

# Cours de méthodes numériques<sup>1</sup>

## L1 Informatique

Nicolas COUELLAN      Sophie JAN<sup>2</sup>      Youchun QIU<sup>3</sup>

Janvier 2019

<sup>1</sup>Ce texte est essentiellement tiré du cours écrit par Jean-Paul Calvi au profit de précédentes promotions d'étudiants. Y figurent aussi des morceaux d'un manuscrit de François de Thélin. Qu'ils soient ici grandement remerciés !!!

<sup>2</sup>sophie.jan@math.univ-toulouse.fr

<sup>3</sup>youchun.qiu@math.univ-toulouse.fr



# Contents

<b>1</b>	<b>Recherche de racines d'une fonction</b>	<b>3</b>
1.1	Localisation des racines : méthode de dichotomie . . . . .	3
1.2	Méthode de Newton . . . . .	4
<b>2</b>	<b>Interpolation polynomiale</b>	<b>9</b>
2.1	Motivations . . . . .	9
2.2	Existence de l'interpolant . . . . .	10
2.3	Forme de Lagrange . . . . .	11
2.3.1	Définition . . . . .	11
2.3.2	Propriétés algébriques et linéarité . . . . .	12
2.3.3	Algorithme . . . . .	13
2.3.4	Étude de l'erreur . . . . .	14
2.3.5	Choix des points d'interpolation . . . . .	15
2.4	Forme de Newton : construction pratique de l'interpolant . . . . .	16
2.4.1	Autre expression de l'interpolant : forme de Newton . . . . .	16
2.4.2	Algorithme . . . . .	17
<b>3</b>	<b>Intégration numérique</b>	<b>19</b>
3.1	Introduction . . . . .	19
3.1.1	Principe de la méthode . . . . .	19
3.1.2	Notations . . . . .	20
3.2	Formules élémentaires . . . . .	21
3.2.1	Méthode du point milieu . . . . .	21
3.2.2	Méthode des trapèzes . . . . .	21
3.2.3	Méthode de Simpson . . . . .	22
3.3	Étude de l'erreur pour les formules élémentaires . . . . .	22
3.3.1	Méthode du rectangle au point milieu . . . . .	23
3.3.2	Méthode du trapèze . . . . .	24
3.3.3	Méthode de Simpson . . . . .	24
3.3.4	Des formules d'erreur plus précises ... . . . .	24
3.4	Formules composites des trois exemples classiques . . . . .	25
3.4.1	Méthode des rectangles aux points milieux . . . . .	25
3.4.2	Méthode des trapèzes . . . . .	25
3.4.3	Méthode de Simpson . . . . .	26
3.5	Étude de l'erreur pour les formules composites . . . . .	26
3.5.1	Méthode des rectangles aux points milieux . . . . .	26
3.5.2	Méthode des trapèzes . . . . .	27
3.5.3	Méthode de Simpson . . . . .	27

# Chapter 1

## Recherche de racines d'une fonction

Dans tout ce chapitre, on considère  $f$  une fonction continue de  $[a, b]$  dans  $\mathbb{R}$ . On cherche à déterminer numériquement

$$r \in [a, b] \text{ tel que } f(r) = 0.$$

**Théorème 1** (Théorème des Valeurs Intermédiaires). *Soit  $a$  et  $b$  deux réels tels que  $a < b$ . Si  $f$  est une fonction continue sur  $[a, b]$  telle que  $f(a)f(b) < 0$ , alors il existe  $c \in ]a, b[$  tel que  $f(c) = 0$ .*

### 1.1 Localisation des racines : méthode de dichotomie

On suppose que  $f$  possède une unique racine dans l'intervalle  $[a, b]$  et que  $f(a)f(b) < 0$ .

1. On pose alors  $m = \frac{a+b}{2}$  et on évalue  $f(m)$ .
2. Si  $f(m) = 0$ , le processus s'arrête : on a trouvé la racine.
3. Si  $f(m) \neq 0$ , on évalue  $f(a)f(m)$ .
  - (a) Si  $f(a)f(m) < 0$ , alors d'après le TVI la racine se trouve dans  $]a, m[$  et on reprend en 1 avec  $[a, b] = [a, m]$ .
  - (b) Sinon (on a  $f(m)f(b) < 0$ ), alors toujours d'après le TVI la racine se trouve dans  $]m, b[$  et on reprend en 1 avec  $[a, b] = [m, b]$ .

Plus précisément, l'algorithme de dichotomie construit 3 suites  $(a_n)$ ,  $(b_n)$  et  $(c_n)$  de la manière suivante.

**Algorithme 1.** 1.  $a_0 = a$ ,  $b_0 = b$ ,  $c_0 = \frac{a_0 + b_0}{2}$  et  $n = 0$ .

2. Tant que (critère d'arrêt) violé faire

- (a) Si  $f(c_n) = 0$ , alors STOP ( $c_n$  est la racine de  $f$  entre  $a$  et  $b$ ),
- (b) sinon
  - i. Si  $f(a_n)f(c_n) < 0$ , alors  $a_{n+1} = a_n$ ,  $b_{n+1} = c_n$ ,
  - ii. sinon  $a_{n+1} = c_n$ ,  $b_{n+1} = b_n$ .
- (c)  $n = n + 1$  et  $c_n = \frac{a_n + b_n}{2}$ .

*Fin du faire*

**Théorème 2.** Soit  $f$  une fonction continue de  $[a, b]$  dans  $\mathbb{R}$ . On suppose que  $f(a)f(b) < 0$  et que l'équation  $f(x) = 0$  admet une unique solution  $r$  sur  $[a, b]$ . Si l'algorithme de dichotomie parvient jusqu'à l'étape  $n$  (c'est-à-dire  $c_i \neq r$  pour tous les entiers  $i$  entre 0 et  $n-1$ ), alors on a l'estimation

$$|r - c_n| \leq \frac{b - a}{2^{n+1}}.$$

**Preuve :** Comme  $r$  se trouve entre  $a_n$  et  $c_n$  ou bien entre  $c_n$  et  $b_n$ , on a

$$|r - c_n| \leq \frac{b_n - a_n}{2}.$$

Or, par construction,

$$b_n - a_n = \frac{b_{n-1} - a_{n-1}}{2} = \frac{b_{n-2} - a_{n-2}}{2^2} = \frac{b_{n-3} - a_{n-3}}{2^3} = \dots = \frac{b_0 - a_0}{2^n} = \frac{b - a}{2^n}.$$

On en déduit que  $|r - c_n| \leq \frac{b - a}{2^{n+1}}$ . □

Cet algorithme converge très lentement en pratique. Son intérêt principal est donc d'aider à localiser sommairement la racine  $r$ . On se sert ensuite de méthodes qui convergent plus rapidement telles que la méthode de Newton décrite ci-dessous ou d'autres méthodes non développées ici : la méthode de la sécante ou les méthodes de point fixe.

**Remarque 1.** Le critère d'arrêt qui intervient dans l'algorithme peut être du type

$$\frac{b_n - a_n}{2} < \varepsilon.$$

L'algorithme de dichotomie s'arrêtera alors avec une valeur approchée  $c_n$  de  $r$  à  $\varepsilon$  près et cette valeur approchée pourra servir de bon point de départ pour la méthode de Newton.

**Exemple :** Appliquons la méthode de dichotomie à  $f(x) = \cos(x) - x$ .

La fonction  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$ ,  $f(0) = 1 > 0$ ,  $f(\pi/2) = -\pi/2 < 0$ . On en déduit, par le théorème des valeurs intermédiaires, que  $f$  admet au moins une racine dans  $[0, \pi/2]$ .

De plus, comme  $f'(x) = -\sin(x) - 1$ , on a pour tout  $x \in [0, \pi/2]$ ,  $f'(x) \leq -1 < 0$ . La fonction  $f$  est donc strictement décroissante sur  $[0, \pi/2]$ . On en déduit que  $f$  admet une unique racine  $r$  dans  $[0, \pi/2]$ .

$$f(\pi/4) = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{2\sqrt{2} - \pi}{4} < 0, \text{ donc } r \in [0, \pi/4].$$
$$f(\pi/8) > 0, \text{ donc } r \in [\pi/8, \pi/4].$$

## 1.2 Méthode de Newton

**Notation 1.** Soit  $a$  et  $b$  deux réels tels que  $a < b$ . On note  $C^p([a, b])$  l'ensemble des fonctions définies sur  $[a, b]$ ,  $p$  fois dérivables et dont la  $p$ -ième dérivée est continue.

On suppose que  $f \in C^1([a, b])$  et que  $f$  possède une unique racine, notée  $r$ , dans l'intervalle  $[a, b]$ .

