

## Tételek

### 12.14 Az inverz mátrix egyértelműsége

Legyen  $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$  reguláris mátrix, és tegyük fel, hogy  $C \in \mathbb{K}^{n \times n}$  is és  $D \in \mathbb{K}^{n \times n}$  is az  $A$  inverze, azaz fennáll:

$$AC = CA = I \quad \text{és} \quad AD = DA = I$$

Ekkor  $C = D$

#### Bizonyítás

$$D = DI = D(AC) = (DA)C = IC = C$$

Tehát egy négyzetes mátrixnak vagy nincs inverze (*szinguláris eset*), vagy pedig egyetlen inverze van (*reguláris eset*).

Az inverz létezésének feltételeivel, kiszámításának módszereivel később foglalkozunk, itt csak egy példát említünk:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

ugyanis:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ezzel azt is megmutattuk, hogy az  $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$  mátrix reguláris.

### 13.3. A 2x2-es mátrix determináns kiszámításának képlete

Egy 2x2-es mátrix determinánsa a következőképpen számítható:

$$\det\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = a \cdot (-1)^{1+1} \cdot \det([d]) + b \cdot (-1)^{1+2} \cdot \det([c]) = ad - bc$$

tehát egy 2x2-es mátrix determinánsát megkapjuk, ha a főátlóbeli elemeinek szorzatából levonjuk a mellékátlóbeli elemeinek szorzatát.

### 13.4. A jobbinverz létezése

Az  $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$  mátrixhoz akkor és csak akkor létezik olyan  $C \in \mathbb{K}^{n \times n}$  mátrix, amelyre igaz, hogy  $AC = I$ , ha  $\det(A) \neq 0$ . Egy ilyen  $C$  mátrixot az  $A$  jobbinverzének nevezzük.

### 13.5 Az inverz létezése

Legyen  $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ . Ekkor

$$\exists A^{-1} \iff \det(A) \neq 0$$

azaz az  $A$  mátrix akkor és csak akkor reguláris, ha  $\det(A) \neq 0$ . Következtetés: az  $A$  mátrix akkor és csak akkor szinguláris, ha  $\det(a) = 0$ .

#### Bizonyítás

Tegyük fel először, hogy  $A$  reguláris, azaz, hogy  $\exists A^{-1}$ . Ekkor,  $C = A^{-1}$  választással megismételve az előző tétel első felének bizonyítását

$$1 = \det(I) = \det(A \cdot A^{-1}) = \det(A) \cdot \det(A^{-1})$$

amiből azonnal adódik, hogy  $\det(A) \neq 0$ . Mellesleg az is kiadódott, hogy

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

Megfordítva, tegyük fel, hogy  $\det(A) \neq 0$ . Ekkor az előző tétel második fele alapján létezik olyan  $C \in \mathbb{K}^{n \times n}$  mátrix, melyre fennáll:  $AC = I$ . Megmutatjuk, hogy ez a  $C$  mátrix lesz az  $A$  inverze.

Ehhez már csak az kell igazolni, hogy  $CA = I$ .

Ezt a következőképpen igazoljuk: Mivel  $\det(A^T) = \det(A) \neq 0$ , ezért az előző tétel második felét az  $A^T$  mátrixra alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$\exists D \in \mathbb{K}^{n \times n} : A^T D = I$$

Az egyenlőség mindkét oldalát transzponáljuk:

$$(A^T D)^T = I^T$$

ahonnan  $D^T A = I$  következik. Ennek segítségével igazolhatjuk a  $CA = I$  egyenlőséget:

$$CA = ICA = D^T ACA = D^T (AC)A = D^T IA = D^T A = I.$$

## 14.12. Tétel

Legyen  $W \subseteq V$ ,  $W \neq \emptyset$ .  $W$  akkor és csak akkor altere  $V$ -nek, ha a következő két feltétel teljesül:

1.  $\forall x, y \in W : x + y \in W$
2.  $\forall x \in W \forall \lambda \in \mathbb{K} : \lambda x \in W$

Az első feltételt úgy is szoktuk mondani, hogy az összeadás nem vezet ki  $W$ -ből vagy, hogy  $W$  zárt az összeadásra nézve. Hasonlóképpen, a második feltételt fogalmazhatjuk úgy is, hogy a számmal való szorzás nem vezet ki  $W$ -ből vagy, hogy  $W$  zárt a számmal való szorzásra nézve.

