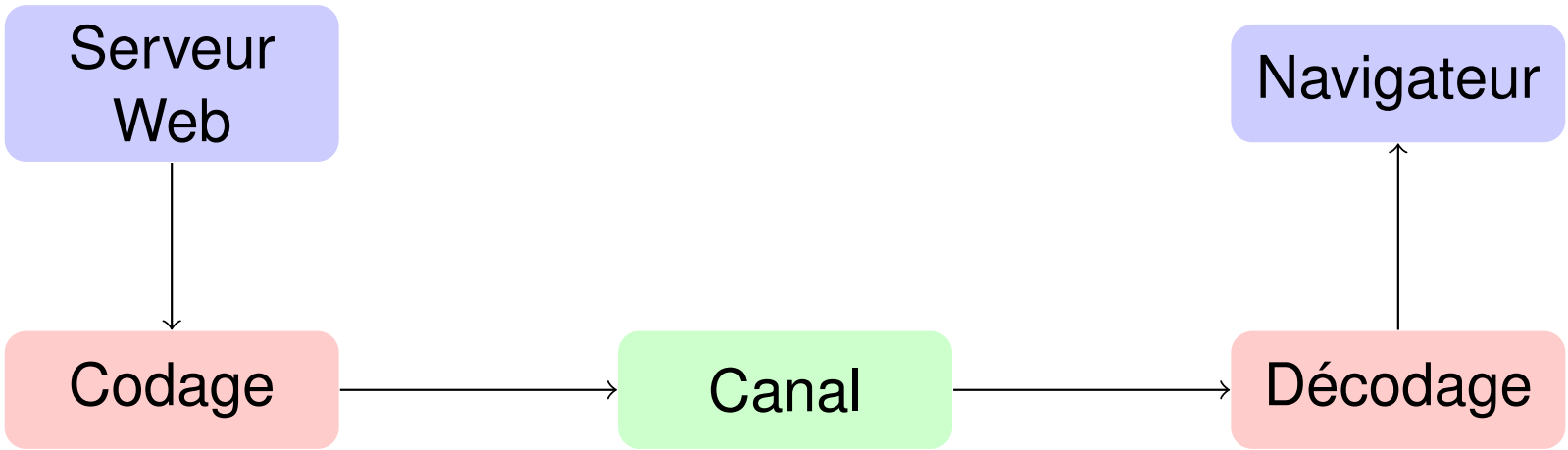
- Codage de données (*Ex :* nombres ; caractères ; images ; son)
  Réversibilité : peut-on reconstruire le message original ?
- Compression de données. *Optimalité ?*
- Détection et correction d'erreurs. *Pour quelle perturbation ?*
- Cryptage. *Quelle sécurité pour quel type d'adversaire ?*

Stockage de données

comme cas particulier de communication :



Modèle client-serveur



page HTML :

```
<ul>
<li> Une <b>liste</b> </li>
<li> et une <i>balise</i> </li>
</ul>
```

affichage navigateur :

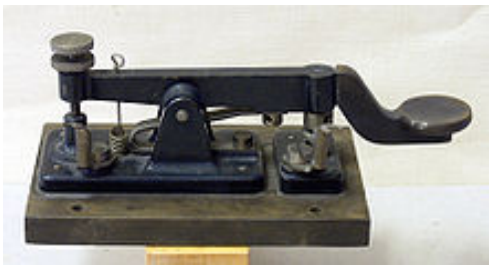
- Une **liste**
- et une *balise*

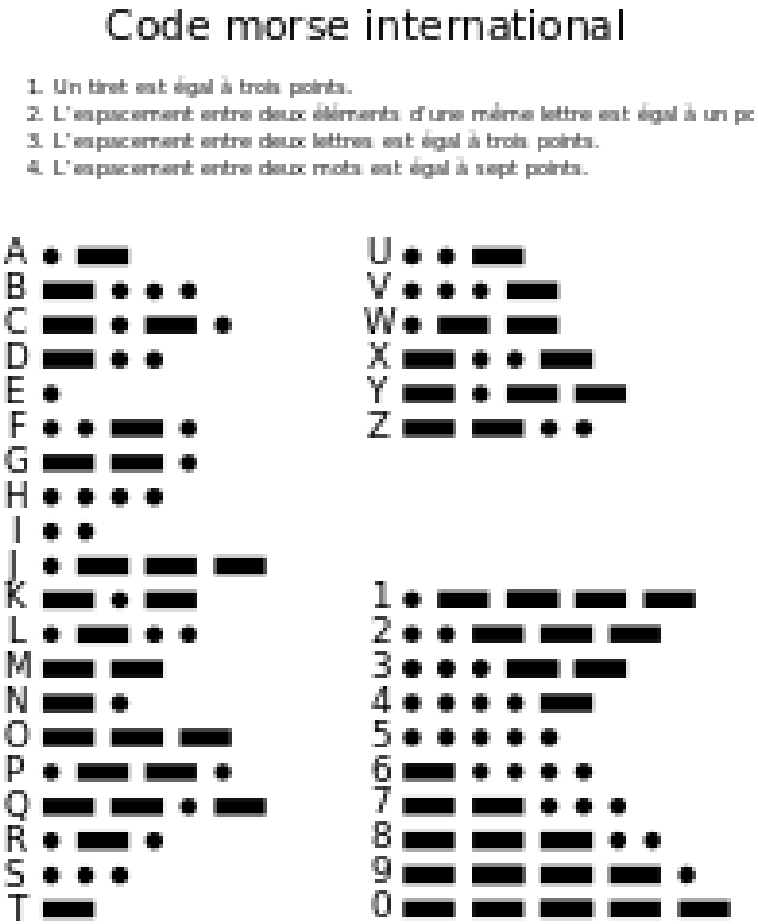
Plan

Codage de caractères : Précurseurs

Code Morse

- Développé par Samuel Morse et collaborateurs (1837)
- Transmission de signaux par télégraphe
- Codage de caractères par séquences
  signal court / long



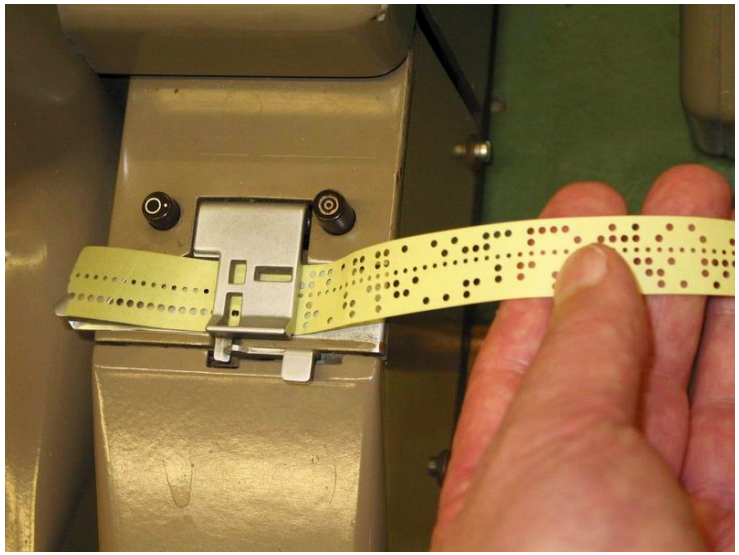


Codage de caractères : Précurseurs

Téléscripteurs

- Machines à écrire à distance
- Premiers développements $\approx$ 1930
- Caractéristiques :
  - Alphabet restreint (caractères non accentués, majuscules)
  - Affichage sans écran !
  - Codage du mouvement du chariot de la machine
    (saut de ligne, retour chariot)
  - Stockage de données sur ruban perforé

Codage de caractères : Précurseurs



Code Baudot

- Inventé en 1870 par Émile Baudot
- Système à 5 bits transmis simultanément
- Deux modes :
  1. 26 lettres
     ex. : `01010` lettre R
  2. 10 chiffres, quelques symboles
     ex. : `01010` chiffre 4
- Séquences de contrôle :
  `01000` retour chariot
  `11111` changement mode “lettres”
  `11011` changement mode “chiffres”

Codage de caractères : ASCII (1)

American Standard Code for Information Interchange

- Standardisé en 1963 : norme ASA des États-Unis
- Depuis 1972 : norme ISO 646

Codage binaire de 128 caractères en 7 bits :

- caractères de l'alphabet anglais (minuscules et majuscules)
- chiffres
- quelques symboles
- des caractères de contrôle (en partie pour téléscripteurs)

Encore perceptible dans certaines limitations :

- adresses email
- langages de programmation

Codage de caractères : ASCII (2)

Caractères de contrôle

Bin	*Déc*	*Car*	*Signif.*
000 0000	0	NUL	End of string
000 0010	2	STX	Start of text
000 0011	3	ETX	End of text
000 1000	8	BS	Backspace
000 1001	9	HT	Horizontal Tab
000 1010	10	LF	Line feed
000 1101	13	CR	Carriage return
001 1011	27	ESC	Escape
111 1111	127	DEL	Delete

Caractères affichables

Bin	*Déc*	*Car*
010 0000	32	␣
010 0001	33	!
010 1111	47	/
011 0000	48	0
011 1001	57	9
100 0001	65	A
101 1010	90	Z
110 0000	96	‘
110 0001	97	a
111 1010	122	z
111 1110	126	~

Table complète : `http://fr.wikipedia.org/wiki/American_Standard_Code_for_Information_Interchange`

Transmission de données

Anciens systèmes :

- Transmission de données “directe” :
  - terminal $\rightarrow$ imprimante
  - teletype $\rightarrow$ teletype via connextion téléphonique
- . . .encadré par des caractères de contrôle :

```
This is a text ⇝
STX T h ... t ETX ⇝
0000010 1010100 1101000 ... 1110100 0000011
```

Systèmes modernes : Transmission en paquets contenant des méta-données :

- Longueur du texte
- Destinataire, routage
- Qualité de service (priorité, prix) ; redondance ($\rightsquigarrow$ correction d’erreurs)

$\rightsquigarrow$ perte d’importance des caractères de contrôle

Stockage de données dans des fichiers

Fin de fichier (end of file, EOF)

- *(Quelques) anciens systèmes :*
  - *Exemple :* Système CP/M (par Intergalactic Digital Research) :
    Fichiers sont des multiples de blocs de 128 octets
    Fin de fichier indiqué par `Ctrl-Z`
- *Systèmes modernes :*
  - Taille d'un fichier stocké par le système d'exploitation (OS)
  - Il n'existe pas de caractère EOF

Retour à la ligne Différents codages, selon le OS :

- `CR + LF` dans d'anciens téléscripteurs
  hérité par des successeurs : DEC ; CP/M, MS-DOS, Windows
- `LF` dans la famille Multics, Unix, Linux
- `CR` dans l'ancien MacOS

Voir programmes `dos2unix` et `unix2dos`

Codage de caractères : famille ISO/IEC 8859 (1)

Motivation :

- Codage de caractères d'autres alphabets
- Utilisation du 8ième bit d'un octet

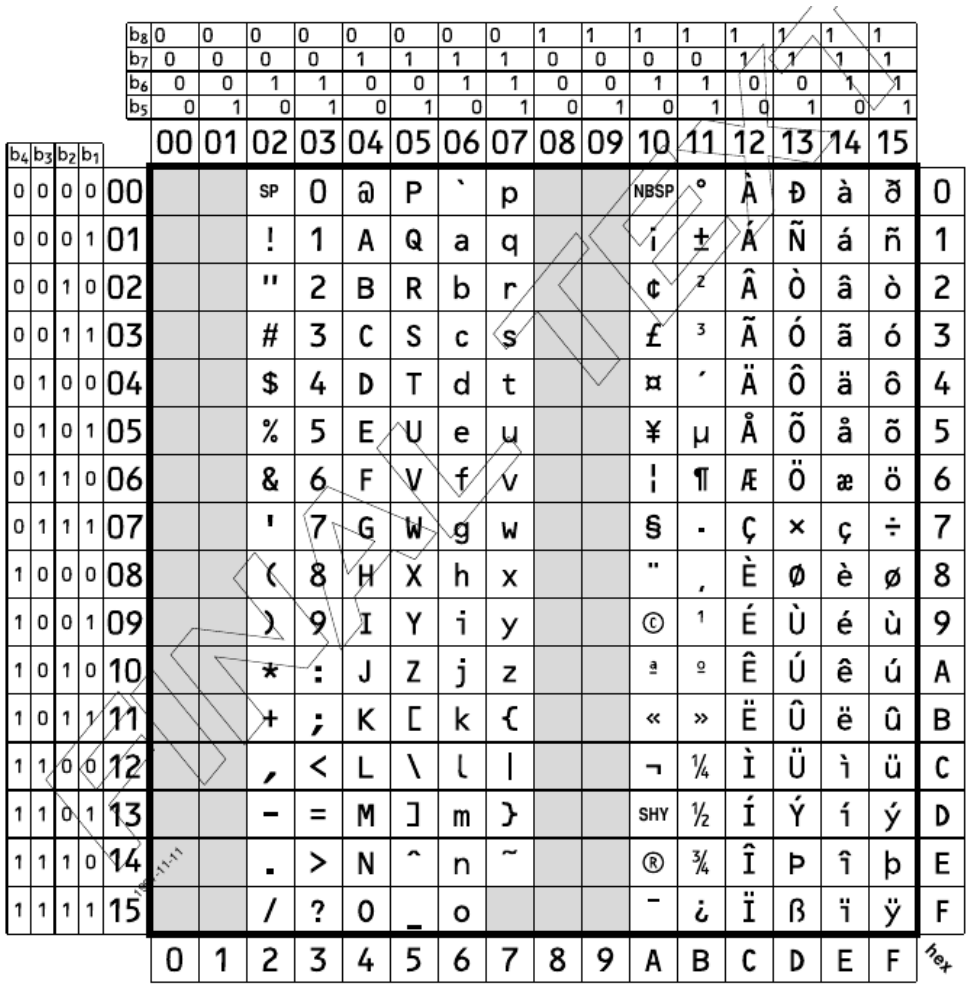
Représentants :

- ISO 8859-1 : Codage de la plupart des alphabets occidentaux ("Latin-1")
  imparfaitement : il manque œ, Œ, €, inclus dans ISO 8859-15
- ISO 8859-5 : Cyrillque
- ISO 8859-7 : Grecque
- ...

