

Esperienza di laboratorio: Misura del modulo di young dell'acciaio

Ghedi Pietro, Madarena Andrea, Roccasanta Aurelio, Silvestri Daniele

Indice

1	Obiettivo	3
2	Introduzione teorica	3
2.1	La leva ottica	3
2.2	Il modulo di Young	4
2.3	Strumentazione	5
3	Misure	5
3.1	Misurazioni iniziali	5
3.2	Raccolta dati	5
4	Analisi	6
5	Grafici	6
5.1	B_i in relazione a m_i	6
5.2	ΔL_i in relazione a m_i	7
6	Conclusioni	8

1 Obiettivo

L'obiettivo principale di questa esperienza è quello di misurare il modulo Young di un filo di acciaio. La grandezza in esame valuta la propensione di un materiale a deformarsi quando viene sottoposto ad una forza, detta di "carico". Questo coefficiente viene utilizzato per deformazioni lineari (allungamento ed accorciamento).

2 Introduzione teorica

L'acciaio è un materiale che tende a non deformarsi in modo apprezzabile per carichi di bassa intensità. Ci avvaleremo dunque della leva ottica, nientemeno che un expediente utile a raccogliere dati con maggiore sensibilità spiegato nel prossimo paragrafo.

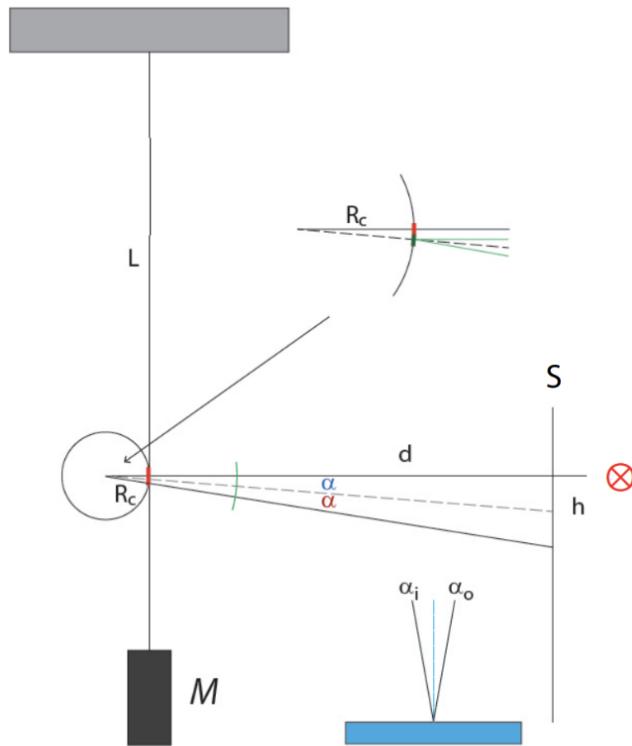


Figura 1: leva ottica

2.1 La leva ottica

La leva ottica è un apparato sperimentale costituito da un filo di diametro D_f disposto verticalmente e fissato superiormente ad un supporto fisso. A distanza L dal sostegno è situato un cilindro di raggio R_c su cui è avvolto il filo (tangente lungo la verticale). Quest'ultimo termina in un piattello su cui posizioneremo le masse campioni m_i , che fungono da modulatori della tensione a cui è sottoposto il filo.

A distanza d è posta la scala graduata e dietro di essa si trova la sorgente luminosa, la quale produce un fascio di luce puntato verso uno specchietto. Quest'ultimo, collocato sul cilindro, permette quindi di riflettere il fascio e indicare quindi un valore sulla scala. Una volta calibrato lo zero sulla scala l'angolo d'incidenza è nullo, quindi lo è anche quello di riflessione. Dunque, se l'angolo varia, il raggio di luce si sposta sulla scala graduata in funzione della rotazione del cilindro. E' possibile quindi risalire all'angolo di rotazione θ attraverso considerazioni trigonometriche. Si ha quindi la relazione:

$$\tan(\theta) = \frac{h}{D}$$

da cui si ricava

$$\theta = \arctan\left(\frac{h}{d}\right)$$

che, con l'approssimazione per piccoli angoli diventa

$$\arctan\left(\frac{h}{d}\right) \approx \frac{h}{d}$$

2.2 Il modulo di Young

Il modulo di Young E è definito come il rapporto tra lo sforzo σ e l'allungamento relativo ϵ

