

# Utilizzo del pendolo semplice per la misura dell'accelerazione gravitazionale

Aurelio Roccasanta, Pietro Ghedi, Daniele Silvestri, Andrea Madarena

September 14, 2024

# Indice

<b>1</b>	<b>Obbiettivi</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Cenni teorici</b>	<b>3</b>
2.1	Pendolo semplice . . . . .	3
2.2	Pendolo fisico . . . . .	3
2.3	Smorzamento . . . . .	4
<b>3</b>	<b>Strumentazione utilizzata</b>	<b>4</b>
3.1	Strumenti di misura . . . . .	4
3.2	Preparazione del sistema per la sperimentazione . . . . .	4
<b>4</b>	<b>Raccolta dati</b>	<b>5</b>
4.1	Periodo in funzione della lunghezza . . . . .	5
4.2	Misura del periodo con ampiezze di oscillazione maggiori . . . . .	6
4.3	Stima dello smorzamento . . . . .	6
<b>5</b>	<b>Analisi dati</b>	<b>7</b>
5.1	distribuzione degli errori nella misura del periodo . . . . .	7
5.2	Periodo e lunghezza del filo in relazione . . . . .	8
5.3	Calcolo dell'accelerazione di gravità . . . . .	9
5.4	Considerazioni su oscillazioni al di fuori dei piccoli angoli . . . . .	10
<b>6</b>	<b>Conclusioni ottenute</b>	<b>10</b>
<b>7</b>	<b>Istogrammi</b>	<b>11</b>

# 1 Obbiettivi

- Calcolare l'accelerazione di gravità all'altitudine della città di Trieste grazie ad un pendolo approssimato a semplice.
- Valutare i limiti di considerazione dei diversi angoli angoli come piccole oscillazioni
- Studiare infine il contributo di smorzamento dovuto alla resistenza dell'aria

# 2 Cenni teorici

## 2.1 Pendolo semplice

Il calcolo di  $g$  in funzione del periodo e della lunghezza è elementare nel caso del pendolo semplice grazie alle approssimazioni che sono state fatte, in particolare: la lunghezza del filo è considerata invariabile, la sua massa nulla e il corpo ridotto ad un punto materiale. Fatte queste ipotesi il calcolo di  $g$  si effettua come segue:

$$g = 4\pi^2 \frac{L}{T^2} \quad (1)$$

Nell'equazione sopraindicata  $L$  corrisponde alla lunghezza del filo sommata al raggio del corpo (approssimabile a sfera) e  $T$  la durata di un'oscillazione (periodo). Tale risultato è conseguenza diretta della risoluzione dell'equazione differenziale  $\ddot{\theta} + \frac{g}{L} \sin \theta = 0$  che può essere ricondotta all'equazione  $\ddot{\theta} + \frac{g}{L} \theta = 0$  caratteristica di un moto armonico (in questo caso di raggio  $L$  e il cui centro coincide con il punto di sospensione) dopo aver applicato l'approssimazione per piccole oscillazioni ( $\theta_{max} \leq 5^\circ$ ) dove  $\sin \theta \approx \theta$ . Da cui appunto ricaviamo la soluzione generale associata alla EDO:

$$\theta(t) = A \cdot \sin \left( \sqrt{\frac{g}{L}} t + \phi \right) \quad (1)$$

In particolare da qui esplicitiamo la pulsazione che quindi risulta essere  $\sqrt{\frac{g}{L}}$  e pertanto il periodo  $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$  infine invertendo si riottiene l'espressione della  $g$ .