Codage de caractères : famille ISO/IEC 8859 (2)

ISO 8859-1 (“Latin-1”), voir :

`http://std.dkuug.dk/jtc1/sc2/wg3/docs/n411.pdf`



b_4 b_3 b_2 b_1	00	01	02	03	04	05	06	07	08	09	10	11	12	13	14	15	
b_8 b_7 b_6 b_5	0 0 0 0	0 0 0 1	0 0 1 0	0 0 1 1	0 1 0 0	0 1 0 1	0 1 1 0	0 1 1 1	1 0 0 0	1 0 0 1	1 0 1 0	1 0 1 1	1 1 0 0	1 1 0 1	1 1 1 0	1 1 1 1	
0 0 0 0	00		SP	0	@	P	`	p			NBSP	°	À	Ð	à	ð	0
0 0 0 1	01		!	1	A	Q	a	q			¡	±	Á	Ñ	á	ñ	1
0 0 1 0	02		"	2	B	R	b	r			¢	²	Â	Ò	â	ò	2
0 0 1 1	03		#	3	C	S	c	s			£	³	Ã	Ó	ã	ó	3
0 1 0 0	04		$	4	D	T	d	t			¤	´	Ä	Ô	ä	ô	4
0 1 0 1	05		%	5	E	U	e	u			¥	µ	Å	Õ	å	õ	5
0 1 1 0	06		&	6	F	V	f	v			¦	¶	Æ	Ö	æ	ö	6
0 1 1 1	07		'	7	G	W	g	w			§	·	Ç	×	ç	÷	7
1 0 0 0	08		(	8	H	X	h	x			¨	¸	È	Ø	è	ø	8
1 0 0 1	09		)	9	I	Y	i	y			©	¹	É	Ù	é	ù	9
1 0 1 0	10		*	:	J	Z	j	z			ª	º	Ê	Ú	ê	ú	A
1 0 1 1	11		+	;	K	[	k	{			«	»	Ë	Û	ë	û	B
1 1 0 0	12		,	<	L	\	l	|			¬	¼	Ì	Ü	ì	ü	C
1 1 0 1	13		-	=	M	]	m	}			SHY	½	Í	Ý	í	ý	D
1 1 1 0	14		.	>	N	^	n	~			®	¾	Î	Þ	î	þ	E
1 1 1 1	15		/	?	O	_	o				¯	¿	Ï	ß	ï	ÿ	F
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	hex

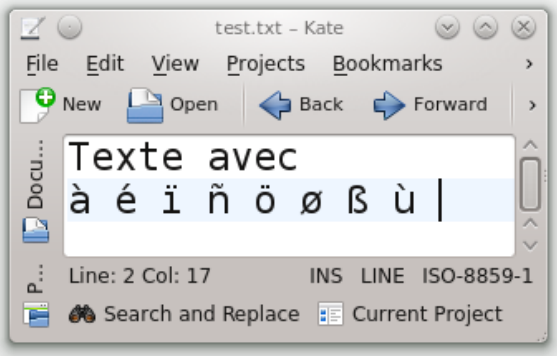
Codage de caractères : famille ISO/IEC 8859 (3)

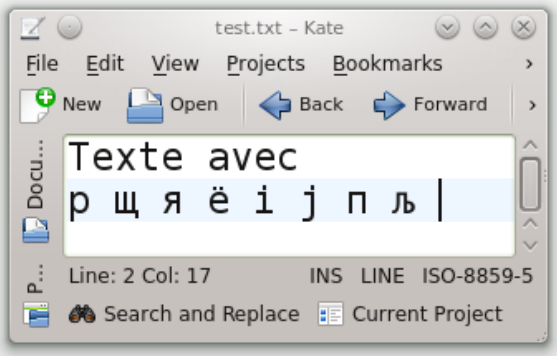
Interprétation d'un fichier

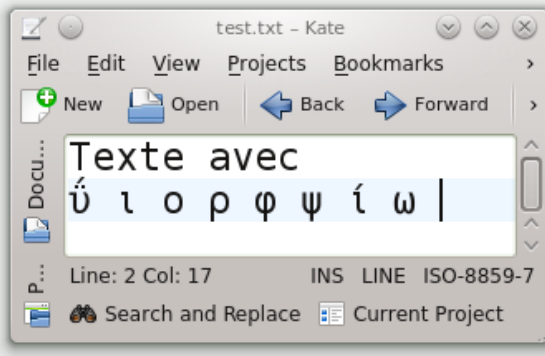
- Un éditeur ne voit que le code binaire
- . . .et l'interprète selon le codage choisi

Un fichier sous trois vues

- Ici : éditeur Kate
- Changement de codage : `Tools / Encoding / ...`







Codage de caractères : Unicode (1)

Intention : Pouvoir coder tous les alphabets actuels et passés

- Europe : Latin, grecque, cyrillique, arménien, géorgien, ...
- Moyen orient : hébreu, arabe, syriaque, ...
- Inde : Devanagari, bengali, gujarati, ...
- Asie : Han (Chine), Hiragana et Katakana, ...
- Afrique : Éthiopien, N'Ko (Afrique orientale), Bamum (Cameroun)
- Amérique : Cherokee (indien)
- Ancien : runique, gothique, Linear B (ancien grecque), phoenicien, hiéroglyphes égyptiens, ...
- Symboles : mathématiques ; monnaies ;

Pour des détails, voir `http://www.unicode.org/`

Codage de caractères : Unicode (2)

Distinction entre :

- Caractère abstrait (“code point”)
- son codage, en trois variantes : UTF-8, UTF-16, UTF-32

Quelques chiffres :

- Unicode définit actuellement plus de 136.000 caractères
- potentiellement : 1.114.112 “code points” (nombres $0 \ldots 10FFFF_{16}$)

Développement historique :

- 1987 : Première tentative de remplacer ASCII par un codage “universel”
- 1991 : Création du Unicode Consortium (Xerox, Apple, Sun, Next, Microsoft)
- 1993 : norme ISO/IEC 10646
- juin 2017 : version 10.0

Codage de caractères : Unicode (3)

Caractères abstraits, décrits par

- un *code point* (numéro d'identification)
- un glyphe (représentation graphique)
- un nom textuel

Exemple : Latin-1 Supplement

	008	009	00A	00B	00C	00D	00E	00F
0	XXX 0080	DCS 0090	NB SP 00A0	° 00B0	À 00C0	Ð 00D0	à 00E0	ð 00F0
1	XXX 0081	PU1 0091	¡ 00A1	± 00B1	Á 00C1	Ñ 00D1	á 00E1	ñ 00F1
2	BPH 0082	PU2 0092	¢ 00A2	2 00B2	Â 00C2	Ò 00D2	â 00E2	ò 00F2
3	NBH 0083	STS 0093	£ 00A3	3 00B3	Ã 00C3	Ó 00D3	ã 00E3	ó 00F3

00E0 à LATIN SMALL LETTER A WITH GRAVE
≡ 0061 a 0300 ◌̀

00E1 á LATIN SMALL LETTER A WITH ACUTE
≡ 0061 a 0301 ◌́

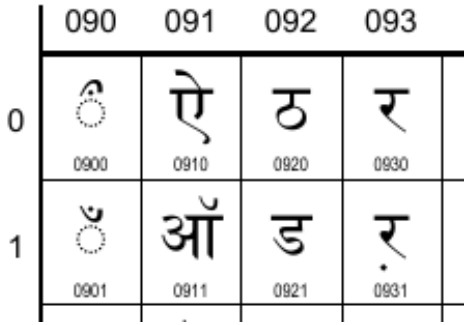
00E2 â LATIN SMALL LETTER A WITH CIRCUMFLEX
≡ 0061 a 0302 ◌̂

00E3 ã LATIN SMALL LETTER A WITH TILDE
• Portuguese
≡ 0061 a 0303 ◌̃

Codage de caractères : Unicode (4)

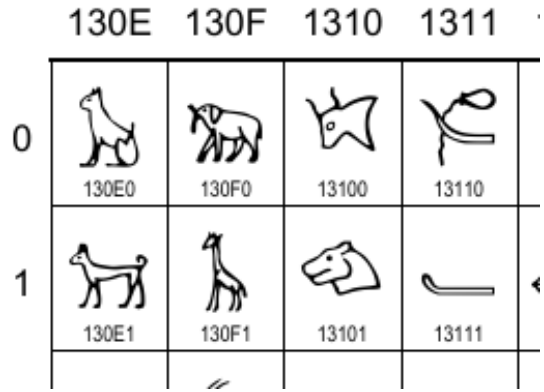
Autres alphabets :

Devanagari



090F ए DEVANAGARI LETTER E
0910 ऐ DEVANAGARI LETTER AI
0911 ऑ DEVANAGARI LETTER CANDRA O
0912 ओ DEVANAGARI LETTER SHORT O
• for transcribing Dravidian short o
0913 ओ DEVANAGARI LETTER O
0914 औ DEVANAGARI LETTER AU

Egyptian Hieroglyphs



130E0 EGYPTIAN HIEROGLYPH E013
130E1 EGYPTIAN HIEROGLYPH E014
130E2 EGYPTIAN HIEROGLYPH E015
130E3 EGYPTIAN HIEROGLYPH E016
130E4 EGYPTIAN HIEROGLYPH E016A

Entrer un caractère dans Kate :

Exemple : `F7`, ensuite `char 0x90f`

Codage de caractères : Unicode (5)

Trois codages pour chaque caractère Unicode :

UTF-32

UTF-16

UTF-8

Codage de caractères : Unicode (6)

UTF-32 Chaque caractère représenté par un mot de 32 bits

Code point	Code (hex)	Caractère	Nom
U+41	00000041	A	Latin capital letter a
U+E1	000000E1	á	Latin small letter a with acute
U+910	00000910		Devanagari letter ai
U+130E0	000130E0		Egyptian hieroglyph E013

Avantages :

- Codage uniforme et simple

Désavantages :

- Utilisation d'une petite fraction de l'espace des codes

Codage de caractères : Unicode (7)

UTF-16 Un ou deux mots de 16 bits selon le cas.

1. U+0000 ... U+D7FF et U+E000 ... U+FFFF :
   représentés par *un* mot de 16 bits (2 octets) avec la même valeur

Code point	Code (hex)	Caractère	Nom
U+41	0041	A	Latin capital letter a
U+910	0910		Devanagari letter ai

2. U+D800 ... U+DFFF : ne sont pas des code points valides
3. U+10000 ... U+10FFFF : *deux* mots (4 octets).
   Algorithme pour conversion de U+x_{16} :
   1. Calculer $(x')_{16} = (x)_{16} - (10000)_{16}$
   2. Représenter $(x')_{16}$ en binaire $(b')_2$ avec 20 chiffres : $(x')_{16} = (b')_2$
   3. Scinder $(b')_2$ en deux mots v et w de 10 bits
   4. Résultat du codage :
      - Premier mot : $(110110v)_2$
      - Deuxième mot : $(110111w)_2$

Codage de caractères : Unicode (8)

Exemple : Codage de U+10384 en UTF-16
Ici : $(x)_{16} = (10384)_{16}$

1. Calculer $(x')_{16} = (10384)_{16} - (10000)_{16} = (384)_{16}$
2. Représenter en binaire avec 20 chiffres :
   $(b')_2 = 0000.0000.0011.1000.0100$
3. Scinder en $v = 0000.0000.00$ et $w = 11.1000.0100$
4. Résultat :
   - Premier mot : $(1101.1000.0000.0000)_2 = (D800)_{16}$
   - Deuxième mot : $(1101.1111.1000.0100)_2 = (DF84)_{16}$

Avantages / désavantages de UTF-16 :

1. Codage assez complexe
2. Longueur du code : compromis entre UTF-32 et UTF-8

Codage de caractères : Unicode (9)

UTF-8 Codage entre 1 et 4 octets, selon la table :

Intervalle	*Octet 1*	*Octet 2*	*Octet 3*	*Octet 4*
U+0 . . . U+7F	0xxxxxxx			
U+80 . . . U+7FF	110xxxxx	10xxxxxx		
U+800 . . . U+FFFF	1110xxxx	10xxxxxx	10xxxxxx	
U+10000 . . . U+10FFFF	11110xxx	10xxxxxx	10xxxxxx	10xxxxxx

Les xxx sont les chiffres d'une écriture (souvent impropre) du code point en base 2 avec 7, 11, 16 et 21 chiffres, selon le cas.

Notes : U+0 . . . U+7F et ASCII coincident

Codage de caractères : Unicode (10)

Exemples de codage en UTF-8

- U+41 $\in$ U+0 ... U+7F, donc codage avec 1 octet
  $(41)_{16} = (100.0001)_2$
  $\rightsquigarrow (0100.0001)_2 = (41)_{16}$
- U+3A9 $\in$ U+80 ... U+7FF, donc codage avec 2 octets
  $(3A9)_{16} = (011.1010.1001)_2$
  $\rightsquigarrow (1100.1110.1010.1001)_2 = (CEA9)_{16}$

Codage de caractères : Unicode (11)

Comment reconnaître le codage d'un fichier stocké sur disque ?

- Impossible : deux sources différentes peuvent avoir le même codage
- Il existe des heuristiques . . .

. . .transmis par internet ?

- Pareil . . .
- Mais : voir les méta-données de certains protocoles.
  Exemple : HTML (visualiser source avec `Ctrl-u`)

```
<!DOCTYPE html>
<html  dir="ltr" lang="fr" xml:lang="fr">
<head>
    <title>Cours: L1S2 Math-Info 2</title>
    <meta http-equiv="Content-Type"
      content="text/html; charset=utf-8" />
```

Résumé : Codage de caractères

Histoire du codage de caractères :

- Développement successif au lieu de rupture technologique
- Intégration de caractères de plus en plus complexes : maj./minuscules ; accents ; internationalisation

Unicode

- Distinction entre “caractère” et “codage”
- Principe de UTF-16 et UTF-8 :
  code “plus court” pour caractères “plus utilisés”

Question :

Existe-t-il un codage optimal pour une quantité d’information ?

Annexe : Codage de nombres (1)

Base 2 : Chiffres 0, 1
Base 10 : Chiffres 0 .. 9
Base 16 : Chiffres 0 .. 9, A .. F
Codage en base b d'un nombre n :
Séquence de chiffres $c_k \dots c_0$ tels que $n = c_k * b^k + \dots c_0 * b^0$
Exemple : $(13)_{10} = 1 * 2^3 + 1 * 2^2 + 0 * 2^1 + 1 * 2^0 = (1101)_2$
Exemple : $(42)_{10} = 2 * 16^1 + 10 * 16^0 = (2A)_{16}$
Conversion rapide base 16 $\leftrightarrow$ base 2 :
Regroupement en paquets de 4 chiffres :
Exemple : $(F2A)_{16}$
$= 15 * 16^2 + 2 * 16^1 + 10 * 16^0$
$= 15 * (2^4)^2 + 2 * (2^4)^1 + 10 * (2^4)^0$
$= ((1111)(0010)(1010))_2$

Annexe : Codage de nombres (2)

Pour $b > 0$, tout nombre n peut s'écrire $n = (n/b) * b + (n \mod b)$, où $/$ est la division entière et $\mod$ le reste de la division.
Exemple : $7/3 = 2$ et $7 \mod 3 = 1$.
Ceci motive la fonction de codage $coder(nombre, base)$ définie par :

- si $n < b$: $coder(n, b) = n$
- si $n \geq b$: $coder(n, b) = coder(n/b, b) * b + (n \mod b)$

Exemple :
$coder(380, 16) =$
$coder(380/16, 16) * 16 + (380 \mod 16) =$
$coder(23, 16) * 16 + 12 =$
$(coder(23/16, 16) * 16 + (23 \mod 16)) * 16 + 12 =$
$(coder(1, 16) * 16 + 7) * 16 + 12 =$
$(1 * 16 + 7) * 16 + 12 = 1 * 16^2 + 7 * 16^1 + 12 * 16^0$
Donc, $(380)_{10} = (17C)_{16}$

Annexe : Commandes Linux

`ll` list directory contents

```
> ll test.txt
-rw-r--r-- 1 strecker users 29 Jan 23 01:54 test.txt
```

`wc` print newline, word, and byte counts for each file

```
> wc main.tex
 119  252 3251 main.tex
```

`xxd` make a hexdump

```
> xxd -c 10 test.txt
0000000: 5465 7874 6520 6176 6563  Texte avec
000000a: 0ac3 a020 c3a9 20c3 af20  ... .. ..
0000014: c3b1 20c3 b620 c3b8 20c3  .. .. .. .
000001e: 9f20 c3b9 0a              . ...
```

Plan

Alphabets, séquences et messages

Un alphabet A est un ensemble de caractères.
Exemples : Alphabet

- des caractères ASCII
- des caractères de Unicode
- des chiffres `0` et `1` (alphabet binaire)
- des chiffres `0` ...`9`, `A` ...`F` (hexadécimal)
- des nombres naturels (infini !)

