Relations

Exercice 1. Sur l'ensemble $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ on considère les relations

$$\begin{aligned} x\mathcal{R}y &\iff x \text{ divise } y \\ x\mathcal{S}y &\iff x \text{ est multiple de } y \end{aligned}$$

1. Représenter ces relation par un diagramme sagittal.
2. Existe t-il un lien entre $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$?
3. Dire si ces relations sont réflexives, symétriques, antisymétriques ou transitives.

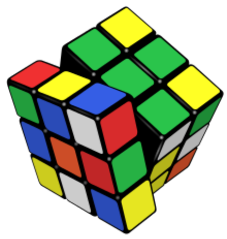
Exercice 2. Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire sur un ensemble E. On définit la relation binaire $\mathcal{R}^*$ appelée *fermeture transitive* de $\mathcal{R}$ par $x\mathcal{R}^*y$ s'il existe $n \in \mathbb{N}$ et $x_0, x_1, \ldots x_n \in E$ tels que $x_0 = x$, $x_n = y$ et $x_i\mathcal{R}x_{i+1}$ pour tout $i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$.

1. Considérons la relation binaire $\mathcal{R}$ définie par

	1	2	3	4
1		V	V	V
2	V			
3				
4			V	

   Est ce que $\mathcal{R}$ est transitive ? Représenter $\mathcal{R}$ par un diagramme sagittal.
2. Quelle est la fermeture transitive $\mathcal{R}^*$ associée ? On pourra la représenter à l'aide d'un diagramme sagittal.
3. Montrer que pour toute relation binaire $\mathcal{R}$, la fermeture transitive $\mathcal{R}^*$ est une relation binaire transitive.

Exercice 3.



Le Rubik's Cube est un cube dont chaque face est divisée en neuf cubes miniatures qui peuvent tourner indépendamment les uns des autres. En fait le cube est composé d'un axe central portant les centres des 6 faces, de 8 cubes de coin à 3 faces visibles et de 12 cubes d'arête à 2 faces visibles. À l'état final, chaque face du cube de Rubik est d'une couleur homogène et différente des autres, mais la rotation indépendante de chaque face provoque un mélange des petits cubes de coin et d'arête. Une disposition des cubes composant les faces est appelée *configuration*.
Sur l'ensemble des configuration Ω, on définit la relation $\mathcal{R}$ telle que $x\mathcal{R}y$ s'il est possible de passer de la configuration x à la configuration y soit en ne faisant aucune modification soit en réalisant une rotation d'un quart de tour d'une face. Une configuration est résoluble s'il est possible de trouver une séquence de rotation d'un quart de tour qui arrive sur une configuration où toute les faces sont de la même couleur.

1. Dire si $\mathcal{R}$ est réflexive, symétrique, antisymétrique ou transitive.
2. Donner une interprétation de la fermeture transitive $\mathcal{R}^*$. Est ce que $\mathcal{R}^*$ est une relation d'équivalence ?
3. Exprimer avec le vocabulaire des relations les propriétés suivantes :
   (a) Il y a toujours une solution.
   (b) A partir de certaines configurations, il n'y a pas de solution.
   (c) De toute position, si je modifie le cube, je peux revenir à cette position.
4. Montrer qu'il existe un entier n tel que pour toute position résoluble, on peut la résoudre en moins de n coups.

Exercice 4. Soit $\mathcal{R}$ une relation sur un ensemble E.

1. Caractériser par son diagramme sagittal le fait que cette relation soit une relation d'équivalence.
2. Soit $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ un ensemble, on considère la relation $\mathcal{R}$ définie par
$$\{(1,1),(1,5),(2,2),(2,3),(2,6),(3,2),(3,3),(3,6),(4,4),(5,1),(5,5),(6,2),(6,3),(6,6)\}$$
A l'aide du diagramme sagittal vérifier que c'est une relation d'équivalence et donner ses classes d'équivalence.
3. Définir sur E la relation d'équivalence qui comporte le plus de classes d'équivalence puis la relation d'équivalence qui comporte le moins de classes d'équivalence.

Exercice 5. Sur l'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs, on définit deux relations, notées respectivement $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$, de la façon suivante :

— $x\mathcal{R}y$ si et seulement si $x + y$ est pair ;
— $x\mathcal{S}y$ si et seulement si $x - y$ est pair ;

1. Est-ce-que $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ représentent les mêmes relations ?
2. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
3. Décrire la classe d'équivalence de 0.
4. Quel est le cardinal de $\mathbb{Z}/\mathcal{R}$?

