

Esperienza di laboratorio:
Misura del modulo di young dell'acciaio

Ghedì Pietro, Madarena Andrea, Roccasanta Aurelio, Silvestri Daniele

Indice

1	Obiettivi	3
2	Introduzione teorica	3
2.1	Il modulo di Coulomb	3
2.2	Il pendolo di torsione	4
2.2.1	Momento d'inerzia	5
3	Apparato sperimentale	6
3.1	Strumenti di misura	6
3.2	Procedimento di misura	6
4	Dati	7
5	Analisi dati	9
6	Conclusioni	11
7	Grafici	12

1 Obiettivi

In questo esperimento ci proponiamo di misurare il **modulo di Coulomb** di un filo d'acciaio, ovvero l'indice di torsione di un dato materiale quando questo è sottoposto a una determinata sollecitazione.

2 Introduzione teorica

2.1 Il modulo di Coulomb

Applicando un momento torcente alla base di un cilindro, mentre si mantiene fissa la base opposta, si può osservare una deformazione di questo. Inoltre, nei limiti di elasticità del materiale, ovvero applicando momenti di modesta intensità, il cilindro tende a tornare nella posizione iniziale una volta che la sollecitazione cessa. In particolare, vale la relazione

$$M = k \cdot \theta$$

dove M è il momento torcente, k è una costante geometrica legata alla rigidità del materiale e θ è l'angolo di rotazione della base.

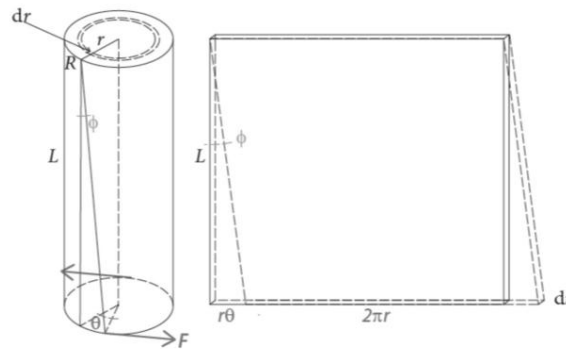


Figura 1

Si immagini ora di dispiegare una corona circolare di spessore dr in un parallelepipedo di dimensioni $2\pi r \cdot dr \cdot L$

Per ricavare la relazione tra M e θ , si parte *dallo sforzo di taglio* σ :

$$\sigma = \frac{dF}{2\pi r \cdot dr} = G \frac{\Delta L}{L}$$

dove G è il *modulo di taglio* o *rigidità*. Dato che $\Delta L = L \cdot \theta$ si ha:

$$G = \frac{L \cdot dF}{2\pi \cdot \theta \cdot r^2 \cdot dr}$$

Essendo $M = r \cdot dF = G \frac{2\pi\theta r^3 dr}{L}$ si può quindi calcolare il momento torcente M integrando su tutto il raggio del filo:

$$M = \int_0^R G \frac{2\pi\theta r^3 dr}{L} = \frac{\pi G R^4 \theta}{2L}$$

ricordando quindi che $M = k \cdot \theta$ segue che

$$k = \frac{\pi G R^4}{2 L}$$

Si denota quindi con **Modulo di Coulomb** il termine

$$\mu = \frac{\pi G}{2}$$

2.2 Il pendolo di torsione

La precedente trattazione per un cilindro può essere applicata ad un pendolo di torsione. Questo modello fisico è composto da un filo d'acciaio disposto verticalmente e fissato all'estremità di un supporto fisso. Al filo viene quindi agganciato un piattello che, ruotando sul piano orizzontale di un angolo θ , applica un momento di torsione al filo. Il moto oscillatorio del pendolo di torsione può essere descritto mediante la seconda equazione cardinale della dinamica:

$$M = I \frac{d^2\theta}{dt^2} = -k\theta \quad \text{quindi} \quad \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{k}{I}\theta = 0$$

Dove I è il momento d'inerzia totale rispetto all'asse verticale (che con questo setup non è possibile conoscere) e $-k\theta$ è la forza di richiamo esercitata dal filo. La soluzione è quindi:

$$\theta(t) = \theta_0 \sin\left(\frac{k}{I}t + \frac{\pi}{2}\right)$$

mentre il periodo T è:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{I}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{LI}{\mu R^4}}$$