Fonction de codage

Une fonction de codage $c : A_1 \to A_2$ traduit les caractères d'un alphabet A_1 vers un alphabet A_2.

A_1 et A_2 peuvent être les mêmes alphabets.

Exemples :

- Chiffre de César (cryptographie basique) $c : ASCII \to ASCII$ famille de fonctions de codage, *par ex. :* décalage de deux caractères : $c(A) = C, c(B) = D, \ldots c(X) = Z, c(Y) = A, c(Z) = B$
- Cryptage avec méthode RSA (voir cours OMD du S1), $c : \mathbf{Z}/n\mathbf{Z} \to \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ avec $c(m) = m^e \mod n$ (pour clé publique e)
- Codage UTF8 : $c : UTF8 \to HEX$ avec $c(x) = 78, c(y) = 79, c(z) = 7A, \ldots$
- Codage UTF8 : $c : UTF8 \to BIN$ avec $c(x) = 1111000, c(y) = 1111001, c(z) = 1111010, \ldots$

Rappel : propriétés de fonctions (1)

Une fonction $c : A_1 \to A_2$ est dite

- *injective* si pour to $a, a' \in A_1$, si $a \neq a'$, alors $c(a) \neq c(a')$
- *surjective* si pour tout $a_2 \in A_2$, il existe un $a_1 \in A_1$ tq. $a_2 = c(a_1)$
- *bijective* si elle est injective et surjective

Proposition (voir UE “Maths Discrètes”) :
Si $c : A_1 \to A_2$ est bijective, alors il existe $d : A_2 \to A_1$ tq.
pour tout $a_1 \in A_1$, $d(c(a_1)) = a_1$ et pour tout $a_2 \in A_2$, $c(d(a_2)) = a_2$

d est appelée *l'inverse* de c. C'est la fonction de décodage.

Lesquelles des fonctions de l'exemple précédent sont inj. / surj./ bij. ?

Rappel : propriétés de fonctions (2)

Remarques :

- L'existence de l'inverse *d* d'une fonction *c* ne signifie pas que *d* est effectivement donnée ou facile à trouver.
  Ex. : Fonction de décodage *d* pour cryptage RSA *c* effectivement connue uniquement pour détenteur de la clé privée.
- Quelques codages sont intentionnellement non surjectfs.
  $\rightsquigarrow$ Codages redondants (codes correcteurs)

Notation :

- Un codage injectif est aussi appelé unique ou sans perte
  Fortement souhaitable pour tout codage de textes, nombres, ...
- avec perte sinon
  Acceptable pour du son, des images ...

Séquences

Soit A un alphabet.
Une séquence sur A est inductivement construite comme suit :

- [] est une séquence (vide)
- si $a \in A$ est un caractère et s est une séquence, alors $a \cdot s$ est une séquence. (On omet souvent le constructeur $\cdot$)

On parle aussi d'un mot sur A.
Notation : A^* est l'ensemble de séquences sur A

Exemple : $\texttt{xyz} : \mathit{UTF8}^*$,
plus précisément : $(\texttt{x} \cdot (\texttt{y} \cdot (\texttt{z} \cdot []))) : \mathit{UTF8}^*$

Fonctions sur des séquences (1)

Une fonction $c^* : A_1^* \to A_2^*$ est l'extension homomorphe de la fonction $c : A_1 \to A_2$ si elle est définie par

- $c^*([]) = []$
- $c^*(a \cdot s) = c(a) \cdot c^*(s)$

Informellement :

$$c^*(x_1 x_2 \dots x_n) = c(x_1)c(x_2)\dots c(x_n)$$

Exemple : $c^*(\texttt{xyz}) = c(\texttt{x})c(\texttt{y})c(\texttt{z}) = \texttt{78797A}$

Note : Nous omettons désormais l'opérateur de concaténation $\cdot$.
La concaténation se fait par enchaînement des séquences.

Fonctions sur des séquences (2)

(Non-)Préservation de propriétés par l'extension homomorphe :

- L'injectivité n'est pas préservée :
  Ex. : $c(a) = 0, c(b) = 1, c(c) = 10$, donc $c^*(ba) = 10 = c^*(c)$
- Pour cette raison : si la fonction de codage c a une fonction de décodage d, alors c^* n'a pas forcément une fonction de décodage.
- Soit c bijective avec décodage d. Même si c^* est injective, la fonction de décodage n'est pas forcément la d^* naïve.
  Ex. : $d^*(\texttt{78797A}) \neq d(\texttt{7})d(\texttt{8})\ldots$ mais
  $d^*(\texttt{78797A}) = d(\texttt{78})d(\texttt{79})d(\texttt{7A})$

Codages préfixes

Définition : m est un préfixe de m' s'il existe r avec $m' = m\,r$
Notation : $m \preceq m'$
Exemples : $01 \preceq 011$, $011 \preceq 011$, $010 \not\preceq 011$

c est un code préfixe si pour tout $a, a' \in A$ avec $a \neq a'$: $c(a) \not\preceq c(a')$

Proposition : Si c est un code préfixe, alors c^* est un code unique.

Preuve : Par un algorithme de décodage ...

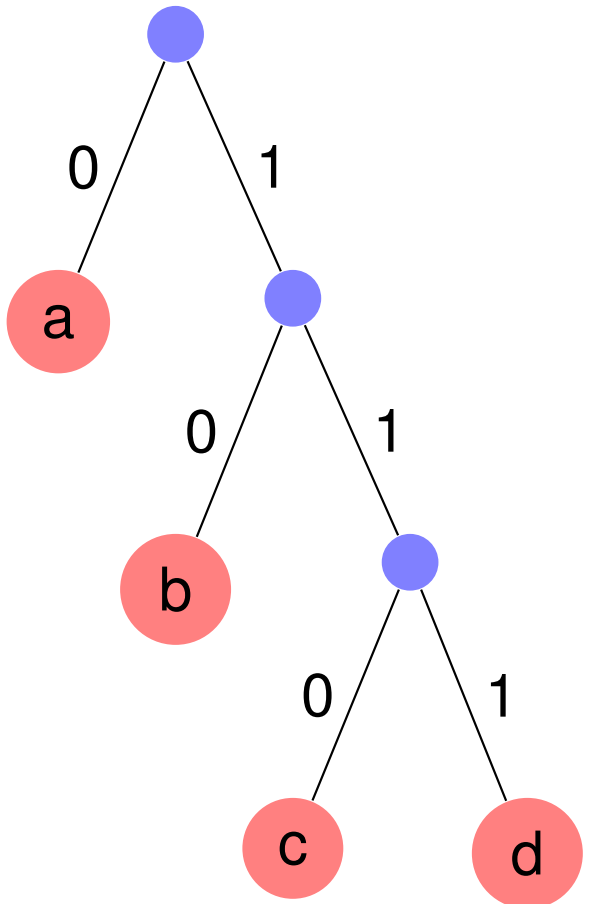
Codages préfixes

Désormais : codages *homomorphes* et *préfixes*

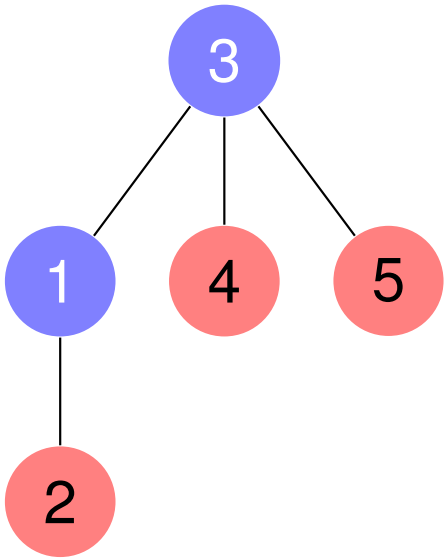
Comment coder un message ?
Facile (comme pour tout codage homomorphe)
Ex. : Codez `acdc` selon la table :

x	$c(x)$
a	0
b	10
c	110
d	111

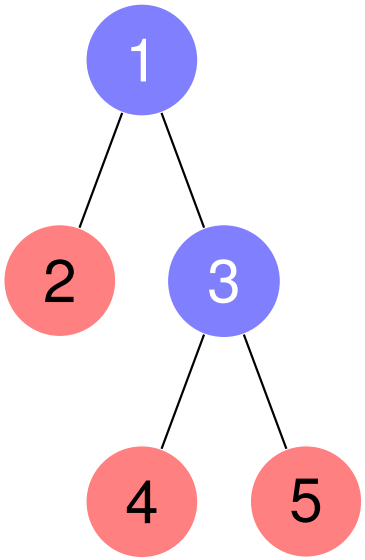
Comment décoder un message ?
Ex. : Décodez `100110`



Interlude : Définitions d'arbres



$\overset{?}{=}$



Plusieurs définitions possibles :

- Graphe avec un chemin unique entre deux noeuds
- Graphe connecté qui devient déconnecté si on supprime un arc
- ...
- ici : Définition *inductive*. Avantages :
  - Traitement facile par *récursion*
  - Prototype de beaucoup de structures informatiques : expressions, programmes, ...

Interlude : Construction inductive d'un arbre

Conventions :

- Arbres binaires : chaque noeud intérieur a exactement 2 successeurs
- On peut associer une information au noeuds ou feuilles

Construction inductive :

1. Une feuille est un arbre
   Écriture : L(*info*) : *arbre*
2. Un noeud intérieur avec deux sous-arbres est un arbre
   Écriture : N(*info*, *arbre*, *arbre*) : *arbre*

. . .et c'est la seule manière de construire un arbre.

Exemple :

```
N(1, L(2),
     N(3, L(4),
          L(5)))
```

Interlude : Fonctions récursives sur les arbres

Principe de la définition d'une fonction f par récursion :

1. Définir le résultat de f sur une feuille :
   $f(L(i)) = lres(i)$
2. Définir le résultat de f sur un noeud, si on connaît les résultats sur les sous-arbres :
   $f(N(i, a_1, a_2)) = nres(i, f(a_1), f(a_2))$

Exemple : Somme des valeurs :

```
somme(L(i)) = i
somme(N(i, a1, a2)) = i + somme(a1) + somme(a2)
```

Exercice : Calculez `somme(N(1, L(2), N(3, L(4), L(5))))`

Construction d'un arbre de décodage

…à partir d'une table de codage, *pour un code préfixe*.

Représentation de la table de codage comme ensemble de couples (caractère, code associé)
Exemple : $\{(a,0);(b,10);(c,110);(d,111)\}$

`arbre_dec` prend : table non vide ; construit : arbre de décodage.

```
arbre_dec ({}) = erreur
arbre_dec ({(c, []) }) = L(c)
arbre_dec (tab) =
      N ((),
          arbre_dec { (c, m) | (c, 0·m) ∈ tab },
          arbre_dec { (c, m) | (c, 1·m) ∈ tab })
```

- Au lieu d'*erreur* : Construire un arbre partiel / binaire incomplet
- `[]` est le mot vide, $m_1 \cdot m_2$ concatène deux mots
- Lire les équations séquentiellement

Construction d'une table de codage

...à partir d'un arbre de décodage.

`tab_cod` prend : mot `m` (initialement vide) et un arbre ; construit : table de codage.

```
tab_cod (m, L(c)) = { (c, m) }
tab_cod (m, N((), g, d)) =
        tab_cod (m·0, g) ∪ tab_cod (m·1, d)
```

$\Rightarrow$ "Arbre de décodage" et "Table de codage" sont des notions équivalentes.
Exercices :

- Représentez l'arbre `arb` de l'exemple
- Calculez `tab_cod [] arb`

Inégalité de Kraft (1)

Théorème : Il existe un code préfixe binaire avec k codes $u_1 \dots u_k$ si et seulement si

$$\sum_{i=1}^{k} 2^{-|u_i|} \leq 1$$

où $|u_i|$ est la longueur du code u_i.
Preuve : devoir maison (voir TD).

Exemple 1 : Construisez un code préfixe pour 5 codes avec des longueurs $|u_1| = 1, |u_2| = 2, |u_3| = 2, |u_4| = 3, |u_5| = 4$.
On constate qu'un tel code n'existe pas parce que

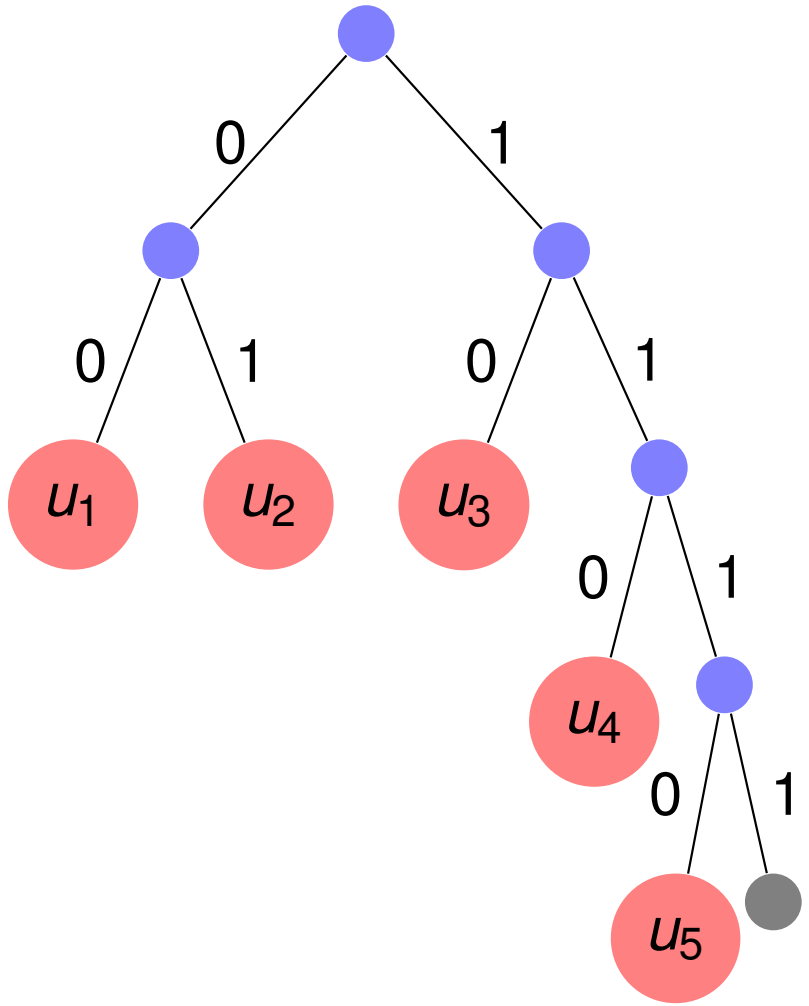
$$\sum_{i=1}^{5} 2^{-|u_i|} = \frac{19}{16} > 1$$

Inégalité de Kraft (2)

Exemple 2 : Construisez un code préfixe avec $|u_1| = 2, |u_2| = 2, |u_3| = 2, |u_4| = 3, |u_5| = 4$.
Un tel code existe parce que

$$\sum_{i=1}^{5} 2^{-|u_i|} = \frac{15}{16} \leq 1$$

Idee de construction de l'arbre :
"Remplir" l'arbre à profondeur 2, ensuite 3, ensuite 4



Résumé : Codes et codage

Ce que nous avons vu :

- Hiérarchie de classes de codes : injectif, unique, préfixe
- Codes préfixes (aussi appelés *instantanés*) : Décodage possible "en temps réel", sans attendre la fin du message.
- Considéré ici : Alphabet cible est $\{0, 1\}$. Extension vers alphabets de taille $n > 2$ avec arbres n-aires possible.
- Inégalité de Kraft : (Im)possibilité de construire des codes avec certaines longueurs.

