1. Исследовать сходимость ряда (* двумя способами):

$$\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{(n+1)\sqrt{n+1}}+\cdots=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)\sqrt{n+1}}$$

- Второй признак сравнения:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)\sqrt{n+1}}\approx O\left(\frac{1}{n^p}\right)\approx O\left(\frac{1}{n^{1+\frac{1}{2}}}\right)\approx O\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$$

степень p=1.5> 1 → ряд сходится

- Признак д'Аламбера для знакопостоянного ряда:

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)=q}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{1}{(n+1+1)\sqrt{n+1+1}}}{\frac{1}{(n+1)\sqrt{n+1}}}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n+1)\sqrt{n+1}}{(n+2)\sqrt{n+2}}\right)=1$$

если q=1, то признак д'Аламбера не работает

- Интегральный признак Коши:

$$\int_1^{+\infty}a_x dx=\int_1^{+\infty}\frac{d(x+1)}{(x+1)^{\frac{3}{2}}}=\int_1^{+\infty}(x+1)^{-\frac{3}{2}}d(x+1)-\frac{1}{\sqrt{x+1}}\bigg]_1^{+\infty}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$$

*Несобственный интеграл сходится → ряд сходится*

2. Исследовать сходимость ряда:

$$\frac{1000}{1!}+\frac{1000^2}{2!}+\cdots+\frac{1000^n}{n!}+\cdots=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1000^n}{n!}$$

Признак д'Аламбера для знакопостоянного ряда:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{1000^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{1000^n}{n!}}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1000}{n+1}\right)=0$$

*если q <1, то ряд сходится*

3. *Исследовать сходимость ряда:

$$\frac{2\cdot 1!}{1}+\frac{2^2\cdot 2!}{2^2}+\cdots+\frac{2^n\cdot n!}{n^n}+\cdots=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2^n\cdot n!}{n^n}$$

Признак д'Аламбера для знакопостоянного ряда:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{2^{n+1}\cdot(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{2^n\cdot n!}{n^n}}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2(n+1)n^n}{(n+1)^{n+1}}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^n}{(n+1)^n}\right)=2\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$$

$$=2\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n}=\frac{2}{e}<1$$

*если q <1, то ряд сходится*

4. *Исследовать сходимость ряда:

$$\frac{3\cdot 1!}{1}+\frac{3^2\cdot 2!}{2^2}+\cdots+\frac{3^n\cdot n!}{n^n}+\cdots=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{3^n\cdot n!}{n^n}$$

Признак д’Аламбера для знакопостоянного ряда:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{3^{n+1}\cdot(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{3^n\cdot n!}{n^n}}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3(n+1)n^n}{(n+1)^{n+1}}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n^n}{(n+1)^n}\right)=3\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$$

$$=3\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n}=\frac{3}{e}>1$$

*если q >1, то ряд расходится*

5. *Исследовать сходимость ряда:

$$-\frac{\sqrt{1}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{3}+\cdots+\frac{(-1)^n\cdot\sqrt{n}}{n+1}+\cdots=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n\cdot\sqrt{n}}{n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=0\Rightarrow \text{знакопеременный ряд сходится}$$

- Второй признак сравнения:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sqrt{n}}{n+1}\approx O\left(\frac{1}{n^p}\right)\approx O\left(\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}\right)$$

степень p=0.5 < 1 → знакопостоянный ряд расходится → знакопеременный ряд сходится условно