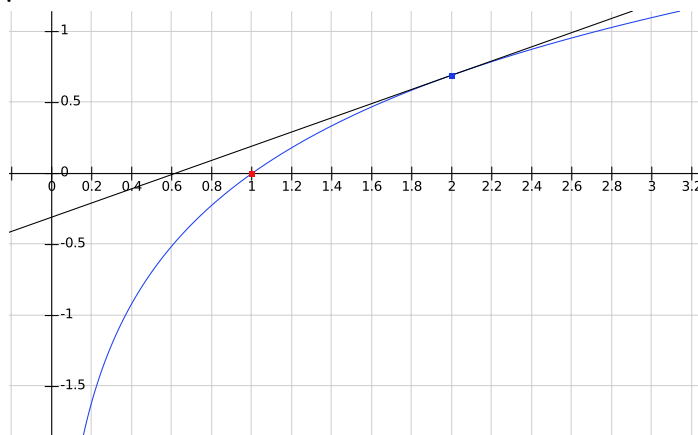
L'idée de la méthode de Newton consiste à remplacer l'équation  $f(x) = 0$  par l'équation  $T_0(x) = 0$  de la tangente à la courbe représentative de  $f$  en un point  $x_0$  bien choisi :

$$T_0(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

L'équation  $T_0(x) = 0$  admet alors pour racine

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

On espère que  $x_1 \approx r$ .

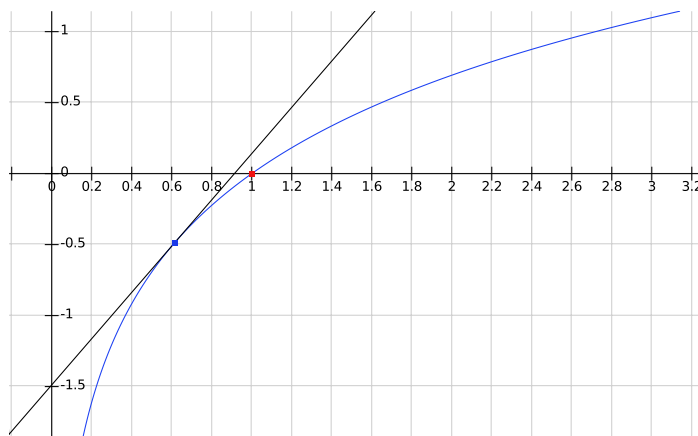


Si  $x_1 \in [a, b]$ , on peut itérer le procédé en remplaçant  $f(x) = 0$  par  $T_1(x) = 0$  avec

$$T_1(x) = f(x_1) + f'(x_1)(x - x_1).$$

La racine de cette dernière équation est

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}.$$



On construit ainsi, par récurrence, **sous réserve que**  $x_n \in [a, b]$ , la **suite de Newton**,

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}. \quad (1.1)$$

**Remarque 2.** 1. La suite de Newton n'est définie que si  $f$  est dérivable et si

$$\forall n \in \mathbb{N}, f'(x_n) \neq 0.$$

2. Le choix du point initial de la récurrence définie en (1.1) est important. Il doit être fait de telle sorte que chaque itéré  $x_n$  soit dans  $[a, b]$ .

**Définition 1.** On dit qu'une suite  $(x_n)$  converge quadratiquement vers  $r$  si on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = r \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|x_{n+1} - r|}{|x_n - r|^2} = C > 0.$$

**Théorème 3.** On suppose que  $r \in [a, b]$  et que  $f \in C^2([a, b])$  vérifie  $f(r) = 0$  et

$$\forall x \in [a, b], |f'(x)| \geq m_1 > 0 \text{ et } |f''(x)| \leq M_2. \quad (1.2)$$

Si de plus  $x_0 \in ]r - \varepsilon, r + \varepsilon[ \subset [a, b]$  avec  $\varepsilon < \frac{2m_1}{M_2}$ , on a

1. pour tout entier  $n$ , il existe  $z_n$  entre  $x_n$  et  $r$  tel que

$$|x_{n+1} - r| = \frac{|f''(z_n)|}{2|f'(x_n)|} |x_n - r|^2; \quad (1.3)$$

2. tous les itérés  $x_n \in ]r - \varepsilon, r + \varepsilon[$  ;

3. pour tout entier  $n \geq 1$ , la formule d'erreur suivante

$$|x_n - r| \leq \left( \frac{M_2}{2m_1} \right)^{2^n - 1} |x_0 - r|^{2^n}; \quad (1.4)$$

4. la suite  $(x_n)$  converge vers  $r$

5. et la convergence est quadratique.

**Preuve :**

1. Ce point est admis. Il repose sur l'application de la formule de Taylor, que vous pouvez trouver dans tous les bons livres d'analyse de niveau L1.

2. Les hypothèses (1.2) permettent de déduire aisément de (1.3) que

$$|x_{n+1} - r| = \frac{|f''(z_n)|}{2|f'(x_n)|} |x_n - r|^2 \leq \frac{M_2}{2m_1} |x_n - r|^2. \quad (1.5)$$

Comme  $\varepsilon < \frac{2m_1}{M_2}$ , si  $|x_n - r| < \varepsilon$ , on a  $|x_{n+1} - r| \leq \frac{M_2}{2m_1} \varepsilon^2 = \frac{M_2 \varepsilon}{2m_1} \varepsilon < \varepsilon$  et par récurrence, tous les itérés sont dans  $]r - \varepsilon, r + \varepsilon[$ .

3. On procède par récurrence.

- Initialisation : (1.5) avec  $n = 0$  fournit la formule (1.4) pour  $n = 1$ .
- Hérédité : on suppose que (1.4) est vraie au rang  $n$  et on veut montrer qu'elle est vraie au rang  $n + 1$ .

On a, par (1.5),

$$\begin{aligned} |x_{n+1} - r| &\leq \frac{M_2}{2m_1} |x_n - r|^2 \\ &\leq \frac{M_2}{2m_1} \left( \left( \frac{M_2}{2m_1} \right)^{2^n - 1} |x_0 - r|^{2^n} \right)^2 \text{ en utilisant l'hypothèse de récurrence} \\ &= \left( \frac{M_2}{2m_1} \right)^{1 + (2^n - 1)2} |x_0 - r|^{2^{n+1}} \\ &= \left( \frac{M_2}{2m_1} \right)^{2^{n+1} - 1} |x_0 - r|^{2^{n+1}} \end{aligned}$$

4. De (1.4), comme  $|x_0 - r| < \varepsilon$ , on déduit que

$$|x_n - r| \leq |x_0 - r| \left( \frac{\varepsilon M_2}{2m_1} \right)^{2^n - 1}.$$

Or  $\frac{\varepsilon M_2}{2m_1} < 1$ , donc par le théorème des gendarmes  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = r$ .

5. Comme la suite  $(x_n)$  converge vers  $r$ , la suite  $(z_n)$  converge aussi vers  $r$ . Ainsi, la formule (1.3) montre que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|x_{n+1} - r|}{|x_n - r|^2} = \frac{|f''(r)|}{2|f'(r)|} \geq 0.$$

La convergence est donc bien au moins d'ordre 2.

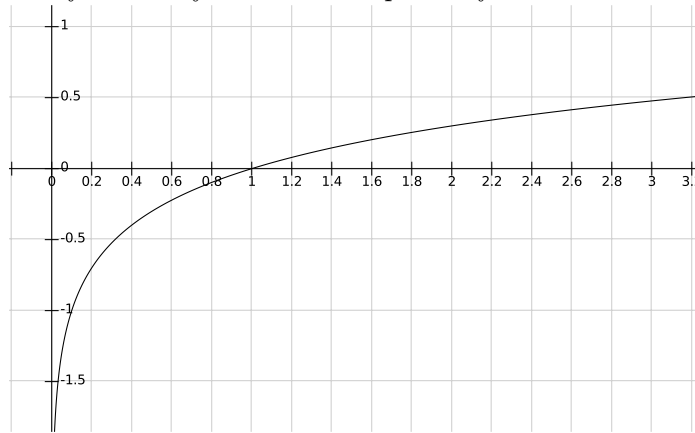
□

**Remarque 3.** *Attention au choix du point de départ ...*

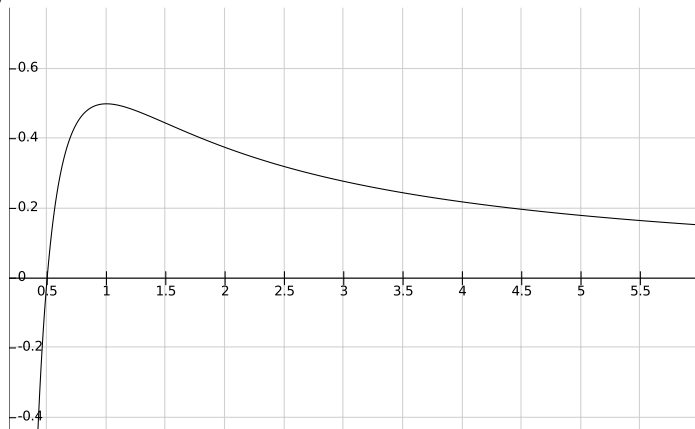
- Si par exemple  $f = \ln$ ,  $[a, b] = [0.5, 3]$  et  $x_0 = e$ , alors

$$x_1 = x_0 - \frac{\ln(x_0)}{\frac{1}{x_0}} = e - e = 0$$

et ...  $x_1 \notin [a, b]$ . La fonction  $f$  n'est même plus définie en  $x_1$ .



- Si par exemple  $f(x) = \frac{2x-1}{2x^2}$ ,  $[a, b] = [0.25, 10]$  et  $x_0 = 2$ , alors la suite est bien définie, mais elle diverge.





