

Федеральное агентство по образованию
Санкт-Петербургский государственный
электротехнический университет "ЛЭТИ"

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА ПО ДИСЦИПЛИНЕ
"ИНФОРМАТИКА"
Вариант №7

КУРСОВАЯ РАБОТА

Инв. № подл.	Подп. и дата	Взам. инв. №	Инв. № дубл.	Подп. и дата

СОДЕРЖАНИЕ

1	Вступление	3
2	Основная часть	4
2.1	Задание на курсовую работу	4
2.2	Решение уравнения и исследование функции	5
2.3	Нахождение коэффициентов кубического сплайна	11
2.3.1	Задания и исходные данные для решения	11
2.3.2	Теория и вывод уравнения сплайна	12
2.4	Решение задачи оптимального распределения неоднородных ресурсов	16
3	Заключение	17

[illegible]

1 ВСТУПЛЕНИЕ

Цель курсовой работы:

уметь применять персональный компьютер и математические пакеты прикладных программ в инженерной деятельности

Тема курсовой работы:

решение математических задач с использованием математического пакета "Scilab" и "Smath".

Инв. № подл.	Подп. и дата	Взам. инв. №	Инв. № дубл.	Подп. и дата	Курсовая работа					Лист
										3
Изм	Лист	№ докум.	Подп.	Дата						

2 ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ

2.1 Задание на курсовую работу

1. Даны функции:

$$f(x) = \sqrt{3}\sin(x) + \cos(x),$$

$$g(x) = \cos(2x + \pi/3) - 1$$

а) Решить уравнение $f(x) = g(x)$.

б) Исследовать функцию $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ на промежутке $[0 ; (5\pi)/6]$.

2. Найти коэффициенты кубического сплайна, интерполирующего данные, представленные в векторах \vec{V}_{xy} . Построить на одном графике функцию $f(x)$ и функцию $f_1(x)$, полученную после нахождения коэффициентов кубического сплайна. Представить графическое изображение результатов интерполяции исходных данных различными методами с использованием встроенных функций $cspline(V_x, V_y)$, $pspline(V_x, V_y)$, $lspline(V_x, V_y)$ и $interp(V_k, V_x, V_y, x)$.

3. Решить задачу оптимального распределения неоднородных ресурсов. Исходные данные представлены в таблице 1.

Таблица 1

Используемые ресурсы, a_i	Изготавливаемые изделия				Наличие ресурсов, a_i
	И ₁	И ₂	И ₃	И ₄	
Трудовые	2	4	2	9	20
Материальные	5	5	5	6	10
Финансовые	5	6	4	8	30
Прибыль	25	45	60	20	

