1. Исследовать на линейную зависимость

$$f_1(x) = e^x,$$
$$f_2(x) = 1,$$
$$f_3(x) = x + 1,$$
$$f_4(x) = x - e^x.$$

Для того, чтобы некоторое множество элементов линейного пространства было линейно зависимым, необходимо и достаточно, чтобы один из этих элементов являлся линейной комбинацией остальных.

$$f_4(x) = f_3(x) - f_2(x) - f_1(x) = x + 1 - 1 - e^x$$

то есть вектор $f_4(x)$ — линейная комбинация векторов $f_3(x), f_2(x), f_1(x)$, из чего можно сделать вывод, что вектора линейно зависимы.

2. Исследовать на линейную зависимость

$$f_1(x) = 2,$$
$$f_2(x) = x,$$
$$f_3(x) = x^2,$$
$$f_4(x) = (x + 1)^2$$

$$f_4(x) = f_3(x) + 2f_2(x) + \frac{1}{2}f_1(x) = x^2 + 2x + \frac{1}{2}2$$

то есть вектор $f_4(x)$ — линейная комбинация векторов $f_3(x), f_2(x), f_1(x)$, из чего можно сделать вывод, что вектора линейно зависимы.

3. Найти координаты вектора $x = (2{,}3{,}5) \in R^3$ в базисе $b_1 = (0{,}0{,}10), b_2 = (2{,}0{,}0), b_3 = (0{,}1{,}0)$

$$x = (2{,}3{,}5) = (2{,}0{,}0) + (0{,}3{,}0) + (0{,}0{,}5) = 1 \cdot (2{,}0{,}0) + 3 \cdot (0{,}1{,}0) + 0.5 \cdot (0{,}0{,}10) =$$
$$= 1b_2 + 3b_3 + 0.5b_1$$

то есть координатами вектора x в базисе являются $(0.5, 1, 3)$

4. Найти координаты вектора $3x^2 - 2x + 2 \in R^3[x]$:

- В базисе $1, x, x^2$

  $$3x^2 - 2x + 2 = \gamma_1 b_1 + \gamma_2 b_2 + \gamma_3 b_3 = 1\gamma_1 + x\gamma_2 + x^2\gamma_3 = 1 \cdot 2 - 2 \cdot x + 3 \cdot x^2$$

  Ответ: (2, -2, 3)
- В базисе $x^2, x - 1, 1$

  $$3x^2 - 2x + 2 = \gamma_1 b_1 + \gamma_2 b_2 + \gamma_3 b_3 = x^2\gamma_1 + (x - 1)\gamma_2 + \gamma_3 = 3 \cdot x^2 - 2(x - 1) + 0$$

  Ответ: (3, -2, 0)

1. Установить, является ли линейным подпространством:

а) совокупность всех векторов трехмерного пространства, у которых по крайней мере одна из первых двух координат равна нулю;

Подмножество L линейного пространства V является его подпространством тогда и только тогда, когда для любых элементов u, v ∈L и любого α∈R выполняются условия:

1) $u + v \in L$;

2) $\alpha \cdot u \in L$.

$$(0, \mathrm{a}, \mathrm{b}) + (c, 0, d) = (c, a, b + d)$$

Полученные вектор уже не принадлежит указанному в задании множеству всех векторов

Ответ: не образуют линейного пространства.

б) все векторы, являющиеся линейными комбинациями данных векторов $\{u_1,\ u_2, \dots, u_n\}$
Ответ: образуют линейное пространство, т.к. выполняются условия сложения и умножения на скаляр

---

1. Найти скалярное произведение векторов $x, y\ \in \mathbb{R}$
   - x= (0,−3,6), y= (−4,7,9);
     $(\mathrm{x}, \mathrm{y})\ =\ (0 \cdot (\text{-}4) + (\text{-}3) \cdot 7 +\ 6 \cdot 9)\ =\ 33$