Notation :

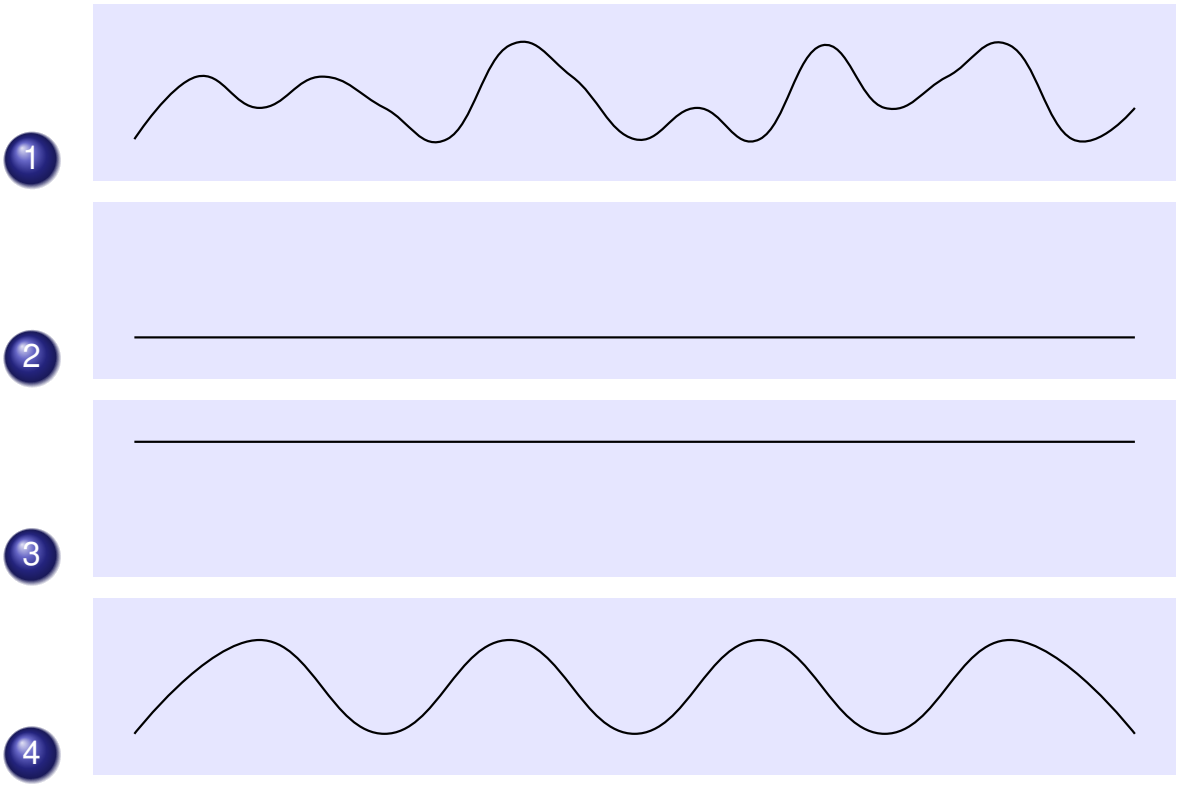
- *Codage :* une fonction qui traduit d'un alphabet vers un autre
- *Code :* peut désigner à la fois :
  - un alphabet (*Ex. : UTF*8)
  - l'ensemble de mots sur cet alphabet (*Ex. : UTF*8^*)
  - une fonction de codage (*Ex. : UTF*$8^* \to HEX^*$)

Plan

Plan

Motivation : Qu'est-ce que vous trouvez informatif ?

Voici les ondes émises par 4 stations de radio :



Quelle station vous semble la plus intéressante / informative ?

Types de signaux et sources

Émetteur : *source d'information* qui émet des *signaux aléatoires*.

Types de signaux :

- continu
- $\Rightarrow$ ici : discret : $s_0, s_1, \ldots$

Types de source :

- *Dépendance de valeurs antérieures :*
  - $\Rightarrow$ ici : sans mémoire
  - markovienne (signal s_{n+1} dépend de s_n)
- *Évolution au cours du temps :*
  - $\Rightarrow$ ici : stationnaire (pas d'évolution)
  - non-stationnaire

Information (motivation) : mesure de Hartley

Première approximation :

Quelle est la capacité informationnelle d'émetteur X qui émet un

1. $s \in E_8 = \{000, \ldots, 111\}$
2. $s \in E_{16} = \{0000, \ldots, 1111\}$

Observation : rapport logarithmique entre

- taille $|E|$ de l'ensemble des événements E
- taille des mots pour décrire les éléments de E

Proposition (informelle) : $Info(X) := log_2(|E|)$bits

Voir :

R.V.L. Hartley : *Transmission of Information*, Bell Syst. Tech. J., 1928

Information (motivation) : mesure de Shannon

Soit X une source qui émet des signaux
$E_8 = \{000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111\}$
Quelle est la complexité pour décrire

- un élément vert : "commence avec 0" $\rightsquigarrow$ complexité 1
- un élément rouge : "commence avec 10" $\rightsquigarrow$ complexité 2
- un élément bleu / noir : "est 110" / "est 111" $\rightsquigarrow$ complexité 3

Observations :

- la fréquence d'occurence d'éléments n'est pas uniforme
- élément plus fréquent $\rightsquigarrow$ description plus compacte

Proposition (informelle) : pondérer complexité avec fréquence
Ici : "la complexité moyenne" pour décrire un $s \in E_8$ relatif aux événements désignés :
$Info(X) = 0.5 * 1 + 0.25 * 2 + 0.125 * 3 + 0.125 * 3 = 1.75$bits

Quelques notions de la théorie de probabilité (1)

Espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, où

- Ω est l'ensemble des résultats d'une expérience aléatoire
  Ex. jeu de dés : $\Omega = \{1, \ldots, 6\}$
- $\mathcal{A} \subseteq 2^\Omega$ est l'ensemble des événements
  (*Notation :* 2^Ω ensemble des parties de Ω)
  Ex. : $A \in \mathcal{A}$ pour $A = \{2, 4, 6\}$ est l'événement "nombre pair".
- $P : \mathcal{A} \to [0 \ldots 1]$ est une mesure de probabilité
  Ex. : $P(\{1\}) = \cdots = P(\{6\}) = \frac{1}{6}$

Règles de bonne formation :

- $\Omega \in \mathcal{A}$, $\mathcal{A}$ est stable sous complément, union (dénombrable), intersection (dénombrable), *donc :* si $A \in \mathcal{A}$, alors $\overline{A} \in \mathcal{A}$ etc.
- $P(\Omega) = 1$ et $\forall A \in \mathcal{A}. P(A) \geq 0$
- $P(\bigcup_{i \in I} A_i) = \sum_{i \in I} P(A_i)$ pour des A_i mutuellement disjoints et I dénombrable
  Ex. : $P(\{2, 4, 6\}) = P(\{2\}) + P(\{4\}) + P(\{6\}) = \frac{1}{2}$

Quelques notions de la théorie de probabilité (2)

Variable aléatoire X pour "mesurer" les résultats d'une expérience.
$X : \Omega \to S$, où

- S est un ensemble
- très souvent : $S = \mathbb{R}$
- souvent : X est l'identité

Notation :

- pour var. aléatoire X et valeur $x \in S$:
  $P_X(x) =_{def} P(X = x) =_{def} P(\{\omega \mid X(\omega) = x\})$
- similaire : $P(a \leq X \leq b) =_{def} P(\{\omega \mid a \leq X(\omega) \leq b\})$ etc.

Exemple :

- Ω : ensemble de cercles $\{(c_i, r_i)\}$ caractérisés par coordonnée du centre c_i et rayon r_i
- $X : \Omega \to \mathbb{R}$ avec $X(c, r) = \pi r^2$
- $P(4.9 \leq X \leq 5.1)$ Proba que surface de cercle est entre 4.9 et 5.1

Quelques notions de la théorie de probabilité (3)

Espérance $E(X)$ d'une variable aléatoire X relative à fonction g :

$$E(g,X) =_{def} \sum_{i \in I} g(x_i) * P_X(x_i)$$

[*déf. habituelle* pour $g(x) = x$ est : $E(X) = \sum_{i \in I} x_i * P_X(x_i)$]

Exemple :

Nombre de points (0 . . .5) obtenus dans un test fait par 12 personnes.

Approximation : $P_X(x_i) = \frac{\#pers.(x_i)}{12}$

Points x_i	0	1	2	3	4	5
# personnes(x_i)	1	2	4	3	1	1
$P_X(x_i)$	0.083	0.166	0.333	0.25	0.083	0.083

$E(X) =$

$0 * 0.083 + 1 * 0.166 + 2 * 0.333 + 3 * 0.25 + 4 * 0.083 + 5 * 0.083 = 2.333$

Définition d'entropie (1)

Entropie (selon Shannon) :

$$H(X) =_{def} \sum_{i \in I} (-\log_2(P_X(x_i))) * P_X(x_i)$$

- *Problème* de calcul de log si $P_X(x_i) = 0$
  $\rightsquigarrow$ restriction à ensemble d'indices I avec $P_X(x_i) \neq 0$
- *Entropie et espérance :* $H(X) = E((\lambda x. -\log_2(P_X(x))), X)$
- Unité de l'entropie : *bit* ("binary digit")

Exemple : Lampe à 4 "couleurs" et probabilté que couleur soit visible :

Couleur x_i	vert	rouge	bleu	noir
$P_X(x_i)$	0.5	0.25	0.125	0.125

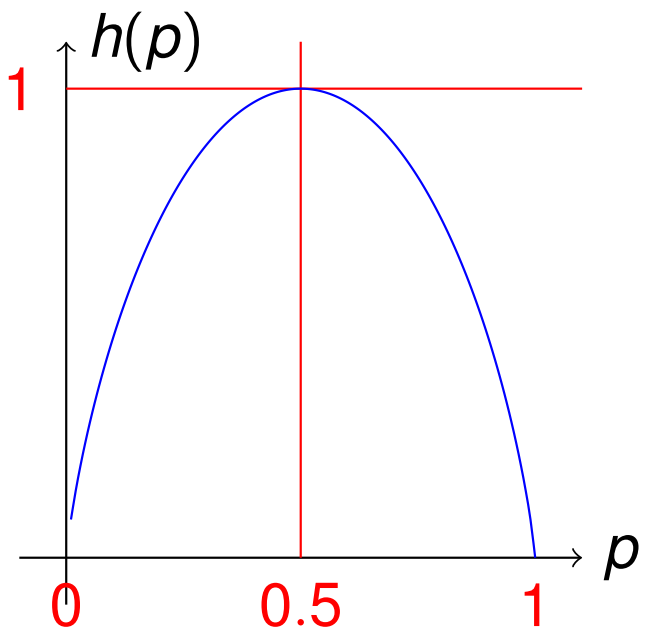
$$\begin{aligned} H(X) &= (-\log_2(2^{-1})) * 0.5 + (-\log_2(2^{-2})) * 0.25 + \\ &\quad (-\log_2(2^{-3})) * 0.125 + (-\log_2(2^{-3})) * 0.125 = 1.75\text{bits} \end{aligned}$$

Définition d'entropie (2)

Illustration : Soit X une var. aléatoire avec deux valeurs possibles x_1, x_2 et

- $P_X(x_1) = p$
- donc : $P_X(x_2) = 1 - p$

Alors, $H(X) = -p\log_2(p) - (1-p)\log_2(1-p) =_{def} h(p)$



Plan

Feuille de route

Vu jusqu'à maintenant :

- Définition d'entropie d'une source d'information
- Codage homomorphe d'un alphabet avec un code préfixe
- . . .(im)possibilité sous contraintes (théorème de Kraft)

Dans cette section :

- Rapport entre entropie et longueur des mots d'un code : théorème de Shannon
- Construction effectif d'un codage optimal : algorithme de Huffman

Cadre de travail :

- Source d'information stationnaire et sans mémoire
- Codage homomorphe : *un* caractère à la fois

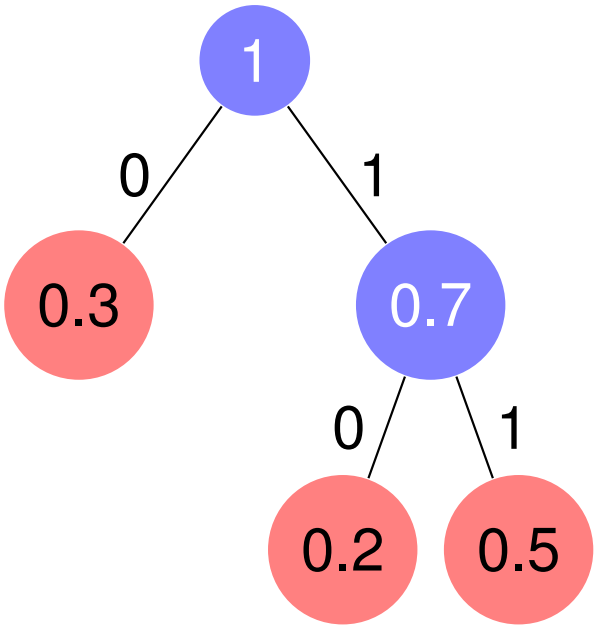
Arbres avec probabilités

[Discussion d'après : J. Massey : Applied Digital Information Theory]

- Dans un arbre avec probabilités, l'annotation d'un noeud est la somme des annotations de ses enfants.
- L'arbre est *complet* si la racine est annotée avec 1

Exercice : Pour un arbre a, donnez les fonctions calculant l'ensemble

- de tous les mots de code avec leur probabilité :
  $cp(a) = \{([], 1), (0, 0.3), (1, 0.7), (10, 0.2), (11, 0.5)\}$
- des mots aboutissant à des feuilles, et proba :
  $cpf(a) = \{(0, 0.3), (10, 0.2), (11, 0.5)\}$
- des noeuds intérieurs, et proba :
  $cpi(a) = \{([], 1), (1, 0.7)\}$



Lemme des longueurs des chemins

Définitions :

- Longueur moyenne d'un ensemble (mot $\times$ probabilté) :
  $lnm(E) = \sum_{(m,p)\in E} |m| * p$
  Exemple : $lnm(cpf(a)) = 1 * 0.3 + 2 * 0.2 + 2 * 0.5 = 1.7$
- Somme des probabilités d'un ensemble (mot $\times$ probabilté) :
  $sp(E) = \sum_{(m,p)\in E} p$
  Exemple : $sp(cpi(a)) = 1 + 0.7 = 1.7$

Lemme : Dans un arbre avec probabilités, la longueur moyenne des mots aboutissant à des feuilles est égale à la somme des probabilités des noeuds intérieurs :

$$lnm(cpf(a)) = sp(cpi(a))$$

Entropie d'un code

Définition : L'entropie d'un arbre est l'entropie de ses feuilles.

$$H(a) = -\sum_{(m,p)\in cpf(a)} (\log_2 p) * p$$

Note : Dépend uniquement de la distribution de probabilité ; indépendant des mots dans l'arbre

Exemple :
$H(a) = -(\log_2(0.3) * 0.3 + \log_2(0.2) * 0.2 + \log_2(0.5) * 0.5) = 1.485$

