1. Найти собственные векторы и собственные значения для линейного оператора, заданного матрицей

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -6 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$$

Собственный вектор оператора A — это такой ненулевой вектор, действие оператора на который сводится к умножению его на число: $Ax = \lambda x$
При этом число λ называется собственным значением этого оператора.

Составим характеристическое уравнение:
$det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & -6 \\ 2 & 6-\lambda \end{vmatrix} = (-1-\lambda)(6-\lambda) + 12 = \lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$
$\lambda_1 = 2$
$\lambda_2 = 3$

Найдем собственные вектора:

a) $\begin{pmatrix} -1 & -6 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

$\begin{cases} -x_1 - 6x_2 = 2x_1 \\ 2x_1 + 6x_2 = 2x_2 \end{cases} \Rightarrow x_1 = -2x_2$

при $x_2 = 1, x_1 = -2 \Rightarrow x = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} -1 & -6 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

$\begin{cases} -x_1 - 6x_2 = 3x_1 \\ 2x_1 + 6x_2 = 3x_2 \end{cases} \Rightarrow x_1 = -1.5x_2$

при $x_2 = 2, x_1 = -3 \Rightarrow x = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$

Проверка (тестовая для случая а):

$$\begin{pmatrix} -1 & -6 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-6 \\ -4+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2. Дан оператор поворота на 180 градусов, задаваемый матрицей

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Показать, что любой вектор является для него собственным.

Составим характеристическое уравнение:
$det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 \\ 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (-1-\lambda)^2 = 0$
$\lambda_1 = \lambda_2 = -1$
$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

$\begin{cases} -x_1 = -x_1 \\ -x_2 = -x_2 \end{cases} \Rightarrow x_1, x_2 - \text{могут принимать любые значения}$

3. Пусть линейный оператор задан матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Установить, является ли вектор x = (1,1) собственным вектором этого линейного оператора.

Составим характеристическое уравнение:

$$det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(3-\lambda)+1 = \lambda^2-4\lambda+4 = 0$$

$\lambda_1 = \lambda_2 = 2$

Проверяем:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Вектор $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} -$ является собсвенным

4. Пусть линейный оператор задан матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Установить, является ли вектор x = (3,−3,−4) собственным вектором этого линейного оператора.

Составим характеристическое уравнение:

$$det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 3 & 0 \\ 3 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda\begin{vmatrix} -\lambda & 0 \\ 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= -\lambda\big(-\lambda(3-\lambda)\big) - 3\big(3(3-\lambda)\big) = -\lambda^3+3\lambda^2+9\lambda-27$$

$$= -\lambda^2(\lambda-3)+9(\lambda-3) = (\lambda-3)(9-\lambda^2)$$

$\lambda_1 = 3$

$\lambda_2 = 3$

$\lambda_3 = -3$

Проверяем:

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 9 \\ -12 \end{pmatrix} \neq \lambda_1\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix} \neq \lambda_2\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix} \neq \lambda_3\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Вектор не является собственным