   - x= (7,−4,0,1), y= (−3,1,11,2).
     $(\mathrm{x}, \mathrm{y}) =\ (7 \cdot (\text{-}3) + (\text{-}4) \cdot 1 +\ 0 \cdot 11 +\ 1 \cdot 2) =\ -23$

2. Найти нормы векторов (4,2,4) и (12,3,4) и угол между ними.
   $(\mathrm{x}, \mathrm{y})\ =\ (4 \cdot 12 +\ 2 \cdot 3 + 4 \cdot 4)\ =\ 70$
   $\|\mathrm{x}\|_2 = \sqrt{4^2 + 2^2 + 4^2} = \sqrt{36} = 6$
   $\|y\|_2 = \sqrt{12^2 + 3^2 + 4^2} = \sqrt{169} = 13$
   $$cos\varphi = \frac{(x, y)}{\|x\| \cdot \|y\|}.$$
   $$cos\varphi = \frac{(x, y)}{\|\mathrm{x}\|\|y\|} = \frac{70}{6 \cdot 13} = 0.897$$
   $\varphi = arcos(0.897) \approx 26^{\circ} \approx 0.458(\text{рад})$

3. Будет ли линейное пространство евклидовым, если за скалярное произведение принять:

   а) произведение длин векторов;
   Аксиомы скалярного произведения евклидова пространства
   - $(x, y) = (y, x)$
   - $(\lambda x, y) = \lambda(y, x)$
   - $(x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y)$
   - $(x, x) \geq 0.$ Если $(x, x) = 0 \Rightarrow x = 0$

   Ответ: нет не будет, т.к. не во всех случаях верно: $(\|x_1 + x_2\|, \|y\|) = \|x_1, y\| + \|x_2, y\|$.
   Верно только в случае коллинеарности векторов

   б) утроенное обычное скалярное произведение векторов?
   Да, будет в соответствии с п.2 аксиом и свойствами умножения вектора на скаляр(все аксиомы выполняются)

4. 4. Какие из нижеперечисленных векторов образуют ортонормированный базис в линейном пространстве R^3:
   Определение. В конечномерном евклидовом пространстве базис $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ *называется ортонормированным, если*
   $$(e_i, e_j) = 0\ \forall\ i \neq j \text{ и } (e_i, e_i) = 1\ \forall\ i \in [1, n].$$
   Это означает, что ортонормированный базис является ***ортогональным*** и состоит из векторов ***единичной*** длины.
   а)(1,0,0), (0,0,1);
   Не знаю, как правильно ответить. С одной стороны, это действительно ортонормированный базис, состоящий из векторов ***единичной*** длины. НО если рассмотреть в определении требование, согласно которому $i \in [1, n]$, то в условии задачи

для R^3 должен присутствовать n-й вектор. Если считать, что он нулевой, то это уже не ортонормированный базис для R^3. В итоге ответ: Ортонормированный для R^2 , не является базисом для R^3

б) $(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0), (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0), (0,0,1)$

$\|x_1\| = \sqrt{\left(1/\sqrt{2}\right)^2 + \left(-1/\sqrt{2}\right)^2 + 0^2} = \sqrt{1} = 1$

$\|x_2\| = \sqrt{\left(1/\sqrt{2}\right)^2 + \left(1/\sqrt{2}\right)^2 + 0^2} = \sqrt{1} = 1$

$\|x_3\| = \sqrt{1} = 1$

$(x_1, x_2) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 0 = 0$

$(x_2, x_3) = 0$

$(x_1, x_3) = 0$

Ответ: образуют ортонормированный базис

в) $(1/2, -1/2, 0), (0, 1/2, 1/2), (0,0,1)$

$\|x_1\| = \sqrt{1} = 1$

$\|x_2\| = \sqrt{1} = 1$

$\|x_3\| = \sqrt{1} = 1$

$(x_1, x_2) = 0 - \frac{1}{4} + 0 = -\frac{1}{4}$

Дальше можно не считать

Ответ: не образуют ортонормированный базис

г) $(1,0,0)(0,1,0), (0,0,1)$

Тут без расчетов понятно

Ответ: образуют ортонормированный базис

.