## 2.2 Pendolo fisico

Tralasciando alcune ipotesi del pendolo semplice si può arrivare ad un modello più realistico comunemente noto come pendolo fisico, dove il filo viene trattato come una barra rigida di una certa massa  $m$  e il corpo prima stilizzato a punto materiale come una sfera, così facendo la nuova distanza del punto di sospensione dal centro di massa è:

$$d = \frac{m \frac{L}{2} + M(L + r)}{m + M} \quad (2)$$

e momento di inerzia pari a:

$$I = \frac{1}{3}mL^2 + \left[ \frac{2}{5}Mr^2 + M(L + r)^2 \right] \quad (3)$$

eseguendo lo stesso procedimento introdotto sopra per i calcoli otteniamo  $\omega = \sqrt{\frac{(M+m) \cdot d \cdot g}{I}}$  e  $T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{(M+m) \cdot d \cdot g}}$  da cui naturalmente si ricava la nuova espressione di  $g$ :

$$g = 4\pi^2 \sqrt{\frac{I}{(M + m) \cdot d \cdot T^2}} \quad (4)$$

Quanto all'esperimento in esame i risultati di  $g$  seguendo il modello del pendolo fisico e applicando il procedimento per il calcolo mostrato più avanti (riadattando le formule) non sembrano essere del tutto coerenti fra loro motivo per cui non si è ritenuto significativo il confronto con i risultati del pendolo semplice e pertanto non riportato.

## 2.3 Smorzamento

Siccome il sistema in esame si ritrova a contatto con l'ambiente è inevitabilmente soggetto all'attrito dell'aria, il quale causa uno smorzamento del moto armonico in esame. In particolare possiamo assumere la forza d'attrito aerodinamico come  $\vec{f} = -\beta\vec{v}$ , con  $v$  la velocità del corpo e  $\beta$  una costante dovuta alle caratteristiche dell'aria.

Tenendo conto dello smorzamento la legge oraria diventa quindi:

$$\theta(t) = A \cdot e^{-\frac{t}{\tau_A}} \cdot \sin\left(\sqrt{\frac{g}{L}}t + \phi\right) \quad (5)$$

Si noti la presenza di  $\tau_A$  che corrisponde al tempo teoricamente impiegato per lo smorzamento totale, valore pari circa a 5T e per altro in relazione con beta poiche  $\tau_A = \frac{2mL}{\beta}$

## 3 Strumentazione utilizzata

### 3.1 Strumenti di misura

- Calibro ventesimale: sensibilità =  $5 \cdot 10^{-5}$  m con una portata di 16 cm
- Metro a nastro: sensibilità =  $10^{-3}$  m e portata di 3 m
- Cronometro digitale: sensibilità pari a  $10^{-2}$  s
- Bilancia digitale: sensibilità =  $10^{-5}$  kg;

### 3.2 Preparazione del sistema per la sperimentazione

Il sistema comprende un filo cerato mantenuto in tensione da un supporto in alluminio nel punto di sospensione e alla cui estremità libera è legato il corpo (una sfera metallica). Il filo è stato vincolato al punto di sospensione tramite una vite in modo tale da poterne variare facilmente la lunghezza con un cacciavite. quanto ai due corpi:

	Diametro/Lunghezza[mm]	Massa[g]
Sfera	20,7	52,76
Filo	200,0	1,28

## 4 Raccolta dati

Di seguito riportate tutte le misure effettuate, i tempi registrati avranno un errore di  $5 \cdot 10^{-3}$  s (in accordo con la sensibilità del cronometro utilizzato) e, analogamente, le misure di lunghezza avranno un errore di  $5 \cdot 10^{-4}$  m.

### 4.1 Periodo in funzione della lunghezza

L'esperimento è partito con la misura cinque periodi consecutivi di oscillazione del pendolo ( $t = \tau$ ) con un cronometro dopo aver rilasciato la sfera da una posizione di riposo, con il filo formando un angolo di circa  $5^\circ$  rispetto alla verticale. Il procedimento è stato ripetuto 10 volte per lunghezze del filo (+ raggio sfera) di 31,0 cm, 60,0 cm, 121,0 cm, 151,0 cm, 181,0 cm e 100 volte per una lunghezza di 101,0 cm. Per migliorare la precisione, il cronometro è stato fermato utilizzando come riferimento il passaggio del pendolo attraverso la posizione verticale, dove la velocità è massima. Inoltre, le misurazioni del tempo sono state effettuate su cinque oscillazioni anziché una sola, per ridurre l'incertezza del singolo periodo T.