Astuce si $\log_2$ n'est pas disponible sur calculette :

$$\log_2(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(2)}$$

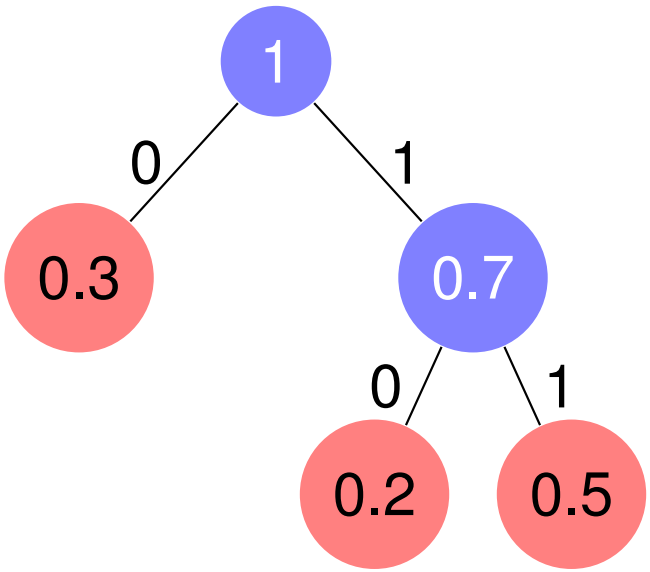
Théorème de Shannon, 1ère partie

Théorème : L'entropie d'un arbre complet de codage a est une *borne inférieure* de la longueur moyenne de son code :

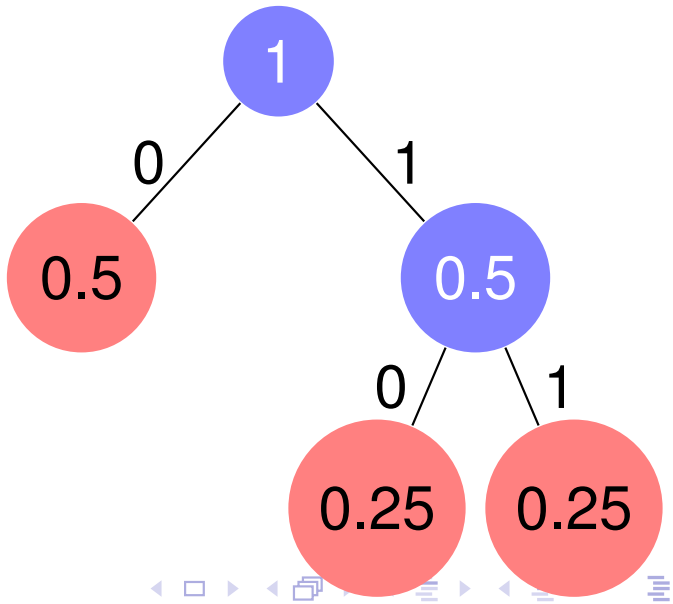
$$H(a) \leq lnm(cpf(a))$$

Preuve : Voir TD.

Exemple 1 :
$H(a) = 1.485 < 1.7 = lnm(cpf(a))$



Exemple 2 :
$H(a) = 1.5 = lnm(cpf(a))$



Théorème de Shannon, 2ème partie

Théorème : La *borne supérieure* de la longueur moyenne d'un code préfixe minimal pour une source d'information aléatoire U avec entropie $H(U)$ est $H(U)+1$:

$$lnm(cpf(a)) < H(U)+1$$

Preuve : On cherche code $m_1 \dots m_k$ pour les caractères $u_1 \dots u_k$ de U.
Choisissons $|m_i| = \lceil -log_2 P_U(u_i) \rceil$, alors
$-log_2 P_U(u_i) \leq |m_i| < -log_2 P_U(u_i) + 1$
On vérifie $\sum_{i=1}^{k} 2^{-|m_i|} \leq \sum_{i=1}^{k} 2^{log_2 P_U(u_i)} = \sum_{i=1}^{k} P_U(u_i) = 1$
Selon l'inégalité de Kraft, un tel code préfixe existe.
En plus :
$lnm(cpf(a)) = \sum_{i=1}^{k} |m_i| * P_U(u_i)$
$< \sum_{i=1}^{k} ((-log_2 P_U(u_i)) + 1) * P_U(u_i)$
$= \sum_{i=1}^{k} (-log_2 P_U(u_i)) * P_U(u_i) + \sum_{i=1}^{k} P_U(u_i) = H(U)+1$

Algorithme de Huffman (1)

Comment construire *effectivement* un code optimal pour une source d'information aléatoire U avec alphabet $\{u_1 \dots u_k\}$?
Démarche globale :

1. Déterminer la distribution de probabilité $P_U(u_i)$ des caractères
   - par estimation (distribution des caractères en français, anglais, ...)
   - par calcul de la fréquence dans un texte donné

     Exemple : `un petit texte`

u_i	␣	e	i	n	p	t	u	x
# occ	2	3	1	1	1	4	1	1
$P_U(u_i)$	$\frac{2}{14}$	$\frac{3}{14}$	...					

2. Construire l'arbre de codage
3. L'utiliser pour le codage du texte

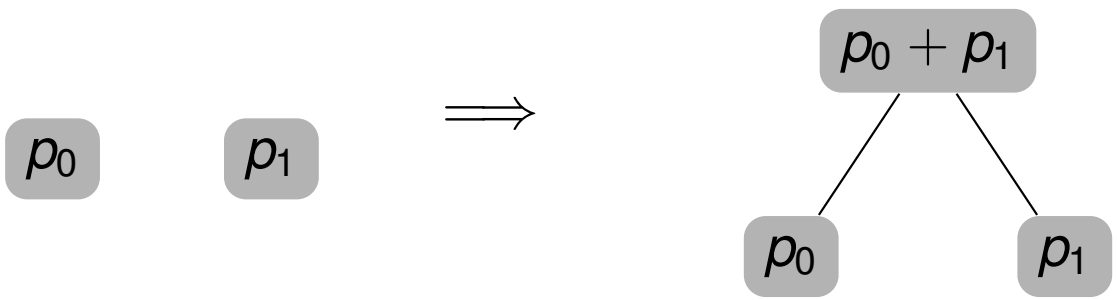
Algorithme de Huffman (2)

Structure de données : Ensemble E d'arbres dont

- les feuilles contiennent : probabilité, caractère codé
- les noeuds intérieurs contiennent : probabilité cumulée

Algorithme pour construire un arbre de codage optimal a à partir de caractères $u_1 \dots u_k$ et leurs probabilités associés $p_1 \dots p_k$

1. *Initialisation* : $E := \{L(p_i, u_i) | 1 \leq i \leq k\}$
2. Tant que E contient plus d'un élément :
   1. Sélectionner deux arbres $a_0, a_1 \in E$ dont la probabilité est minimale
   2. Les remplacer par $N(p, a_0, a_1)$, où p est la somme des probas de a_0 et a_1

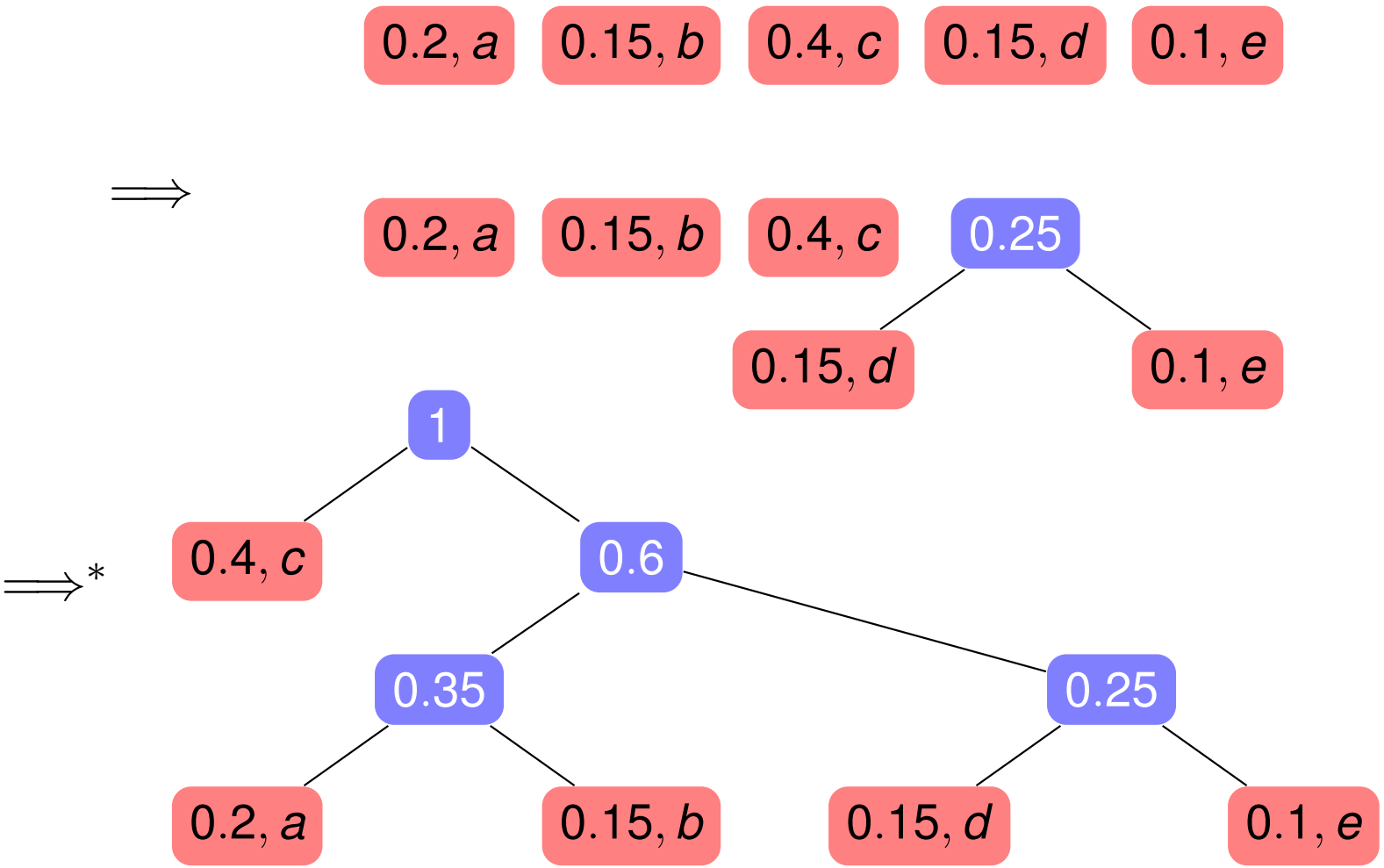


3. Fin de boucle : $E = \{a\}$. Renvoyer a.

Algorithme de Huffman (3)

Exemple : Distribution de fréquence :

a	b	c	d	e
0.2	0.15	0.4	0.15	0.1



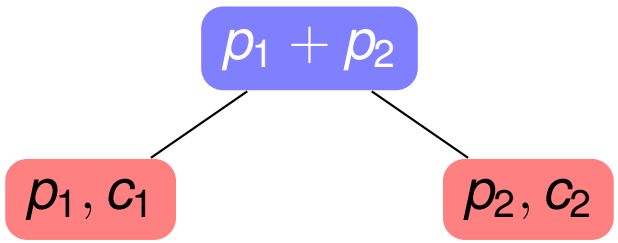
Algorithme de Huffman (4)

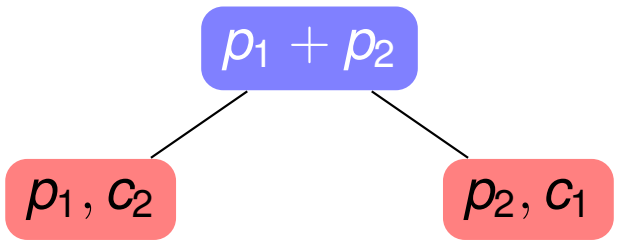
Définition : Code *optimal* pour une source d'information aléatoire U = Code *minimal* parmi tous les codes pour U

Proposition : L'algorithme de Huffman construit un code optimal pour U

Esquisse de preuve : [Détails : Cover / Thomas : *Information Theory*]
Soit a_o un arbre de code optimal. Alors, il ne peut pas être meilleur que a_h construit par Huffman.

- a_o n'a pas de noeud n avec un seul enfant e
  sinon : fusion de n et e donne meilleur code
- a_o code $c_1 \mapsto m_1, c_2 \mapsto m_2$
  permuter pour obtenir code de a_h avec $c_1 \mapsto m_2, c_2 \mapsto m_1$
  et même longueur moyenne du code





Mise en garde

Codage "optimal"

- pour l'hypothèse de travail :
  - source sans mémoire ; codage de caractères individuels
- . . .mais non dans l'absolu

Exemple :

1. Codage de caractères a ($P(a) = \frac{1}{4}$) et b ($P(b) = \frac{3}{4}$)
   Code Huffman : $c(a) = 0, c(b) = 1$.
   Longueur moyenne de codage par caractère : 1
2. Codage de deux caractères consécutifs :
   Code Huffman : $c(aa) = 010, c(ab) = 011, c(ba) = 00, c(bb) = 1$.
   Longueur moyenne de mot de code :
   $3 * \frac{1}{16} + 3 * \frac{3}{16} + 2 * \frac{3}{16} + 1 * \frac{9}{16} = 1.6875$
   Longueur moyenne de codage par caractère : $1.6875/2$

$\Rightarrow$ Meilleurs résultats pour regroupements de caractères . . .

Plan

Plan

Critique : Information selon Shannon (1)

Rappel : Entropie :

- Notion *probabiliste* : dépend de la probabilité des caractères
- . . . laquelle est typiquement estimée à partir d'un corpus large (*exemple :* tous les textes en français de la bibliothèque nationale)

Codage optimal :

- Sur la base d'un connaissance *a priori* de la distribution de probabilité
  donc : de l'ensemble de *tous* les messages
- Indépendant d'un message individuel

Critique : Information selon Shannon (2)

Défauts et insuffissances de la notion de Shannon :

- On s'intéresse souvent à la compression d'un seul message / fichier donné (et non à tous les messages concevables)
- On ne connaît pas la distribution de probabilité
- Il y a d'autres types de redondance
- *Exemple :* Compression d'un fichier écrit en Python
  - Distribution de caractères représentative pour un texte en fraçais / en anglais ?
  - Peu de variations syntaxiques (langage artificiel)
  - Répétition de mots-clés (`while, if`) et noms de variables
- *Exemple :* Compression d'une image
  - Des régions de l'image ont la même couleur
    "le rectangle entre les coordonnées (15, 42) et (37, 98) est bleu"

Une meilleure compression est-elle possible ?

Exemples :

1. 01010101010101010101010101010101010101010101

Une meilleure compression est-elle possible ?

Exemples :

1. `01010101010101010101010101010101010101010101`
   “20 fois `01`”
2. `11010010001000010 0` ...
   `10000000000000000000000000000000000000`

Une meilleure compression est-elle possible ?

Exemples :

1. `01010101010101010101010101010101010101010101`
   “20 fois `01`”
2. `11010010001000010010000000000000000000000000`

```
for i in [0..36]
  print("1");
  for j in [1 .. i]
    print("0")
```

3. `01101010000010011110011001100111111100111011110011001001000010000`

Une meilleure compression est-elle possible ?