Изм	Лист	№ докум.	Подп.	Дата	Изм	Лист	№ докум.	Подп.	Дата	Изм	Лист	№ докум.	Подп.	Дата	Изм	Лист	№ докум.	Подп.	Дата	Изм	Лист	№ докум.	Подп.	Дата	Изм	Лист	№ докум.	Подп.	Дата	Изм	Лист	№ докум.	Подп.	Дата	Изм	Лист	№ докум.	Подп.	Дата	Изм	Лист	№ докум.	Подп.	Дата	Изм	Лист	№ докум.	Подп.	Дата	Изм	Лист	№ докум.	Подп.	Дата	Изм	Лист	№ докум.	Подп.	Дата	Изм	Лист	№ докум.	Подп.	Дата	Изм	Лист	№ докум.	Подп.	Дата	Изм	Лист	№ докум.	Подп.	Дата	Изм	Лист	№ докум.	Подп.	Дата	Изм	Лист	№ докум.	Подп.	Дата	Изм	Лист	№ докум.	Подп.	Дата	Изм	Лист	№ докум.	Подп.	Дата	Изм	Лист	№ докум.	Подп.	Дата	Изм	Лист	№ докум.	Подп.	Дата	Изм	Лист	№ докум.	Подп.	Дата	Изм	Лист	№ докум.	Подп.	Дата	Изм	Лист	№ докум.	Подп.	Дата	Изм	Лист	№ докум.	Подп.	Дата	Изм	Лист	№ докум.	Подп.	Дата	Изм	Лист	№ докум.	Подп.	Дата	Изм	Лист	№ докум.	Подп.	Дата	Изм	Лист	№ докум.	Подп.	Дата	Изм	Лист	№ докум.	Подп.	Дата	Изм	Лист	№ докум.	Подп.	Дата	Изм	Лист	№ докум.	Подп.	Дата	Изм	Лист	№ докум.	Подп.	Дата	Изм	Лист	№ докум.	Подп.	Дата	Изм	Лист	№ докум.	Подп.	Дата	Изм	Лист	№ докум.	Подп.	Дата	Изм	Лист	№ докум.	Подп.	Дата	Изм	Лист	№ докум.	Подп.	Дата	Изм	Лист	№ докум.	Подп.	Дата	Изм	Лист	№ докум.	Подп.	Дата	Изм	Лист	№ докум.	Подп.	Дата	Изм	Лист	№ докум.	Подп.	Дата	Изм	Лист	№ докум.	Подп.	Дата	Изм	Лист	№ докум.	Подп.	Дата	Изм	Лист	№ докум.	Подп.	Дата	Изм	Лист	№ докум.	Подп.	Дата	Изм	Лист	№ докум.	Подп.	Дата	Изм	Лист	№ докум.	Подп.	Дата	Изм	Лист	№ докум.	Подп.	Дата	Изм	Лист	№ докум.	Подп.	Дата	Изм	Лист	№ докум.	Подп.	Дата	Изм	Лист	№ докум.	Подп.	Дата	Изм	Лист	№ докум.	Подп.	Дата	Изм	Лист	№ докум.	Подп.	Дата	Изм	Лист	№ докум.	Подп.	Дата	Изм	Лист	№ докум.	Подп.	Дата	Изм	Лист	№ докум.	Подп.	Дата	Изм	Лист	№ докум.	Подп.	Дата	Изм	Лист	№ докум.	Подп.	Дата	Изм	Лист	№ докум.	Подп.	Дата	Изм	Лист	№ докум.	Подп.	Дата	Изм	Лист	№ докум.	Подп.	Дата	Изм	Лист	№ докум.	Подп.	Дата	Изм	Лист	№ докум.	Подп.	Дата	Изм	Лист	№ докум.	Подп.	Дата	Изм	Лист	№ докум.	Подп.	Дата	Изм	Лист	№ докум.	Подп.	Дата	Изм	Лист	№ докум.	Подп.	Дата	Изм	Лист	№ докум.	Подп.	Дата	Изм	Лист	№ докум.	Подп.	Дата	Изм	Лист	№ докум.	Подп.	Дата	Изм	Лист	№ докум.	Подп.	Дата	Изм	Лист	№ докум.	Подп.	Дата	Изм	Лист	№ докум.	Подп.	Дата	Изм	Лист	№ докум.	Подп.	Дата	Изм	Лист	№ докум.	Подп.	Дата	Изм	Лист	№ докум.	Подп.	Дата	Изм	Лист	№ докум.	Подп.	Дата	Изм	Лист	№ докум.	Подп.	Дата	Изм	Лист	№ докум.	Подп.	Дата	Изм	Лист	№ докум.	Подп.	Дата	Изм	Лист	№ докум.	Подп.	Дата	Изм	Лист	№ докум.	Подп.	Дата	Изм	Лист	№ докум.	Подп.	Дата	Изм	Лист	№ докум.	Подп.	Дата	Изм	Лист	№ докум.	Подп.	Дата	Изм	Лист	№ докум.	Подп.	Дата	Изм	Лист	№ докум.	Подп.	Дата	Изм	Лист	№ докум.	Подп.	Дата	Изм	Лист	№ докум.	Подп.	Дата	Изм	Лист	№ докум.	Подп.	Дата	Изм	Лист	№ докум.	Подп.	Дата	Изм	Лист	№ докум.	Подп.	Дата	Изм	Лист	№ докум.	Подп.	Дата	Изм	Лист	№ докум.	Подп.	Дата	Изм	Лист	№ докум.	Подп.	Дата	Изм	Лист	№ докум.	Подп.	Дата	Изм	Лист	№ докум.	Подп.	Дата	Изм	Лист	№ докум.	Подп.	Дата	Изм	Лист	№ докум.	Подп.	Дата
-----	------	----------	-------	------	-----	------	----------	-------	------	-----	------	----------	-------	------	-----	------	----------	-------	------	-----	------	----------	-------	------	-----	------	----------	-------	------	-----	------	----------	-------	------	-----	------	----------	-------	------	-----	------	----------	-------	------	-----	------	----------	-------	------	-----	------	----------	-------	------	-----	------	----------	-------	------	-----	------	----------	-------	------	-----	------	----------	-------	------	-----	------	----------	-------	------	-----	------	----------	-------	------	-----	------	----------	-------	------	-----	------	----------	-------	------	-----	------	----------	-------	------	-----	------	----------	-------	------	-----	------	----------	-------	------	-----	------	----------	-------	------	-----	------	----------	-------	------	-----	------	----------	-------	------	-----	------	----------	-------	------	-----	------	----------	-------	------	-----	------	----------	-------	------	-----	------	----------	-------	------	-----	------	----------	-------	------	-----	------	----------	-------	------	-----	------	----------	-------	------	-----	------	----------	-------	------	-----	------	----------	-------	------	-----	------	----------	-------	------	-----	------	----------	-------	------	-----	------	----------	-------	------	-----	------	----------	-------	------	-----	------	----------	-------	------	-----	------	----------	-------	------	-----	------	----------	-------	------	-----	------	----------	-------	------	-----	------	----------	-------	------	-----	------	----------	-------	------	-----	------	----------	-------	------	-----	------	----------	-------	------	-----	------	----------	-------	------	-----	------	----------	-------	------	-----	------	----------	-------	------	-----	------	----------	-------	------	-----	------	----------	-------	------	-----	------	----------	-------	------	-----	------	----------	-------	------	-----	------	----------	-------	------	-----	------	----------	-------	------	-----	------	----------	-------	------	-----	------	----------	-------	------	-----	------	----------	-------	------	-----	------	----------	-------	------	-----	------	----------	-------	------	-----	------	----------	-------	------	-----	------	----------	-------	------	-----	------	----------	-------	------	-----	------	----------	-------	------	-----	------	----------	-------	------	-----	------	----------	-------	------	-----	------	----------	-------	------	-----	------	----------	-------	------	-----	------	----------	-------	------	-----	------	----------	-------	------	-----	------	----------	-------	------	-----	------	----------	-------	------	-----	------	----------	-------	------	-----	------	----------	-------	------	-----	------	----------	-------	------	-----	------	----------	-------	------	-----	------	----------	-------	------	-----	------	----------	-------	------	-----	------	----------	-------	------	-----	------	----------	-------	------	-----	------	----------	-------	------	-----	------	----------	-------	------	-----	------	----------	-------	------	-----	------	----------	-------	------	-----	------	----------	-------	------	-----	------	----------	-------	------	-----	------	----------	-------	------	-----	------	----------	-------	------	-----	------	----------	-------	------	-----	------	----------	-------	------	-----	------	----------	-------	------	-----	------	----------	-------	------	-----	------	----------	-------	------	-----	------	----------	-------	------	-----	------	----------	-------	------	-----	------	----------	-------	------	-----	------	----------	-------	------	-----	------	----------	-------	------	-----	------	----------	-------	------	-----	------	----------	-------	------	-----	------	----------	-------	------

