Problem	Subgruppe	Verfahren	Idee	Vorteile	Nachteile
Interpolation $(x_i, y_i) \subseteq f$ $p(x)=\sum_{i=0}^{n} c_i \cdot g_i(x)$ sodass $p(x_i)=y_i$	Globale Polynom-interpolation	Monombasis $g_i(x)=x^i$	Stelle allgemeines LGS aus Stützstellen auf	Intuitiv, Auswertung in $O(n)$	Aufstellen in $O(n^3)$
		Lagrangebasis $g_i(x)=\prod_{j\neq i}^{n}\left(\frac{x-x_j}{x_i-x_j}\right)$	Stützwerte sind Gewichte; Basis erzeugt Diagonalmatrix in LGS	Aufstellen in $O(n)$	Auswerten in $O(n^2)$
		Newtonbasis $g_i(x)=\prod_{j=0}^{i-1}(x-x_j)$	Basis erzeugt Dreiecksmatrix in LGS	Auswerten in $O(n)$	Aufstellen in $O(n^2)$
		Aitken-Neville	In Iteration k: Polynome vom Grad k zwischen den Punkten der Iteration k -1	Direkte Auswertung in $O(n^2)$, kein Aufstellen	Teuer bei vielen Auswertungen
	Stückweise Polynom-interpolation $p(x)=\begin{cases} p_1 & \dots \\ p_2 & \dots \end{cases}$	Lineare Interpolation $p_i(x)=(x-x_i)\frac{y_{i+1}-y_i}{x_{i+1}-x_i}+y_i$	Gerade zwischen Stützstellen	Einfach	Nicht Global differenzierbar
		Hermite Ansatz $H_0(x)=1-3x^2+2x^3$ $H_1(x)=3x^2-2x^3$ $H_2(x)=1-2x^2+x^3$ $H_3(x)=-x^2+x^3$	Benutze Ableitung um stückweise Polynome zu definieren, $p \in C^1$	Näher an f als mit splines wenn f' bekannt	Ableitung benötigt
		Kubische Splines	$p \in C^{2m}$, stelle LGS mit 2 Randwerten auf um f' zu erhalten	Änderungen stets nur lokale Auswirkung, $O(n)$	Zusätzlicher Overhead durch LGS, Fehler größer als wenn f' gegeben
	Trigono-metrische Polynombasis $g_k=e^{2\pi \cdot ikj}$	DFT/IFFTT	c_i sind Amplituden der DFT (Fourierreihe durch Riemann-Summe)	IFFT in $O(n \log(n))$	DFT in $O(n^2)$

Problem	Subgruppe	Verfahren	Idee	Vorteile	Nachteile
Quadratur $\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=0}^{n} g_i f(x_i)$ $H := b-a$ $\{0,\ldots,n\}$ Stützstellen $h := \frac{H}{n}$	Exakte Integration des Lagrange-Interpolanten $g_i(x) = \int_a^b L_i(x)\,dx$ **Achtung**: benötigt äquidistante Stützstellen	Rechtecksregel	Lagrange mit 1 Stützstelle	Einfach	Genauigkeit 1
		Trapezregel	Lagrange mit 2 Stützstellen	Basis für Trapezsumme	Genauigkeit 1
		Fassregel	Lagrange mit 3 Stützstellen	Einfach, Genauigkeit 3	
		Trapezsumme	Stückweise Trapezregel	Basis für Romberg, geringere Fehler	Langsame Konvergenz
		Simponsumme	Stückweise Fassregel	Geringerer Fehler als mit Trapezregel	Langsame Konvergenz
	Extrapolation	Romberg-Quadratur	Berechne Trapezsumme für verschiedene h_i, interpoliere h_i mittels Aitken an der Stelle $x=0$	Schnell sinkender Fehler mit wachsenden Anzahl an h_i	f muss $2m$ stetig differenzierbar sein, mehr als ein Trapezsumme nötig → Es müssen genug Punkte für verschiedene Summen vorhanden sein
	Global	Gauß	Interpoliere ein Polynom in $[-1,1]$ exakt mit variablen Stützwerten – und punkten	$2n-1$ Genauigkeit	Bei Veränderung von n muss ganzer Interpolant neu berechnet werden; Stützwerte irrelevant
	Hierarchisch	Archimedes	Integriere negative quadratische Funktion durch Dreiecke	Iterativ, kein Ergebnis geht verloren	Nur spezielle f möglich

Problem	Subgruppe	Verfahren	Idee	Vorteile	Nachteile
Löse LGS $Ax=b$	Exakt	Gauß	Bringe A in Zeilenstufenform, dann Rückwärtssubstitution	Exakte Lösung, auf alle A anwendbar	Laufzeit $O(n^3)$
		LR-Zerlegung	$A=LR$ wobei $L^{-1}A=R$ Ergebnis der Zeilenstufenform von Gauß	Initial $O(n^3)$, bei anderen b dann $O(n^2)$	Initial $O(n^3)$
		QR-Zerlegung			
	Relaxation/Splitting $\phi(x_k)=x_k+M^{-1}r$ $r=b-Ax$	Richardson	$M=I$	Parallelisierbar	dR langsamer als Gauß
		Jacobi	$M=diag(A)$	Parallelisierbar	idR langsamer als Gauß
		Gauß-Seidel	$M=diag(A)+L(A)$, wobei $L(A)$ Dreicksmatrix von A ohne Diagonale	IdR schneller als Jacobi	Nicht parallelisierbar
	Abstiegsverfahren A symmetrisch und positiv definit $f(x)=0.5x^T Ax-b^T x$ $\rightarrow\nabla f=Ax-b$	Steepest Descent	Starte mit initialer Suchrichtung. Wähle dann die optimale Suchrichtung (Senkrecht zur aktuellen, steilster Abstieg) und die optimale Schrittweite (globales Minimum der Suchrichtung) zur aktuellen		Langsame Konvergenz, da “Zittern” im Abstieg besser wäre: Orthogonal zu allen vorherigen Richtungen
		Conjugate Gradient			