	$L_5 = 181$ cm	$L_4 = 151$ cm	$L_3 = 121$ cm	$L_2 = 61$ cm	$L_1 = 31$ cm
1	13,44	12,21	11,04	7,76	5,53
2	13,36	12,13	11,06	7,76	5,46
3	13,40	12,24	11,04	7,72	5,53
4	13,36	12,21	11,09	7,70	5,55
5	13,41	12,20	10,93	7,64	5,41
6	13,36	12,24	10,89	7,66	5,47
7	13,32	12,23	10,95	7,75	5,59
8	13,45	12,25	10,80	7,73	5,30
9	13,43	12,19	10,84	7,69	5,49
10	13,37	12,20	10,94	7,71	5,51

Table 1: Misure in secondi di  $\tau$  per le diverse lunghezze

	$L_6 = 101,0$ cm									
1	10,12	10,00	10,03	9,84	10,00	10,05	9,97	9,89	10,07	10,05
2	10,04	10,01	10,00	10,04	10,02	9,87	10,09	9,96	9,97	9,87
3	9,92	10,03	10,01	10,02	9,99	9,93	10,04	10,01	10,04	9,93
4	10,00	9,95	9,99	9,97	10,02	10,05	10,03	9,85	10,00	10,05
5	10,00	9,97	9,97	9,89	10,09	10,02	9,95	10,06	10,04	10,02
6	10,10	9,89	10,03	9,95	9,96	10,02	10,10	10,01	9,97	10,03
7	9,97	10,01	10,00	9,94	10,13	9,94	10,00	10,00	10,01	10,00
8	9,89	9,93	9,98	10,02	9,97	9,87	10,01	9,96	9,93	9,98
9	9,90	10,07	9,97	9,93	9,99	9,98	10,04	9,99	9,99	9,97
10	9,86	10,16	9,96	10,02	9,83	10,00	9,84	10,03	10,01	9,96

Table 2: Misure in secondi di  $\tau$  per  $L = 101,0$  cm

## 4.2 Misura del periodo con ampiezze di oscillazione maggiori

Facendo partire il pendolo da diversi angoli la cui oscillazione non può essere considerata piccola (e anche a 5 gradi per comparazione), con una lunghezza del filo di 181 cm, sono state effettuate 20 misurazioni per i diversi angoli

( 5°, 10°, 15°, 20°, 25°, 30° )

5°	10°	15°	20°	25°	30°
13,39	13,47	13,58	13,41	13,55	13,63
13,36	13,35	13,60	13,63	13,57	13,60
13,40	13,47	13,53	13,63	13,53	13,66
13,36	13,44	13,48	13,48	13,49	13,60
13,41	13,45	13,56	13,50	13,60	13,57
13,34	13,42	13,57	13,56	13,53	13,61
13,32	13,48	13,55	13,60	13,52	13,54
13,44	13,39	13,58	13,53	13,57	13,64
13,43	13,43	13,49	13,58	13,49	13,63
13,47	13,41	13,52	13,59	13,53	13,66
13,40	13,50	13,64	13,62	13,50	13,55
13,40	13,46	13,62	13,60	13,55	13,55
13,37	13,53	13,59	13,53	13,48	13,66
13,35	13,69	13,64	13,55	13,52	13,55
13,36	13,39	13,67	13,59	13,60	13,62
13,44	13,49	13,60	13,60	13,56	13,63
13,45	13,41	13,56	13,52	13,44	13,64
13,42	13,52	13,61	13,62	13,51	13,58
13,39	13,48	13,64	13,56	13,58	13,61
13,37	13,50	13,58	13,55	13,51	13,60