Exercice 6. Soit $\mathcal{F}onc$ l'ensemble des applications $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Sur $\mathcal{F}onc$ on définit la relation $f\mathcal{R}g$ s'il existe deux constantes réelles strictement positives α et β telles que
$$\alpha f(n) \leq g(n) \leq \beta f(n) \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

1. Démontrez qu'il s'agit une relation d'équivalence sur $\mathcal{F}onc$.
2. Donner des exemples de fonctions f et g qui sont équivalentes mais pas égales.

Exercice 7. Soient E un ensemble et $A \in \mathcal{P}(E)$. On définit sur $\mathcal{P}(E)$ la relation $\mathcal{R}$ par $X\mathcal{R}Y$ si $X \cap A = Y \cap A$ pour $X, Y \in \mathcal{P}(E)$.

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
2. Expliciter les classes d'équivalence de $\emptyset$, E, A et $\overline{A}$.
3. Trouver une bijection de $\mathcal{P}(E)/\mathcal{R}$ sur $\mathcal{P}(A)$.

Remarque : Ne pas hésiter, si nécessaire, à expliciter les classes pour un cas particulier, par exemple $E = \{1, 2, 3, 4\}$ et $A = \{1, 2\}$.

Exercice 8. Soient E un ensemble fini non vide et x un élément fixé de E. On définit les relations binaires $\overset{i}{\sim}$ sur $\mathcal{P}(E)$ définies ci-dessous. Pour chacune d'elles dire si elles sont réflexives, transitives, symétriques ou antisymétriques.

1. Pour tous $A, B \in \mathcal{P}(E)$, on a $A \overset{1}{\sim} B \iff A = B$.
2. Pour tous $A, B \in \mathcal{P}(E)$, on a $A \overset{2}{\sim} B \iff A \subset B$.
3. Pour tous $A, B \in \mathcal{P}(E)$, on a $A \overset{3}{\sim} B \iff A \cap B \neq \emptyset$.
4. Pour tous $A, B \in \mathcal{P}(E)$, on a $A \overset{4}{\sim} B \iff A \cap B = \emptyset$.
5. Pour tous $A, B \in \mathcal{P}(E)$, on a $A \overset{5}{\sim} B \iff x \in A \cup B$.
6. Pour tous $A, B \in \mathcal{P}(E)$, on a $A \overset{6}{\sim} B \iff (x \in A \cap B \text{ ou } x \in \overline{A} \cap \overline{B})$.

Exercice 9. Soit E un ensemble à n éléments.

1. Combien y-a-t-il de relations internes sur E ?
2. Combien y-a-t-il de relations réflexives sur E ?
3. Combien y-a-t-il de relations symétriques sur E ?

Exercice 10. Sur $\mathbb{R}^2$ on considère la relation $\mathcal{R}$ définie par

$$(a,b)\mathcal{R}(c,d) \iff a^2+b^2 = c^2+d^2$$

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
2. Décrire la classe d'équivalence $\mathbf{Cl}((a,b))$ du couple $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.
3. Pourquoi l'application suivante est bien définie, c'est à dire que l'image d'une classe ne dépend pas de l'élément qui représente la classe :

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2/\mathcal{R} & \longrightarrow & [0,+\infty[\\ \mathbf{Cl}(a,b) & \longmapsto & a^2+b^2 \end{array}$$

4. Montrer que $\widetilde{f}$ est bijective.

Exercice 11. Soit $E = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$, on définit sur E la relation binaire $\mathcal{R}$ par

$$(a,b)\mathcal{R}(c,d) \iff ad = bc$$

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence. On note $\widehat{(a,b)}$ la classe d'équivalence du couple $(a,b) \in E$ et $\mathbb{Q}$ l'ensemble des classes d'équivalence.
2. Donner la classe d'équivalence de $(1,2)$.
3. On définit la fonction suivante :

$$\otimes: \begin{array}{ccc} E \times E & \longrightarrow & E \\ (a,b),(c,d) & \longmapsto & (ac,bd) \end{array}$$

   (a) Montrer que pour tout $(a',b') \in \widehat{(a,b)}$ et $(c',d') \in \widehat{(c,d)}$ on a $(a'c',b'd') \in \widehat{(ac,bd)}$. Ainsi l'opération $\otimes$ laisse stable les classes d'équivalence et on peut écrire $\widehat{(a,b)} \otimes \widehat{(c,d)} = \widehat{(ac,bd)}$.
   (b) Montrer que $\widehat{(a,b)} \otimes \widehat{(1,1)} = \widehat{(a,b)}$.
   (c) Montrer que $\widehat{(a,b)} \otimes \widehat{(b,a)} = \widehat{(1,1)}$.
4. On définit la fonction suivante :

$$\oplus: \begin{array}{ccc} E \times E & \longrightarrow & E \\ (a,b),(c,d) & \longmapsto & (ad+cb,bd) \end{array}$$