**Exemple :** Méthode du Héron d'Alexandrie (1er siècle après JC)

Il utilisait la méthode suivante pour approcher la racine carrée du nombre  $a > 0$  :

$$\begin{cases} x_0 > 0 \\ x_{n+1} = \frac{1}{2} \left( x_n + \frac{a}{x_n} \right). \end{cases}$$

En fait, la méthode de Héron est un cas particulier de la méthode de Newton. En effet, si on applique la méthode de Newton à la fonction  $f$  définie par

$$f(x) = x^2 - a,$$

on obtient

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - a}{2x_n} = \frac{x_n^2 + a}{2x_n} = \frac{1}{2} \left( x_n + \frac{a}{x_n} \right).$$

**Exemple :** Appliquons la méthode de Newton à  $f(x) = \cos(x) - x$ . On a vu que  $f$  admet une unique racine  $r$  dans  $[\pi/8, \pi/4]$ .

Comme pour tout  $x \in [\pi/8, \pi/4]$

$$f'(x) = -\sin(x) - 1 < 0 \text{ et } f''(x) = -\cos(x) < 0,$$

on part d'un  $x_0$  tel que  $f(x_0) < 0$ . Prenons  $x_0 = \pi/4$ . La suite est ensuite construite à l'aide de la formule

$$x_{n+1} = x_n - \frac{\cos(x_n) - x_n}{-\sin(x_n) - 1} = x_n + \frac{\cos(x_n) - x_n}{\sin(x_n) + 1} = \frac{x_n \sin(x_n) + \cos(x_n)}{\sin(x_n) + 1}.$$

On obtient alors successivement

$$\begin{aligned} x_0 &\approx 0.785398163 \\ x_1 &\approx 0.739536133 \\ x_2 &\approx 0.739085178 \\ x_3 &\approx 0.739085133 \end{aligned}$$

En regardant ce tableau, il semble que 7390851 soit les 7 premières décimales de la racine de  $f$ . On le contrôle en vérifiant que le produit

$$f(0.7390851)f(0.7390852) \approx (5.56 \cdot 10^{-8})(-1.1175 \cdot 10^{-7}) < 0.$$

# Chapter 2

## Interpolation polynomiale

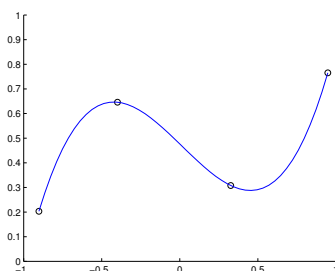
### 2.1 Motivations

En analyse numérique, une fonction  $f$  **inconnue explicitement** est souvent

- connue seulement en certains points  $x_0, x_1, \dots, x_d$  ;
- ou évaluable uniquement au moyen de l'appel à un code coûteux.

Mais dans de nombreux cas, on a besoin d'effectuer des opérations (dérivation, intégration, ...) sur la fonction  $f$ .

On cherche donc à reconstruire  $f$  par une autre fonction  $f_r$  simple et facile à évaluer à partir des données discrètes de  $f$ . On espère que le modèle  $f_r$  ne sera pas trop éloigné de la fonction  $f$  aux autres points.



On s'intéresse dans ce cours à la reconstruction de  $f$  par des polynômes.

Pourquoi les polynômes ?

1. Théorème d'approximation de Weierstrass : pour toute fonction  $f$  définie et continue sur l'intervalle  $[a, b]$  et pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe un polynôme  $p$  tel que

$$\forall x \in [a, b], |f(x) - p(x)| < \varepsilon.$$

Plus  $\varepsilon$  est petit, plus le degré du polynôme est grand.

2. La simplicité de l'évaluation d'un polynôme par le schéma de Hörner :

$$\sum_{j=0}^n c_j x^j = \left( \dots \left( (c_n x + c_{n-1})x + c_{n-2} \right) x + \dots c_1 \right) x + c_0.$$

Plus précisément, étant donnés  $d + 1$  points d'abscisses distinctes  $M_i = (a_i, f_i), i = 0, 1, \dots, d$  dans le plan, le problème de l'**interpolation polynomiale** consiste à trouver un polynôme de degré inférieur ou égal à  $m$  dont le graphe passe par les  $d + 1$  points  $M_i$ , c'est-à-dire

$$\text{trouver } p \in \mathcal{P}_m \text{ tel que } p(a_i) = f_i, \quad \forall i = 0, 1, \dots, d. \quad (2.1)$$

**Définition 2.** On note  $\mathcal{P}_m$  l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à  $m$ .

## 2.2 Existence de l'interpolant

### 2 points : $d = 1$

Naturellement, le problème de trouver un polynôme de degré inférieur ou égal à 1 dont le graphe passe par 2 points  $M_0 = (a_0, f_0)$  et  $M_1 = (a_1, f_1)$  d'abscisses différentes  $a_0 \neq a_1$  est très facile : il suffit de choisir l'unique polynôme dont le graphe est la droite  $(M_0M_1)$ .

### 3 points : $d = 2$

Lorsqu'on dispose de 3 points d'abscisses deux à deux distinctes et que l'on cherche un polynôme de  $\mathcal{P}_2$ , le problème est à peine plus difficile. Le graphe du polynôme cherché est généralement une parabole (correspondant à un polynôme de degré 2). Mais dans le cas où les 3 points sont alignés, le graphe du polynôme cherché est une droite comme dans le cas  $d = 1$ .

### Cas général

Dans le cas général, le problème (2.1) peut n'avoir aucune solution ou bien en avoir une infinité.

Il paraît assez clair que pour que le problème (2.1) ait une unique solution il faut établir une relation entre  $m$  et  $d$ . Pour déterminer  $p \in \mathcal{P}_m$ , on doit trouver tous ses coefficients et ils sont au nombre de  $m + 1$ . On dispose pour ce faire des  $d + 1$  relations  $p(a_i) = f_i, i = 0, 1, \dots, d$ . Il est donc assez évident que pour espérer une solution unique au problème (2.1), on doit supposer que  $m = d$ .

**Théorème 4** (admis). Soit  $A = \{a_0, a_1, \dots, a_d\}$  un ensemble de  $d + 1$  réels distincts. Quels que soient les  $d + 1$  réels  $f_0, f_1, \dots, f_d$ , il existe un et un seul polynôme  $p \in \mathcal{P}_d$  tel que  $p(a_i) = f_i, \forall i = 0, 1, \dots, d$ .

### Exemples :

1. Prenons  $d = 1$  et considérons 4 réels  $a_0, a_1, f_0$  et  $f_1$ . Cherchons un polynôme  $p$  de degré au plus 1 tel que

$$p(a_0) = f_0 \text{ et } p(a_1) = f_1.$$

Le polynôme  $p$  peut se mettre sous la forme  $p(x) = \alpha x + \beta$  et il s'agit de déterminer  $\alpha$  et  $\beta$ . Il suffit de résoudre le système linéaire

$$\alpha a_0 + \beta = f_0 \quad (2.2)$$

$$\alpha a_1 + \beta = f_1. \quad (2.3)$$

En remplaçant la seconde équation par (2.3)-(2.2), on obtient le système équivalent suivant :

$$\alpha a_0 + \beta = f_0 \quad (2.4)$$

$$\alpha(a_1 - a_0) = f_1 - f_0 \quad (2.5)$$

qui permet d'obtenir **si**  $a_1$  **et**  $a_0$  **sont distincts**

$$\alpha = \frac{f_1 - f_0}{a_1 - a_0}, \quad \beta = f_0 - \alpha a_0, \quad p(x) = \frac{f_1 - f_0}{a_1 - a_0}(x - a_0) + f_0.$$

2. Prenons  $d = 2$  et considérons 6 réels  $a_0, a_1, a_2, f_0, f_1$  et  $f_2$ . Cherchons un polynôme  $p$  de degré au plus 2 tel que

$$p(a_0) = f_0, p(a_1) = f_1 \text{ et } p(a_2) = f_2.$$

Le polynôme  $p$  peut se mettre sous la forme  $p(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$  et il s'agit de déterminer  $\alpha, \beta$  et  $\gamma$ . Il suffit de résoudre le système linéaire

$$\alpha a_0^2 + \beta a_0 + \gamma = f_0 \quad (2.6)$$

$$\alpha a_1^2 + \beta a_1 + \gamma = f_1 \quad (2.7)$$

$$\alpha a_2^2 + \beta a_2 + \gamma = f_2. \quad (2.8)$$

Ce système linéaire admet une unique solution si et seulement si  $a_0, a_1$  et  $a_2$  sont deux à deux distincts. Sous ces conditions, on obtient

$$\alpha = \frac{1}{a_2 - a_1} \left( \frac{f_2 - f_0}{a_2 - a_0} - \frac{f_1 - f_0}{a_1 - a_0} \right), \quad \beta = \frac{f_1 - f_0}{a_1 - a_0} - \alpha(a_1 + a_0), \quad \gamma = f_0 - \alpha a_0^2 - \beta a_0.$$

---

## COURS 3 - 1h

---

## 2.3 Forme de Lagrange

### 2.3.1 Définition

Soit  $A = \{a_0, a_1, \dots, a_d\}$  un ensemble de  $d + 1$  réels distincts.

On définit, pour  $j = 0, 1, \dots, d$ ,

$$l_{j,d}(x) = \frac{(x - a_0)(x - a_1) \dots (x - a_{j-1})(x - a_{j+1}) \dots (x - a_d)}{(a_j - a_0)(a_j - a_1) \dots (a_j - a_{j-1})(a_j - a_{j+1}) \dots (a_j - a_d)} = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^d \frac{x - a_k}{a_j - a_k}. \quad (2.9)$$

Les polynômes définis ci-dessus sont des polynômes de degré  $d$  et on les appelle les **polynômes fondamentaux de Lagrange** associés à  $A^1$ .