Table 3: Misure in secondi di  $\tau$  per  $L = 151,0$  cm con angoli maggiori

## 4.3 Stima dello smorzamento

Per lo smorzamento dovuto all'attrito aerodinamico sono state effettuate in 5 minuti 10 misure (una ogni 30 secondi) dell'angolo del filo con la verticale (nel punto di ampiezza massima) in questo caso di 20°, Sapendo che la distanza  $d$  dall'asse verticale è legata all'angolo del pendolo come segue:

$$\theta(d) = \arctan\left(\frac{d}{102}\right) \quad (6)$$

Dove 102 cm rappresenta la massima distanza esprimibile dal filo rispetto alla verticale

t [s]	0	30.5	59.5	88	118	147	177	206	236	265	296
d [cm]	37	32	27	24	21.5	19.5	17	15.5	14	12.5	11
$\theta$ [rad]	.348	.304	.259	.231	.208	.189	.165	.151	.136	.122	.107
$\theta$ [deg]	19.9	17.4	14.8	13.2	11.9	10.8	9.46	8.64	7.82	7.99	6.16

Table 4: smorzamento con  $L = 151.0$  cm

## 5 Analisi dati

### 5.1 distribuzione degli errori nella misura del periodo

I valori precedentemente misurati per  $\tau$  risultano cambiare praticamente ad ogni misura, il che è sufficiente a constatare la rilevanza dell'errore statistico rispetto alla sensibilità dello strumento. Di seguito verranno riportati i calcoli per di tali errori.

Come primo passo calcoliamo il valore medio di  $\tau$  per i diversi gruppi di misurazioni (ogni gruppo corrisponde ad una lunghezza):

$$\bar{\tau} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \tau_i \quad (7)$$

da qui procediamo con il calcolo della deviazione standard (sempre con  $n$  = numero di misure):

$$\sigma_{\tau} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (\tau_i - \bar{\tau})^2} \quad (8)$$

e quindi:

$$\sigma_{\bar{\tau}} = \frac{\sigma_{\tau}}{\sqrt{n}} \quad (9)$$

Possiamo inoltre ottenere il valore medio di  $T$  così come la sua incertezza grazie alla legge di propagazione delle incertezze casuali (e ricordando che  $\tau$  corrisponde a 5 periodi di oscillazione):

$$\bar{T} = \frac{\bar{\tau}}{5} \quad \sigma_{\bar{T}} = \frac{\sigma_{\bar{\tau}}}{5} \quad (10)$$

Sulla base di queste relazioni la tabella sottoriportata mostra tutti i periodi medi al variare della lunghezza (10 misure per valore di lunghezza, nel caso dei 101 metri solo le ultime 10) con anche le grandezze intermedie

L [cm]	$\theta$ [deg]	$\bar{\tau}$ [s]	$\sigma_{\tau}$ [s]	$\sigma_{\bar{\tau}}$ [s]	$\bar{T}$ [s]	$\sigma_{\bar{T}}$ [s]
31	5	5,48	0,085	0,027	1,096	0,0054
61		7,71	0,041	0,013	1,54	0,0026
101		9,98	0,089	0,028	1,996	0,0056
121		10,96	0,11	0,035	2,192	0,007
151		12,21	0,035	0,011	2,442	0,0022
		13,39	0,037	0,012	2,678	0,006
181	10	13,46	0,12	0,037	2,692	0,0054
	15	13,58	0,053	0,017	2,716	0,0034
	20	13,56	0,039	0,012	2,712	0,0024
	25	13,53	0,049	0,015	2,706	0,003
	30	13,61	0,045	0,014	2,722	0,0028

Table 5: Incertezze per le misure di  $\tau$  e dei periodi

## 5.2 Periodo e lunghezza del filo in relazione

Di seguito riportati i grafici del Periodo in funzione della lunghezza del filo, in particolare sono state considerate 4 relazioni con la lunghezza:

