1. Найти частные производные первого и второго порядка. Убедиться в равенстве смешанных производных.

$$U = x^3 + 3xy^2 + z^2 - 39x - 36y + 2z + 26$$

$U'_x = 3x^2 + 3y^2 - 39$
$U'_y = 6xy - 36$
$U'_z = 2z + 2$

$U''_{xx} = 6x$
$U'_{yy} = 6x$
$U'_{zz} = 2$

$U''_{yx} = 6y$
$U''_{xy} = 6y$
$U''_{zx} = 0$
$U''_{xz} = 0$
$U''_{yz} = 0$
$U''_{zy} = 0$

2. Найти частные производные первого и второго порядка. Убедиться в равенстве смешанных производных.

$$U = \frac{256}{x} + \frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{z} + z^2 = 256x^{-1} + x^2 \cdot y^{-1} + y^2 \cdot z^{-1} + z^2$$

$U'_x = -256x^{-2} + 2x \cdot y^{-1}$
$U'_y = -x^2 \cdot y^{-2} + 2y \cdot z^{-1}$
$U'_z = -y^2 \cdot z^{-2} + 2z$

$U''_{xx} = \dfrac{512}{x^3} + \dfrac{2}{y}$

$U'_{yy} = \dfrac{2x^2}{y^3} + \dfrac{2}{z}$

$U'_{zz} = \dfrac{2y^2}{z^3} + 2$

$U''_{yx} = -\dfrac{2x}{y^2}$

$U''_{xy} = -\dfrac{2x}{y^2}$

$U''_{yz} = -\dfrac{2y}{z^2}$

$U''_{zy} = -\dfrac{2y}{z^2}$

$U''_{zx} = 0$
$U''_{xz} = 0$

3. Найти производную функции $U = x^2 + y^2 + z^2$ по направлению вектора $\vec{c}(-9, 8, -12)$ в точке $M(8, -12, 9)$

$$U'_{\vec{a}} = (\vec{a}_0 \cdot \mathrm{grad}U)$$

$$\mathrm{grad}U = (U'_x, U'_y, U'_z)$$

$U'_x = 2x$
$U'_y = 2y$
$U'_z = 2z$

Найдем длину вектора:
$|\vec{c}| = \sqrt{(-9)^2 + (\ 8)^2 + (12)^2} = 17$
Единичный вектор:
$\vec{c_0} = \frac{\vec{c}}{|\vec{c}|} = (-\frac{9}{17}, \frac{8}{17}, -\frac{12}{17})$
Градиент в точке:
$gradU = (16, -24, 18)$
Производная по направлению:
$U'_{\vec{c}} = -\frac{9 \cdot 16}{17} + \frac{8 \cdot (-24)}{17} - \frac{12 \cdot 18}{17} = \frac{-144 - 192 - 216}{17} = -\frac{552}{17}$

4. Найти производную функции $U = e^{x^2+y^2+z^2}$ по направлению вектора $\vec{c}(4, -13, -16)$ в точке $M(-16, 4, -13)$

$U'_x = 2xe^{x^2+y^2+z^2}$

$U'_y = 2ye^{x^2+y^2+z^2}$

$U'_z = 2ze^{x^2+y^2+z^2}$

Найдем длину вектора:

$|\vec{c}| = \sqrt{4^2 + (\ -13)^2 + (-16)^2} = 21$

Единичный вектор:

$\vec{c_0} = \frac{\vec{c}}{|\vec{c}|} = (\frac{4}{21}, -\frac{13}{21}, -\frac{16}{21})$

Градиент в точке:

$gradU = (-32e^{441}, 8e^{441}, -26e^{441})$

Производная по направлению:

$U'_{\vec{c}} == \frac{4 \cdot (-32) - 13 \cdot 8 + (-16) \cdot (-26))e^{441}}{21} = \frac{184}{21} e^{441}$