### Bizonyítás

A két feltétel szükségessége nyilvánvaló.

Az elégségség igazolásához csak a 14.1 definíció I. 4. és I. 5. pontjai szorulnak bizonyításra, hiszen I. 1. és II. 1. fel van téve, a többi axióma pedig azonosság.

Jelöljük  $0_V$ -vel a  $V$  nullvektorát és legyen  $x \in W$ . Ekkor  $x \in V$ , ezért a 14.4. tétel valamint tételünk második feltétele alapján

$$0_V = 0 \cdot x \in W$$

## 15.1.2. Generált altér

Legyen  $x_1, \dots, x_k \in V$  egy vektorrendszer. Tekintsük  $V$  következő részhalmazát:

$$W^* := \{\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_k x_k \in V \mid \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{K}\}$$

$W^*$  elemei tehát az  $x_1, x_2, \dots, x_k$  vektorrendszer összes lehetséges lineáris kombinációi.

## 15.3. Tétel

1.  $W^*$  altér  $V$ -ben
2.  $W^*$  lefedi az  $x_1, \dots, x_k$  vektorrendszert, amint azt értjük, hogy

$$x_i \in W^* \quad (i = 1, \dots, k)$$

3. Minden olyan  $Z \subseteq V$  altér esetén, amely a fenti értelemben lefedí az  $x_1, \dots, x_k$  vektorrendszert, fennáll, hogy  $W^* \subseteq Z$

A bizonyítás előtt megjegyezzük, hogy a tétel állítása röviden úgy foglалható össze, hogy  $W^*$  az  $x_1, x_2, \dots, x_k$  vektorrendszert feledő legszűkebb altér.

### **Bizonyítás**

1. Legyen  $a = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_k x_k \in W^*$  és  $b = \mu_1 x_1 + \dots + \mu_k x_k \in W^*$ . Ekkor:

$$a + b = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_k x_k + \mu_1 x_1 + \dots + \mu_k x_k$$

Továbbá tetszőleges  $\beta \in \mathbb{K}$  esetén:

$$\beta a = \beta(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_k x_k) = (\beta \lambda_1) x_1 + \dots + (\beta \lambda_k) x_k \in W^*$$

Tehát a 14.12-es tétel alapján  $W^*$  valóban altér  $V$ -ben

2. Bármely rögzített  $i \in \{1, \dots, k\}$  esetén:

$$x_i = 0x_1 + \dots + 0x_{i-1} + 1x_i + 0x_{i+1} + \dots + 0x_k \in W^*$$

3. Legyen  $Z$  egy, a tételben leírt altér, és legyen  $a = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_k x_k \in W^*$ . Mivel  $Z$  lefedí a vektorrendszert, ezért

$$x_i \in Z \quad (i = 1, \dots, k)$$

Azonban  $Z$  altér, ezért zárt a lineáris kombináció képzésére, amiből azonnal adódik, hogy  $a \in Z$ . Tehát valóban  $W^* \subseteq Z$ .

### **Kanonikus egységvektorok definíciója $\mathbb{K}^n$ -ben / Az általuk generált altér**

A  $\mathbb{K}^n$ -beli  $i$ -edik (kanonikus) egységvektort (jelöljük  $e_i$ -vel) úgy értelmezzük, hogy  $i$ -edik komponense legyen 1, a többi komponense pedig legyen nulla ( $i = 1, \dots, n$ ). Ekkor az  $e_1, \dots, e_n$  vektorrendszer generátorrendszer a  $\mathbb{K}^n$  térben, ugyanis tetszőleges  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$  esetén

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \cdot 1 + x_2 \cdot 0 + \dots + x_n \cdot 0 \\ x_1 \cdot 0 + x_2 \cdot 1 + \dots + x_n \cdot 0 \\ \vdots \\ x_1 \cdot 0 + x_2 \cdot 0 + \dots + x_n \cdot 1 \end{pmatrix} = x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + x_n \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$$

tehát  $x$  valóban felírható az  $e_1, \dots, e_n$  vektorok lineáris kombinációjaként