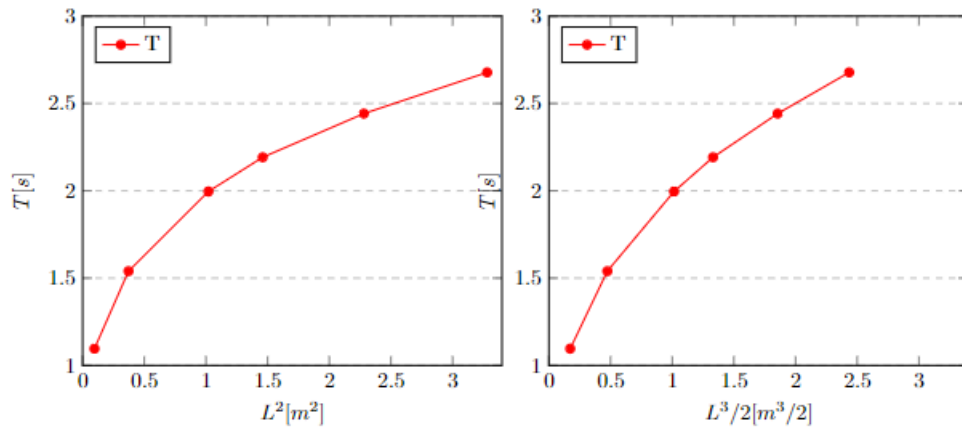


Figure 1:  $T$  in funzione di  $L^2$  e Figura 2:  $T$  in funzione di  $L^3/2$

Figure 1: Un esempio di grafico.

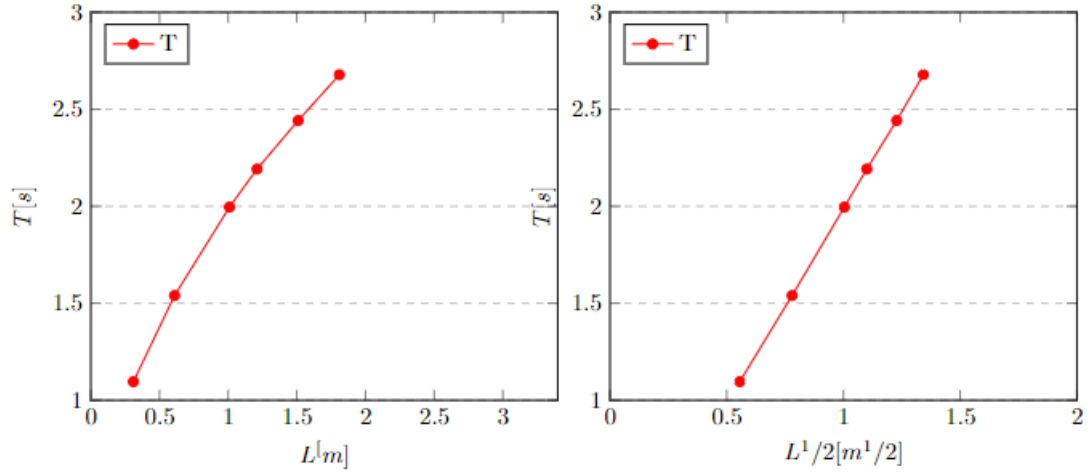


Figure 2:  $T$  in funzione di  $L$  e Figura 4:  $T$  in funzione di  $L^1/2$

Figure 2: Un esempio di grafico.



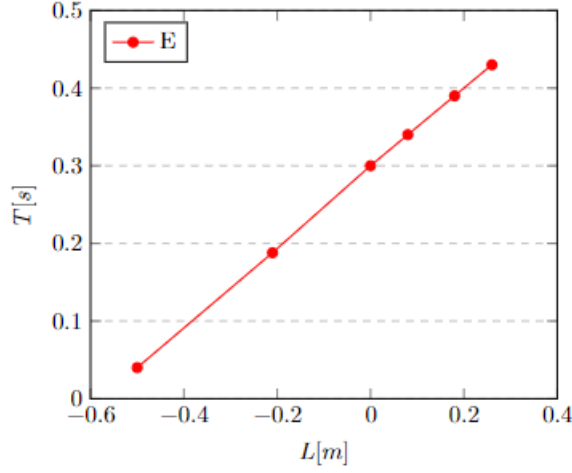


Figure 3: T in funzione di L su scala logaritmica (base 10)

Figure 3: Un esempio di grafico.

