1. Исследовать функцию на условный экстремум

   $U = 3 - 8x + 6y$

   Если $x^2 + y^2 = 36$

$$L(x, y, \lambda) = 3 - 8x + 6y + \lambda(x^2 + y^2 - 36)$$

Найдем частные производные, приравняем их к нулю и решим систему уравнений:

$$\begin{cases} L'_x = -8 + 2\lambda x = 0 \\ L'_y = 6 + 2\lambda y = 0 \\ L'_y = x^2 + y^2 - 36 = 0 \end{cases}$$

Решением системы уравнений являются точки: $(-\frac{24}{5}, \frac{18}{5}, -\frac{5}{6})$ и $(\frac{24}{5}, -\frac{18}{5}, \frac{5}{6})$

Найдем вторые производные:

$L''_{xx} = 2\lambda$

$L''_{yy} = 2\lambda$

$L''_{\lambda\lambda} = 0$

$L''_{xy} = L''_{yx} = 0$

$L''_{x\lambda} = L''_{\lambda x} = 2x$

$L''_{y\lambda} = L''_{\lambda y} = 2y$

Составим матрицу Гёссе:

$$\begin{pmatrix} L''_{\lambda\lambda} & L''_{\lambda x} & L''_{\lambda y} \\ L''_{x\lambda} & L''_{xx} & L''_{xy} \\ L''_{y\lambda} & L''_{yx} & L''_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2x & 2y \\ 2x & 2\lambda & 0 \\ 2y & 0 & 2\lambda \end{pmatrix}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 2x & 2y \\ 2x & 2\lambda & 0 \\ 2y & 0 & 2\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix} = 0 - 2x \begin{vmatrix} 2x & 0 \\ 2y & 2\lambda \end{vmatrix} + 2y \begin{vmatrix} 2x & 2\lambda \\ 2y & 0 \end{vmatrix} = -8\lambda(x2 + y2) = -200\lambda$$

При $\lambda = -\frac{5}{6}$ $\Delta>0$, следовательно $(-\frac{24}{5}, \frac{18}{5}, -\frac{5}{6})$ - точка максимума.

При $\lambda = \frac{5}{6}$ $\Delta<0$, следовательно $(\frac{24}{5}, -\frac{18}{5}, \frac{5}{6})$ - точка минимума.

2. Исследовать функцию на условный экстремум

   $U = 2x^2 + 12xy + 32y^2 + 15$

   Если $x^2 + 16y^2 = 64$

$$L(x, y, \lambda) = 2x^2 + 12xy + 32y^2 + 15 + \lambda(x^2 + 16y^2 - 64)$$

Найдем частные производные, приравняем их к нулю и решим систему уравнений:

$$\begin{cases} L'_x = 4x + 12y + 2\lambda x = 0 \\ L'_y = 12x + 64y + 32\lambda y = 0 \\ L'_y = x^2 + 16y^2 - 64 = 0 \end{cases}$$

Решением системы уравнений являются точки: $(-4\sqrt{2}, -\sqrt{2}, -\frac{7}{2})$, $(-4\sqrt{2}, \sqrt{2}, -\frac{1}{2})$, $(4\sqrt{2}, -\sqrt{2}, -\frac{1}{2})$, $(4\sqrt{2}, \sqrt{2}, -\frac{7}{2})$ Онлайн калькулятор выдал.

Найдем вторые производные:

$$L''_{xx} = 4 + 2\lambda$$

$$L''_{yy} = 64 + 32\lambda$$

$$L''_{\lambda\lambda} = 0$$

$$L''_{xy} = L''_{yx} = 12$$

$$L''_{x\lambda} = L''_{\lambda x} = 2x$$

$$L''_{y\lambda} = L''_{\lambda y} = 32y$$

Составим матрицу Гёссе:

$$\begin{pmatrix} L''_{\lambda\lambda} & L''_{\lambda x} & L''_{\lambda y} \\ L''_{x\lambda} & L''_{xx} & L''_{xy} \\ L''_{y\lambda} & L''_{yx} & L''_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2x & 32y \\ 2x & 4+2\lambda & 12 \\ 32y & 12 & 64+32\lambda \end{pmatrix}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 2x & 2y \\ 2x & 2\lambda & 0 \\ 2y & 0 & 2\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix} = 0 - 2x \begin{vmatrix} 2x & 12 \\ 32y & 64+32\lambda \end{vmatrix} + 32y \begin{vmatrix} 2x & 4+2\lambda \\ 32y & 12 \end{vmatrix} =$$

$$= -128x^2\lambda - 256x^2 + 1536xy - 2048y^2\lambda - 4096y^2$$

$$= -128\lambda(x^2 + 16y^2) - 256(x^2 + 16y^2) + 1536xy = -8192\lambda + 1536xy - 16\,384$$

Для точек $(-4\sqrt{2}, -\sqrt{2}, -\frac{7}{2})$ *и* $(4\sqrt{2}, \sqrt{2}, -\frac{7}{2})$ *Δ>0, т.е. это точки максимума.*

Для точек $(-4\sqrt{2}, \sqrt{2}, -\frac{1}{2})$, $(4\sqrt{2}, -\sqrt{2}, -\frac{1}{2})$, *Δ<0, т.е. это точки минимума.*