Problem	Subgruppe	Verfahren	Idee	Vorteile	Nachteile
Nullstelle $f(x)=0$, f nicht linear, 1 Dimension	Annäherung durch Geraden $[c,d]$ und $f(c)f(d)\leq 0$	Bisektion	Suche iterativ in $[\frac{c+d}{2},d]$ falls $(f(c)>0\wedge f(\frac{c+d}{2})\geq 0)$ $\vee(f(c)<0\wedge f(\frac{c+d}{2})\leq 0)$ $[c,\frac{c+d}{2}]$ sonst	Global linear konvergent	Linear konvergent
		Regula Falsi	Nehme als neuen Endpunkt Schnittpunkt der Geraden durch $(c,f(c)),(d,f(d))$	Global linear konvergent	Langsamere Konvergenz als Bisektion möglich
		Sekante	2 initiale Approximationen; Nächstes x ist Schnittpunkt der Sekante durch $(x^{(i-1)},f(x^{(i-1)})),(x^{(i)},f(x^{(i)}))$	Lokal 1.618 konvergent	Nur lokal konvergent
		Newton (Tangente)	Nächstes x ist Nullstelle der Tangente in x $x^{(i+1)}=x^{(i)}-\frac{k\cdot f(x^{(i)})}{f'(x^{(i)})}$ $k>1\in N$ wenn Vielfachheit der gesuchten Nst bekannt	Lokal quadratisch konvergent wenn k gesetzt, sonst linear	Linear konvergent wenn k nicht bekannt und mehrfache Nst gesucht; Ableitung benötigt; nur lokal konvergent

Problem	Subgruppe	Verfahren	Idee	Vorteile	Nachteile
Differentialgleichungen mit separierbare rechter Hälfte $y'(t)=f(t)g(y(t))$ Anfangswertproblem t_0, y_0 gegeben $y_0 := y(t_0)$	Grafisch	Richtungsfeld	Folge den angedeuteten Ableitungen	-	-
	Analytisch	Separation der Variablen	$\int_{t_0}^{t} \frac{y'(x)}{g(y(x))} dx = \int_{t_0}^{t} f(x) dx$ $\Leftrightarrow \int_{y(t_0)}^{y(t)} \frac{1}{g(s)} ds = \int_{t_0}^{t} f(x) dx$	Exakte allgemeine Lösung für $y(t)$	Nur durch symbolische Programmierung lösbar
	Explizite Einschrittverfahren, Approximation durch Polynome $y'(t) = \frac{y(t+\delta t) - y(t)}{\delta t}$	Euler	Steigung am aktuellen t gibt nächsten Wert	Einfach, schnell	Diskretisierung-sordnung $p=1$, Stabilität schlecht für steife Probleme
		Heun	Mittel der nächsten zwei Steigungen	Diskretisierung-sordnung $p=2$	Stabilität schlecht für steife Probleme
		Klassisches Runge-Kutta Verfahren	Geeignetes Mittel von 4 Steigungen	Diskretisierung-sordnung $p=4$, sehr genau	Stabilität schlecht für steife Probleme
	Implizte EV, Approximation durch Rationale Funktion	Euler	Steigung im nächsten Punkt gibt aktuelle Steigung	Gute Stabilität bei steifen Problemen	Gleichung muss gelöst werden
	Mehrschrittverfahren: Benutze mehrere alte Funktionswerte	Adam-Bashforth	$y_{k+1} = y_k + \int_{t_k}^{t_{k+1}} y'(t) dt \approx$ $y_k + \int_{t_k}^{t_{k+1}} p(t) dt$		
		Mittelpunktsregel	$y_{k+1} = y_{k-1} + 2 \cdot \delta t f_k$		Schlechte Stabilität

Problem	Subgruppe	Verfahren	Idee	Vorteile	Nachteile
Eigenwerte $Av=\lambda v$ wobei A symmetrisch	Analytisch	Charakteristische Funktion	$\chi(\lambda)=det(A-\lambda I)$ Bestimme $\chi(\lambda)=0$ Bestimme Eigenvektoren $(A-\lambda_i I)v_i=0$	Exakte Lösung	Zerstört gute Kondition durch Nullstellensuche
	Vektor Iteration	Power Iteration	Potenz zur Bestimmung des betragsmäßig größten EW	Quadratische Konvergenz EW λ_k	Lineare Konvergenz EV x_k
		Inverse Iteration	Betragsmäßig kleinster EW	Gleiche Konvergent wie Power Iteration	Lösung LGS benötigt, z.B. mit LR initial in $O(n^3)$ dann $O(n^2)$
		Rayleigh Quotient Iteration	Rayleigh Quotient aktualisiert Approximation	Kubische Konvergenz der EW λ_k	Lineare Konvergenz der EV, hohe Kosten
	Faktorisierungs-methoden: Eigenwerte zu A_k ähnlich zu A	QR Iteration			