Dal grafico soprastante è ancora più apprezzabile la relazione che intercorre tra periodo e lunghezza, in particolare il coefficiente  $m = 0.513$  in questo caso rappresenta appunto la potenza di L con cui il periodo è in relazione lineare ( in accordo con il grafico in figura 4). A questo punto sapendo dai cenni teorici che  $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$  ricaviamo che il coefficiente angolare  $m$  è uguale a  $\frac{2\pi}{g}$  il che ci fornisce un valore di  $g$  (per di più anche più preciso rispetto agli altri).

### 5.3 Calcolo dell'accelerazione di gravità

il calcolo dell'accelerazione di gravità è stato effettuato per le diverse misure di lunghezza ( e relativo periodo ), di sotto riportata la tabella con anche varianza e deviazione standard:

	$L[m]$	$g[m \cdot s^{-2}]$	$\sigma_g^2[m^2 \cdot s^{-4}]$	$\sigma_g[m \cdot s^{-2}]$
1	0.31	10.188	0.0104	0.102
2	0.61	10.153	0.00126	0.0356
3	1.01	10.007	0.00318	0.0564
4	1.21	9.941	0.00405	0.0637
5	1.51	9.996	0.000338	0.0184
6	1.81	9.963	0.002	0.0447

Table 6: Valori di  $g$  per ogni lunghezza con annssa varianza e dev. std.

Possiamo a questo sfruttare le misure multiple effettuate con le relative varianze per stimare in modo più completo il valore di  $g$ , per farlo proseguiamo dividendo la media pesata delle misure sulla deviazione standard per appunto la sommatoria di quest'ultime:

$$\bar{g} = \frac{\left(\sum_{i=1}^n \frac{g_i}{\sigma_{g1}^2}\right)}{\left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{\sigma_{g1}^2}\right)} \quad \sigma_{\bar{g}}^2 = \frac{1}{\left(\sum_{i=1}^n \frac{g_i}{\sigma_{g1}^2}\right)} \quad (11)$$

Da cui ricaviamo per l'appunto il valore finale di  $g$ :

$$\bar{g} = (9.995 \pm 0.003) \quad (12)$$

Da cui possiamo affermare che il valore calcolato di  $g$  seppur vicino al valore aspettatosi di  $9.807 m \cdot s^{-2}$  non rientra nella rosa di valori dell'intervallo:  $[\bar{g} - 3 \cdot \sigma_{\bar{g}}, \bar{g} + 3 \cdot \sigma_{\bar{g}}]$ , sebbene fra loro i valori sembrerebbero validi ammettendo una zona di validità considerando le dovute incertezze.

#### 5.4 Considerazioni su oscillazioni al di fuori dei piccoli angoli

Grazie alle misure di periodi medi trovati sopra, in corrispondenza di  $L = 181.0 cm$  possiamo applicare i calcoli per ricavare  $g$  nei diversi casi e confrontare i risultati.

$\theta$	$g[m \cdot s^{-2}]$	$\sigma_g^2[m^2 \cdot s^{-4}]$	$\sigma_g[m \cdot s^{-2}]$
5	9.963	0.002	0.044
10	9.859	0.0015	0.039
15	9.686	0.0006	0.024
20	9.714	0.0003	0.017
25	9.758	0.0004	0.02
30	9.644	0.0004	0.02

Table 7: Calcolo di  $g$  per ampiezza di oscillazione

## 6 Conclusioni ottenute

Nella tabella 6 si può notare come i valori di  $g$  si abbassino all'aumentare della lunghezza del filo, fenomeno probabilmente legato alla tendenza di fermare il cronometro prima che l'oscillazione fosse del tutto espressa dal pendolo, da non confondersi con la diminuzione dei valori nella tabella 7 che invece sono dovuti allo svalidarsi delle approssimazioni man mano che l'angolo sale e quindi  $\sin\theta$  diviene più pronunciato. Infine qui sotto riportati gli istogrammi delle misurazioni effettuate in laboratorio.