2.2 Решение уравнения и исследование функции

a) $f(x) = g(x)$

$$\sqrt{3}\sin(x) + \cos(x) = \cos(2x + \frac{\pi}{3}) - 1$$

$$\sqrt{3}\sin(x) + \cos(x) = 0 \mid \cos(2x + \frac{\pi}{3}) - 1 = 0$$

$$\sqrt{3}tg(x) + 1 = 0 \quad \left| \quad 2x + \frac{\pi}{3} = arccos(1) \right.$$

$$tg(x) = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3} \quad \left| \quad 2x + \frac{\pi}{3} = 0 \right.$$

$$2x = -\frac{\pi}{3}$$

$$x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k, \quad \left| \quad x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k, \right.$$

где $k \in Z$.	где $k \in Z$.
-----------------	-----------------

б) Исследовать функцию $h(x) = f(x) - g(x)$ на промежутке $[0 ; \frac{5\pi}{6}]$.

1. Область определения функции

Выражение имеет смысл при любом значении x на интервале $[0 ; \frac{5\pi}{6}]$.

2. Четность, нечетность функции

Функция четная, если $y(-x) = y(x)$. Функция нечетная, если $y(-x) = -y(x)$.

$$h(x)=\sqrt{3}\sin(x) + \cos(x)-(\cos(2x + \frac{\pi}{3}) - 1)$$

$$h(x) = \sqrt{3}\sin(x) + \cos(x) - \cos(2x)\cos\frac{\pi}{3} + \sin(2x)\sin\frac{\pi}{3} + 1 \quad (1)$$

$$h(-x) = \sqrt{3}\sin(-x) + \cos(-x) - \cos(-2x)\cos\frac{\pi}{3} - \sin(-2x)\sin\frac{\pi}{3} + 1$$

$$h(-x) = -\sqrt{3}\sin(x) + \cos(x) - \cos(2x)\cos\frac{\pi}{3} - \sin(2x)\sin\frac{\pi}{3} + 1 \quad (2)$$

Таким образом, $h(-x) \neq h(x)$, и $h(-x) \neq -h(x)$, следовательно функция $h(x)$ не обладает свойствами четности и нечетности.

Инв. № подл.	Подп. и дата	Взам. инв. №	Инв. № дубл.	Подп. и дата

Полученные из уравнения (3) значения x - это точки пересечения функции $h(x)$ с осью ОХ.

$$\sqrt{3}\sin(x) + \cos(x) = 2\sqrt{3}\sin(\frac{x}{2})\cos(\frac{x}{2}) + \cos^2(\frac{x}{2}) - \sin^2(\frac{x}{2}) \quad (5)$$

$$\sqrt{3}\sin(x) + \cos(x) = 2\sqrt{3}tg(\frac{x}{2}) + 1 - tg^2(\frac{x}{2}) \quad (6)$$

Разделим выражение (7) на $\cos^2(\frac{x}{2})$:

Тогда, подставляя выражения (7) и (8) в (2.2) :

Заменим $tg(\frac{x}{2}) = t$.

$$2(\sqrt{3}t + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}t^2) + 2(\sqrt{3}t + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}t^2)^2 = 0 \quad (11)$$

$$(\sqrt{3}t + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}t^2)(2 + 2(\sqrt{3}t + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}t^2)) = 0 \quad (12)$$

$$(\sqrt{3}t + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}t^2)(2 + 2(\sqrt{3}t + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}t^2) = 0$$

$$(\sqrt{3}t + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}t^2)(2 + 2\sqrt{3}t + 1 - t^2) = 0$$

$$(\sqrt{3}t + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}t^2)(3 + 2\sqrt{3}t - t^2) = 0 \quad (13)$$

