Modello

Mario Zavarella

May 2025

1 Introduction

Parametri del Modello

1. Rete di Trasporto

- **Percorsi (Paths)**: si considerano due percorsi, ciascuno composto da una sequenza di archi (coppie ordinate di stazioni):
  - Percorso **A**: $(1 \to 2),\ (2 \to 4)$
  - Percorso **B**: $(1 \to 3),\ (3 \to 4)$
- *Nota*: I percorsi possono essere generati casualmente per una maggiore generalità.

2. Insieme dei Nodi e Archi

- **Nodi**: insieme delle stazioni numerate da 1 fino alla stazione più alta coinvolta nei percorsi:

$$\text{Nodi} = \{1, 2, \ldots, N\}, \quad \text{dove } N = \max_{(i,j) \in \text{paths}} \max(i, j)$$

- **Archi possibili (non direzionali)**:

$$\text{Archi} = \{(i, j) \mid i, j \in \text{Nodi},\ i < j\}$$

3. Tempi di Percorrenza

- **Tempi sugli archi**: a ogni arco (i, j) è associato un tempo di percorrenza w_{ij}, generato casualmente in un intervallo tra 5 e 15:

$$w_{ij} \in \{5, 6, \ldots, 15\} \text{ minuti}$$

- *Nota*: Si può aggiungere un controllo per garantire che i tempi w_{ij} siano almeno pari alla differenza temporale tra due stazioni consecutive nella tabella oraria, per evitare arrivi anticipati.

4. Tabella Oraria (Timetable)

- **Orario Ts previsto per ogni stazione (in minuti)**:

$$T_1 = 100$$
$$T_2 = 110$$
$$T_3 = 120$$
$$T_4 = 130$$
$$T_5 = 140$$
$$T_6 = 150$$
$$T_7 = 160$$

- **Finestra di prelievo passeggeri**: intervallo accettabile di arrivo presso la stazione:

$$[T_s,\ T_s + 10] \quad \forall s \in \text{Stazioni}$$

5. Passeggeri

- **Numero totale di passeggeri**:

$$\text{num\_passengers} = 10$$

- **Assegnazione dei passeggeri**: ogni passeggero è associato a un arco di partenza scelto casualmente.

- **Distribuzione dei passeggeri per nodo di partenza**:

$$P_s = \text{numero di passeggeri che partono da } s$$

6. Capacità

- **Capacità massima per arco**:

$$\text{capMax} = 2 \quad \text{(numero massimo di passeggeri per arco)}$$

7. Considerazioni Future

- **Randomizzazione**: si prevede di introdurre generatori casuali per:
  - I percorsi
  - La tabella oraria
  - La distribuzione dei passeggeri

- **Controlli di coerenza**:
  - Verifica che $w_{ij} \geq |T_j - T_i|$ per ogni arco (i, j)
  - Evitare arrivi anticipati rispetto alla finestra di tempo prevista

Variabili Decisionali

- **Variabili di selezione percorso**:

$$Z_p = \begin{cases} 1 & \text{se il percorso } p \in \{A, B, \dots\} \text{ viene selezionato} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

  Dove Z_p è una variabile binaria per ogni percorso p disponibile.

- **Orario di arrivo alle stazioni**:

$$a_s \in \mathbb{R}_{\geq 0} \quad \forall s \in \text{Stazioni}$$

  Dove a_s rappresenta il tempo (in minuti) di arrivo previsto alla stazione s.

- **Passeggeri serviti (totale)**:

$$P_{\text{served}} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$$

  Variabile intera che rappresenta il numero totale di passeggeri serviti lungo i percorsi selezionati (in questo caso un solo percorso).

- **Variabili individuali per i passeggeri**:

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{se il passeggero } i \text{ viene servito} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad \forall i = 1, \dots, \text{num\_passengers}$$

  Dove x_i è una variabile binaria che indica se il passeggero i è stato servito.

Vincoli del Modello

- **Selezione percorso: al massimo uno può essere attivo**

$$\sum_{p \in \mathcal{P}} Z_p \leq 1$$

  Dove $\mathcal{P}$ è l'insieme dei percorsi possibili.

- **Vincoli di capacità sugli archi**:

  Per ogni arco (u, v), si considera l'insieme $\mathcal{I}_{uv}$ dei passeggeri che lo attraversano, e l'insieme $\mathcal{P}_{uv}$ dei percorsi che includono (direttamente o indirettamente) entrambi i nodi u e v.

$$\sum_{i \in \mathcal{I}_{uv}} x_i \leq C_{\max} \cdot \sum_{p \in \mathcal{P}_{uv}} Z_p$$

  Dove:

- x_i è una variabile binaria che indica se il passeggero i viene servito.
- $C_{\max}$ è la capacità massima di ogni arco.
- Z_p è la variabile binaria che vale 1 se il percorso p è selezionato.
- $\mathcal{P}_{uv}$ è l'insieme dei percorsi che includono entrambi i nodi u e v.