   (a) Montrer que pour tout $(a',b') \in \widehat{(a,b)}$ et $(c',d') \in \widehat{(c,d)}$ on a $(a'd'+c'b',b'd') \in \widehat{(ad+cb,bd)}$. Ainsi l'opération $\otimes$ laisse stable les classes d'équivalence et on peut écrire $\widehat{(a,b)} \oplus \widehat{(c,d)} = \widehat{(ad+cb,bd)}$.
   (b) Montrer que $\widehat{(a,b)} \otimes \widehat{(0,1)} = \widehat{(a,b)}$.
   (c) Montrer que $\widehat{(a,b)} \otimes \widehat{(-a,b)} = \widehat{(0,1)}$.
5. Vérifier la distributivité de $\otimes$ et $\oplus$.

Exercice 12. Les jeux de Nim sont des jeux qui se jouent à deux à tour de rôle. Il y a initialement un certain nombre d'allumettes disposées sur la table et il s'agit de prendre un certain nombre de baton à tour de rôle. Le joueur ne pouvant plus jouer étant le perdant (ou selon certaines variantes, le gagnant). Comme il y a un nombre fini de bâtons et qu'à chaque étape ce nombre diminue il y a forcément un gagnant. On dit qu'un joueur à une stratégie gagnante s'il est sûr de gagner quel que soit le jeu de l'adversaire.

1. A tour de rôle, chacun prend autant d'allumettes qu'il veut mais au moins une. Celui qui ne peut plus jouer a perdu. Est ce qu'un des joueurs a une stratégie gagnante ?
2. A tour de rôle, chacun prend une, deux ou trois allumettes. Celui qui ne peut plus jouer a perdu.
   (a) On note E l'ensemble des *configurations* du jeu, c'est à dire l'ensemble des dispositions possibles des allumettes. Quel est le cardinal de E ?
   (b) On définit $\mathcal{R}$ une relation sur E définie par
   $$x\mathcal{R}y \Longleftrightarrow \text{on peut passer de la configuration } x \text{ à la configuration } y \text{ lorsqu'un joueur joue}$$
   Dessiner le diagramme sagittal de la relation lorsque il y a initialement 8 allumettes.
   (c) Un ensemble $N \subset E$ est un *noyau* pour la relation $\mathcal{R}$ si :
   — pour tout $x \notin N$, il existe $y \in N$ tel que $x\mathcal{R}y$ (on dit que N est *absorbant*) ;
   — pour tous $x, y \in N$, on a $x\not\mathcal{R}y$ (on dit que N est *stable*).
   Montrer que $N = \{x \in E : x \text{ contient un multiple de 4 allumettes}\}$ est un noyau.
   (d) Montrer que si un joueur se trouve dans une configuration qui n'est pas dans le noyau alors il a une stratégie gagnante.
   (e) Soit $x \in E$ tel que pour tout $y \in E$ on a $x\not\mathcal{R}y$. Montrer que x est dans le noyau et tout élément z tel que $z\mathcal{R}$ n'est pas dans le noyau. En déduire une méthode pour déterminer le noyau.
   (f) Pour quelle quantité d'allumettes le deuxième joueur a une stratégie gagnante et donner cette stratégie gagnante.
3. On dispose maintenant 16 allumettes en quatre rangées de respectivement 1, 3, 5 et 7 allumettes. Chaque joueur à tour de rôle peut prendre autant d'allumettes qu'il veut mais dans une seule rangée. Le joueur qui prend la dernière allumette a gagné. On appelle ce jeu, le jeu de Marienbad.
   (a) Que se passe-t-il quand il ne reste plus que deux rangées d'allumettes ? Quelle est la stratégie gagnante dans ce cas ?
   (b) On note E l'ensemble des *configurations* du jeu, c'est à dire l'ensemble des dispositions possibles des allumettes. Quel est le cardinal de E ?
   (c) Pour analyser le jeu, sur chaque ligne d'un tableau on écrit en binaire le nombre d'allumettes de la rangée correspondante, puis on somme les colonnes du tableau. Par exemple pour la position initiale, on obtient :

rangée 1 (1 allumette) :			1
rangée 2 (3 allumettes) :		1	1
rangée 3 (5 allumettes) :	1	0	1
rangée 4 (7 allumettes) :	1	1	1
	2	2	4

   On note N l'ensemble des positions pour lesquelles toutes ces sommes sont paires. Montrer que N est un noyau pour la relation $\mathcal{R}$ définie par $x\mathcal{R}y$ si et seulement si on peut passer de la configuration x à la configuration y lorsqu'un joueur joue.
   (d) Au jeu de Marienbad, lequel des deux joueurs a une stratégie gagnante ?