Найдем корни уравнения (13), для этого решим систему:

$$\begin{cases} -2\sqrt{3}t - 1 + t^2 = 0 \\ -3 - 2\sqrt{3}t + t^2 = 0 \end{cases} \quad (14)$$

Корни уравнений:

$$\begin{cases} t_1 = \sqrt{3} + \sqrt{2} \\ t_2 = \sqrt{3} - \sqrt{2} \\ t_3 = \sqrt{3} + \sqrt{6} \\ t_4 = \sqrt{3} - \sqrt{6} \end{cases} \quad (15)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} tg \frac{x}{2} = \sqrt{3} + \sqrt{2} \\ tg \frac{x}{2} = \sqrt{3} - \sqrt{2} \\ tg \frac{x}{2} = \sqrt{3} + \sqrt{6} \\ tg \frac{x}{2} = \sqrt{3} - \sqrt{6} \end{array} \right. \quad (16)$$

$$\begin{cases} x = 2arctg(\sqrt{3} + \sqrt{2}); x \in [-\frac{\pi}{2}; 0] \\ x = 2arctg(\sqrt{3} - \sqrt{2}); x \in [-\frac{\pi}{2}; 0] \\ x = 2arctg(\sqrt{3} + \sqrt{6}); x \in [-\frac{\pi}{2}; 0] \\ x = 2arctg(\sqrt{3} - \sqrt{6}); x \in [-\frac{\pi}{2}; 0] \end{cases} \quad (17)$$

Инв. № подл.	Подп. и дата	Взам. инв. №	Инв. № дубл.	Подп. и дата	$\begin{cases} t_2 = \sqrt{3} - \sqrt{2} \\ t_3 = \sqrt{3} + \sqrt{6} \\ t_4 = \sqrt{3} - \sqrt{6} \end{cases}$	(15)
					$\begin{cases} tg \frac{x}{2} = \sqrt{3} + \sqrt{2} \\ tg \frac{x}{2} = \sqrt{3} - \sqrt{2} \\ tg \frac{x}{2} = \sqrt{3} + \sqrt{6} \\ tg \frac{x}{2} = \sqrt{3} - \sqrt{6} \end{cases}$	(16)
					$\begin{cases} x = 2arctg(\sqrt{3} + \sqrt{2}); x \in [-\frac{\pi}{2}; 0] \\ x = 2arctg(\sqrt{3} - \sqrt{2}); x \in [-\frac{\pi}{2}; 0] \\ x = 2arctg(\sqrt{3} + \sqrt{6}); x \in [-\frac{\pi}{2}; 0] \\ x = 2arctg(\sqrt{3} - \sqrt{6}); x \in [-\frac{\pi}{2}; 0] \end{cases}$	(17)
Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата	Курсовая работа	Лист
						7

На интервале $[0 ; \frac{5\pi}{6}]$ график функции $h(x)$ не пересекает ось ОХ.

4. Промежутки знакопостоянства

Если функция положительна на интервале - график расположен выше оси абсцисс; если функция отрицательна - график ниже оси абсцисс.

$$h(0) = \sqrt{3}\sin(0) + \cos(0) - (\cos(2 \cdot 0 + \frac{\pi}{3}) - 1) =$$

$$= 0 + 1 - \cos(\frac{\pi}{3}) + 1 = \frac{3}{2} > 0;$$

$$h(\frac{5\pi}{6}) = \sqrt{3}\sin(\frac{5\pi}{6}) + \cos(\frac{5\pi}{6}) - (\cos(2 \cdot \frac{5\pi}{6} + \frac{\pi}{3}) - 1) =$$

$$= \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 + 1 = \frac{3 - \sqrt{3}}{2} > 0$$

Таким образом, функция $h(x)$ положительна на интервале $[0 ; \frac{5\pi}{6}]$, следовательно, график расположен выше оси абсцисс.

5. Промежутки возрастания и убывания функции.

Если $f'(x) > 0$ на промежутке, то $f(x)$ возрастает на этом промежутке.

Если $f'(x) < 0$ на промежутке, то $f(x)$ убывает на этом промежутке.

Первая производная $h'(x)$ от функции $h(x)$ (с учетом замены на t) имеет вид:

$$(2\sqrt{3}t - 2t)(3 + 2\sqrt{3}t - t^2) + (2\sqrt{3} - 2t)(2\sqrt{3}t + 1 - t^2) = 0$$

$$(2\sqrt{3}t - 2t)(3 + 2\sqrt{3}t - t^2 + 2\sqrt{3}t + 1 - t^2) = 0$$

$$(2\sqrt{3}t - 2t)(4 - 2t^2 + 4\sqrt{3}t) = 0$$

$$2(\sqrt{3}t - t)2(2 - t^2 + 2\sqrt{3}t) = 0 \quad (18)$$

Найдем корни уравнения (18), для этого решим систему:

$$\begin{cases} t(\sqrt{3} - 1) = 0 \\ 2 - t^2 + 2\sqrt{3}t = 0 \end{cases} \quad (19)$$

