1. Вычислить неопределенный интеграл:

$$\int \frac{2x+3}{(x-2)(x+5)}dx$$

$$\frac{2x+3}{(x-2)(x+5)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+5} = \frac{A(x+5)+B(x-2)}{(x-2)(x+5)} = \frac{Ax+5A+Bx-2B}{(x-2)(x+5)} = \frac{x(A+B)+(5A-2B)}{(x-2)(x+5)}$$

$$\begin{cases} A+B=2 \\ 5A-2B=3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A=2-B \\ 10-7B=3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A=1 \\ B=1 \end{cases}$$

$$\int \frac{2x+3}{(x-2)(x+5)}dx = \int \frac{dx}{(x-2)} + \int \frac{dx}{(x+5)} = ln|x-2| + ln|x+5| + C = ln|x^2+3x+10| + C$$

2. Вычислить неопределенный интеграл:

$$\int e^{2x} \cdot cos3x\, dx$$

$$U = e^{2x} \Rightarrow\ dU = 2e^{2x}$$

$$dV = cos3xdx \Rightarrow V = \frac{1}{3}sin3x$$

$$\int e^{2x} \cdot cos3x\, dx = \frac{e^{2x}}{3}sin3x - \int \frac{sin3x}{3}2e^{2x}dx = \frac{e^{2x}sin3x}{3} - \frac{2}{3}\int sin3x \cdot e^{2x}dx$$

$$U = e^{2x} \Rightarrow\ dU = 2e^{2x}$$

$$dV = sin3xdx \Rightarrow V = -\frac{1}{3}cos3x$$

$$\int sin3x \cdot e^{2x} = -\frac{e^{2x}cos3x}{3} + \frac{2}{3}\int cos3x \cdot e^{2x}\, dx$$

$$\int e^{2x} \cdot cos3x\, dx = \frac{e^{2x}sin3x}{3} - \frac{2}{3}\left(-\frac{e^{2x}cos3x}{3} + \frac{2}{3}\int cos3x \cdot e^{2x}\, dx\right)$$

$$= \frac{e^{2x}sin3x}{3} + \frac{2e^{2x}cos3x}{9} - \frac{4}{9}\int cos3x \cdot e^{2x}\, dx \Rightarrow$$

$$\frac{13}{9}\int e^{2x} \cdot cos3x\, dx = \frac{e^{2x}sin3x}{3} + \frac{2e^{2x}cos3x}{9} \Rightarrow \int e^{2x} \cdot cos3x\, dx = \frac{e^{2x}(3sin3x + 2cos3x)}{13} + C$$

3. Вычислить определенный интеграл:

$$\int_0^{ln2} xe^{-x}dx$$

$$U = x \Rightarrow\ dU = dx$$

$$dV = e^{-x}dx \Rightarrow V = -e^{-x}$$

$$\int_0^{ln2} xe^{-x}dx = -ex^{-x}]_0^{ln2} - \int_0^{ln2} -e^{-x}dx = -xe^{-x}]_0^{ln2} + e^{-x}]_0^{ln2} = -ln2 \cdot e^{-ln2} + e^{-ln2} = \frac{1-ln2}{2}$$

4. Вычислить несобственный интеграл:

$$\int_{2}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + x - 2}$$

$$\frac{1}{x^2 + x - 2} = \frac{1}{(x+2)(x-1)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-1} = \frac{x(A+B) + (2B - A)}{(x+2)(x-1)} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ 2B - A = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A = -B \\ 3B = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A = -\dfrac{1}{3} \\ B = \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

$$\lim_{b \to +\infty} \int_{2}^{b} \frac{dx}{x^2 + x - 2} = \lim_{b \to +\infty} \int_{2}^{b} -\frac{1}{3} \frac{dx}{(x+2)} + \lim_{b \to +\infty} \int_{2}^{b} \frac{1}{3} \frac{dx}{(x-1)} = \lim_{b \to +\infty} \frac{1}{3} ln \frac{x-1}{x+2} \Big]_{2}^{b} = 0 - \frac{1}{3} \ln\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{ln4}{3}$$

5. *Вычислить несобственный интеграл:

$$\int_{0}^{1} lnx\, dx$$

$$U = lnx \Rightarrow dU = \frac{1}{x} dx$$

$$dV = 1dx \Rightarrow V = x$$

$$\lim_{a \to 0} \int_{a}^{1} lnx\, dx = \lim_{a \to 0} xlnx \,\Big|_{a}^{1} - \lim_{a \to 0} \int_{a}^{1} dx = \lim_{a \to 0} xlnx \,\Big|_{a}^{1} - \lim_{a \to 0} x \,\Big|_{a}^{1}$$

Применим правило Лопиталя:

$$\lim_{x \to 0} xlnx = \lim_{x \to 0} \frac{lnx}{\frac{1}{x}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x \to 0} \frac{f'x}{g'x} = \lim_{x \to 0} \left(-\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}} \right) = \lim_{x \to 0} (-x) = 0$$

$$\lim_{a \to 0} xlnx \,\Big|_{a}^{1} - \lim_{a \to 0} x \,\Big|_{a}^{1} = ln1 - 1 = -1$$