Part_3

1. Установить, какие произведения матриц AB и BA определены, и найти размерности полученных матриц:
   При умножении A на B необходимо, чтобы число столбцов матрицы A было равно числу строк матрицы B (при BA наоборот).

   а) A — матрица 4×2, B — матрица 4×2;

   Ответ: AB и BA не определены.

   б) A — матрица 2×5, B — матрица 5×3;

   AB определено – размерность 2×3. BA не определено.

   в) A — матрица 8×3 B — матрица 3×8;

   AB определено – размерность 8×8, BA определено – размерность 3×3

   г) A — квадратная матрица 4×4, B — квадратная матрица 4×4.

   AB, BA определены – размерность 4×4

---

2. Найти сумму и произведение матриц:

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \text{ и } \mathrm{B} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

- $\mathrm{A} + B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+4 & -2-1 \\ 3-0 & 0-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$
- $\mathrm{A}B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 4 + (-2)\cdot 0 & 1\cdot(-1) + (-2)(-5) \\ 3\cdot 4 + 0\cdot 0 & 3\cdot(-1) + 0\cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -11 \\ 12 & -3 \end{pmatrix}$
- $BA = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 4 + (-1)\cdot 3 & 4\cdot(-2) + (-1)\cdot 0 \\ 1\cdot 0 + 5\cdot 3 & 0(-2) + 0\cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -8 \\ 15 & 0 \end{pmatrix}$

---

3. Из закономерностей сложения и умножения матриц на число можно сделать вывод, что матрицы одного размера образуют линейное пространство. Вычислить линейную комбинацию $3A-2B+4C$ для матриц:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$3A = \begin{pmatrix} 3 & 21 \\ 9 & -18 \end{pmatrix}, 2B = \begin{pmatrix} 0 & 10 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}, 4C = \begin{pmatrix} 8 & -16 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$

$3A - 2B = \begin{pmatrix} 3 & 21 \\ 9 & -18 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 10 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 11 \\ 5 & -16 \end{pmatrix}$

$(3A - 2B) + 4C = \begin{pmatrix} 3 & 11 \\ 5 & -16 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 & -16 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & -5 \\ 9 & -12 \end{pmatrix}$

---

4. Дана матрица $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 5 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ Вычислить AA^T и A^TA

$$A^T = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$AA^T = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 5 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 5 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16+1 & 20-2 & 8+3 \\ 20-2 & 25+4 & 10-6 \\ 8+3 & 10-6 & 4+9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & 18 & 11 \\ 18 & 29 & 4 \\ 11 & 4 & 13 \end{pmatrix}$$

$$A^T A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 5 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16+25+4 & 4-10+6 \\ 4-10+6 & 1+4+9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 45 & 0 \\ 0 & 14 \end{pmatrix}$$

5. в Jupyter

PART 2

1. Вычислить определитель:

a) $\begin{vmatrix} sinx & -cosx \\ cosx & sinx \end{vmatrix} = sinx \cdot sinx - (-cosx) \cdot cosx = sin^2 x + cos^2 x = 1$

b) $\begin{vmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 9 \end{vmatrix} = 4 \cdot 5 \cdot 9 = 180$ (верхнетреугольная матрица)

c) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} =$

$$= 5 \cdot 9 - 6 \cdot 8 - 2(4 \cdot 9 - 6 \cdot 7) + 3(4 \cdot 8 - 5 \cdot 7) = 45 - 48 - 2 \cdot (36 - 42) + 3(32 - 35)$$
$$= -3 + 12 - 9 = 0$$

Или $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{vmatrix} \Rightarrow detA = 0$ (*т.к.2 и 3строка линейно зависимы)*

или $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0,5 & 3 \\ 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & -12 \end{vmatrix} = 1 \cdot 0 \cdot (-12) = 0$ (верхнетреугольная матрица)

---

2. Определитель матрицы А равен 4. Найти:

Согласно свойствам определителей:

a. $det(A^2) = detA \cdot detA = 16$

b. $det(A^T) = detA = 4$

c. $det(2\text{A}) = 2^n \cdot detA$

---

3. Доказать, что матрица вырожденная:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 7 & -3 \\ 4 & -14 & 6 \\ -3 & 7 & 13 \end{pmatrix}$$

Определение

Матрица называется сингулярной, или вырожденной, если ее определитель равен нулю.

По свойству определителей – если две строки (столбца) матрицы линейно зависимые ⇒ detA=0

2 строка матрицы равно произведению 1й на (-2) ⇒ detA=0. Матрица А вырожденная

---

5. Найти ранг матрицы:

Ранг матрицы — это порядок ее максимального невырожденного (или базисного) минора.
Строчным рангом матрицы называется максимальное число линейно независимых строк этой матрицы.
Строчный ранг матрицы всегда совпадает с столбцовым и равен максимальному размеру ее невырожденного минора.

a. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

Удаление строки(столбца), являющегося линейной комбинацией двух других не приводит к изменению ранга матрицы. 3 строка = 1я + 2я. Таким образом:

$$rank\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = rank\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow rankA = 2$$

b. $A\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

Удаление строки(столбца), являющегося линейной комбинацией двух других не приводит к изменению ранга матрицы. 3 строка = 1я + 2я. Таким образом:

$$rank\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 5 & 6 \end{pmatrix} = rank\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & 6 \end{pmatrix} = rank\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow rankA = 3$$