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon}$$

dove lo *sforzo* è definito come il rapporto tra la forza applicata F (in questo caso la forza peso) e la superficie perpendicolare alla forza S_{\perp} che non è altro che la sezione del filo S_f . Quindi $S_f = \pi\left(\frac{D_f}{2}\right)^2$ con D_f il diametro del filo.

$$\sigma = \frac{F}{S_{\perp}} = \frac{mg}{\pi\left(\frac{D_f}{2}\right)^2}$$

L'allungamento relativo ϵ è invece dato dal rapporto tra la deformazione ΔL (allungamento o accorciamento) e la lunghezza a riposo del filo L_0

$$\epsilon = \frac{\Delta L}{L_0}$$

Per calcolare ΔL si sfrutta il principio della leva ottica e, con R_c il raggio del cilindro, la relazione che permette di ottenere la deformazione è:

$$\Delta L = R_c \theta = R_c \frac{h}{d}$$

Dunque ora possiamo giungere ad una formula più specifica per il **modulo di Young**.

$$E = \frac{8gdL_0m_i}{\pi R_c D_f^2 h}$$

2.3 Strumentazione

In questo esperimento ci siamo avvalse dei seguenti strumenti:

- bilancia digitale con risoluzione pari a 0.01 g, per misurare i campionimi m_i
- Metro lineare con errore associato pari a $5 \cdot 10^{-4}m$, usato per le misure di L, d e h
- Calibro Palmer digitale con una sensibilità di $10^6 m$ per misurare D_f
- Calibro ventesimale digitale con errore associato di $5 \cdot 10^{-5}m$ per misurare il diametro del cilindro $D_c = 2 \cdot R_c$

3 Misure

3.1 Misurazioni iniziali

Le misure iniziali riguardano i parametri geometrici della strumentazione in uso. Per garantire la presenza di tensione lungo il filo ed evitare lo scorrimento sul cilindro, nel frattempo abbiamo appeso un carico iniziale. Procediamo dunque alla rilevazione dei dati tramite 5 set di misure, combinando in 5 modi diversi 3 masse in dotazione. Prima di ogni set la strumentazione è stata ritarata, rimisurando il diametro del filo e riportando il fascio di luce sullo zero della scala graduata. Per g è stato adottato il valore misurato a Trieste, pari a $9.807 \frac{m}{s^2}$.

3.2 Raccolta dati

I dati raccolti sono i seguenti

- $L = (99.80 \pm 0.05)cm$
- $d = (97.00 \pm 0.05)cm$
- $D_c = (24.90 \pm 0.05)mm$ e quindi $R_c = (12.45 \pm 0.025)mm$

La misura del diametro ottenuta è $D_f = 0.218 \pm 0.005$

mentre le misure finali delle **masse** m_i [g] con le rispettive **altezze** h_i [cm], per $i = 1, \dots, 5$ sono:

1. $(152.09 \pm 0.01) g \quad (4.7 \pm 0.1) cm$
2. $(200.11 \pm 0.01) g \quad (5.9 \pm 0.1) cm$
3. $(249.71 \pm 0.01) g \quad (7.4 \pm 0.1) cm$
4. $(352.20 \pm 0.01) g \quad (10.1 \pm 0.1) cm$
5. $(401.80 \pm 0.01) g \quad (11.5 \pm 0.1) cm$