**Proposition 1.** *Les polynômes  $l_{0,d}, l_{1,d}, \dots, l_{d,d}$  vérifient*

$$\forall i = 0, 1, \dots, d, \quad \forall j = 0, 1, \dots, d, \quad l_{j,d}(a_i) = \delta_{i,j}.$$

---

<sup>1</sup>En fait ces polynômes forment une base de  $\mathcal{P}_d$ . Comme il y a  $d + 1$  polynômes  $l_{j,d}$  et que  $\mathcal{P}_d$  est de dimension  $d + 1$ , il suffit de montrer que les  $l_{j,d}$  forment bien une famille de polynômes linéairement indépendants.

En effet, si  $\sum_{j=0}^d \alpha_j l_{j,d} = 0$ , en utilisant le point précédent, on a  $\forall i = 0, \dots, d, \alpha_i = \sum_{j=0}^d \alpha_j \delta_{ji} = \sum_{j=0}^d \alpha_j l_{j,d}(a_i) = 0$ .

**Preuve :** Soit  $i$  et  $j$  deux entiers entre 0 et  $d$ . On a simplement

$$l_{j,d}(a_j) = \frac{(a_j - a_0)(a_j - a_1) \dots (a_j - a_{j-1})(a_j - a_{j+1}) \dots (a_j - a_d)}{(a_j - a_0)(a_j - a_1) \dots (a_j - a_{j-1})(a_j - a_{j+1}) \dots (a_j - a_d)} = 1$$

et pour  $j \neq i$ , on a

$$l_{j,d}(a_i) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^d \frac{a_i - a_k}{a_j - a_k} = 0,$$

parce que  $i$  sera l'un des  $k$ . □

**Théorème 5.** Soit  $A = \{a_0, a_1, \dots, a_d\}$  un ensemble de  $d + 1$  réels distincts. Quels que soient les  $d + 1$  réels  $f_0, f_1, \dots, f_d$ , le seul polynôme  $p_f \in \mathcal{P}_d$  tel que  $p_f(a_i) = f_i, \forall i = 0, 1, \dots, d$  se met sous la forme (dite de Lagrange)

$$p_f = \sum_{j=0}^d f_j l_{j,d}. \quad (2.10)$$

**Preuve :** L'existence et l'unicité de  $p_f$  ont déjà été établies au théorème 4. Il reste à montrer que la forme proposée de  $p_f$  satisfait bien les équations  $p_f(a_i) = f_i, \forall i = 0, 1, \dots, d$ . En effet, quel que soit  $i$  entier entre 0 et  $d$ , on a

$$p_f(a_i) = \sum_{j=0}^d f_j l_{j,d}(a_i) = \sum_{j=0}^d f_j \delta_{ji} = f_i,$$

en utilisant la proposition 1. □

Les nombres  $a_i$  s'appellent les **points d'interpolation** et les valeurs  $f_i$  sont les **valeurs interpolées**.

Lorsque  $f_i = f(a_i)$ ,  $f$  est la **fonction interpolée**. L'unique polynôme  $p_f \in \mathcal{P}_d$  tel que  $p_f(a_i) = f(a_i), \forall i = 0, 1, \dots, d$  s'appelle alors le **polynôme d'interpolation de Lagrange** de  $f$  aux points  $a_i$ .

Attention,  $p_f$  dépend de  $f$ , mais aussi de l'ensemble des points  $A$ .

**Exemple :** calculer le polynôme d'interpolation de  $\cos$  aux points  $\{0, \pi/2, \pi\}$ .

### 2.3.2 Propriétés algébriques et linéarité

**Remarque 4.** Naturellement, si  $q \in \mathcal{P}_d$ , alors le polynôme d'interpolation de  $q$  relativement aux points  $\{a_0, a_1, \dots, a_d\}$  est  $q$  lui-même :  $p_q = q$ . Attention, ceci n'est valable que si  $q$  est un polynôme de degré inférieur ou égal à  $d$  !!

**Proposition 2.** Quel que soit l'entier  $d$ , pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\sum_{j=0}^d l_{j,d}(x) = 1$ .

**Preuve :** Notons  $e_0$  le polynôme constant égal à 1. Quel que soit l'entier naturel  $d$ ,  $e_0 \in \mathcal{P}_d$ . En tenant compte de la remarque 4, on en déduit que  $e_0$  est son propre polynôme d'interpolation relativement aux points  $\{a_0, a_1, \dots, a_d\}$  : pour tout  $x$  réel,

$$\begin{aligned} 1 &= e_0(x) \\ &= p_{e_0}(x) \\ &= \sum_{j=0}^d e_0(a_j) l_{j,d}(x) \\ &= \sum_{j=0}^d l_{j,d}(x). \end{aligned}$$

□

**Théorème 6.** Soit  $A = \{a_0, a_1, \dots, a_d\}$  un ensemble de  $d+1$  réels distincts. L'application qui à  $f$  définie au moins sur  $A$  fait correspondre son polynôme d'interpolation est linéaire. Notons, pour toutes fonctions  $f$  et  $g$  définies au moins sur  $A$  et pour tout réel  $\lambda$ ,  $p_f$  (resp.  $p_g$ ,  $p_{f+g}$ ,  $p_{\lambda f}$ ) le polynôme d'interpolation de  $f$  (resp.  $g$ ,  $f+g$ ,  $\lambda f$ ) relativement aux points de  $A$ . La linéarité mentionnée ci-dessus signifie que pour tout  $x$  réel,

$$\begin{cases} p_{f+g}(x) &= p_f(x) + p_g(x), \\ p_{\lambda f}(x) &= \lambda p_f(x). \end{cases} \quad (2.11)$$

**Preuve :** En utilisant la forme de Lagrange du polynôme d'interpolation de  $f$  relativement à  $A$ , on a pour tout  $x$  réel,

$$\begin{aligned} p_{f+g}(x) &= \sum_{j=0}^d (f+g)(a_j) l_{j,d}(x) \\ &= \sum_{j=0}^d (f(a_j) + g(a_j)) l_{j,d}(x) \\ &= \sum_{j=0}^d (f(a_j) l_{j,d}(x) + g(a_j) l_{j,d}(x)) \\ &= \sum_{j=0}^d f(a_j) l_{j,d}(x) + \sum_{j=0}^d g(a_j) l_{j,d}(x) \\ &= p_f(x) + p_g(x) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} p_{\lambda f}(x) &= \sum_{j=0}^d (\lambda f)(a_j) l_{j,d}(x) \\ &= \sum_{j=0}^d \lambda f(a_j) l_{j,d}(x) \\ &= \lambda \sum_{j=0}^d f(a_j) l_{j,d}(x) \\ &= \lambda p_f(x). \end{aligned}$$

□

---

## COURS 4 - 1h

---

### 2.3.3 Algorithme

**Algorithme 2.** Entrées :

- le vecteur  $a$  des  $d+1$  points d'interpolation  $a_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, d$ ,
- le vecteur  $f$  des  $d+1$  valeurs d'interpolation  $f_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, d$ ,
- le point  $x$ .

Le résultat est dans  $P$ .

1.  $P := 0$  ;
2. Pour  $j$  de 0 à  $d$  faire

- (a)  $L := 1$
- (b) Pour  $k$  de 0 à  $j-1$  faire  $L := L \times (x - a_k) / (a_j - a_k)$   
 Pour  $k$  de  $j+1$  à  $d$  faire  $L := L \times (x - a_k) / (a_j - a_k)$
- (c)  $P := P + f_j \times L$

**Théorème 7.** L'algorithme 2 nécessite  $2(2d+1)(d+1) \sim 4d^2$  opérations.

**Remarque 5.** Soient 2 suites  $(u_d)_{d \in \mathbb{N}}$  et  $(v_d)_{d \in \mathbb{N}}$  telles que tous les  $v_d$  sont non nuls. On dira que les deux suites sont équivalentes lorsque  $d \rightarrow \infty$  et on notera  $u_d \sim v_d$  lorsque  $\lim_{d \rightarrow \infty} \frac{u_d}{v_d} = 1$ .

**Preuve :** On décompte ici le nombre d'opérations du type  $+$ ,  $-$ ,  $\times$  et  $/$ .

L'étape 1 ne nécessite aucune opération du type précédent.

Pour chaque  $j$  de l'étape 2,

- l'étape 2b demande  $j + (d - j) = d$  multiplications, autant de divisions et  $2d$  soustractions
- et l'étape 2c demande 1 multiplication et 1 addition.

Au total, le nombre d'opérations réalisées par l'algorithme vaut

$$\sum_{j=0}^d \left( d(\times) + d(/) + 2d(-) + 1(\times) + 1(+) \right) = \sum_{j=0}^d (4d + 2) = (4d + 2) \sum_{j=0}^d 1 = 2(2d + 1)(d + 1).$$

Il est facile de vérifier que

$$\lim_{d \rightarrow \infty} \frac{2(2d + 1)(d + 1)}{4d^2} = \lim_{d \rightarrow \infty} \frac{2d + 1}{2d} \frac{d + 1}{d} = \lim_{d \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{2d} \right) \left( 1 + \frac{1}{d} \right) = 1.$$

□

Dans la figure 2.1, on compare la fonction  $x \mapsto x \sin(\pi x)$  (rouge) à son interpolant de Lagrange (bleu) relativement aux  $d + 1$  points équidistants dans  $[-1, 1]$ ,  $a_i = -1 + 2i/d$ ,  $i = 0, 1, \dots, d$  pour différentes valeurs de  $d$ .