2.2.1 Momento d'inerzia

Il momento d'inerzia è una grandezza scalare estensiva, ovvero che dipende dalla forma del corpo, e additiva. Risulta molto importante nella dinamica rotazionale dei punti materiali e dei corpi rigidi, per i quali ricopre un ruolo simile a quello della massa inerziale nei moti traslatori. Questa grandezza misura infatti la capacità di opporsi ad una rotazione. Il momento d'inerzia per un corpo rigido viene definito come:

$$I = \int_0^M r^2 dm$$

dove r è la distanza dall'asse di rotazione. Per questo esperimento sarà necessario calcolare questa grandezza nel caso di una corona circolare rigida omogenea di raggio interno R_i , raggio esterno R_e , altezza h e massa M . L'elemento infinitesimo dm si può scrivere come $\rho dV = \rho 2\pi r dr h$

$$I = 2\pi \rho h \int_{R_i}^{R_e} r^3 dr = \pi \rho h \frac{R_e^4 - R_i^4}{2}$$

da cui, esplicitando $\rho = \frac{M}{\pi h(R_e^2 - R_i^2)}$, si ottiene

$$I = \frac{1}{2} M (R_e^2 + R_i^2)$$

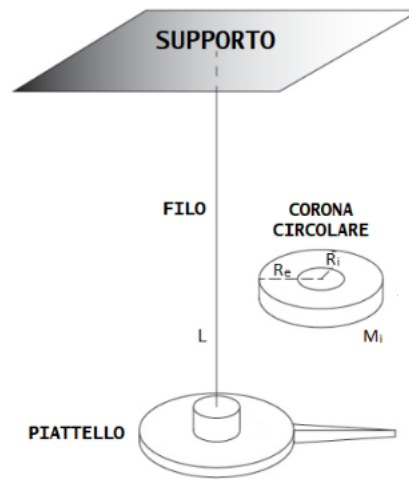


Figura 2

3 Apparato sperimentale

3.1 Strumenti di misura

Gli strumenti utilizzati sono i seguenti:

Strumento	Errore di sensibilità
Cronometro digitale	$5 \cdot 10^{-3}$ S
Bilancia digitale	$5 \cdot 10^{-5}$ Kg
Calibro ventesimale digitale	$5 \cdot 10^{-5}$ m
Calibro Palmer digitale	$5 \cdot 10^{-6}$ m
Metro lineare	$5 \cdot 10^{-4}$ m

3.2 Procedimento di misura

Il procedimento di misura inizia con la raccolta dei valori dei parametri fissi, in questo caso il diametro del filo D_f , i diametri esterno D e interno d di ciascuna corona circolare, le rispettive masse M_i di queste ultime e, infine, la lunghezza del filo L .

Le successive misure consistono nel registrare a ogni misurazione i valori relativi a cinque oscillazioni complete ($5T = t_{stop} - t_{start} = \tau$),

per dieci volte e per ogni corona circolare a disposizione da installare di volta in volta sul piattello. Inoltre, a ogni sostituzione delle corone circolari si misurano dieci 0 del piattello a piatti scarichi, per un totale di cinquanta misurazioni di questo tipo.

Questo serve, in quanto non ‘e noto il momento d’inerzia del sistema a piattello scarico, ma sapendo che:

$$T_{0,i}^2 = 4\pi^2 \frac{I_0 L}{\mu R^4}$$

$$T_i^2 = 4\pi^2 \frac{(I_0 + I)L}{\mu R^4}$$

Allora

$$T_i^2 - T_{0,i}^2 = 4\pi^2 \frac{IL}{\mu R^4}$$

Che mi permette di esprimere μ in grandezze misurabili

4 Dati

In questa sezione si elencano le misure prese durante l’esperienza. Per quanto riguarda i parametri fissi, il diametro del filo ‘e stato ottenuto misurandolo in 5 punti diversi, vista la probabile irregolarit’a della sezione per motivi di costruzione. I valori ottenuti in millimetri sono:

Diametro	Errore
0,410	0,005
0,412	0,005
0,409	0,005
0,404	0,005
0,407	0,005

Il valore utilizzato nei calcoli è stato ricavato prendendo come valore la semisomma dei valori massimo e minimo e come errore associato la loro semidifferenza, ottenendo: $D_f = (0,408 \pm 0,004)$ mm
 Invece la lunghezza del filo è: $L = (0,997 \pm 0,0005)$ m
 Per quanto riguarda le corone circolari, i valori ottenuti delle masse e dei diametri interni ed esterni sono:

Corona	massa (g)	D (mm)	d(mm)
A	180,50	78,42	19,86
B	195,50	39,90	19,85
C	203,10	59,85	19,80
D	268,45	69,93	19,76

Con errori associati $\Delta m_i = 5 \cdot 10^{-6}$ Kg e $\Delta D = \Delta d = 5 \cdot 10^{-6}$ m
 Si riportano le misure per ogni corona circolare dei valori di τ_i : (Tabella 1)

τ_A	τ_B	τ_C	τ_D
29,28	19,26	25,20	31,64
29,29	19,70	25,23	31,78
29,30	19,68	25,26	31,73
29,41	19,55	25,30	31,72
29,41	19,56	25,33	31,76
29,23	19,10	25,40	31,93
29,28	19,43	25,20	31,85
29,46	19,32	25,36	31,82
29,29	19,42	25,44	31,78
29,37	19,44	25,35	31,90