4 Analisi

Per calcolare il modulo di Young risulta più semplice dividere la formula che abbiamo trovato in due componenti, una (A) fissa per ogni set di misure, mentre l'altra (B) variabile e dipendente dalle masse in oggetto. Si ha quindi:

$$E = \left(\frac{8gdL_0}{\pi R_c D_f^2} \right) \left(\frac{m_i}{h_i} \right) = A \cdot B_i$$

Possiamo dunque, tramite la propagazione dell'errore, calcolare gli errori relativi per A e B ; come si può facilmente notare, è il primo termine che porta con sè la maggior parte degli errori, il che ci porterà quindi a passare da deviazione standard a errore massimo per B .

$$\Delta A = A \left(\frac{\Delta g}{g} + \frac{\Delta L}{L} + \frac{\Delta d}{d} + \frac{\Delta R_c}{R_c} + 2 \frac{\Delta D_f}{D_f} \right)$$

e

$$\Delta B_i = B_i \left(\frac{\Delta m_i}{m_i} + \frac{\Delta h_i}{h_i} \right)$$

Quindi, assumendo un errore di risoluzione $\sigma_{B_i} = \frac{\Delta B_i}{\sqrt{3}}$, si può trovare una deviazione standard su B_i e quindi ottenere un valore per B utilizzando la media pesata

$$\sigma_{B_i}^2 = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{\sigma_{B_i}^2}} \quad B = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{B_i}{\sigma_{B_i}^2}}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{\sigma_{B_i}^2}}$$

Ma come precedentemente detto, dato l'ingente errore accumulato per $A \pm \Delta A$ passiamo per B all'errore massimo; la relazione è la seguente: $\Delta B = 3\sigma_B$.

Conseguentemente otteniamo infine

$$A \pm \Delta A = (4.086 \pm 2.00) \cdot 10^9 \frac{N}{Kg \cdot m}$$

e

$$B \pm \Delta B = (3.410 \pm 0.241) \frac{Kg}{m}$$

per calcolare E e ΔE sono state usate semplicemente le relazioni

$$E = A \cdot B \quad e \quad \Delta E = E \left(\frac{\Delta A}{A} + \frac{\Delta B}{B} \right)$$

dunque il valore associato per il modulo di Young risulta essere

$$E \pm \Delta E = (1.41 \pm 0.14) \cdot 10^{11} \frac{N}{m^2}$$

5 Grafici

5.1 B_i in relazione a m_i

Per $i = 1, \dots, 5$ abbiamo trovato i seguenti dati raccolti nella tabella sottostante, l'obiettivo dunque del grafico successivo è quello di verificare la costanza di B

i	$B_i \pm \Delta B_i [\frac{Kg}{m}]$	$m_i [g]$
1	(3.356 ± 0.068)	(152.09 ± 0.01)
2	(3.364 ± 0.062)	(200.11 ± 0.01)
3	(3.389 ± 0.052)	(249.71 ± 0.01)
4	(3.456 ± 0.032)	(352.20 ± 0.01)
5	(3.489 ± 0.040)	(401.80 ± 0.01)