On constate que l'interpolant se rapproche de plus en plus de la fonction sur  $[-1, 1]$  pour  $d$  allant de 3 à 6. En revanche, l'approximation est mauvaise en dehors de cet intervalle  $[-1, 1]$ .

Ceci étant dit, comme la fonction considérée ici est très régulière, en augmentant encore  $d$ , par exemple pour  $d = 12$ , le polynôme s'approche de la fonction même en dehors de l'intervalle  $[-1, 1]$ .

On verra en TP que le polynôme d'interpolation de Lagrange relativement aux points équidistants ne constitue pas une bonne approximation de certaines fonctions.

### 2.3.4 Étude de l'erreur

Soit  $A = \{a_0, a_1, \dots, a_d\}$  un ensemble de  $d + 1$  réels distincts et  $f$  une fonction à interpoler.

Notons  $p_f$  le polynôme d'interpolation de  $f$  relativement aux points de  $A$ .

Comme  $p_f$  est égal à  $f$  en tous les points  $a_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, d$ , il est naturel d'espérer que la différence entre  $p_f$  et  $f$  soit petite en les autres points  $x$ , au moins en les points  $x$  pas trop éloignés des  $a_i$ .

**Définition 3.** Soient  $a$  et  $b$  deux réels tels que  $a < b$ . Pour une fonction  $h \in C([a, b])$ , on appelle **norme infinie de  $h$  sur l'intervalle  $[a, b]$**  et on note  $\|h\|_{\infty, [a, b]}$  la quantité

$$\max_{t \in [a, b]} |h(t)|.$$

**Théorème 8** (admis). Soient  $A = \{a_0, a_1, \dots, a_d\} \subset [a, b]$  et  $f \in C^{d+1}([a, b])$ . On suppose que  $a_0 < a_1 < a_2 < \dots < a_d$ . Alors pour tout  $x \in [a, b]$ ,

$$|f(x) - p_f(x)| \leq \frac{\|f^{(d+1)}\|_{\infty, [a, b]}}{(d + 1)!} |\Pi_A(x)|,$$

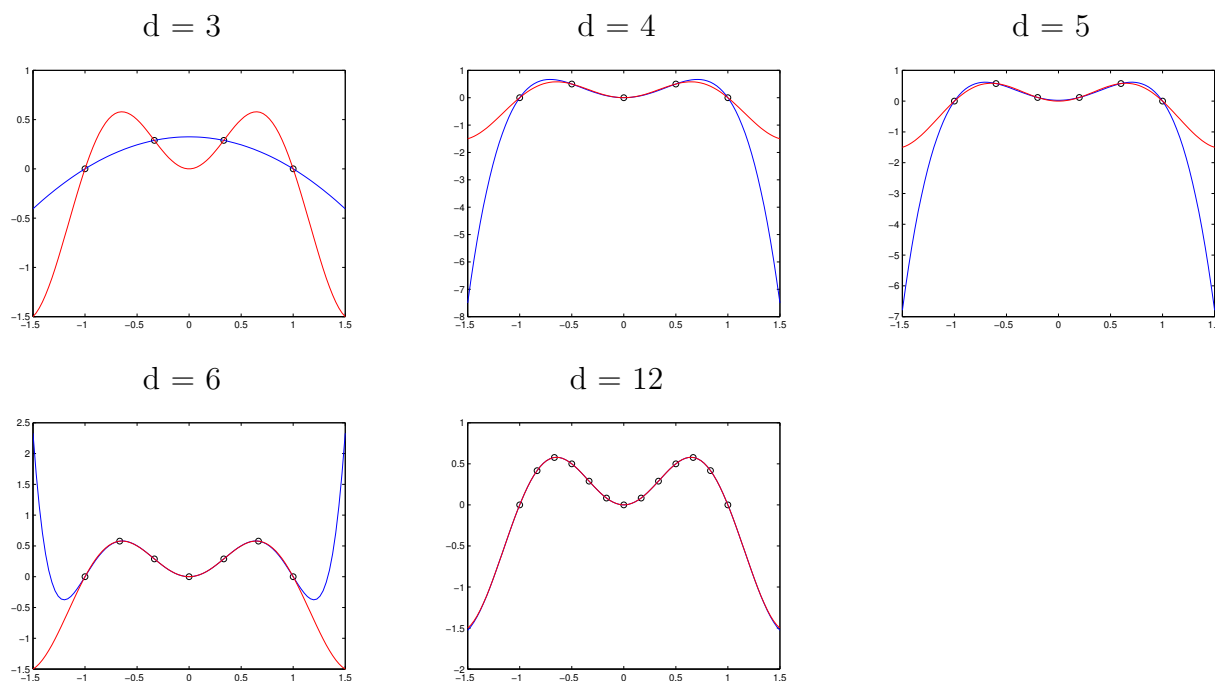


Figure 2.1: Fonction  $x \mapsto x \sin(\pi x)$  (en rouge) et l'interpolant de Lagrange correspondant (en bleu) relativement aux points  $a_i = -1 + 2i/d$ ,  $i = 0, 1, \dots, d$  (cercles noirs), pour différentes valeurs du degré  $d$ .

où  $f^{(d+1)}$  est la  $(d+1)$ -ième dérivée de  $f$  et  $\Pi_A(x) = \prod_{k=0}^d (x - a_k)$ . On a aussi

$$\|f - p_f\|_{\infty, [a, b]} \leq \frac{\|f^{(d+1)}\|_{\infty, [a, b]}}{(d+1)!} \|\Pi_A\|_{\infty, [a, b]}. \quad (2.12)$$

**Exemple :** On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}^+$  par  $f(x) = \sqrt{x}$ . Soient  $a_0 = 100$ ,  $a_1 = 121$  et  $a_2 = 144$ .

1. Calculer le polynôme d'interpolation  $p_f$  de  $f$  aux points  $a_0$ ,  $a_1$  et  $a_2$ .
2. Montrer (sans évaluer le membre de gauche) que  $|f(115) - p_f(115)| < 1.8 \cdot 10^{-3}$ .

### 2.3.5 Choix des points d'interpolation

La majoration (2.12) montre que pour une fonction à interpoler  $f$  donnée, si nous avons le choix des points d'interpolation dans  $[a, b]$ , nous avons intérêt à choisir ces points de telle sorte que la quantité  $\|\Pi_A(x)\|_{\infty, [a, b]}$  soit minimale. Il existe un unique ensemble de points qui minimise cette quantité. On les appelle les points de Chebyshev en hommage au mathématicien russe qui les a déterminés pour la première fois en 1874. Lorsque  $[a, b] = [-1, 1]$ , ces points sont donnés par la formule

$$a_i = \cos\left(\frac{(2i+1)\pi}{(d+1)}\right), i = 0, 1, \dots, d.$$

On peut comparer la répartition des points de Chebyshev à celle des points équidistants sur l'intervalle  $[-1, 1]$  pour  $d = 12$  sur les graphiques de la figure 2.2. Les premiers tendent à être en nombre plus important aux extrémités de l'intervalle.



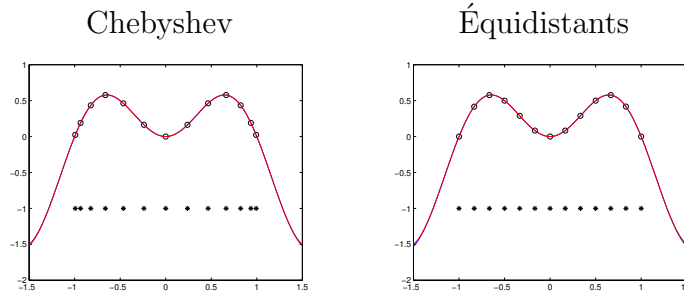


Figure 2.2: Répartition des points de Chebyshev et des points équidistants (les étoiles noires) sur  $[-1, 1]$  et tracé de la fonction  $x \mapsto x \sin(\pi x)$  (en rouge) et de l'interpolant de Lagrange correspondant (en bleu) pour  $d = 12$ .

## 2.4 Forme de Newton : construction pratique de l'interpolant

Dans toute cette section, on note  $A = \{a_0, a_1, \dots, a_d\} \subset [a, b]$  un ensemble de  $d+1$  réels distincts et  $f$  la fonction à interpoler, définie au moins sur  $A$ . Notons  $p_f$  le polynôme d'interpolation de  $f$  relativement aux points de  $A$ . Dans la forme de Lagrange de  $p_f$ , ajouter un point d'interpolation dans  $A$  nécessite de recommencer tous les calculs. C'est pour éviter cela que l'on introduit la forme de Newton de  $p_f$ . Comme elle définit le polynôme d'interpolation par récurrence, ajouter un point dans  $A$  devient peu coûteux.