## **16.5. Egyértelmű előállítás tétele**

Legyen  $x_1, \dots, x_n \in V$  egy vektorrendszer, továbbá  $x \in \text{Span}(x_1, \dots, x_n)$ . Ekkor

- Ha az  $x_1, \dots, x_n$  vektorrendszer lineárisan független, akkor  $x$  egyértelműen (azaz csak egyféleképpen) állítható elő a rendszer tagjainak lineáris kombinációjaként.
- Ha az  $x_1, \dots, x_n$  vektorrendszer lineárisan összefüggő, akkor  $x$  végtelen sokféleképpen állítható elő a rendszer tagjainak lineáris kombinációjaként.

### **Bizonyítás**

- a) Tegyük fel, hogy

$$x = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n$$

$$x = \mu_1 x_1 + \dots + \mu_n x_n$$

és rendezzük át a jobb oldali egyenlőséget (0-ra redukálás, közös szumma, kiemelés):

$$\sum_{i=1}^n (\lambda_i - \mu_i) x_i = 0$$

Ebből – az  $x_1, \dots, x_k$  rendszer függetlenségét felhasználva – azt kapjuk, hogy  $\lambda_i - \mu_i = 0$ , azaz, hogy  $\lambda_i = \mu_i$  ( $\exists i \in \{1, \dots, n\}$ ).

## 16.6. Összefüggő rendszer szűkítése

Legyen  $x_1, \dots, x_k \in V$  egy lineárisan összefüggő rendszer. Ekkor

$$\exists i \in \{1, 2, \dots, k\} : \text{Span}(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_k) = \text{Span}(x_1, \dots, x_k)$$

**Szavakban:** Összefüggő rendszerből elhagyható valamely vektor úgy, hogy a generált altér nem változik. Másképpen fogalmazva: összefüggő rendszerben legalább egy vektor felesleges a generált altér szempontjából.

### Bizonyítás

A rendszer összefüggősége miatt léteznek  $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{K}$  nem mind 0 számok úgy, hogy

$$\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_k x_k = 0$$

Legyen  $i$  egy olyan index, amelyre  $\lambda_i \neq 0$ . Legyen továbbá

$$W_1 := \text{Span}(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_k) \text{ és } W_2 := \text{Span}(x_1, \dots, x_k)$$

Azt kell igazolnunk, hogy  $W_1 = W_2$ :

A  $W_1 \subseteq W_2$  tartalmazás **triviális**, ugyanis:

$$x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_k \in \text{Span}(x_1, \dots, x_k) = W_2$$

miatt a  $W_2$  altér lefedi az  $x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_k$  vektorrendszert. Mivel  $W_1$  e rendszer legszűkebb lefedő altére, ezért  $W_1 \subseteq W_2$ . A  $W_2 \subseteq W_1$  tartalmazás igazolásához induljunk ki abból, hogy **triviálisan**

$$x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_k \in \text{Span}(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_k) = W_1$$

$x_i \in W_1$ : Ehhez a már felírt

$$\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_k x_k = 0$$

összefüggőségei egyenletből rendezzük ki a  $x_i$ -t ( $\lambda_i \neq 0$  miatt lehetséges)

$$x_i = \left(-\frac{\lambda_1}{\lambda_i}\right) \cdot x_1 + \dots + \left(-\frac{\lambda_k}{\lambda_i}\right) \cdot x_k$$

Azt kaptuk, hogy  $x_i$  kifejezhető az  $x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_k$  vektorok lineáris kombinációjaként, tehát  $x_i$  valóban benne van a  $\text{Span}(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_k) = W_1$  altérben.

Így tehát a  $W_1$  altér lefedi az  $x_1, \dots, x_k$  vektorrendszert, s mivel  $W_2$  e rendszer legszűkebb lefedő altére, következésképpen  $W_2 \subseteq W_1$ .