## 7 Istogrammi

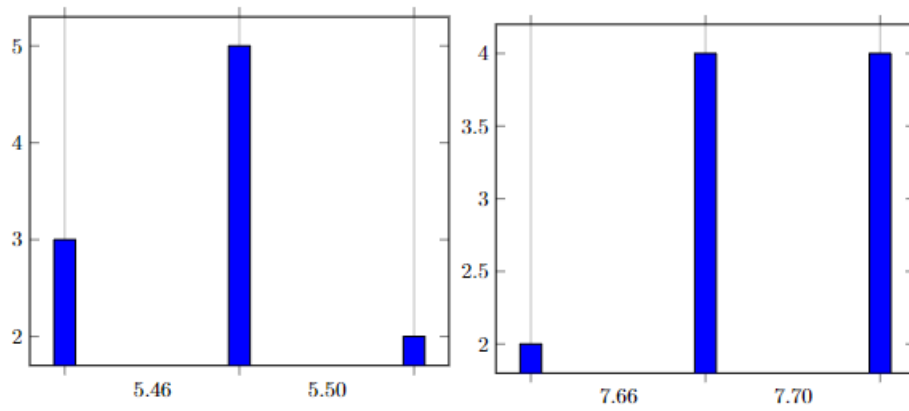


Figure 4:  $L_1 = 31cm$  e  $L_2 = 61cm$

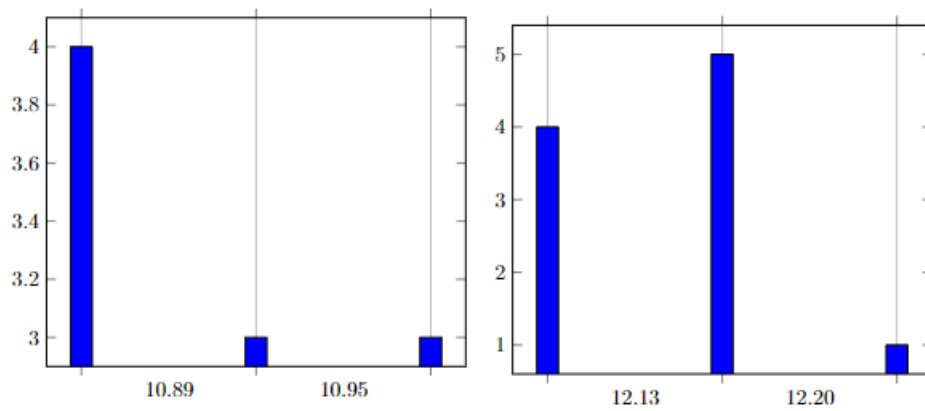


Figure 5:  $L_3 = 121cm$  e  $L_4 = 151cm$

Figure 4: Un esempio di grafico.

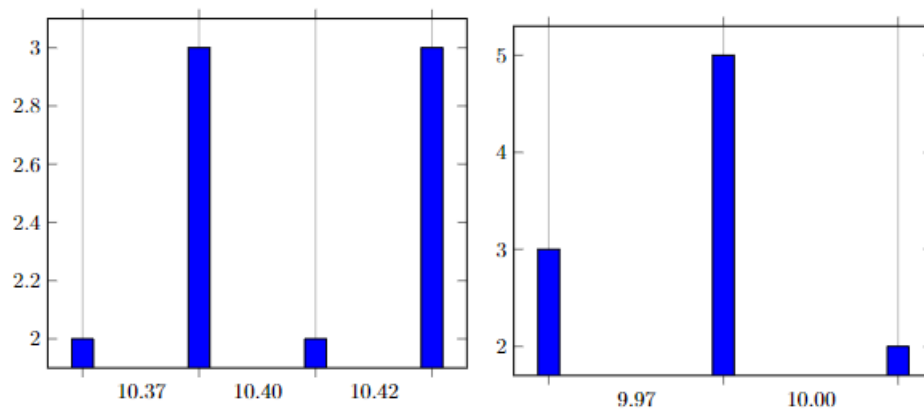


Figure 6:  $L_5 = 181cm$  e per  $L_6 = 101cm$  (valori medi, uno ogni 10)

Figure 5: Un esempio di grafico.