### 2.4.1 Autre expression de l'interpolant : forme de Newton

On peut écrire  $p_f$  de différentes manières : pour tout  $x$  réel,

$$\begin{aligned}
 p_f(x) &= \sum_{j=0}^d f_j l_{jd}(x) \\
 &= \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \dots + \alpha_d x^d \\
 &= f[a_0] + f[a_0, a_1](x - a_0) + f[a_0, a_1, a_2](x - a_0)(x - a_1) + \dots \\
 &\quad + f[a_0, a_1, \dots, a_d](x - a_0)(x - a_1) \dots (x - a_{d-1}) \\
 &= f[a_0] + \sum_{j=1}^d f[a_0, a_1, \dots, a_j](x - a_0)(x - a_1) \dots (x - a_{j-1}),
 \end{aligned}$$

où on a noté  $f[a_0, a_1, \dots, a_d]$  le coefficient de  $x^d$  dans  $p_f(x)$ . Ce coefficient est aussi appelé  **$d$ -ième différence divisée de  $f$  aux points  $a_0, a_1, \dots, a_d$** .

**Exemples :**

1. Si  $d = 0$  et  $A = \{a_0\}$ ,  $p_f(x) = f(a_0)$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ . Le coefficient de  $x^0 = 1$  est  $f(a_0)$  et donc

$$f[a_0] = f(a_0).$$

2. Si  $d = 1$  et  $A = \{a_0, a_1\}$ ,  $p_f(x) = f(a_0) \frac{x - a_1}{a_0 - a_1} + f(a_1) \frac{x - a_0}{a_1 - a_0}$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ . Le coefficient de  $x^1 = x$  dans ce polynôme est

$$\frac{f(a_0)}{a_0 - a_1} + \frac{f(a_1)}{a_1 - a_0},$$

donc

$$f[a_0, a_1] = \frac{f(a_1) - f(a_0)}{a_1 - a_0}.$$

3. Si  $d = 2$  et  $A = \{a_0, a_1, a_2\}$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,

$$p_f(x) = f(a_0) \frac{(x - a_1)(x - a_2)}{(a_0 - a_1)(a_0 - a_2)} + f(a_1) \frac{(x - a_0)(x - a_2)}{(a_1 - a_0)(a_1 - a_2)} + f(a_2) \frac{(x - a_0)(x - a_1)}{(a_2 - a_0)(a_2 - a_1)}.$$

Le coefficient de  $x^2$  dans ce polynôme est

$$f(a_0) \frac{1}{(a_0 - a_1)(a_0 - a_2)} + f(a_1) \frac{1}{(a_1 - a_0)(a_1 - a_2)} + f(a_2) \frac{1}{(a_2 - a_0)(a_2 - a_1)},$$

qui s'écrit encore

$$\frac{f(a_0)}{(a_0 - a_1)(a_0 - a_2)} + \frac{f(a_1)}{(a_1 - a_0)(a_1 - a_2)} \frac{(a_2 - a_1) + (a_1 - a_0)}{a_2 - a_0} + \frac{f(a_2)}{(a_2 - a_0)(a_2 - a_1)},$$

c'est à dire

$$\frac{f(a_0)}{(a_1 - a_0)(a_2 - a_0)} - \frac{f(a_1)}{(a_1 - a_0)(a_2 - a_0)} - \frac{f(a_1)}{(a_2 - a_1)(a_2 - a_0)} + \frac{f(a_2)}{(a_2 - a_0)(a_2 - a_1)},$$

donc

$$f[a_0, a_1, a_2] = \frac{\frac{f(a_2) - f(a_1)}{a_2 - a_1} - \frac{f(a_1) - f(a_0)}{a_1 - a_0}}{a_2 - a_0} = \frac{f[a_1, a_2] - f[a_0, a_1]}{a_2 - a_0}.$$

**Théorème 9** (admis). *Les différences divisées s'obtiennent par récurrence : pour tout entier  $l \geq 1$ ,*

$$f[a_0, a_1, \dots, a_l] = \frac{f[a_1, a_2, \dots, a_l] - f[a_0, a_1, \dots, a_{l-1}]}{a_l - a_0}.$$

**Exemple** : En exploitant ce qui vient d'être vu, calculer le polynôme d'interpolation  $p$  de  $x \mapsto x^4$  relativement aux points  $\{0, 1, 2\}$ .

## 2.4.2 Algorithme

Dans l'algorithme ci-dessous, la première étape consiste à calculer toutes les différences divisées suivantes et à les stocker dans une matrice  $D$ ,

	Numéros de colonnes	0	1		$d$
Numéros de lignes					
0	$a_0$	$f[a_0]$			
1	$a_1$	$f[a_1]$	$\backslash$ — $f[a_0, a_1]$		
2	$a_2$	$f[a_2]$	$\backslash$ — $f[a_1, a_2]$	$\backslash$ — $\dots$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$			
$d - 1$	$a_{d-1}$	$f[a_{d-1}]$			
$d$	$a_d$	$f[a_d]$	$\backslash$ — $f[a_{d-1}, a_d]$	$\backslash$ — $\dots$	$f[a_0, a_1, \dots, a_d]$

puis à évaluer le polynôme d'interpolation en un point  $x$  au moyen de la forme de Newton

$$p_f(x) = f[a_0] + \sum_{j=1}^d f[a_0, a_1, \dots, a_j] (x - a_0)(x - a_1) \dots (x - a_{j-1}).$$

**Algorithme 3.** Entrées :

- le vecteur  $a$  des  $d + 1$  points d'interpolation  $a_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, d$ ,
- le vecteur  $f$  des  $d + 1$  valeurs d'interpolation  $f_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, d$ ,
- le point  $x$ .

Le résultat est dans  $P$ .

1. Pour  $i$  de 0 à  $d$  faire  $D_{i,0} = f(a_i)$   
Pour  $j$  de 1 à  $d$  faire  
Pour  $i$  de  $j$  à  $d$  faire  $D_{i,j} = (D_{i,j-1} - D_{i-1,j-1})/(a_i - a_{i-j})$   
Fin du pour
2.  $P = 0$   
 $\pi = 1$   
Pour  $j$  de 0 à  $d$  faire  
 $P = P + D_{j,j} \times \pi$   
 $\pi = \pi \times (x - a_j)$   
Fin du pour

**Exemple :** En exploitant ce qui vient d'être vu, calculer

- le polynôme d'interpolation  $p$  de cos relativement aux points  $\{0, \pi/2, \pi\}$  ;
- le polynôme d'interpolation  $q$  de cos relativement aux points  $\{0, \pi/2, \pi, -\pi\}$ .

**Théorème 10.** L'algorithme 3 nécessite  $\frac{(d+1)(3d+8)}{2} \sim \frac{3}{2}d^2$  opérations.

**Preuve :** Dans l'étape 1 de calcul des différences divisées, il est réalisé le nombre suivant d'opérations

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^d \sum_{i=j}^d 2(-) + 1(/) &= \sum_{j=1}^d 3(d-j+1) \\ &= 3 \left( d(d+1) - \frac{d(d+1)}{2} \right) \\ &= \frac{3}{2}d(d+1). \end{aligned}$$

Dans l'étape 2 d'évaluation du polynôme, il est effectué le nombre suivant d'opérations

$$\sum_{j=0}^d 1(+) + 1(-) + 2(*) = 4(d+1).$$

Au total, cet algorithme nécessite donc  $\frac{3}{2}d(d+1) + 4(d+1) = \frac{(d+1)(3d+8)}{2} \sim \frac{3}{2}d^2$  opérations. □

# Chapter 3

## Intégration numérique

### 3.1 Introduction

On s'intéresse dans ce chapitre au calcul d'intégrales du type

$$I(f, a, b) = \int_a^b f(x)dx.$$

Dans la plupart des cas, on ne connaît pas de primitives de  $f$ . C'est pourquoi on étudie des méthodes de calcul approché de  $I(f, a, b)$  en supposant que l'on connaît les valeurs numériques de  $f$  en certains points bien choisis.

Dans de nombreux cas de la vie réelle, on ne connaît même pas l'expression de la fonction  $f$ . On dispose seulement de tableaux de mesures.

**Dans toute la suite de ce chapitre,**

- on considère une fonction  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continue,
- on pose  $I(f, a, b) = \int_a^b f(x)dx$ ,
- on se donne une subdivision  $a \leq a_0 < a_1 < \dots < a_d \leq b$  de  $[a, b]$ ,
- on note  $A = \{a_0, a_1, \dots, a_d\}$
- et on appelle  $p_f$  le polynôme d'interpolation de  $f$  relativement aux abscisses de  $A$ .

#### 3.1.1 Principe de la méthode

L'idée est de chercher une approximation de  $I(f, a, b)$  de la forme  $I(g, a, b)$  en choisissant  $g$  de telle sorte que

- ce soit une bonne approximation de  $f$
- et qu'elle admette des primitives simples pour que  $I(g, a, b)$  soit facile à calculer.

Un choix naturel est de prendre  $g = p_f$ . De cette manière, les deux points précédents sont satisfaits.

D'après le chapitre précédent,  $g = p_f$  est donc définie pour tout réel  $x$  par

$$g(x) = \sum_{j=0}^d f(a_j) l_{j,d}(x) dx,$$

où les  $l_{j,d}$  sont les polynômes fondamentaux de Lagrange.