Tabella 1: Tabella 1

E dei valori di $\tau_{0,1}$ a piattello scarico: (Tabella2)

	$\tau_{0,A}$	$\tau_{0,B}$	$\tau_{0,C}$	$\tau_{0,D}$
1	11,65	11,67	11,63	11,54
2	11,54	11,56	11,52	11,54
3	11,55	11,57	11,53	11,65
4	11,52	11,54	11,50	11,53
5	11,73	11,75	11,71	11,73
6	11,95	11,67	11,78	11,83
7	11,67	11,69	11,65	11,67
8	11,70	11,72	11,68	11,71
9	11,69	11,71	11,67	11,69
10	11,58	11,60	11,56	11,58

Tabella 2: Tabella 2

5 Analisi dati

	T medio	σ_T	T_0medio	σ_{T_0}
1	5,866	0,005	2,331	0,004
2	3,889	0,012	2,329	0,003
3	5,061	0,005	2,324	0,005
4	6,358	0,006	2,329	0,003

Per quanto riguarda il modulo di Coulomb, come già anticipato in precedenza è possibile esprimerlo partendo dalla relazione $T_{0,i}^2 - T_i^2 = 4\pi \frac{I_i L}{\mu R^4}$ esplicitando μ :

$$\mu = 4\pi^2 \frac{I_i L}{R^4 (T_{0,i}^2 - T_i^2)}$$

Sapendo il momento d'inerzia di una corona circolare sostituendo di ricava:

$$\mu = 2\pi^2 \frac{L}{(\frac{D_f}{2})^4} \frac{M_i((\frac{D}{2})^4 + (\frac{d}{2})^4)}{T_{0,i}^2 - T_i^2}$$

Per rendere la trattazione piu' semplice e gestibile, si pu' considerare l'espressione come composta da tre fattori:

- $2\pi^2$, che è un termine costante
- $A = \frac{L}{\frac{D_f}{2}^4}$ contenente i parametri del filo che durante l'esperimento rimangono invariati;

-

$$B_i = \frac{M_i((\frac{D}{2})^4 + (\frac{d}{2})^4)}{T_i^2 - T_{0i}^2}$$

che dipende dalla corona circolare utilizzata.

In questo modo 'e possibile scrivere: $\mu = 2\pi^2 AB$

Gli errori associati ai fattori A e B derivano dalla legge di propagazione degli errori relativi quindi:

$$\frac{\Delta A}{A} = \frac{\Delta L}{L} + 4 \frac{\Delta D}{D}$$

$$\frac{\Delta B_i}{B_i} = \frac{\Delta M_i}{M_i} + \frac{\Delta((\frac{D}{2})^2 + (\frac{d}{2})^2)}{((\frac{D}{2})^2 + (\frac{d}{2})^2)} + \frac{\Delta(T_i^2 - T_{0i}^2)}{T_i^2 - T_{0i}^2}$$

Dove:

$$\Delta((\frac{D}{2})^2 + (\frac{d}{2})^2) = \frac{1}{2}(D\Delta D + d\Delta d)_i$$

$$\Delta(T_{0i}^2 - T_i^2) = 2(T\Delta T + T_0\Delta T_0)_i$$

Entrambi errori massimi ricavati dalla legge di propagazione degli errori massimi.

Visto che $2\pi^2 A$ non dipende dalla corona circolare utilizzata, invece che calcolare il valore del modulo di Coulomb per ogni massa e successivamente fare la loro media pesata, si può effettuare tale media sui valori B_i e poi moltiplicare il risultato per $2\pi^2 A$.

La media pesata dei B_i è stata calcolata come:

$$B = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{B_i}{\sigma_{Bi}^2}}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{\sigma_{Bi}^2}}$$

A cui è associata la varianza

$$\sigma_B^2 = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{\sigma_{Bi}^2}}$$

Dove $\sigma_{Bi}^2 = \frac{\Delta B_i}{\sqrt{3}}$

Ora si può ricavare l'errore relativo associato a μ :

$$\frac{\Delta\mu}{\mu} = \frac{\Delta A}{A} + \frac{\Delta B}{B}$$

$$A \pm \Delta A = (3,597 \pm 0,058) \cdot 10^{13} m^{-3}$$

$$B \pm \Delta B = (2,043 \pm 0,184) \cdot 10^{-4} Kg \frac{M^2}{s^2}$$

6 Conclusioni

Quindi il valore risultante di μ è:

$$\mu \pm \Delta\mu = (1,45 \pm 0,11) \cdot 10^{11} \frac{N}{m^2}$$

Valore che si discosta di poco dal valore teorico $\mu = 1,3 \cdot 10^{11} \frac{N}{m^2}$

Sistema	$T_i^2 - T_0^2$	I_i
1	28,9783	58,76
2	9,6988	19,82
3	20,2140	41,28
4	35,0006	71,47

7 Grafici

$$T_i^2 - T_0^2 \quad vs \quad I_i$$

Da cui ci si aspetta una dipendenza lineare, e dunque una retta.