Корни уравнений:

$$\begin{cases} t_1 = 0 \\ t_2 = \sqrt{3} - \sqrt{5} \\ t_3 = \sqrt{3} + \sqrt{5} \end{cases} \quad (20)$$

Изн. № подл.	Подп. и дата	Взам. инв. №	Изн. № дубл.	Подп. и дата
Курсовая работа				
Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата

$$\begin{cases} tg\frac{x}{2} = 0 \\ tg\frac{x}{2} = \sqrt{3} - \sqrt{5} \\ tg\frac{x}{2} = \sqrt{3} + \sqrt{5} \end{cases} \quad (21)$$

$$\begin{cases} x = 0; x \in [0; \frac{5\pi}{6}] \\ x = 2arctg(\sqrt{3} - \sqrt{5}); x \in [-\frac{\pi}{2}; 0] \\ x = 2arctg(\sqrt{3} + \sqrt{5}); x \in [-\frac{\pi}{2}; 0] \end{cases} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} h'(x) &= 2[\sqrt{3}tg(\frac{x}{2}) - tg(\frac{x}{2})] \cdot 2[2 - tg^2(\frac{x}{2}) + 2\sqrt{3}tg(\frac{x}{2})] = 0 \\ h'(0) &= 0 \end{aligned} \tag{23}$$

При $[-\infty; 0]$ производная $h'(x) < 0$, следовательно функция $h(x)$ убывает на промежутке $[0; \frac{5\pi}{6}]$.

При $[0; +\infty]$ производная $h'(x) > 0$, следовательно функция $h(x)$ возрастает на промежутке $[0; \frac{5\pi}{6}]$.

6. Выпуклость графика функции, точки перегиба

Функция $f(x)$ выпукла вниз, если $f'(x)$ возрастает на промежутке, при этом $f''(x) > 0$.

Функция $f(x)$ выпукла вверх, если $f'(x)$ убывает на промежутке, при этом $f''(x) < 0$.

Вторая производная $h''(x)$ от функции $h(x)$ (с учетом замены на t) имеет вид:

$$h'(x) = 2(\sqrt{3}t - t) \cdot 2(2 - t^2 + 2\sqrt{3}t) = 0 \quad (24)$$

$$h'(x) = 8\sqrt{3}t - 4\sqrt{3}t^3 + 24t^2 - 8t + 4t^3 - 8\sqrt{3}t^2 \quad (25)$$

$$h''(x) = 8\sqrt{3} - 12\sqrt{3}t^2 + 48t - 8 + 12t - 16\sqrt{3}t \quad (26)$$

$\sqrt{D} < 0$, значит точек перегиба нет, $h''(x)$ не обращается в ноль.

$$h''(0) = 8\sqrt{3} - 8 > 0 \quad (27)$$

[illegible]

Таким образом, $h''(x) > 0$ и $h'(x)$ возрастает на промежутке, значит функция $h(x)$ выпукла вниз.
 График функции $h(x)$ показан на рисунке 1.