A  $W_1 \subseteq W_2$  és a  $W_2 \subseteq W_1$  tartalmazási relációk pedig együtt azt jelentik, hogy  $W_1 = W_2$

### Megjegyzés

A bizonyításból az is kiderült, hogy az a vektor biztosan felesleges (vagyis elhagyható), amelyiknek az együtthatója valamelyik összefüggőségi egyenletben nem 0.

## 16.8 Összefüggő rendszerré bővítés

Legyen  $x_1, \dots, x_k \in V$  egy vektorrendszer, továbbá  $x \in V$ . Ekkor

$$x \in \text{Span}(x_1, \dots, x_k) \Rightarrow x_1, \dots, x_k, x \text{ lineárisan összefüggő}$$

### Bizonyítás

Mivel  $x \in \text{Span}(x_1, \dots, x_k)$ , ezért  $x$  felírható a generátorrendszer lineáris kombinációjaként:

$$\exists \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{K} : x = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_k x_k$$

Átrendezés után:

$$\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_k x_k + (-1) \cdot x = 0$$

Mivel  $-1 \neq 0$ , ezér a rendszer valóban összefüggő.

## 16.10. Független rendszer bővítése

Legyen  $x_1, \dots, x_k \in V$  egy lineárisan független rendszer, továbbá legyen  $x \in V$ . Ekkor

$$\text{a) } x \in \text{Span}(x_1, \dots, x_k) \Rightarrow x_1, \dots, x_k \text{ lineárisan összefüggő}$$

$$\text{b) } x \notin \text{Span}(x_1, \dots, x_k) \Rightarrow x_1, \dots, x_k \text{ lineárisan független}$$

## 16.11. Következmény

Legyen  $x_1, \dots, x_k, x \in V$ . Ha  $x_1, \dots, x_k$  lineárisan független és  $x_1, \dots, x_k, x$  lineárisan összefüggő, akkor

$$x \in \text{Span}(x_1, \dots, x_k)$$

## 17.5. Bázis létezése

Bármely véges dimenziós, nem  $\{0\}$  vektortérben van bázis.

### Bizonyítás

Legyen  $y_1, \dots, y_m$  a  $V$  véges dimenziós, nem  $\{0\}$  vektortér véges generátorrendszere. Ha ez lin. független, akkor bázis. Ha összefüggő, akkor az *Összefüggő rendszer szűkítése* (16.6) tétel szerint elhagyható belőle egy vektor úgy, hogy a visszamaradó  $m - 1$  vektorból álló rendszer ugyanazt az alteret alkotja. Innentől ezt a lépést addig alkalmazzuk, míg lineárisan független nem lesz a kapott generátorrendszer, így bázis nem lesz.

## 17.7. Kicserélési tétel

Legyen  $x_1, \dots, x_k \in V$  egy lineárisan független rendszer,  $y_1, \dots, y_m \in V$  pedig egy gen.rendszer.

Ekkor  $\forall i \in \{1, \dots, k\} : \exists j \in \{1, \dots, m\} \rightarrow x_1, \dots, x_{i-1}, y_j, x_{i+1}, \dots, x_k$  — lineárisan független

### 17.8. Tétel

Bármely (véges) lineárisan független vektorrendszer tagjainak száma nem nagyobb, mint bármely (véges) generátorrendszer tagjainak száma. (Ezzel pontos értelmet nyert az, hogy a független rendszerek a “kis” rendszerek, a generátorrendszerek pedig a “nagy” rendszerek.)

#### Bizonyítás

Kicserélési-tétel kimondása miatt:

$$-\exists y_{i1} : y_{i1}, x_2, x_3, \dots, x_n \text{ lin. független}$$

$$-\exists y_{i2} : y_{i1}, y_{i2}, x_3, \dots, x_n \text{ lin. független}$$

Mindegyik  $x_i$  vektort ki tudjuk cserélni valamelyik  $y_i$  vektorral

### 17.9. Tétel

Legyen  $V$  véges dimenzió, nem  $\{0\}$  vektortér. Ekkor  $V$  bármely két bázisa azonos elemszámú.