5. * Найти производную функции $U = \log_{21}(x^2 + y^2 + z^2)$ по самому быстрому направлению в точке $F(-19, 8, -4)$

$$U'_{\mathrm{grad}U} = (\mathrm{grad}U_0 \cdot \mathrm{grad}U)$$

$$U'_x = \frac{2x}{(x^2+y^2+z^2)\cdot ln21}$$

$$U'_y = \frac{2y}{(x^2+y^2+z^2)\cdot ln21}$$

$$U'_z = \frac{2z}{(x^2+y^2+z^2)\cdot ln21}$$

Градиент в точке:

$$gradU = (-\frac{38}{441ln21}, \frac{16}{441ln21}, -\frac{8}{441ln21})$$

$$|gradU| = \sqrt{\left(-\frac{38}{441ln21}\right)^2 + \left(\frac{16}{441ln21}\right)^2 + \left(-\frac{8}{441ln21}\right)^2} = \frac{42}{441ln21}$$

$$grad_0 U = \frac{gradU}{|gradU|} = (-\frac{38}{42}, \frac{16}{42}, -\frac{8}{42})$$

$$U'_{gradU} = -\frac{38}{441ln21}\cdot\left(-\frac{38}{42}\right) + \frac{16}{441ln21}\cdot\left(\frac{16}{42}\right) - \frac{8}{441ln21}\cdot\left(-\frac{8}{42}\right) = \frac{38^2+16^2+8^2}{42\cdot 441ln21} = \frac{2}{21ln21}$$

6. Исследовать на экстремум функцию:

$$U = x^2y + \frac{1}{3}y^3 + 2x^2 + 3y^2 - 1$$

$U'_x = 2xy + 4x$
$U'_y = x^2 + y^2 + 6y$
Стационарные точки$(0,0)$, $(0,-6)$, $(2\sqrt{2},-2)$, $(-2\sqrt{2},-2)$

$U''_{xx} = 2y + 4$
$U'_{yy} = 2y + 6$
$U''_{yx} = 2x$
$U''_{xy} = 2x$
матрица Гёссе:

$$\begin{pmatrix} 2y+4 & 2x \\ 2x & 2y+6 \end{pmatrix}$$

$\Delta_1 = 2y + 4$
$\Delta_2 = (2y+4)(2y+6) - 4x^2$
Для точки (0,0) $\Delta_1 > 0$ $\Delta_2 > 0$
Если все миноры положительные, то найденная стационарная точка является точкой ***минимума***

Для точки (0, -6) $\Delta_1 < 0$ $\Delta_2 > 0$
Если первый минор отрицательный, а все остальные чередуют знак, то найденная точка является точкой ***максимума.***

$$\begin{pmatrix} U''_{yy} & U''_{yx} \\ U''_{xy} & U''_{xx} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2y+6 & 2x \\ 2x & 2y+4 \end{pmatrix}$$

$$\Delta_1 = U''_{yy} = 2y + 6 = 2 \cdot (-2) + 6 = 2 > 0$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} U''_{yy} & U''_{yx} \\ U''_{xy} & U''_{xx} \end{vmatrix} = U''_{xx} \cdot U''_{yy} - (U''_{xy})^2 = 4y^2 + 20y + 24 - 4x^2 =$$

$$= 4 \cdot 4 + 20 \cdot (-2) + 24 - 4 \cdot 8 = 40 - 40 - 32 < 0$$

Точки
$(2\sqrt{2}, -2)$, $(-2\sqrt{2}, -2)$-седловые

7. *Исследовать на экстремум функцию:

$$U = e^{-\frac{x}{2}} \cdot (x^2 + y^2)$$

$U'_x = 2xe^{-\frac{x}{2}} - \frac{(x^2+y^2)}{2} e^{-\frac{x}{2}}$
$U'_y = 2ye^{-\frac{x}{2}}$
Стационарные точки: (0, 0) (4, 0)
$U''_{xx} = (2 - 2x + \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4})e^{-\frac{x}{2}}$
$U'_{yy} = 2e^{-\frac{x}{2}}$

$U''_{yx} = -ye^{-\frac{x}{2}}$
$U''_{xy} = -ye^{-\frac{x}{2}}$

матрица Гёссе:

$$\begin{pmatrix} (2 - 2x + \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4})e^{-\frac{x}{2}} & -ye^{-\frac{x}{2}} \\ -ye^{-\frac{x}{2}} & 2e^{-\frac{x}{2}} \end{pmatrix}$$

$\Delta_1 = (2 - 2x + \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4})e^{-\frac{x}{2}}$
$\Delta_2 = 2\left(2 - 2x + \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4}\right)\left(e^{-\frac{x}{2}}\right)^2 - \left(-ye^{-\frac{x}{2}}\right)^2$

Для точки (0,0) $\Delta_1 > 0$ $\Delta_2 > 0$
Если все миноры положительные, то найденная стационарная точка является точкой ***минимума***

Для точки (4, 0) $\Delta_1 < 0$ $\Delta_2 < 0$
Если первый минор и второй отрицательные, то найденная точка является точкой ***седловой.***