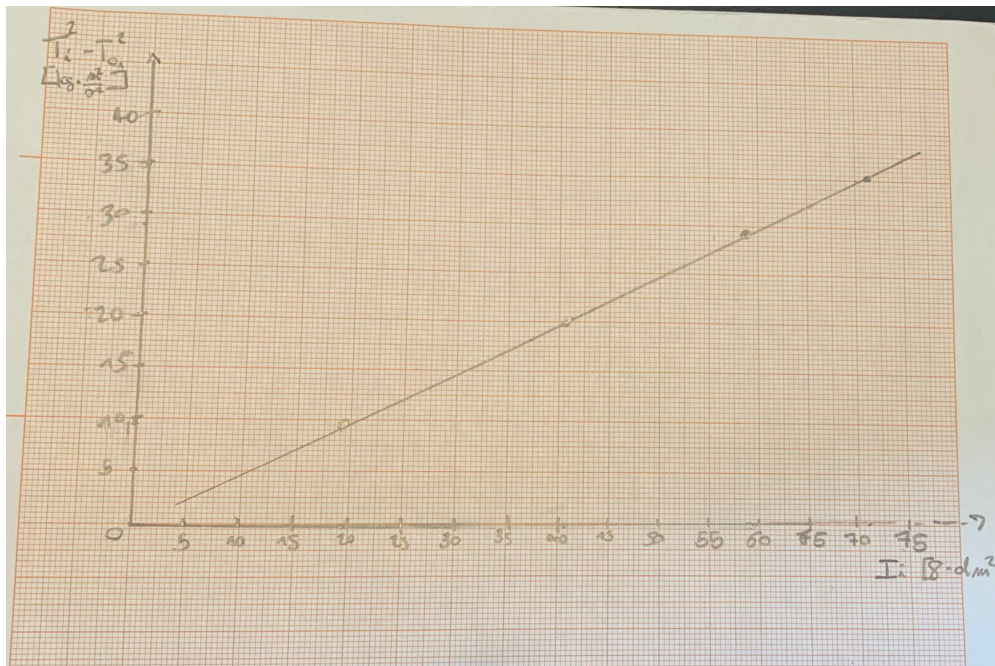


Figura 3: Confronto $T - i^2 - T_0^2 e I_i$

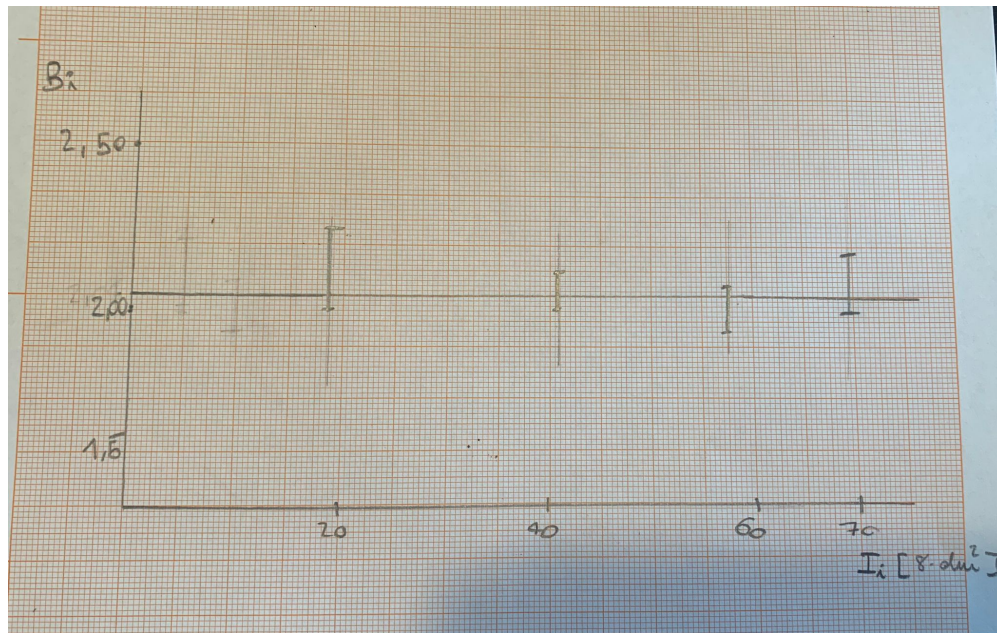


Figura 4: Confronto $B_i e I_i$

$$B_i \quad vs \quad I_i$$

Da questo grafico mostra che le misure sono compatibili fra di loro