On a ainsi

$$I(g, a, b) = \int_a^b g(x) dx = \int_a^b p_f(x) dx = \int_a^b \sum_{j=0}^d f(a_j) l_{j,d}(x) dx = \sum_{j=0}^d f(a_j) \int_a^b l_{j,d}(x) dx.$$

### 3.1.2 Notations

**Définition 4.** *Étant donné un ensemble de poids  $W = \{w_0, w_1, \dots, w_d\}$ , on note  $Q_{A,W}(f, a, b)$  l'expression*

$$Q_{A,W}(f, a, b) := \sum_{j=0}^d w_j f(a_j).$$

Avec cette définition, l'expression  $I(g, a, b)$  obtenue ci-dessus est égale à  $Q_{A,W}(f, a, b)$  avec chacun des poids défini par

$$w_j = \int_a^b l_{j,d}(x) dx.$$

**Définition 5.** *On dit que  $Q_{A,W}(\cdot, a, b)$  est exacte sur  $\mathcal{P}_l$  si on a*

$$\forall p \in \mathcal{P}_l, \quad Q_{A,W}(p, a, b) = I(p, a, b).$$

**Exercice 1.** *On note  $I(f, -1, 1) = \int_{-1}^1 f(x) dx$ ,  $A = \{t_1, t_2\}$ ,  $W = \{1, 1\}$  et  $Q_{A,W}(f, -1, 1) = f(t_1) + f(t_2)$ . Montrer qu'il existe un unique ensemble  $A = \{t_1, t_2\}$  tel que  $Q_{A,W}(\cdot, -1, 1)$  soit exacte sur  $\mathcal{P}_2$ .*

**Proposition 3.** *Si  $A = \{a_0, a_1, \dots, a_d\}$  et  $W = \{w_0, w_1, \dots, w_d\}$  avec  $w_j = \int_a^b l_{j,d}(x) dx$ , alors  $Q_{A,W}(\cdot, a, b)$  est exacte sur  $\mathcal{P}_d$ .*

**Preuve :** On doit montrer que

$$\forall p \in \mathcal{P}_d, \quad Q_{A,W}(p, a, b) = I(p, a, b).$$

Soit donc  $p \in \mathcal{P}_d$ .

$$Q_{A,W}(p, a, b) \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{j=0}^d f(a_j) \int_a^b l_{j,d}(x) dx = \int_a^b p_p(x) dx.$$

Or, d'après le chapitre sur l'interpolation polynomiale, on sait que  $p = p_p$ . Donc

$$Q_{A,W}(p, a, b) = \int_a^b p_p(x) dx = \int_a^b p(x) dx = I(p, a, b).$$

□

Dans la pratique, grâce au procédé de composition qui sera détaillé plus loin, on obtient souvent de bons résultats en utilisant des méthodes exactes sur  $\mathcal{P}_1$  ou  $\mathcal{P}_2$ .

## 3.2 Formules élémentaires

### 3.2.1 Méthode du point milieu

Elle consiste à approcher  $f$  par son polynôme d'interpolation de Lagrange relativement au seul point  $a_0 = \frac{a+b}{2}$ . Dans ce cas là,  $p_f(x) = f(a_0)$  et on a donc

$$I(f, a, b) \approx I(p_f, a, b) = \int_a^b f(a_0) dx = (b-a)f(a_0).$$

On aboutit à la formule d'intégration numérique suivante :

$$J_m(f, a, b) = (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right). \quad (3.1)$$

Elle est appelée **formule d'intégration du rectangle au point milieu**. En effet, utiliser la formule du point milieu revient à approcher  $I(f, a, b)$  (c'est-à-dire l'aire comprise sous le graphe de  $f$  pour  $x \in [a, b]$ , si  $f$  est positive) par l'aire du rectangle de côtés  $[a, b]$  et  $[0, f(a_0)]$ .

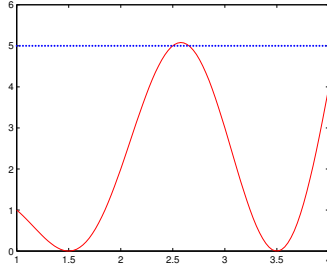


Figure 3.1: L'aire du rectangle sous les pointillés représente  $J_m(f, a, b)$  pour la fonction  $f$  tracée en trait plein

### 3.2.2 Méthode des trapèzes

On approche  $f$  par son polynôme d'interpolation de Lagrange relativement aux deux points  $a_0 = a$  et  $a_1 = b$ , qui s'écrit :

$$p_f(x) = f(a)\frac{x-b}{a-b} + f(b)\frac{x-a}{b-a}$$

et on a

$$\begin{aligned} I(f, a, b) \approx I(p_f, a, b) &= f(a) \int_a^b \frac{x-b}{a-b} dx + f(b) \int_a^b \frac{x-a}{b-a} dx \\ &= \frac{f(a)}{a-b} \left[ \frac{(x-b)^2}{2} \right]_a^b + \frac{f(b)}{b-a} \left[ \frac{(x-a)^2}{2} \right]_a^b \\ &= \frac{f(a)}{b-a} \frac{(a-b)^2}{2} + \frac{f(b)}{b-a} \frac{(b-a)^2}{2} \\ &= (b-a) \frac{f(a) + f(b)}{2}. \end{aligned}$$

On aboutit à la formule d'intégration numérique suivante :

$$J_t(f, a, b) = (b-a) \frac{f(a) + f(b)}{2}, \quad (3.2)$$

qui est appelée **formule du trapèze**.

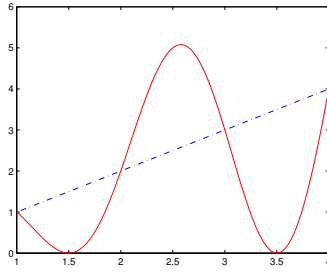


Figure 3.2: L'aire du trapèze sous les pointillés représente  $J_t(f, a, b)$  pour la fonction  $f$  tracée en trait plein

### 3.2.3 Méthode de Simpson

Cette fois, on approche  $f$  par son polynôme d'interpolation  $p_f$  relativement aux trois points

$$a_0 = a, a_1 = \frac{a+b}{2} \text{ et } a_2 = b.$$

On aboutit à la formule, dite de Simpson, suivante :

$$J_s(f, a, b) = (b - a) \frac{f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)}{6}. \quad (3.3)$$

Le lecteur doit savoir faire ...

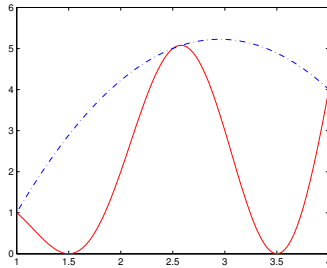


Figure 3.3: L'aire comprise entre la courbe en pointillés et l'axe des abscisses représente  $J_s(f, a, b)$  pour la fonction  $f$  tracée en trait plein

**Remarque 6.**

$$J_s(f, a, b) = \frac{1}{3}J_t(f, a, b) + \frac{2}{3}J_m(f, a, b).$$

## 3.3 Étude de l'erreur pour les formules élémentaires

**Proposition 4.** Soit  $f \in \mathcal{C}([a, b])$ . On a  $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$ .

**Preuve :** Pour tout  $x$  réel, on a  $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$ .

Par la propriété de conservation de l'ordre (proposition 4 du CM 8 des mathématiques du semestre 1), on peut écrire

$$-\int_a^b |f(x)| dx = \int_a^b -|f(x)| dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

□

### 3.3.1 Méthode du rectangle au point milieu

**Théorème 11.** Si  $f \in \mathcal{C}^1([a, b])$ , on a

$$|I(f, a, b) - J_m(f, a, b)| \leq \frac{(b-a)^2}{4} \|f'\|_{\infty, [a, b]}. \quad (3.4)$$

**Preuve :** Par construction,  $J_m(f, a, b) = \int_a^b p_f(x) dx$ . On a donc

$$\begin{aligned} |I(f, a, b) - J_m(f, a, b)| &= \left| \int_a^b (f(x) - p_f(x)) dx \right| \\ &\leq \int_a^b |f(x) - p_f(x)| dx. \end{aligned}$$

En utilisant la formule d'erreur établie dans le cours sur l'interpolation polynomiale, on en déduit que

$$\begin{aligned} |I(f, a, b) - J_m(f, a, b)| &\leq \int_a^b \frac{\|f'\|_{\infty, [a, b]}}{1!} |(x - a_0)| dx \\ &= \|f'\|_{\infty, [a, b]} \int_a^b |x - a_0| dx \\ &= \|f'\|_{\infty, [a, b]} \left( \int_a^{a_0} |x - a_0| dx + \int_{a_0}^b |x - a_0| dx \right) \\ &= \|f'\|_{\infty, [a, b]} \left( -\int_a^{a_0} (x - a_0) dx + \int_{a_0}^b (x - a_0) dx \right) \\ &= \|f'\|_{\infty, [a, b]} \left( -\left[ \frac{(x - a_0)^2}{2} \right]_a^{a_0} + \left[ \frac{(x - a_0)^2}{2} \right]_{a_0}^b \right) \\ &= \|f'\|_{\infty, [a, b]} \left( \frac{(a - a_0)^2}{2} + \frac{(b - a_0)^2}{2} \right) \\ &= \|f'\|_{\infty, [a, b]} \left( \frac{\left( -\frac{b-a}{2} \right)^2}{2} + \frac{\left( \frac{b-a}{2} \right)^2}{2} \right) \\ &= \|f'\|_{\infty, [a, b]} \left( \frac{(b-a)^2}{2} \right) \\ &= \|f'\|_{\infty, [a, b]} \frac{(b-a)^2}{4}. \end{aligned}$$