Exemples :

1. `01010101010101010101010101010101010101010101`
   "20 fois `01`"
2. `11010010001000010010000100000000000000000000`
   ```
   for i in [0..36]
     print("1");
     for j in [1 .. i]
       print("0")
   ```
3. `01101010000010011110011001100111111100111011`
   `1100100100001000`
   "la représentation binaire de $\sqrt{2}-1$"

Survol de ce chapitre

- La notion de complexité de Kolmogorov :
  “La plus courte description pour une chaîne de caractères donnée”
  - *But :* Une autre vue sur la notion de contenu informationnel que l’entropie
  - *Chemin faisant, une découverte :* un problème insoluble ! Impossibilité de calculer la plus courte description
- Une application pratique : l’algorithme LZW
  compression d’un texte à l’aide d’un dictionnaire
  But : Les rouages des algorithmes de la famille `zip`

Plan

Complexité de Kolmogorov : Définition préliminaire

Première approximation :

Complexité de Kolmogorov $K(s)$ d'une chaîne de caractères s :
$K(s)$ est la taille de la description la plus courte de s
Notation : $|d|$ est la taille de la chaîne / description d
Par exemple :

- $s =$ `0101010101010101010101010101010101010101`
- $|s| = 40$
- $d =$ 20 fois `01`
- $|d| = 8$

Problèmes :

- Est-ce vraiment la plus courte description ? *à voir . . .*
- Qu'est-ce qu'une description ?
  - Notion pas très précise . . .
  - avec un problème fondamental . . .

Le paradoxe de Berry (1)

Définissons le nombre n par :

le plus petit nombre non descriptible en moins de douze mots

(*NB :* la description comporte onze mots)

Trouvez le nombre n

Il est descriptible avec combien de mots ?

Le paradoxe de Berry (2)

Le langage mathématique n'est pas exempt de ces problèmes et permet d'énoncer des descriptions insensées.

Quelles définitions acceptez vous ?

- Ensembles : $E_1 = \{E | E \notin E\}$
  (est-ce que $E_1 \in E_1$ ou $E_1 \notin E_1$?)
- Ensembles : $E_2 = \{n \in \mathbf{N} | n \mod 3 = 0\}$
- Récursion : La fonction f telle que pour tout x, $f(x) = f(x) + 1$
- Récursion : La fonction $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ telle que :
  - $f(0) = 0$
  - $f(n) = n + f(n-1)$ pour $n > 0$

Conclusion :

- il faut préciser la notion de "description"
- et préférer une notion *constructive*

Descriptions constructives

La description verbale “*n* fois `01`”
remplacé par un programme (avec paramètre *n*) dans un langage de programmation fixe :

```
for i in [1 .. n]
  print("01");
```

Avantage :

- un langage de programmation a une sémantique précise
- évite les ambiguïtés du langage naturel

Quel langage précisément ?

- Imaginez-vous Python . . .
- mais ça pourrait être C, Java
  sans impact essentiel sur le résultat (voir TD)
- *Important :* le langage est *fixe*

Programmes et leur code binaire (1)

Nous considérons désormais les programmes dans un format binaire
Exemple :

- Format textuel :
  Programme p = `for i in [1 .. n] print("01");`
  Argument $n = 20$
- Format binaire :
  p = `1001101101010111`
  (phantaisiste - en ASCII, UTF-8, ...) *Important :* format *fixe*
  $n = 10100$

NB : Quelques programmes produisent des séquences infinies (sans importance pour la discussion suivante) :

```
while true
    print("1");
```

Programmes et leur code binaire (2)

Application d'un programme p à un argument n :

- Format textuel : $p(n)$
  Exemple : $p(20)$
- Format binaire : $\langle p, n \rangle$
  Exemple : $\langle 1001101101010111, 10100 \rangle$
  Essentiellement la concaténation de p et n

Pourquoi la représentation binaire ?
Premier avantage : Notation uniforme pour

- *Codage :* $\{0,1\}^* \to \{0,1\}^*$
  $s =$ 0101010101010101010101010101010101010101
  $\mapsto \langle p, n \rangle =$ 1001101101010111 10100
- *Décodage :* $\{0,1\}^* \to \{0,1\}^*$
  $\langle p, n \rangle \mapsto s$

Programmes et leur code binaire (3)

Deuxième avantage : On peut trier les fonctions selon leur code

Programme (texte)	Programme (binaire)	Progr. indexé (décimal)
`print("0");`	`10001`	p_{17}
`print("1");`	`10101`	p_{21}
`...`		
`for i in ...`	`1001101101010111`	p_{39767}
`...`		

Beaucoup d'indices correspondent à des programmes mal formés.
Ex. : `while print ();`
On ne les liste pas.

Fonctions calculables

Nous avons vu :

- Des programmes représentés comme séquences $\{0,1\}^*$
- qui prénnent des entrées $\{0,1\}^*$
- et produisent des sorties $\{0,1\}^*$

Donc : un programme est une fonction $\{0,1\}^* \to \{0,1\}^*$

	$\langle p_i, 0\rangle$	$\langle p_i, 1\rangle$	$\langle p_i, 10\rangle$	$\langle p_i, 11\rangle$	...
p_{17}	0	0	0	0	...
p_{21}	1	1	1	1	...
p_{39767}	[ ]	01	0101	010101	...

Une fonction est dite calculable s'il y a un programme qui la représente.

Fonctions non calculables (1)

Question : est-ce que toute fonction $\{0,1\}^* \to \{0,1\}^*$ est calculable ?
Supposons que oui.
Soit $p@0, p@1, p@2 \ldots$ l'énumération des programmes
et $s_0, s_1, s_2 \in \{0,1\}^*$ l'énumération des séquences

Dérivons une contradiction par diagonalisation :

	$\langle p_i, s_0 \rangle$	$\langle p_i, s_1 \rangle$	$\langle p_i, s_2 \rangle$	$\langle p_i, s_3 \rangle$	...
$p@0$	1 ~~0~~	0	0	0	...
$p@1$	1	0 ~~1~~	1	1	...
$p@2$	[ ]	01	1101 ~~0101~~	010101	...
...					

La fonction qui diffère sur la diagonale n'est pas dans la liste des programmes

Fonctions non calculables (2)

De manière plus formelle :
Définissons, pour une séquence s, la fonction “rendre différent”, $\overline{s}$, par $\overline{[]} = 0$ et $\overline{0s'} = 1s'$ et $\overline{1s'} = 0s'$
Constat : Pour tout s : $\overline{s} \neq s$

Définissons la fonction *nc* (“non calculable”) par :
$nc(s_i) = \overline{\langle p@i, s_i \rangle}$

Supposons que *nc* est représenté par le programme à la position k :
$nc = p@k$.

Alors, $nc(s_k) = \overline{\langle p@k, s_k \rangle} \neq \langle p@k, s_k \rangle = p@k(s_k)$
Contradiction.

Une fonction moins artificielle que *nc* ? Dans quelques instants . . .

Complexité de Kolmogorov : Définition précise

Définissons

- le décodeur de Kolmogorov d_K par
  $d_K(\langle p, n\rangle) =$ le résultat de $p(n)$
  (indéfini si p n'est pas un programme valide)
- le code de Kolmogorov c_K par
  $c_K(x) =$ le plus court et plus petit (comme nombre binaire) y tq. $d_K(y) = x$
- la complexité de Kolmogorov $K(x) = |c_K(x)|$

Lemme : Pour tout n, il existe x avec $|x| = n$ tq. $K(x) \geq n$
Preuve : voir TD

Complexité de Kolmogorov non calculable (1)

Supposons que K est calculable. Nous pouvons définir le programme (bien défini à cause du lemme) :

```
sequenceComplexe(n) =
  for s with  |s| = n
    if K(s)  ≥  n:
       print(s); return;
```

Soit p le programme `sequenceComplexe` avec sous-programme `K`
Choisissons m avec $m > |\langle p, m\rangle|$ (voir TD).
Argument informel :

- Exécutons `sequenceComplexe(m)`, nous obtenons s avec $K(s) \geq m$
- s ne peut donc pas être produit par un programme plus court que m
- Mais la configuration $\langle p, m\rangle$ est plus courte que m
- Contradiction !

Complexité de Kolmogorov non calculable (2)

Plus formellement :

- $d_K(\langle p, m\rangle) = \texttt{sequenceComplexe}(m) = s$ avec $K(s) \geq m > |\langle p, m\rangle|$.
- Par contre : $|\langle p, m\rangle| \geq |c_K(s)| = K(s)$
- Contradiction, donc : K(x) n'est pas calculable

(Vous avez un effet de déjà-vu ? Comparez avec le paradoxe de Berry)

Résumé

But :

- Développer un autre concept d'"information" que l'entropie
- Notion de compression optimale pour message individuel (concept non probabiliste)

Difficultés :

- Notion informelle trop imprécise $\rightsquigarrow$ paradoxes
- Définition formelle : complexité de Kolmogorov

Résultat : Complexité de Kolmogorov non calculable :

- Impossibilité d'une solution algorithmique
  - Impossibilité forte (mathématique) . . .
  - et non au sens conventionnel (pas de temps, manque d'envie, trop stupide . . .)
- [Publicité : cours "Calculabilité" du L3]

Pourtant : regardons des algorithmes sans garantie d'optimalité !

Plan

Pour situer le contexte

Entropie : Notion d'information d'une source

- qui émet des signaux / caractères avec une certaine probabilité
- où les signaux se produisent de manière indépendante ("sans mémoire")

Codage de Huffman : Optimal pour une telle source d'information

Une hypothèse réaliste ?

- *Oui*, si vous n'avez aucune connaissance supplémentaire
- *Non* pour une source d'informations plus structurées
  Exemples :
  - textes en langage naturel
  - programmes
  - images avec beaucoup de répétitions

Ici : Algorithmes de compression à base de dictionnaires

Compression à base de dictionnaires – Idée

Un texte à transmettre, par exemple :

Une compression à base d'un dictionnaire peut être plus efficace qu'une compression à base d'entropie.

Un dictionnaire partagé entre l'émetteur et le récepteur, p. ex. le Littré :

Posit. du mot	mot	définition
1	**a**	Voyelle et première lettre de l'alphabet.
2	**a**	3e pers. sing. du verbe *avoir*.
3	**à**	(préposition)
...		
5.233	**compression**	L'état qui résulte de la compression.
...		
60.582/3	**un, une**	Adjectif numéral

Le texte codé :

[60.583, 5.233, 3, 1.220, 7.588, 60.582, 8.122, ...]

Méthodes statiques et adaptatives

Méthodes statiques : (exemple précédent)

- Dictionnaire partagé entre émetteur et récepteur.
- Dans le texte codé, chaque mot du texte source est remplacé par sa position dans le dictionnaire.
- Fréquence de mise à jour et transmission du dictionnaire est négligeable.
- $\rightsquigarrow$ moyennement adapté au langage naturel (voir TD).
- $\rightsquigarrow$ inadapté aux applications informatiques.

Méthodes adaptatives :

- Sans dictionnaire partagé, ou dictionnaire partagé minimaliste.
- Lors du codage, on construit un dictionnaire et le texte compressé.
- Seulement le texte compressé est transmis.
- $\rightsquigarrow$ la base des algorithmes actuels de codage.

Compression à base de dictionnaires – Histoire (1)

LZ77 : Jacob Ziv et Abraham Lempel : *A Universal Algorithm for Sequential Data Compression* (1977)

Algorithme à base d'une "fenêtre" qui glisse sur un texte.
Dictionnaire : parties de texte de la fenêtre

Exemple d'un texte de programme à coder :

- Texte déjà lu et codé jusqu'au dernier caractère de la fenêtre :
  `begin for(i=0; i<MAX-1; i++) for(j=i+1; j<MAX; j++)`
- Dans le texte à coder, on reconnaît un sous-texte de la fenêtre :
  `begin for(i=0; i<MAX-1; i++) for(j=i+1; j<MAX; j++)`
- On code `<MAX` par le triplet (11, 4, ' ;') : sa position relative au début de la fenêtre ; sa longueur ; le caractère suivant
- On avance la fenêtre et continue à coder :
  `begin for( i=0; i<MAX-1; i++) for(j=i+1; j<MAX; j++)`

Compression à base de dictionnaires – Histoire (2)

LZ78 : Jacob Ziv et Abraham Lempel : *Compression of Individual Sequences via Variable-Rate Coding* (1978)

- Plus de fenêtre glissante, mais . . .
- un dictionnaire de chaînes de caractères rencontrées avant.

LZW : Terry Welch : *A Technique for High-Performance Data Compression* (1984)

- Extension de l'algorithme LZ78
- Différence essentielle : dictionnaire initialisé avec tous les caractères de l'alphabet.

Compression à base de dictionnaires – Histoire (3)

Compression de textes :

- `compress` : utilitaire du OS Unix qui utilisait LZW
- *Problème :* LZW était breveté par Sperry / Unisys corporation
- `gzip` : programme de compression alternatif (et libre), combinaison de LZ77 et codage de Huffman.

Compression d'images :

- GIF (Graphics Interchange Format) basé sur LZW souffre du problème du brevet de LZW
- Alternative : PNG / PING ("PING is not GIF") compression : LZ77 et autres

Une multitude de programmes combinant différentes approches :

- `7-Zip` : basé sur algorithme Lempel-Ziv-Markov, combinaison de LZ77 et chaînes de Markov (codage d'entropie)
- `bzip` : transformation de Burrows-Wheeler ; transformation Move-to-Front ; codage de Huffman
- ...

LZW en détail

Structure de données : le dictionnaire

- *en principe :* un tableau de chaînes de caractères

'a'	'b'	'c'	'ab'	'ba'

- *ici, vue plus convenable :* association (chaîne $\mapsto$ position)
  donc : dictionnaire au sens de Python :
  `{'a': 0, 'b': 1, 'c': 2, 'ab': 3, 'ba': 4}`

Initialisation du dictionnaire :

- Initialisation avec l'ensemble des caractères de l'alphabet
- . . . dans un ordre convenu par l'émetteur et le récepteur
- *Ex. :* Alphabet $\{a, b, c\}$, dict. : `{'a': 0, 'b': 1, 'c': 2}`
- *Ex. :* Alphabet ASCII, dict. : caractère $\mapsto$ code ASCII

LZW : compression (1)

Entrée : Une chaîne de caractères `str`
Sortie : Une liste `compr` de positions dans le dictionnaire

Algorithme : construit en même temps

- la sortie `compr`
- le dictionnaire `dict`

1. Initialis. de `dict`, `compr = []`, mot partiel `m = ''` (chaîne vide)
2. Boucle : Pour tout caractère `c` de `str` : (*)
   - si `m + c` est dans `dict`, étendre `m` avec `c`
   - si `m + c` n'est pas dans `dict` :
     - Ajouter `dict[m]` à `compr`
     - Ajouter `m + c` à la dernière position de `dict`
     - Mettre `m=c`
3. Pour finir, rajouter `dict[m]` à `compr`

LZW : compression (2)

Exemple pour l'alphabet $\{a, b, c\}$

- Entrée : `'abacababac'`
- Dictionnaire initial : `{'a': 0, 'b': 1, 'c': 2}`
- Dictionnaire final :
  `{'a': 0, 'b': 1, 'c': 2, 'ab': 3, 'ba': 4, 'ac': 5, 'ca': 6, 'aba': 7, 'abac': 8}`
- Résultat `compr` : `[0, 1, 0, 2, 3, 7, 2]`

Reconstruction :

0	1	0	2	3	7	2
a	b	a	c	ab	aba	c

LZW : compression (3)

Zoom sur la phase de construction, à la position (*) de l'algorithme :

- `dict= {'a': 0, 'b': 1, 'c': 2 }`
- `compr = []`
- `str = abacababac`, `m=''`, `c=a=str[0]`

LZW : compression (3)

Zoom sur la phase de construction, à la position (*) de l'algorithme :