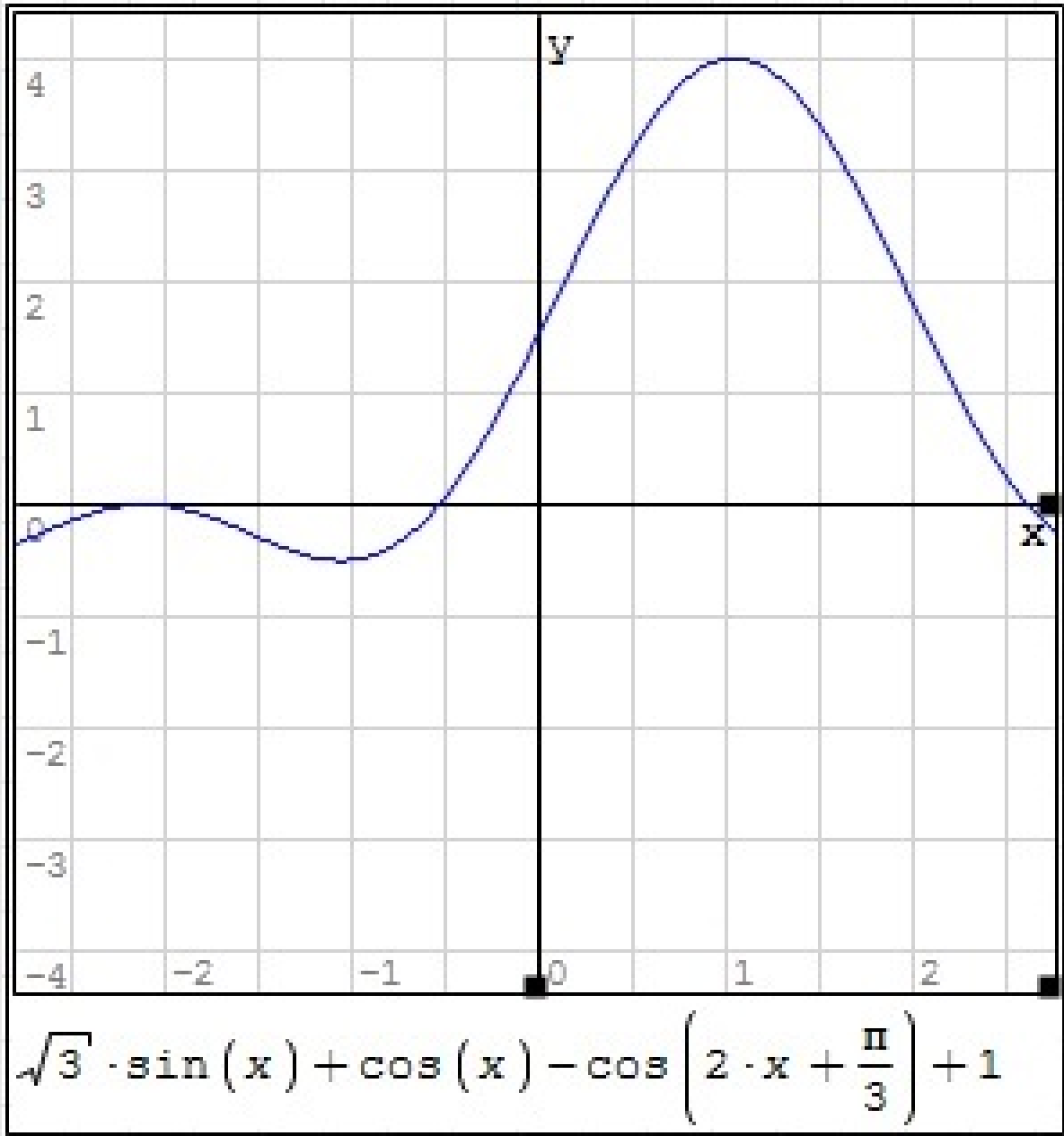


Рисунок 1 - График функции $h(x)$

Инв. № подл.	Подп. и дата
Взам. инв. №	Инв. № дубл.
Подп. и дата	
Инв. № подл.	

2.3 Нахождение коэффициентов кубического сплайна

2.3.1 Задания и исходные данные для решения

1. Найти коэффициенты кубического сплайна, интерполирующего данные, представленные в векторах \vec{V}_x и \vec{V}_y .

2. Построить на одном графике: функцию $f(x)$ и $f_1(x)$, полученную после нахождения коэффициентов кубического сплайна.

3. Представить графическое изображение результатов интерполяции исходных данных.

$$\vec{V}_x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.5 \\ 1.4 \\ 2.25 \\ 3.5 \end{pmatrix}, \quad \vec{V}_y = \begin{pmatrix} 3.0 \\ 2.7 \\ 3.7 \\ 3.333 \\ 3.667 \end{pmatrix}$$

Необходимо оценить погрешность в точке $x = 2.4$. Вычислить значение функции в точке $x = 1.2$.

Инь. № подл.	Подп. и дата	Взам. инв. №	Инь. № дубл.	Подп. и дата	Курсовая работа					Лист
										11
Изм	Лист	№ докум.	Подп.	Дата						

2.3.2 Теория и вывод уравнения сплайна

Уравнение сплайна находится по пяти точкам

$$(x_1; y_1), (x_2; y_2), (x_3; y_3), (x_4; y_4), (x_5; y_5)$$

Представим сплайн полиномом третьей степени на каждом отрезке $[x_i, x_{i+1}]$.

$$F_i(x) = A_{i0} + A_{i1}x + A_{i2}x^2 + A_{i3}x^3, \quad (28)$$

$$x \in [x_i, x_{i+1}].$$

Найдем коэффициенты A_{ij} исходя из того, что в точках склейки функция не имеет разрывов, изломов и изгиб ее слева и справа совпадает.

На каждом из отрезков $[x_i, x_{i+1}]$ график $F_i(x)$ проходит через точки y_i, y_{i+1} .

$$y_i = A_{i0} + A_{i1}x_i + A_{i2}x_i^2 + A_{i3}x_i^3 \quad (29)$$

Получаем 8 уравнений:

$$\begin{aligned} y_1 &= A_{10} + A_{11}x_1 + A_{12}x_1^2 + A_{13}x_1^3 \\ y_2 &= A_{10} + A_{11}x_2 + A_{12}x_2^2 + A_{13}x_2^3 \\ y_2 &= A_{20} + A_{21}x_2 + A_{22}x_2^2 + A_{23}x_2^3 \\ y_3 &= A_{20} + A_{21}x_3 + A_{22}x_3^2 + A_{23}x_3^3 \\ y_3 &= A_{30} + A_{31}x_3 + A_{32}x_3^2 + A_{33}x_3^3 \\ y_4 &= A_{30} + A_{31}x_4 + A_{32}x_4^2 + A_{33}x_4^3 \\ y_4 &= A_{40} + A_{41}x_4 + A_{42}x_4^2 + A_{43}x_4^3 \\ y_5 &= A_{40} + A_{41}x_5 + A_{42}x_5^2 + A_{43}x_5^3 \end{aligned} \quad (30)$$

