



Proiectarea algoritmilor

Paradigma *Divide-et-Impera*

Lucrare de laborator nr. 9



Cuprins

Înmulțirea numerelor întregi

Algoritm *Divide_et_Impera* clasic

Algoritm *Divide_et_Impera* îmbunătățit

Sarcini de lucru și barem de notare

Bibliografie



Înmulțirea numerelor întregi - algoritm *Divide_et_Impera* clasic

- Să presupunem că dorim să înmulțim două numere întregi x și y , formate din n cifre, în baza b .
- Putem presupune ca x și y sunt pozitive. Algoritmul clasic necesită $O(n^2)$ operații.
- De exemplu, dacă baza $b = 10$ și $x = 61,438,521$ și $y = 94,736,407$, atunci $xy = 5,820,464,730,934,047$.
- Să spargem acum x și y în două jumătăți. Rezultă $x_s = 6,143$, $x_d = 8,521$, $y_s = 9,473$, și $y_d = 6,407$.
- Vom avea $x = x_s 10^4 + x_d$ și $y = y_s 10^4 + y_d$. Urmează că $xy = x_s y_s 10^8 + (x_s y_d + x_d y_s) 10^4 + x_d y_d$.
- Astfel, pentru înmulțirea numerelor întregi x și y , sunt necesare 4 înmulțiri de numere formate din $n/2$ cifre: $x_s y_s$, $x_s y_d$, $x_d y_s$ și $x_d y_d$.
- Înmulțirea cu 10^8 și 10^4 înseamnă adăugarea de zerouri, ceea ce implică $O(n)$ operații suplimentare.



Înmulțirea numerelor întregi - algoritm *Divide-et-Impera* îmbunătățit

- Dacă înmulțim recursiv obținem recurența $T(n) = 4T(n/2) + O(n)$
- Din teorema complexității *Divide-et-Impera* rezultă $T(n) = O(n^2)$.
- Pentru a obține un algoritm subpătratic, trebuie să reducem numărul apelurilor recursive.
- Observația cheie este $x_sy_d + x_dy_s = (x_s - x_d)(y_d - y_s) + x_sy_s + x_dy_d$
- În locul a două înmulțiri pentru a obține coeficientul lui 10^4 , putem face o înmulțire și apoi să folosim rezultatul a două înmulțiri deja efectuate.
- Astfel, pentru înmulțirea numerelor întregi x și y , sunt necesare 3 înmulțiri de numere formate din $n/2$ cifre: x_sy_s , x_dy_d și $(x_s - x_d)(y_d - y_s)$.
- În acest fel, numărul apelurilor recursive este redus la 3.
- Rezultă $T(n) = 3T(n/2) + O(n)$, adică $T(n) = O(n^{\log_2 3}) = O(n^{1.59})$.



Sarcini de lucru și barem de notare

Sarcini de lucru:

1. Scrieți un program C/C++ care implementează o metodă *Divide_et_Impera* pentru înmulțirea a două numere întregi formate din 128 cifre binare.

Barem de notare:

1. Aplicarea corectă a metodei *Divide_et_Impera*: 6p
2. Funcția de înmulțire conține 3 apeluri recursive: 3p
3. Baza: 1p



Bibliografie



M. A. Weiss, *Data Structures and Algorithm Analysis in C*, The Benjamin/Cummings Publishing Company, Inc., 1992.