- `dict= {'a': 0, 'b': 1, 'c': 2 }`
- `compr = []`
- `str = abacababac`, `m=a`, `c=b=str[1]`

LZW : compression (3)

Zoom sur la phase de construction, à la position (*) de l'algorithme :

- `dict= {'a': 0, 'b': 1, 'c': 2, 'ab': 3 }`
- `compr = [0]`
- `str = ababacababac`, `m=b`, `c=a=str[2]`

LZW : compression (3)

Zoom sur la phase de construction, à la position (*) de l'algorithme :

- `dict= {'a': 0, 'b': 1, 'c': 2, 'ab': 3, 'ba': 4 }`
- `compr = [0, 1]`
- `str = abacababac`, `m=a`, `c=c=str[3]`

LZW : compression (3)

Zoom sur la phase de construction, à la position (*) de l'algorithme :

- `dict= {'a': 0, 'b': 1, 'c': 2, 'ab': 3, 'ba': 4, 'ac': 5}`
- `compr = [0, 1, 0]`
- `str = abacababac`, `m=c`, `c=a=str[4]`

LZW : compression (3)

Zoom sur la phase de construction, à la position (*) de l'algorithme :

- `dict= {'a': 0, 'b': 1, 'c': 2, 'ab': 3, 'ba': 4, 'ac': 5, 'ca': 6 }`
- `compr = [0, 1, 0, 2]`
- `str = abacababac`, `m=a`, `c=b=str[5]`

LZW : compression (3)

Zoom sur la phase de construction, à la position (*) de l'algorithme :

- `dict= {'a': 0, 'b': 1, 'c': 2, 'ab': 3, 'ba': 4, 'ac': 5, 'ca': 6 }`
- `compr = [0, 1, 0, 2]`
- `str = abacababac`, `m=ab`, `c=a=str[6]`

LZW : compression (3)

Zoom sur la phase de construction, à la position (*) de l'algorithme :

- `dict= {'a': 0, 'b': 1, 'c': 2, 'ab': 3, 'ba': 4, 'ac': 5, 'ca': 6, 'aba': 7 }`
- `compr = [0, 1, 0, 2, 3]`
- `str = abacababac`, `m=a`, `c=b=str[7]`

LZW : compression (3)

Zoom sur la phase de construction, à la position (*) de l'algorithme :

- `dict= {'a': 0, 'b': 1, 'c': 2, 'ab': 3, 'ba': 4, 'ac': 5, 'ca': 6, 'aba': 7 }`
- `compr = [0, 1, 0, 2, 3]`
- `str = abacababac`, `m=ab`, `c=a=str[8]`

LZW : compression (3)

Zoom sur la phase de construction, à la position (*) de l'algorithme :

- `dict= {'a': 0, 'b': 1, 'c': 2, 'ab': 3, 'ba': 4, 'ac': 5, 'ca': 6, 'aba': 7 }`
- `compr = [0, 1, 0, 2, 3]`
- `str = abacababa`**`c`**, `m=aba`, `c=`**`c`**`=str[9]`

LZW : compression (3)

Fin de l'algorithme :

- `dict= {'a': 0, 'b': 1, 'c': 2, 'ab': 3, 'ba': 4, 'ac': 5, 'ca': 6, 'aba': 7, 'abac': 8 }`
- `compr = [0, 1, 0, 2, 3, 7]`
- `str = abacababac, m=c`

LZW : compression (3)

Fin de l'algorithme :

- `dict= {'a': 0, 'b': 1, 'c': 2, 'ab': 3, 'ba': 4, 'ac': 5, 'ca': 6, 'aba': 7, 'abac': 8 }`
- `compr = [0, 1, 0, 2, 3, 7, 2]`
- `str = abacababac`

LZW : Correction de la compression (1)

Notion de correction : Le dictionnaire et le code comprimé permettent de reconstruire la chaîne originale.

Notation : Le "dictionnaire inversé" $\overline{dict}$ de *dict* est le dictionnaire qui échange clés contre valeurs, *par ex. :*
dict = `{'a': 0, 'b': 1, 'c': 2, 'ab': 3, 'ba': 4}`,
$\overline{dict}$ = `{0: 'a', 1: 'b', 2: 'c', 3: 'ab', 4: 'ba'}`

Soit `lc = len(compr)` la longueur du code comprimé.

Un invariant : En parcourant la chaîne d'entrée `str`, pour toute position `i` $\in \{0 \ldots len(str)\}$:
$\overline{dict}[compr[0]] + \overline{dict}[compr[1]] + \cdots + \overline{dict}[compr[lc-1]] + m$
$= str[0 : i-1]$

LZW : Correction de la compression (2)

Exemple (et ce n'est pas une preuve !) :

- `dict= {'a': 0, 'b': 1, 'c': 2, 'ab': 3, 'ba': 4, 'ac': 5, 'ca': 6, 'aba': 7 }`
- `compr = [0, 1, 0, 2, 3]`
- `str = abacababac`, `m=a`, `c=b=str[8]`
- Donc : `str[0 : 7] = abacaba =`
  `a + b + a + c + ab + a =`
  $\overline{dict}$`[0] +` $\overline{dict}$`[1] +` $\overline{dict}$`[0] +` $\overline{dict}$`[2] +` $\overline{dict}$`[3] + m`

LZW : Correction de la compression (3)

Preuve :

1. Montrer que l'invariant est vrai après la phase d'initialisation
2. Montrer que chaque exécution de la boucle maintient l'invariant ; distinguez entre :
   1. le cas où `m + c` est dans `dict` (modification de `m`)
   2. le cas où `m + c` n'est pas dans `dict` (extension de `dict`)
3. Considérez la phase finale de la compression (rajout du dernier `m` à `dict`)

Complétez les détails !

Conclusion : Étant donnée la chaîne d'entrée `str`, l'algorithme de compression construit un dictionaire `dict` et une séquence de codes `compr` tels que :
$\overline{dict}[compr[0]] + \overline{dict}[compr[1]] + \cdots + \overline{dict}[compr[lc-1]] = str$
où $lc = len(compr)$

LZW : décompression (1)

Première idée : Selon le théorème de correction de compression, on reconstruit `str` à l'aide de `dict` et `compr`.

Problème :

- Le décodeur connaît uniquement le code comprimé `compr`,
- mais le dictionnaire n'est pas transmis

Deuxième idée :

- On reconstruit le dictionnaire inversé $dinv = \overline{dict}$ lors de la décompression
- . . . et on l'utilise pour décoder.

LZW : décompression (2)

Lors de la décompression de `compr = [0, 1, 0, 2, 3, 7, 2]`

- `dinv= {0: 'a', 1: 'b', 2: 'c', 3: 'ab', 4: 'ba', 5: 'ac'}`
- `str = abac`

Code antérieur : `2: 'c'`
Code actuel : `3: 'ab'`

- `dinv= {0: 'a', 1: 'b', 2: 'c', 3: 'ab', 4: 'ba', 5: 'ac', 6: 'ca'}`
- `str = abacab`

LZW : décompression (3)

Entrée : Une liste `compr` de codes
Sortie : Une chaîne de caractères `str`

Algorithme (première version) : construit en même temps :

- la sortie `str`
- le dictionnaire `dinv`

Utilise variables `m_ant` (mot antérieur) et `m_act` (mot actuel)

1. Initialiser `dinv`, `m_act = dinv[compr[0]]`, `str= m_act`
2. Pour tout code `k in compr[1:]` :
   `m_ant = m_act`
   `m_act = dinv[k]`
   Rajouter `m_ant + m_act[0]` à `dinv`
   Concaténer `m_act` à `str`

LZW : décompression (4)

Question : Est-ce que `dinv[k]` est toujours bien défini ? *Réponse :* Malheureusement non !

Lors de la décompression de `compr = [0, 1, 0, 2, 3, 7, 2]`

- `dinv= {0: 'a', 1: 'b', 2: 'c', 3: 'ab', 4: 'ba', 5: 'ac', 6: 'ca'}`
- `str = abacab`

Code antérieur : `3: 'ab'`
Code actuel : `7: ???`
Analyse : Dans le code original : `str = abacababac`
la fonction de compression a rajouté `aba: 7` à `dict`
et émis `7` dans le parcours de boucle directement après.

Ceci peut arriver pour des motifs `asasa`, où *s* est une séquence.

LZW : décompression (5)

Algorithme (deuxième version) :

1. Initialisations : comme avant
2. Pour tout code `k in compr[1:]` :
   `m_ant = m_act`
   - si `k in dinv` :
     `m_act = dinv[k]`
     Rajouter `m_ant + m_act[0]` à `dinv`
     (comme avant)
   - sinon :
     `m_act = m_ant + m_ant[0]`
     Rajouter `m_act` à `dinv`

   Concaténer `m_act` à `str`

LZW : décompression (6)

L'exemple continué :

- `dinv= {0: 'a', 1: 'b', 2: 'c', 3: 'ab', 4: 'ba', 5: 'ac', 6: 'ca'}`
- `str = abacab`

Code antérieur : `3: 'ab'`
Code actuel : `7: ???`
Calculer : `m_act = 'ab' + 'ab'[0] = 'aba'`

- `dinv= {0: 'a', 1: 'b', 2: 'c', 3: 'ab', 4: 'ba', 5: 'ac', 6: 'ca', 7: 'aba' }`
- `str = abacababa`

Résumé

La famille des algorithmes LZ est

- basée sur des dictionnaires :
  références vers des séquences de texte vues précédemment
- compatible / peut être combinée avec des méthodes probabilistes : codage de Huffman / chaînes de Markov
- implantée dans la plupart des programmes de compressions actuels

Plan

Plan

Erreurs de transmission et de stockage (1)

Erreurs de transmission sur un canal bruité à cause de :

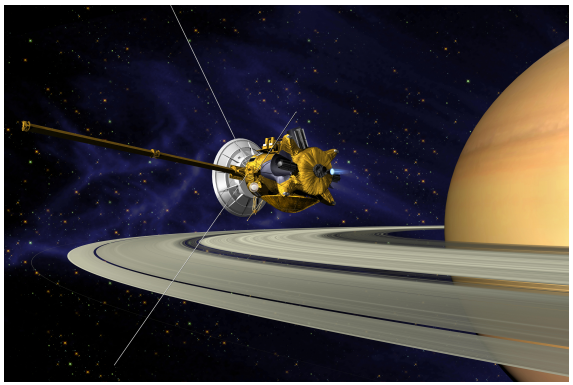
- influence d'ondes électromagnétiques
- signal trop faible

Erreurs de stockage à cause de :

- vieilissement du matériel
- contact avec des substances magnetiques (disques durs)
- dégradation physiques (CD/DVD)
- trop grand nombre de cycles d'écriture (mémoire flash, USB)

Erreurs de transmission et de stockage (2)

Exemple : la sonde Cassini



Rayonnement cosmique causant des erreurs de mémoire de Cassini :

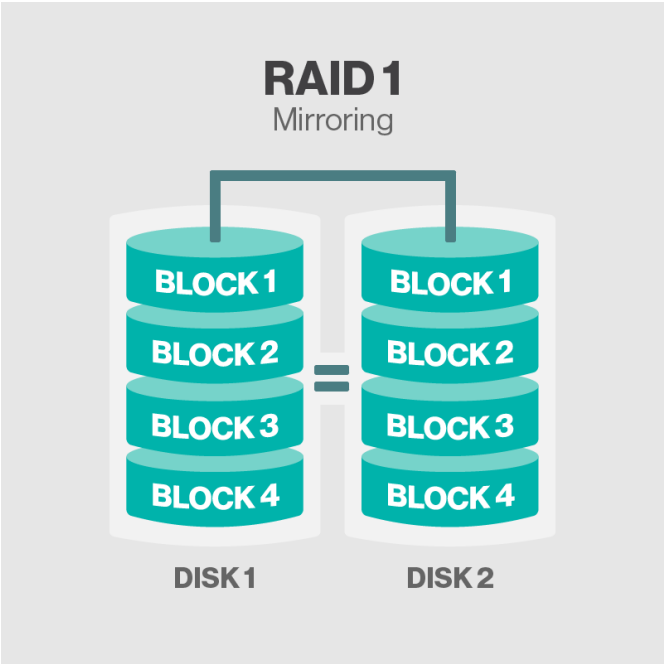
> *The level is nearly constant at about 280 errors per day.*

Mais :

> *On November 1997, the number of errors increased by about a factor of four . . .due to the coincidence in time of a small solar proton event.*

Redondance (1)

Redondance par multiplication des ressources :
Mémoire, par exemple l'architecture RAID
(redundant array of independent disks)

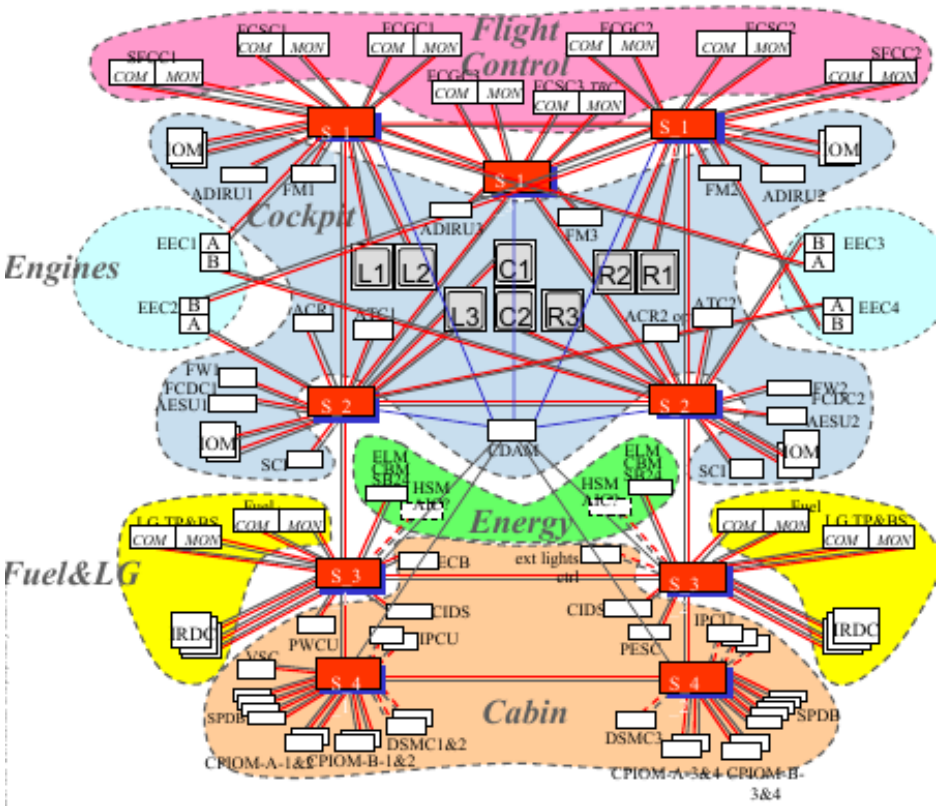


source : `http://searchstorage.techtarget.com/definition/RAID`

Est-il utile de se limiter à deux disques ?