#### Bizonyítás

Legyen  $e_1, \dots, e_m$  és  $f_1, \dots, f_k$  két bázis  $V$ -ben. Mivel  $e_1, \dots, e_m$  lineárisan független,  $f_1, \dots, f_k$  pedig generátorrendszer, ezért az előző tétel szerint  $m \leq k$ . Szerepcserével kapjuk, hogy  $k \leq m$ . Így tehát  $k = m$ .

### 17.12. Tétel(ek)

Legyen  $1 \leq \dim(V) = n < \infty$ . Ekkor

1. Ha  $x_1, \dots, x_k \in V$  lineárisan független, akkor  $k \leq n$

#### Bizonyítás

Legyen  $e_1, \dots, e_n$  bázis  $V$ -ben. Ekkor generátorrendszer is, tehát a 17.8-as tétel miatt:  $k \leq n$

---

2. Ha  $x_1, \dots, x_k \in V$  generátorrendszer, akkor  $k \geq n$

#### Bizonyítás

Legyen  $e_1, \dots, e_n$  bázis  $V$ -ben. Ekkor lineárisan független, tehát a 17.8-as tétel miatt:  $k \geq n$

---

3. Ha  $x_1, \dots, x_n \in V$  lineárisan független rendszer, akkor generátorrendszer is (ergo: bázis)

#### Bizonyítás

Tegyük fel indirekt, hogy  $x_1, \dots, x_n$  nem gen.rendszer. Ekkor

$$V \setminus \text{Span}(x_1, \dots, x_n) \neq \emptyset$$

Legyen  $x \in V \setminus \text{Span}(x_1, \dots, x_n)$ . Ekkor a *Független rendszer bővítése* (16.10) tétel miatt  $x_1, \dots, x_n, x$  lineárisan független. Ez ellentmondás, mivel ez a rendszer  $n + 1$  vektorból áll, többől, mint a tér dimenziója

---

4. Ha  $x_1, \dots, x_n \in V$  generátorrendszer, akkor lineárisan független is (következésképpen: bázis)

#### Bizonyítás

Tegyük fel indirekt, hogy  $x_1, \dots, x_n$  lineárisan összefüggő. Ekkor az *Összefüggő rendszer szűkítése* (16.6) tétel miatt

$$\exists i \in \{1, 2, \dots, n\} : \text{Span}(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) = \text{Span}(x_1, \dots, x_n) = V$$

Ez ellentmondás, mivel az  $x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n$  rendszer  $n - 1$  vektorból áll, kevesebből, mint a tér dimenziója.

### 18.6. Tétel

Bármely  $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$  mátrix oszlopvektorterének és sorvektorterének dimenziója megegyezik, azaz

$$\dim O(A) = \dim S(A)$$

### 18.16. Tétel

Jelölje (nem hivatalosan)  $M_h$  a homogén rendszer megoldáshalmazát, avagy

$$M_h := \{x \in \mathbb{K}^n \mid Ax = 0\} \subseteq \mathbb{K}^n$$

Ekkor  $M_h$  altér  $\mathbb{K}^n$ -ben.

(Hivatalos, nemzetközi jelölése:  $\text{Ker}(A)$  - "kernel" / magtér /)

#### Bizonyítás

Mivel  $0 \in M_h$ , ezért  $M_h \neq \emptyset$ .

$M_h$  zárt az összeadásra nézve, mivel ha  $x, y \in M_h$ , akkor  $Ax = Ay = 0$ , ezért

$$A(x + y) = Ax + Ay = 0 + 0 = 0,$$

amiből következik, hogy  $x + y \in M_h$ .

Továbbá  $M_h$  zárt a skalárral való szorzásra nézve is, mivel ha  $x \in M_h$  és  $\lambda \in \mathbb{K}$ , akkor  $Ax = 0$ , ezért

$$A(\lambda x) = \lambda Ax = \lambda 0 = 0,$$

amiből  $\lambda x \in M_h$  következik.

### 18.23. Tétel

A lineáris egyenletrendszer együtthatómátrixának rangja egyenlő a Gauss-Jordan módszer alkalmazásakor kapott  $r$  számmal, azaz egyenlő a megjelölt elemek számával a leálláskor.