Производные первого порядка во внутренних точках x_i должны совпадать, т.е. производная слева

$$F'_i(x_i) = A_{i1} + 2A_{i2}x_i + 3A_{i3}x_i^2$$

должна быть равна производной справа

$$F'_{(i+1)}(x_i) = A_{(i+1)1} + 2A_{(i+1)2}x_i + 3A_{(i+1)3}x_i^2$$

Изн. № подл.	Подп. и дата	Взам. инв. №	Изн. № дубл.	Подп. и дата				
Изм	Лист	№ докум.	Подп.	Дата	Курсовая работа			
					Лист			
					12			

Физический смысл равенства производных состоит в том, что в точках склейки у нас нет излома сплайна.

$$\begin{aligned} A_{11} + 2A_{12}x_2 + 3A_{13}x_2^2 &= A_{21} + 2A_{22}x_2 + 3A_{23}x_2^2 \\ A_{21} + 2A_{22}x_3 + 3A_{23}x_3^2 &= A_{31} + 2A_{32}x_3 + 3A_{33}x_3^2 \\ A_{31} + 2A_{32}x_4 + 3A_{33}x_4^2 &= A_{41} + 2A_{42}x_4 + 3A_{43}x_4^2 \end{aligned} \quad (31)$$

Производные второго порядка в точках склейки x_i должны совпадать, т.е. вторая производная слева

$$F_i''(x_i) = 2A_{i2} + 6A_{i3}x_i$$

должна быть равна второй производной справа

$$F_{(i+1)}''(x_i) = 2A_{(i+1)2} + 6A_{(i+1)3}x_i$$

Физический смысл равенства вторых производных состоит в том, что в точках склейки изгиб сплайна справа и слева должен быть одинаковым.

$$\begin{aligned} 2A_{12} + 6A_{13}x_2 &= 2A_{22} + 6A_{23}x_2 \\ 2A_{22} + 6A_{23}x_3 &= 2A_{32} + 6A_{33}x_3 \\ 2A_{32} + 6A_{33}x_4 &= 2A_{42} + 6A_{43}x_4 \end{aligned} \quad (32)$$

Еще два уравнения - из граничных условий в крайних точках x_1, x_n :

$$\begin{aligned} C_{11}F'x_1 + C_{12} + F''(x_1) &= C_{13} \\ C_{n1}F'n_1 + C_{n2} + F''(x_n) &= C_{n3} \end{aligned} \quad (33)$$

Найдем график сплайна в случае, когда концы сплайна оставлены свободными в граничных точках $(x_1, y_1), (x_5, y_5)$. Соответственно, уравнения имеют вид:

$$\begin{aligned} 2A_{12} + 6A_{13}x_1 &= 0 \\ 2A_{42} + 6A_{43}x_5 &= 0 \end{aligned} \quad (34)$$

В итоге - 16 уравнений для определения 16 коэффициентов A_{ij} .

Изн. № подл.	Подп. и дата	Взам. инв. №	Изн. № дубл.	Подп. и дата						
Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата	Курсовая работа					Лист
										13

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2x_2 & 3x_2^2 & 0 & -1 & -2x_2 & -3x_2^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 6x_2 & 0 & 0 & -2 & -6x_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2x_3 & 3x_3^2 & 0 & -1 & -2x_3 & -3x_3^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 6x_3 & 0 & 0 & -2 & -6x_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_4 & x_4^2 & x_4^3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2x_4 & 3x_4^2 & 0 & -1 & -2x_4 & -3x_4^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 6x_4 & 0 & 0 & -2 & -6x_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_4 & x_4^2 & x_4^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_5 & x_5^2 & x_5^3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 6x_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 6x_5 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} A_{10} \\ A_{11} \\ A_{12} \\ A_{13} \\ A_{20} \\ A_{21} \\ A_{22} \\ A_{23} \\ A_{30} \\ A_{31} \\ A_{32} \\ A_{33} \\ A_{40} \\ A_{41} \\ A_{42} \\ A_{43} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ 0 \\ y_2 \\ y_3 \\ 0 \\ 0 \\ y_3 \\ y_4 \\ 0 \\ 0 \\ y_4 \\ y_5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Коэффициенты A_{ij} :