□



### 3.3.2 Méthode du trapèze

**Théorème 12.** Si  $f \in \mathcal{C}^2([a, b])$ , on a

$$|I(f, a, b) - J_t(f, a, b)| \leq \frac{(b-a)^3}{12} \|f''\|_{\infty, [a, b]}. \quad (3.5)$$

**Preuve :** Par construction,  $J_t(f, a, b) = \int_a^b p_f(x) dx$ . On a donc

$$\begin{aligned} |I(f, a, b) - J_t(f, a, b)| &= \left| \int_a^b (f(x) - p_f(x)) dx \right| \\ &\leq \int_a^b |f(x) - p_f(x)| dx. \end{aligned}$$

En utilisant la formule d'erreur établie dans le cours sur l'interpolation polynomiale, on en déduit que

$$\begin{aligned} |I(f, a, b) - J_t(f, a, b)| &\leq \int_a^b \frac{\|f''\|_{\infty, [a, b]}}{2!} |(x-a)(x-b)| dx \\ &= \frac{\|f''\|_{\infty, [a, b]}}{2} \int_a^b (x-a)(b-x) dx \\ &= \frac{\|f''\|_{\infty, [a, b]}}{2} \left\{ - \int_a^b \frac{(x-a)^2}{2} (-1) dx + \left[ \frac{(x-a)^2}{2} (b-x) \right]_a^b \right\} \quad \text{par IPP} \\ &= \frac{\|f''\|_{\infty, [a, b]}}{2} \left\{ \left[ \frac{(x-a)^3}{6} \right]_a^b + 0 \right\} \\ &= \frac{(b-a)^3}{12} \|f''\|_{\infty, [a, b]}. \end{aligned}$$

□

### 3.3.3 Méthode de Simpson

**Théorème 13.** (admis) Si  $f \in \mathcal{C}^3([a, b])$ , on a

$$|I(f, a, b) - J_s(f, a, b)| \leq \frac{(b-a)^4}{192} \|f^{(3)}\|_{\infty, [a, b]}. \quad (3.6)$$

### 3.3.4 Des formules d'erreur plus précises ...

En utilisant d'autres outils mathématiques (formule de Taylor et inégalité de la moyenne), on peut obtenir des estimations d'erreur plus précises pour certaines des formules d'intégration numériques.

**Théorème 14.** (admis) Si  $f \in \mathcal{C}^2([a, b])$ , on a

$$|I(f, a, b) - J_m(f, a, b)| \leq \frac{(b-a)^3}{24} \|f''\|_{\infty, [a, b]}. \quad (3.7)$$

**Théorème 15.** (admis) Si  $f \in \mathcal{C}^4([a, b])$ , on a

$$|I(f, a, b) - J_s(f, a, b)| \leq \frac{(b-a)^5}{2880} \|f^{(4)}\|_{\infty, [a, b]}. \quad (3.8)$$

Ces formules plus précises seront utilisées en TP.

### 3.4 Formules composites des trois exemples classiques

Ce sont les méthodes les plus couramment utilisées. On commence par découper l'intervalle  $[a, b]$  en  $n$  sous-intervalles égaux :

$$a = a_0 < a_1 < \dots < a_n = b \quad \text{avec} \quad a_i = a + ih \text{ et } h = \frac{b-a}{n}$$

et on applique l'une des formules élémentaires sur chacun des sous-intervalles.

#### 3.4.1 Méthode des rectangles aux points milieux

Elle est construite de la manière suivante :

$$\begin{aligned} I(f, a, b) &= \sum_{j=0}^{n-1} I(f, a_j, a_{j+1}) && \text{par la relation de Chasles} \\ &\approx \sum_{j=0}^{n-1} J_m(f, a_j, a_{j+1}) \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} (a_{j+1} - a_j) f\left(\frac{a_j + a_{j+1}}{2}\right) \\ &= \frac{b-a}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f\left(\frac{a_j + a_{j+1}}{2}\right). \end{aligned}$$

La formule composite des rectangles aux points milieux s'écrit ainsi

$$J_m^c(f, a, b, n) = \frac{b-a}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f\left(\frac{a_j + a_{j+1}}{2}\right). \quad (3.9)$$

#### 3.4.2 Méthode des trapèzes

On procède de la même façon :

$$\begin{aligned} I(f, a, b) &= \sum_{j=0}^{n-1} I(f, a_j, a_{j+1}) && \text{par la relation de Chasles} \\ &\approx \sum_{j=0}^{n-1} J_t(f, a_j, a_{j+1}) \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} (a_{j+1} - a_j) \frac{f(a_j) + f(a_{j+1})}{2} \\ &= \frac{b-a}{2n} \sum_{j=0}^{n-1} (f(a_j) + f(a_{j+1})) \\ &= \frac{b-a}{2n} \left( \sum_{j=0}^{n-1} f(a_j) + \sum_{j=1}^n f(a_j) \right) \\ &= \frac{b-a}{2n} \left( f(a) + f(b) + 2 \sum_{j=1}^{n-1} f(a_j) \right). \end{aligned}$$

La formule composite des trapèzes s'écrit donc ainsi

$$J_t^c(f, a, b, n) = \frac{b-a}{2n} \left( f(a) + f(b) + 2 \sum_{j=1}^{n-1} f(a_j) \right). \quad (3.10)$$

### 3.4.3 Méthode de Simpson

La formule composite de Simpson s'écrit

$$J_s^c(f, a, b, n) = \frac{b-a}{6n} \left( f(a) + f(b) + 2 \sum_{j=1}^{n-1} f(a_j) + 4 \sum_{j=0}^{n-1} f\left(\frac{a_j + a_{j+1}}{2}\right) \right). \quad (3.11)$$

Le lecteur doit être capable d'établir cette formule ...

**Remarque 7.**

$$J_s^c(f, a, b, n) = \frac{1}{3} J_t^c(f, a, b, n) + \frac{2}{3} J_m^c(f, a, b, n).$$

---

COURS 8 - 1h

---

## 3.5 Étude de l'erreur pour les formules composites

### 3.5.1 Méthode des rectangles aux points milieux

**Théorème 16.** Si  $f \in \mathcal{C}^2([a, b])$ , on a

$$|I(f, a, b) - J_m^c(f, a, b, n)| \leq \frac{(b-a)^3}{24n^2} \|f''\|_{\infty, [a, b]}. \quad (3.12)$$

**Remarque 8.** Ce théorème montre qu'on peut avoir une approximation aussi précise que l'on veut en prenant un nombre  $n$  de sous-intervalles suffisamment grand.

**Preuve :** Par construction, on a

$$\begin{aligned} |I(f, a, b) - J_m^c(f, a, b, n)| &= \left| \sum_{j=0}^{n-1} \left( I(f, a_j, a_{j+1}) - J_m(f, a_j, a_{j+1}) \right) \right| \\ &\leq \sum_{j=0}^{n-1} |I(f, a_j, a_{j+1}) - J_m(f, a_j, a_{j+1})| \\ &\leq \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(a_{j+1} - a_j)^3}{24} \|f''\|_{\infty, [a_j, a_{j+1}]} \quad \text{par (3.7)} \\ &\leq \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\left(\frac{b-a}{n}\right)^3}{24} \|f''\|_{\infty, [a, b]} \\ &= n \frac{(b-a)^3}{24n^3} \|f''\|_{\infty, [a, b]} \\ &= \frac{(b-a)^3}{24n^2} \|f''\|_{\infty, [a, b]}. \end{aligned}$$

□

### 3.5.2 Méthode des trapèzes

**Théorème 17.** Si  $f \in \mathcal{C}^2([a, b])$ , on a

$$|I(f, a, b) - J_m^c(f, a, b, n)| \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2} \|f''\|_{\infty, [a, b]}. \quad (3.13)$$

**Preuve :** Par construction, on a

$$\begin{aligned} |I(f, a, b) - J_t^c(f, a, b, n)| &= \left| \sum_{j=0}^{n-1} \left( I(f, a_j, a_{j+1}) - J_t(f, a_j, a_{j+1}) \right) \right| \\ &\leq \sum_{j=0}^{n-1} |I(f, a_j, a_{j+1}) - J_t(f, a_j, a_{j+1})| \\ &\leq \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(a_{j+1} - a_j)^3}{12} \|f''\|_{\infty, [a_j, a_{j+1}]} \quad \text{par (3.5)} \\ &\leq \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\left(\frac{b-a}{n}\right)^3}{12} \|f''\|_{\infty, [a, b]} \\ &= n \frac{(b-a)^3}{12n^3} \|f''\|_{\infty, [a, b]} \\ &= \frac{(b-a)^3}{12n^2} \|f''\|_{\infty, [a, b]}. \end{aligned}$$

□

### 3.5.3 Méthode de Simpson

**Théorème 18.** Si  $f \in \mathcal{C}^4([a, b])$ , on a

$$|I(f, a, b) - J_s^c(f, a, b, n)| \leq \frac{(b-a)^5}{2880n^4} \|f^{(4)}\|_{\infty, [a, b]}. \quad (3.14)$$

**Preuve :** Le lecteur doit savoir faire ...

□