Predpostavka o Randićevem indeksu in radiusu

Poročilo pri predmetu Finančni praktikum

Avtorja:
Jaka Munda, Anja Žavbi Kunaver

Ljubljana, januar 2019

Kazalo

1 Opis problema

Računalniški program Graffiti je postavil lemo, da za enostaven povezan graf $G = (V, E)$ velja,

$$Ra(G) \geq rad(G) - 1.$$

Domnevo je potrebno testirati na različne načine na manjših in večjih grafih. Z uporabo metahevristične populacije je domnevo potrebno preizkusiti na večjih grafih in upati na njeno ovrgbo.

Opombe:

1. Graf je enostaven, če ne vsebuje zank in je brez vzporednih povezav.
2. Graf je povezan, če lahko iz vsake točke pridemo do vsake druge točke v grafu.
3. Ekscentričnost vozlišča v je razdalja do njegovega najbolj oddaljenega vozlišča; tj. $\max\{d(v, u) : u \in V(G)\}$.
4. Radius grafa $rad(G)$ pomeni minimum ekscentričnosti vozlišč grafa.
5. $Ra(G)$ je Randićev indeks grafa G. Definiran je kot

$$Ra(G) = \sum_{uv \in E(G)} \frac{1}{\sqrt{d(u)d(v)}}.$$

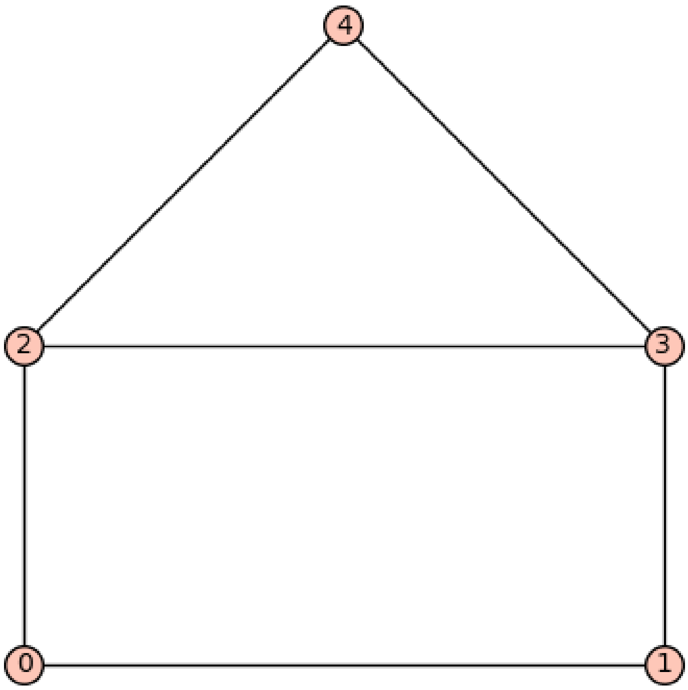
6. $d(x)$ predstavlja stopnjo vozlišča x oz. število povezav, ki imajo vozlišče x za svoje krajišče.

2 Potek dela

Programiranje sva opravila v programu Sage, ki ima že vgrajene funkcije za delo z grafi. Najprej sva napisala program, ki je lemo testiral na manjših enostavnih povezanih grafih. S tem programom sva uspela lemo potrditi za grafe s številom vozlišč $n \leq 9$. Za grafe z večjim številom vozlišč pa program ni deloval, zato sva se dela lotila z metodo populacijske metahevristike, in sicer z genetskim algoritmom.

3 Primer

Za lažje razumevanje prilagava primer enostavnega povezanega grafa s 5 vozlišči.



$$radius = 2$$

$$Ra(G) = \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{1}{\sqrt{9}} = \frac{5+4\sqrt{6}}{6} \doteq 2.47$$

Vidimo, da na tem grafu lema drži, saj je $2.47 > 2 - 1$.

4 Algoritem za manjše grafe

Najprej sva definirala funkcijo, ki za graf vrne Randićev indeks po definirani formuli. Funkcija za izračun radiusa grafa je že vgrajena. Nato sva definirala funkcijo, ki za vse grafe velikosti n in manj preveri, ali domneva drži. V kolikor lema za kakšen graf ne bi držala, bi funkcija vrnila $False$, vendar pa se to v nobenem primeru ni zgodilo. Ta funkcija deluje za grafe do števila vozlišč $n \leq 9$.

5 Algoritem za večje grafe

Z genetskim algoritmom sva poskušala ovreči domnevo. Ponovno sva najprej definirala Randićev indeks, enako kot pri majhnih grafih.

Nato sva definirala funkcijo fitness, ki vrne vrednost neenakosti, torej $Ra(G) - rad(G) + 1$. Če bi vrnila negativno vrednost, bi bila lema ovržena.

Naslednja funkcija *tournament_selection* med t naključno izbranimi grafi izbere tistega, ki ima najmanjšo vrednost funkcije fitness. Najprej naključno izbere enega izmed grafov in ga spravi v 'najbolsi', nato pa pregleduje ostale grafe in če najde boljšega, ga zamenja.

Definirala sva funkcijo za Poissonovo porazdelitev, ki pride v poštev kasneje. Z njo bomo izbirali število povezav, ki jih bomo v funkciji *mutiraj* odstranili oziroma dodali. V funkciji *crossover* nam pove, koliko povezav bomo dodali potomcu.

Funkcija *mutiraj* prejme graf in ga mutira. To naredi tako, da najprej naključno izbere neko verjetnost. Če je ta verjetnost $\leq \frac{1}{3}$, doda povezavo, če je $> \frac{1}{3}$ in $\leq \frac{2}{3}$, odstrani povezavo in če je $> \frac{2}{3}$, doda in odstrani povezavo.

crossover prejme dva grafa in ju križa med seboj ter vrne njunega potomca.

min_fitness prejme seznam grafov, med katerimi poišče tistega, ki ima najmanjšo vrednost funkcije $fitness$. To pa zato, ker manjša kot je ta vrednost, večja je verjetnost, da bo lema ovržena. Želiva namreč priti pod vrednost 0, večje vrednosti pa lemo le potrdijo za en določen graf.

S funkcijo *nova_populacija* iz obstoječe populacije nărediva novo populacijo s pomočjo križanja in mutacij.

Še zadnja funkcija *genetic_algorithm* v vsaki ponovitvi s križanjem in mutiranjem naredi novo populacijo. Če v tej populaciji najde graf, za katerega je vrednost $fitness$ manjša od nič, vrne 'Lema ne drži'. Če se to ne zgodi pri nobenem grafu, vrne 'Ne najdem protiprimera'. Lemo sva nato testirala z vnašanjem različnih vrednosti v zadnjo funkcijo in ob tem beležila čase delovanja.

6 Ugotovitve

Ugotovila sva, da imajo polni grafi z več kot enim vozliščem radius vedno enak 1. Iz tega dokaj očitno sledi, da neenakost velja (celo stroga neenakost). Tudi z genetskim algoritmom pa nama ni uspelo najti protiprimera. Morda bi uspelo s kakšnimi drugimi vhodnimi podatki. Na podlagi tega leme ne moreva ovreči ali potrditi v celoti.

7 Literatura

[1] M. Cygan, M. Pilipczuk, R. Škrekovski, *On the Inequality between Radius and Randic Index for Graphs*, 2011.

[2] S. Luke, *Essentials of Metaheuristics*, Department of Computer Science, George Mason University, Online Version 2.2, 2015.