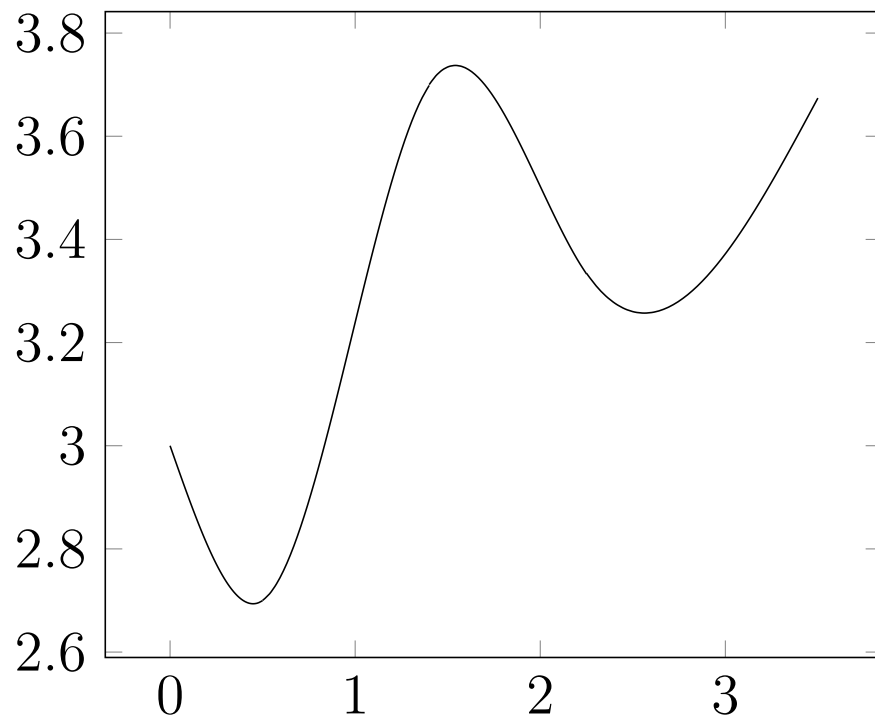
$$\begin{matrix} A_{10} \\ A_{11} \\ A_{12} \\ A_{13} \\ A_{20} \\ A_{21} \\ A_{22} \\ A_{23} \\ A_{30} \\ A_{31} \\ A_{32} \\ A_{33} \\ A_{40} \\ A_{41} \\ A_{42} \\ A_{43} \end{matrix} = \begin{matrix} 3 \\ -1.024 \\ 0 \\ 1.695 \\ 3.432 \\ -3.614 \\ 5.18 \\ -1.759 \\ -4.785 \\ 13.994 \\ -7.397 \\ 1.236 \\ 12.165 \\ -8.607 \\ 2.648 \\ -0.252 \end{matrix}$$

Инь. № подл.	Подп. и дата	Взам. инв. №	Инь. № дубл.	Подп. и дата

Уравнение сплайна имеет вид:

$$F(x) = \begin{cases} F_1(x) = 1.695x^3 + 0x^2 - 1.024x + 3 & x \in [0, 0.5]; \\ F_2(x) = -1.759x^3 + 5.18x^2 - 3.614x + 3.432 & x \in [0.5, 1.4]; \\ F_3(x) = 1.236x^3 - 7.397x^2 + 13.994x - 4.785, & x \in [1.4, 2.25]; \\ F_4(x) = -0.252x^3 + 2.648x^2 - 8.607x + 12.165, & x \in [2.25, 3.5]. \end{cases}$$

$$F(1.2) = 19.579$$



Инв. № подл.	Подп. и дата		Инв. № дубл.		Подп. и дата	
Инв. № подл.	Подп. и дата		Взам. инв. №		Инв. № дубл.	
Изм	Лист	№ докум.	Подп.	Дата	Курсовая работа	
						Лист
						15

2.4 Решение задачи оптимального распределения неоднородных ресурсов

Постановка задачи.

. Для изготовления n видов изделий I_1, I_2, \dots, I_n необходимы ресурсы m видов: трудовые, материальные, финансовые и др.

Известно требуемое количество отдельного i -го ресурса для изготовления каждого j -го изделия - норма расхода a_{ij} .

Пусть определено количество каждого вида ресурса, которым предприятие располагает в данный момент - b_j . Известна прибыль c_j , получаемая предприятием от изготовления каждого j -го изделия.

Требуется определить, какие изделия и в каком количестве должны производиться предприятием, чтобы прибыль была максимальной.

Математическая модель задачи выглядит следующим образом.

Целевая функция имеет вид:

$$25x_1 + 45x_2 + 60x_3 + 20x_4 \rightarrow \max$$

:

$$\left. \begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 9x_4 &= 20 \\ 5x_1 + 5x_2 + 5x_3 + 6x_4 &= 10 \\ 5x_1 + 6x_2 + 4x_3 + 8x_4 &= 30 \\ x_j &\geq 0; \quad j = \overline{1, 4} \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

После решения системы видно, что

$$x_1 = 12.5,$$

$$x_2 = 0,$$

$$x_3 = 7.5,$$

$$x_4 = 0.$$

В оптимальном решении Изделие1=12.5; Изделие2=0; Изделие3=7.5; Изделие4=0.

При этом максимальная прибыль будет составлять 100, а количество использованных ресурсов равно: трудовых=20, материальных=7, финансовых=30.

Инь. № подл.	Подп. и дата	Взам. инв. №	Инь. № дубл.	Подп. и дата	Курсовая работа					Лист
										16
Изм	Лист	№ докум.	Подп.	Дата						

3 ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Курсовая работа состояла из трех частей:

В первой части была исследована функция и построен ее график. Во второй части найдены коэффициенты кубического сплайна. В третьей части решалась задача оптимального распределения неоднородных ресурсов.

Инв. № подл.	Подп. и дата	Взам. инв. №	Инв. № дубл.	Подп. и дата	Курсовая работа					Лист
										17
Изм	Лист	№ докум.	Подп.	Дата						