- **Vincoli di servizio passeggeri**:

  Per ogni passeggero i associato a un arco (u, v), definiamo:

  - $\mathcal{P}_{uv}$: insieme dei percorsi che includono entrambi i nodi u e v;
  - $[t_u^-, t_u^+]$: finestra di prelievo ammessa alla stazione di partenza u.

  Se $\mathcal{P}_{uv} \neq \emptyset$ (cioè esistono percorsi compatibili), valgono i seguenti vincoli:

$$\begin{gathered}\text{Per ogni } p \in \mathcal{P}_{uv}: \\ t_u \geq t_u^- - M \cdot (1 - Z_p) \\ t_u \leq t_u^+ + M \cdot (1 - Z_p)\end{gathered}$$

$$x_i \leq \sum_{p \in \mathcal{P}_{uv}} Z_p$$

  Dove:

  - t_u: orario di arrivo alla stazione u;
  - x_i: variabile binaria, vale 1 se il passeggero i è servito;
  - Z_p: variabile binaria, vale 1 se il percorso p è attivo;
  - M: una costante sufficientemente grande (Big-M).

  Se invece $\mathcal{P}_{uv} = \emptyset$ (cioè nessun percorso include l'arco), allora il passeggero non può essere servito:

$$x_i = 0$$

- **Vincolo di somma passeggeri serviti**:

  La variabile intera *pax_served* rappresenta il numero totale di passeggeri serviti. Essa è pari alla somma delle variabili binarie x_i, una per ciascun passeggero i.

$$\textit{pax\_served} = \sum_{i=1}^{N} x_i$$

  Dove:

  - N è il numero totale di passeggeri;
  - $x_i = 1$ se il passeggero i è servito, 0 altrimenti;
  - *pax_served* è una variabile intera che conta il totale dei passeggeri serviti.

Funzione Obbiettivo

L'obiettivo del modello è minimizzare una combinazione lineare tra:

- la somma dei **ritardi** (ritardo_i), ciascuno ponderato da un coefficiente (in questo caso 0.5);
- il numero totale di **passeggeri serviti**, che si desidera massimizzare (equivalente a minimizzare il suo opposto).

La funzione da minimizzare è quindi:

$$\min \left(0.5 \cdot \sum_i \text{ritardo}_i - pax\_served \right)$$

Dove:

- ritardo_i: ritardo alla stazione i (può essere definito come $\max(0, t_i - timetable_i)$ se serve una definizione esplicita);
- pax_served: numero totale di passeggeri serviti (variabile intera).

Il peso 0.5 sui ritardi e -1 sui passeggeri serviti può essere calibrato in base alla priorità tra puntualità e servizio.

Riassunto - Formulazione compatta

Parametri

- P: insieme dei percorsi disponibili (es. $P = \{A, B\}$)
- A_p: insieme di archi nel percorso $p \in P$
- N: insieme delle stazioni
- w_{uv}: tempo di percorrenza sull'arco (u, v)
- T_s: orario previsto di arrivo alla stazione s
- $[T_s, T_s + 10]$: finestra di prelievo accettabile alla stazione s
- $capMax$: capacità massima su ogni arco
- M: valore grande (Big-M)
- n: numero di passeggeri
- $a_i = (u_i, v_i)$: arco associato al passeggero i

Variabili decisionali

- $Z_p \in \{0, 1\}$: vale 1 se il percorso p è selezionato
- $x_i \in \{0, 1\}$: vale 1 se il passeggero i è servito
- $t_s \in \mathbb{R}_{\geq 0}$: orario di arrivo alla stazione s
- $pax\_served \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$: numero totale di passeggeri serviti

Funzione obiettivo

$$\min\left(0.5\cdot\sum_{s\in N}\max(0,t_s-T_s)-pax\_served\right)$$

Vincoli

1. **Un solo percorso può essere scelto**:

$$\sum_{p\in P} Z_p\leq 1$$

2. **Relazione temporale sugli archi selezionati**:

$$t_v\geq t_u+w_{uv}+5-(1-Z_p)\cdot M\quad\forall p\in P,\,(u,v)\in A_p$$

3. **Condizione di partenza per ogni percorso**:

$$t_u\geq T_u\cdot Z_p\quad\forall p\in P,\,(u,v)\in A_p\text{ con }u\text{ iniziale}$$

4. **Finestra temporale per i passeggeri serviti**:

$$\left.\begin{array}{l}t_{u_i}\geq T_{u_i}-(1-Z_p)\cdot M\\ t_{u_i}\leq T_{u_i}+10+(1-Z_p)\cdot M\end{array}\right.\quad\forall i=1,\ldots,n,\,\forall p\in P:a_i\in A_p$$

5. **Compatibilità tra passeggero e percorso**:

$$x_i\leq\sum_{p\in P:a_i\in A_p} Z_p\quad\forall i=1,\ldots,n$$

6. **Capacità massima su ogni arco**:

$$\sum_{i:a_i=(u,v)} x_i\leq capMax\cdot\sum_{p\in P:(u,v)\in A_p} Z_p\quad\forall(u,v)$$

7. **Conteggio totale passeggeri serviti**:

$$pax\_served=\sum_{i=1}^{n} x_i$$