Redondance (2)

Redondance par multiplication des ressources :
Réseau de communication, par exemple dans un A380



source : `http://www.artist-embedded.org/docs/Events/2007/IMA/Slides/ARTIST2_IMA_Itier.pdf`

Détection et correction d'erreurs

Détection d'erreurs

- *But :* détecter l'occurrence d'une erreur, sans vouloir la corriger en même temps
- *Correction :* en utilisant un autre mécanisme de redondance :
  - accès à un serveur *backup*
  - retransmission des données (sur le même canal ou un autre)
- *Ici :* Contrôle de Redondance Cyclique

Correction d'erreurs

- *But :* détecter et corriger des erreurs en même temps
- . . . permet de se passer d'autres mécanismes de redondance
- *Ici :* Codes de Hamming

Nécessité d'une redondance "intelligente"

Principes :

- Plus de redondance permet de détecter / corriger plus d'erreurs
- . . . une redondance "brute" est souvent inutile
- Il n'y a pas de détection / correction parfaite

Illustration : Explorez les scénarios suivants (pour $n = 1, 2, 3$) :

- Envoi d'un message sur n canaux parallèles et indépendants.
- La probabilité d'erreur de chaque canal est 0.1.
- Pour $n > 1$, en cas de désaccord des messages reçus : arbitrage majoritaire

Discutez :

- Possibilité de détection / correction des erreurs ?
- Probabilité de transmission correcte / de correction correcte / de correction erronée / de situation irrésoluble ?

Plan

Exemple : clé RIB (1)

Un numéro de RIB (*Relevé d'Identité Bancaire*) R est composé de :

- B : banque (5 chiffres)
- G : guichet (5 chiffres)
- N : numéro de compte (11 lettres alphanumériques)
- C : clé (2 chiffres)

La clé C est déterminée par B, G, N :

- Calculer $S(N)$ par une traduction, caractère par caractère :
  $A \to 1, B \to 2, \ldots I \to 9, J \to 1, \ldots S \to 2(!!!) \ldots Z \to 9$
  (voir tableau sur feuille de TD), $1 \to 1 \ldots 9 \to 9$
  Exemple : $S(TINF17\ldots) = 395617\ldots$
- Critère de correction de C : la concaténation des nombres B, G, $S(N)$, C forme un nombre à 23 chiffres divisible par 97

Exemple : clé RIB (2)

Exemple : *Vérification d'un RIB*
Soit $B = 36187$, $G = 04329$, $N = A35ACDC94IR$, $C = 25$
Calculons $S(N) = 13513439499$
Concaténation : $R = 3618704329135134394925$
Vérification : $R \mod 97 = 0$
Note :

- Méthode très similaire pour la clé d'un IBAN (*International Bank Account Number*)
- Pareil : Clés pour le numéro de sécurité sociale, ISBN (identifiant unique de livres), code-barres (identification de produits etc.)

Exemple : Bit de parité (1)

Principe :

- Pour représentation *binaire* des données.
- On rajoute 1 bit redondant (le *bit de parité*) pour transmettre un message de n bits.

Variantes :

- *Parité paire :* La somme des bits (incl. bit de parité) modulo 2 est 0
- *Parité impaire :* La somme des bits (incl. bit de parité) modulo 2 est 1

Typiquement / historiquement :

- $n = 7$ (longueur du code ASCII)
- Avec le bit de parité, on code un caractère ASCII en un octet (8 bits)

Exemple : Bit de parité (2)

Exemples (ici : parité paire ; bit de parité rajouté à la fin)

Codage d'un message

Message	Somme des bits	Bit de parité	Message codé
0110110	4	0	01101100
1101011	5	1	11010111

Décodage et vérification d'un message

Message reçu	Somme des bits	Message décodé
11101101	6	1110110
10110110	5	*Erreur de transmission*

Questions :

- Combien / quels types d'erreurs peuvent être détectés ?
- Est-ce que l'une des variantes (paire / impaire) est supérieure à l'autre ?

Caractéristique d'un code

Un codage par blocs découpe un message en blocs de taille fixe.
Il est caractérisé par :

- le nombre de caractères k du message effectif
- le nombre de caractères r de redondance
- le nombre de caractères $n = k + r$ du message codé

On parle de (n, k)-codes
Rendement : $R = \frac{k}{n}$
Un code est t-détecteur / correcteur s'il permet de détecter / corriger toute erreur affectant t caractères ou moins.

Exemple : Bit de parité :

- $k = 7$, $r = 1$, donc $n = 8$, rendement : $R = \frac{7}{8}$
- Le code est 1-détecteur et 0-correcteur
  (détecte aussi 3 erreurs, mais pas 2 $\rightsquigarrow$ pas 3-détecteur)

Détection / correction d'erreurs

En général : les messages sont des mots $m \in A^*$ sur un alphabet A
Nous distinguons un ensemble $C \subseteq A^*$ de *codes valides*
Exemples :

- RIB : codes "divisibles par 97"
- Bit de parité : Octet avec parité (im)paire

Détection d'erreurs : Capacité de dire, pour un m' reçu, si $m' \in C$

Correction d'erreurs : Capacité de trouver, pour un m' reçu, un $m \in C$ approprié

Plan

Contrôle de Redondance Cyclique (CRC)

Principes :

- A plusieurs égards : une généralisation du bit de parité.
- Principalement pour la *détection* d'erreurs ; certaines variantes aussi pour la *correction*

Deux vues : Représentation des opérations courantes (codage / décodage . . .) comme

- opérations sur des polynômes à coefficients dans $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$.
- manipulation de séquences de bits

De nombreuses applications :

- Protocoles de communication : USB, Bluetooth, Ethernet, CAN, FlexRay
- Compression : Gzip, Bzip2, PNG
- Systèmes de stockage de masse et de fichiers : ext4, Btrfs

Rappel : Polynômes

Voir aussi le Chapitre 2 du module Mathématiques du L1 :
`http://moodle.univ-tlse3.fr/course/view.php?id=1278`

Un polynôme à coefficients dans un corps $\mathbb{K}$ (noté $\mathbb{K}[X]$) est une expression de la forme
$P(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_2 X^2 + a_1 X + a_0$
avec $n \in \mathbf{N}$ et $a_n \ldots a_0 \in \mathbb{K}$

Vous connaissez surtout les corps $\mathbb{R}$ (nombres réels) et $\mathbb{C}$ (nombres complexes).

Pour deux polynômes $A, B \in \mathbb{K}[X]$, vous maîtrisez :

- l'addition, soustraction et multiplication de A et B
- la division avec reste avec l'algorithme d'Euclide, qui fournit deux polynomes $Q, R \in \mathbb{K}[X]$ tq. $A = QB + R$ et $deg(R) < deg(B)$

Rappel : $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$

Nous utiliserons un corps $\mathbb{K}$ spécifique, $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}, +, *)$, avec

- le support $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z} = \{0, 1\}$
- des opérations d'addition $+$ et multiplication $*$
- l'inverse de l'addition "$-$" tq. pour tout x : $x + (-x) = 0$
- l'inverse de la multiplication "$^{-1}$" tq. pour tout $x \neq 0$: $x * x^{-1} = 1$

$+$	0	1
0	0	1
1	1	0

$*$	0	1
0	0	0
1	0	1

Questions

- Calculez -0, -1, 1^{-1}
- Si vous interprétez 0 et 1 comme des valeurs de vérité "faux" et "vrai", à quelle opération sur les Booléens correspondent $+$ et $*$?

Polynômes sur $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ et séquences de bits

Les polynômes sur $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ ont uniquement des coefficients 0 ou 1.
Exemple :
$P(X) = 1X^7 + 1X^6 + 0X^5 + 0X^4 + 0X^3 + 1X^2 + 0X^1 + X^0 =$
$X^7 + X^6 + X^2 + X^0$

Représentation comme séquence de bits :

- Un polynôme sur $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ peut être représenté comme mot de ses coefficients $a_n a_{n-1} \dots a_0$, avec $a_i \in \{0, 1\}$
  Convention : ordre décroissant des indices des coefficients
- Pour avoir une représentation, il faut fixer la longueur du mot
  Exemple : $P(X)$ peut être représenté comme
  - 11000101 (pour $n = 7$)
  - 00011000101 (pour $n = 10$)
- La représentation comme séquence de bits permet de déterminer le polynôme. *Exemple :* 01001100 correspond à $X^6 + X^3 + X^2$

Opérations sur les polynômes sur $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ (1)

Addition :

- Polynômes : position par position
- Mots de bits : position par position sur des mots de même longueur (si nécessaire, remplir avec des 0 à gauche).

Attention : pas de retenue, ce n'est pas une addition binaire !

- Addition des nombres 5 et 3 en binaire : $(101)_2 + (11)_2 = (1000)_2$
- Addition des polynômes $X^2 + 1$ et $X + 1$ en $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$: $[101] + [11] = [110]$ correspond à $X^2 + X$

Soustraction :

Montrez : pour deux polynomes $P(X)$ et $Q(X)$ (sur $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$! !)
$P(X) - Q(X) = P(X) + Q(X)$

Calculez $A(X) + B(X)$ et $A(X) - B(X)$
pour : $A(X) = X^3 + X^2 + 1$, $B(X) = X^4 + X^2 + X^1$

Opérations sur les polynômes sur $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ (2)

Multiplication d'un polynôme $P(X) = a_n X^n + \cdots + a_1 X + a_0$ et d'un monome X^k (avec $k \geq 0$) :

- Polynômes : $P(X) * X^k = a_n X^{n+k} + \cdots + a_1 X^{1+k} + a_0 X^k$
- Mots de bits : décaler de k bits à gauche, remplir avec des 0 à droite

Calculez : $A(X) * X^2$ et $B(X) * X^0$

Multiplication de deux polynômes $P(X) = a_n X^n + \cdots + a_1 X + a_0$ et $Q(X) = b_m X^m + \cdots + b_1 X + b_0$:
$P(X) * Q(X) = P(X) * b_m X^m + \ldots P(X) * b_1 X + P(X) * b_0$
Calculez $A(X) * B(X)$

Opérations sur les polynômes sur $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ (3)

Division : Ici : algorithme pour n'importe quel $A, B \in \mathbb{K}[X]$
Entrée : Polynomes $A, B \in \mathbb{K}[X]$ où $B \neq 0$
Sortie : Polynomes $Q, R \in \mathbb{K}[X]$ tq. $A = QB + R$ et $deg(R) < deg(B)$
Notation : $Q = A \div B$ et $R = A \mod B$

```
begin
  Q := 0;          R := A;
  d := deg(B);     c := coeff(B);
  while R != 0 and deg(R) >= d do
    S := (coeff(R)/c) * (X ** (deg(R)-d))
    Q := Q + S;
    R := R - S * B;
  end while
  return (Q, R)
end
```

Fonctions auxilaires : `deg` degré ; `coeff` coefficient dominant

Opérations sur les polynômes sur $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ (4)

Exemple : Division de $A = X^4 + X^2 + X^1$ par $B = X + 1$

		S	Q
R	$X^4 \quad +X^2 \quad +X^1$		
- S * B	$- \quad (X^4 \quad +X^3)$	X^3	X^3
R	$X^3 \quad +X^2 \quad +X^1$		
- S * B	$- \quad (X^3 \quad +X^2)$	X^2	$X^3 + X^2$
R	X^1		
- S * B	$- \quad (X^1 \quad +1)$	1	$X^3 + X^2 + 1$
R	1		

Résultat : $Q = (X^3 + X^2 + 1)$ et $R = 1$

Vérifiez que $A = (X^3 + X^2 + 1) * B + 1$

Opérations sur les polynômes sur $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ (4)

Exemple : Division de $A = X^4 + X^2 + X^1$ par $B = X + 1$
avec des séquences de bit : division de [10110] par [11]
Algorithme programmé en TP

						S	Q
R		1	0	1	1	0	
- S * B	-	1	1			$1 * X^3$	1
R			1	1	1	0	
- S * B	-		1	1		$1 * X^2$	11
R				0	1	0	
- S * B				1	1	$0 * X^1$	110
R					1	0	
- S * B	-				1	1	$1 * X^0$	1101
R						1	

Résultat : Q = [1101], R = [1]
Exercice : calculez la division de [1011000] par [101]

CRC : Principe (1)

Désormais :

- nous considérons uniquement des polynômes sur $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$
- nous faisons l'amalgame entre un polynôme et sa représentation (séquence de bits)

Paramètre :

- $G(X)$: polynôme générateur de degré n,
  partagé entre émetteur et récepteur.
  Différents $G(X)$ ont des capacités de détection d'erreur différentes

Question : Est-ce que le message codé $Env(X)$ envoyé par l'émetteur est le même que le message $Rec(X)$ reçu par le récepteur ?

CRC : Principe (2)

Codage pour envoyer un message $M(X)$:

- Calculer : $R(X) = (M(X) * X^n) \mod G(X)$
- Le message envoyé : $Env(X) = M(X) * X^n + R(X)$

Observations :

- il existe $Q(X)$ tel que $M(X) * X^n = Q(X) * G(X) + R(X)$
- $Env(X) = M(X) * X^n + R(X) = Q(X) * G(X)$
- donc : $Env(X) \mod G(X) = 0$
- En plus, $deg(R(X)) < n$, donc $Env(X) \div X^n = M(X)$

Décodage pour détecter une erreur de transmission

- Soit $Rec(X)$ le message reçu.
- Si $Rec(X) \mod G(X) = 0$, probablement $Rec(X) = Env(X)$
  Récupérer $M(X) = Rec(X) \div X^n$
- Si $Rec(X) \mod G(X) \neq 0$, il y a certainement une erreur

CRC : Exemple de codage

- *Générateur :* $G(X) = X^2 + 1$ [101]
  polynôme de degré $n = 2$
- *Message à coder :* $M(X) = X^4 + X^2 + X$ [10110]
- Calculer $R(X) = (M(X) * X^2) \mod G(X) = X$
  [1011000] mod [101] = [10]
- Message envoyé :
  $Env(X) = M(X) * X^2 + R(X) = X^6 + X^4 + X^3 + X$
  [1011000] + [10] = [1011010]

CRC : Exemple de décodage

Rappel :
$G(X) = X^2 + 1$ [101] et $Env(X) = X^6 + X^4 + X^3 + X$ [1011010]

Soit $Rec_1(X) = X^6 + X^4 + X^3 + X$ [1011010] le message reçu.

- $Rec_1(X) = (X^4 + X) * G(X)$, donc $Rec_1(X) \mod G(X) = 0$
  $\rightsquigarrow$ pas d'erreur de transmission

Soit $Rec_2(X) = X^6 + X^5 + X^3 + X$ [1101010] le message reçu.

- $Rec_2(X) \mod G(X) = X + 1$
  $\rightsquigarrow$ erreur de transmission

Soit $Rec_3(X) = X^6 + X^4 + X^2 + 1$ [1010101] le message reçu.

- $Rec_3(X) = (X^4 + 1) * G(X)$, donc $Rec_3(X) \mod G(X) = 0$
  $\rightsquigarrow$ erreur de transmission non détectée

CRC : Limites

Polynôme d'erreur $Err(X) = Rec(X) - Env(X)$
Observation : $Err(X) \mod G(X) = Rec(X) \mod G(X)$ Vérifiez !

- Si $Rec(X) \mod G(X) \neq 0$, CRC diagnostique une erreur.
  Puis, $Err(X) \mod G(X) \neq 0$, donc $Err(X) \neq 0$
  $\rightsquigarrow$ toute erreur diagnostiquée l'est effectivement, pas de fausses alarmes
  Ex. : $Err_2(X) = Rec_2(X) - Env(X) =$
  $[1101010] - [1011010] = [0110000]$
- Si $Rec(X) \mod G(X) = Err(X) \mod G(X) = 0$, alors
  - $Err(X) = 0 \rightsquigarrow$ absence d'erreur
  - *ou* $Err(X) \neq 0$ est multiple de $G(X) \rightsquigarrow$ erreur non détectée
    Ex. : $Err_3(X) = Rec_3(X) - Env(X) =$
    $[1010101] - [1011010] = [0001111] = G(X) * (X + 1)$