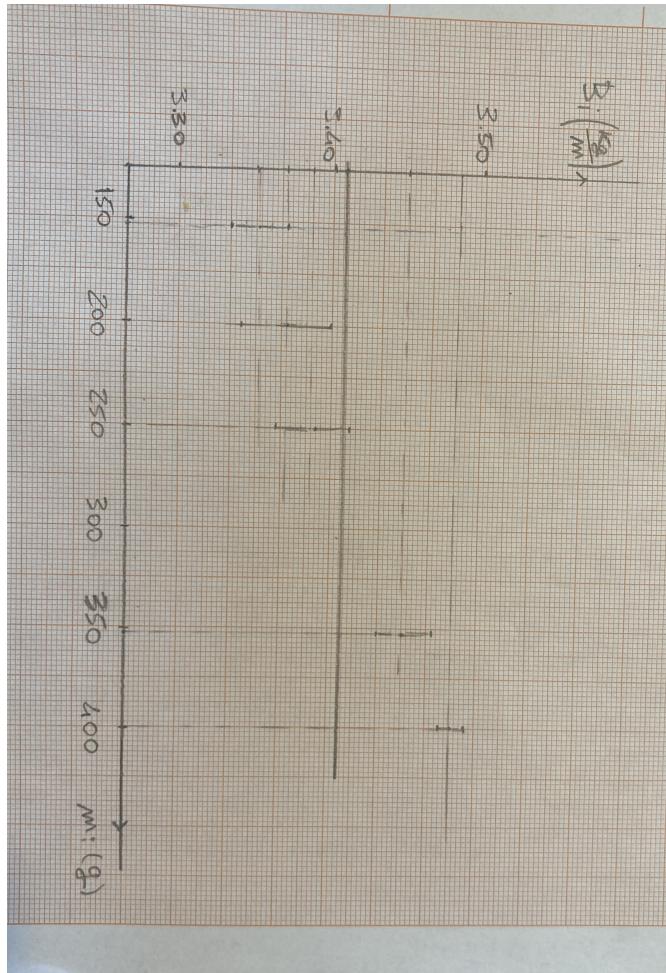


Figura 2

5.2 ΔL_i in relazione a m_i

Per quanto concerne l'andamento di ΔL_i in relazione a m_i questo dovrebbe risultare lineare, come espresso da:

$$\Delta L_i = F_i \frac{L_0}{S_f \cdot E} = m_i \frac{L_0 \cdot g}{S_f \cdot E} = m_i k$$

Nella tabella che segue sono raccolti i relativi dati, a seguire ancora il grafico relativo.

i	$\Delta L_i \pm \Delta(\Delta L_i) [\mu\text{m}]$	$m_i [\text{g}]$
1	(298.54 \pm 3.95)	(152.09 \pm 0.01)
2	(356.45 \pm 4.23)	(200.11 \pm 0.01)
3	(463.31 \pm 4.21)	(249.71 \pm 0.01)
4	(663.78 \pm 4.87)	(352.20 \pm 0.01)
5	(743.71 \pm 4.97)	(401.80 \pm 0.01)

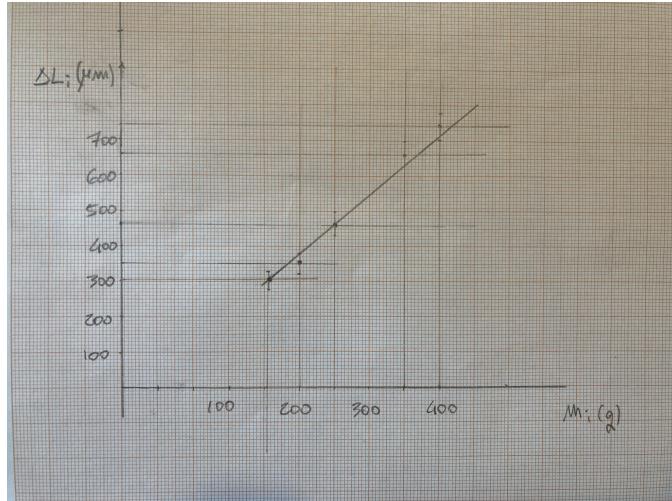


Figura 3

6 Conclusioni

Il valore misurato risulta sensibilmente inferiore del valore stimato che equivale a $2.0 \cdot 10^{11} [\frac{N}{\text{m}^2}]$. Le ragioni di tale incompatibilità possono essere molteplici. Tuttavia, riteniamo che uno dei fattori di incidenza maggiore è stato il fissaggio del filo, c'era infatti un gioco di circa 1 cm (valore di difficile stima). Questo, insieme ad altri fattori legati a errori sistematici ci hanno dunque fatto arrivare ad un risultato che ci sembra soddisfacente, in quanto si discosta di poco dal valore aspettato.