1. Решить систему уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = -2 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 4 \end{cases}$$

Согласно теореме Кронекера — Капелли, система неопределенная - имеет бесконечное количество решений (n > (rankA=rankÃ))

Составим расширенную матрицу и приведем к верхнетреугольному виду:

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -3 & 1 & 4 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 5 & -2 \\ 1 & 1 & -3 & 1 & 4 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & 4 \end{array}\right)$$

Полученная матрица соответствует системе:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = 0 \\ -x_2 + x_3 + 5x_4 = -2 \\ -2x_3 + 3x_4 = 4 \end{cases}$$

Возьмем в качестве свободного параметра $x_4 = \text{c}$, тогда:

$$x_1 = \frac{3\text{c} - 4 + 4\text{c} - 13\text{c}}{2} = \frac{-6\text{c} - 4}{2}$$
$$x_2 = \frac{3\text{c} - 4 + 10\text{c} + 4}{2} = \frac{13\text{c}}{2}$$
$$x_3 = \frac{3\text{c} - 4}{2}$$

Проверим частное решение при $x_4 = \text{c} = 0$:

$$x_1 = -2$$
$$x_2 = 0$$
$$x_3 = -2$$

Получаем тождества

$$\begin{cases} -2 + 0 - (-2) -= 0 \\ 2(-2) - (-2) = -2 \\ -2 - 3(-2) = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ -2 = -2 \\ 4 = 4 \end{cases}$$

2. Проверить на совместность и выяснить, сколько решений будет иметь система линейных уравнений:

   *Согласно теореме **Кронекера — Капелли**, необходимым и достаточным условием совместности системы из m уравнений с n неизвестными является равенство между собой рангов матрицы коэффициентов A и расширенной матрицы Ã*
   $rankA = rank\tilde{A}$ *причем:*
   1) если $rankA = rank\tilde{A} = n$*, где n — число неизвестных, то система определена, т. е. имеет единственное решение;*
   2) если $rankA = rank\tilde{A} < n$*, то система имеет бесконечное количество решений;*
   3) если $rankA < rank\tilde{A}$*, то система несовместна.*

   <u>!!! ПРОВЕРОЧНЫЕ РАСЧЕТЫ РАНГОВ МАТРИЦ В JUPYTER NB</u>
   Здесь взяты по определению (числу линейно независимых строк)

a) $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 4 \\ 2x_1 - 5x_2 - 3x_3 = -17 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$

Составим расширенную матрицу:

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 1 & 4 \\ 2 & -5 & -3 & -17 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

если $rankA = rank\tilde{A} = n = 3$, *система совместна и определена, т. е. имеет единственное решение*

b) $\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 6x_3 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -2 \\ 3x_1 - 6x_2 + 9x_3 = 0 \end{cases}$

Составим расширенную матрицу:

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & 6 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & -2 \\ 3 & -6 & 9 & 0 \end{array}\right)$$

если $(rankA = 1) < (rank\tilde{A} = 3)$ *то система несовместна.*

c) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 4 \\ \\ 3x_1 + x_2 - 8x_3 = -2 \end{cases}$

Составим расширенную матрицу:

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & 4 \\ 3 & 1 & -8 & -2 \end{array}\right)$$

d) *если* $rankA = rank\tilde{A} = 2 < (n = 3)$, *то система имеет бесконечное количество решений;*

3. Проверить на совместность и выяснить, сколько решений будет иметь система линейных уравнений, заданная расширенной матрицей

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -2 & 4 & 3 \\ 0 & 5 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

если $rankA = rank\tilde{A} = n = 4$, *система совместна и определена, т. е. имеет единственное решение*

4. Дана система линейных уравнений, заданная расширенной матрицей

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & a \\ 4 & 5 & 6 & b \\ 7 & 8 & 9 & c \end{array}\right)$$

Найти соотношение между параметрами a, b и c, при которых система является несовместной.

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & a \\ 4 & 5 & 6 & b \\ 7 & 8 & 9 & c \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & a \\ 0 & -3 & -6 & b-4a \\ 0 & -6 & -12 & c-7a \end{array}\right)$$

Система будет совместна только в случае, когда 2 и 3 строка расширенной матрицы линейно зависимы (только в этом случае выполняется условие $rankA = rank\tilde{A} = 2$), т.е.: $2(b-4a) = c - 7a \Rightarrow 2b - 8a - c + 7a = 0 \Rightarrow 2b - c - a = 0 \Rightarrow$
Таким образов системы несовместны, когда $2b - c - a \neq 0$

---

1. Решить систему уравнений методом Крамера:
Для системы с n уравнениями и n неизвестными, если система уравнений невырождена (то есть detA≠0), то система определена, то есть имеет единственное решение, и это решение может быть найдено по формулам Крамера:

$$x_i = \frac{detA_i}{detA}$$

где A_i — это матрица, получаемая заменой i -го столбца на вектор-столбец свободных членов b.

a) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 1 \\ 3x_1 - 4x_2 = 7 \end{cases}$

Составим матрицы:

$A\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}, \quad A_1\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 7 & -4 \end{pmatrix}, \quad A_2\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$

$detA = -4 + 6 = 2$
$detA_1 = -4 + 14 = 10$
$detA_2 = 7 - 3 = 4$

$x_1 = \frac{detA_1}{detA} = \frac{10}{2} = 5, x_2 = \frac{detA_2}{detA} = \frac{4}{2} = 2$

Проверка- получили тождество:

$\begin{cases} 5 - 2 \cdot 2 = 1 \\ 3 \cdot 5 - 4 \cdot 2 = 7 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 5x_3 = 10 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 = -2 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$

Составим матрицы:

$A\begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & -3 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_1\begin{pmatrix} 10 & -1 & 5 \\ -2 & 1 & -3 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2\begin{pmatrix} 2 & 10 & 5 \\ 1 & -2 & -3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_3\begin{pmatrix} 2 & -1 & 10 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

Найдем определители:

$detA = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & -3 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 \cdot 1 + (-1) \cdot (-3) \cdot 2 + 5 \cdot 1 \cdot 4 - 2 \cdot 1 \cdot 5 - 4 \cdot (-3) \cdot 2 - 1 \cdot 1 \cdot (-1) = 43$

система определена, то есть имеет единственное решение

$detA_1 = \begin{vmatrix} 10 & -1 & 5 \\ -2 & 1 & -3 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} =$
$= 10 \cdot 1 \cdot 1 + (-1) \cdot (-3) \cdot 1 + 5 \cdot (-2) \cdot 4 - 1 \cdot 1 \cdot 5 - 4 \cdot (-3) \cdot 10 - 1 \cdot (-2) \cdot (-1)$
$= 86$

$$detA_2 = \begin{vmatrix} 2 & 10 & 5 \\ 1 & -2 & -3 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-2) \cdot 1 + 10 \cdot (-3) \cdot 2 + 5 \cdot 1 \cdot 1 - 2 \cdot (-2) \cdot 5 - 1 \cdot (-3) \cdot 2 - 1 \cdot 1 \cdot 10 = -43$$

$$detA_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 10 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 \cdot 1 + (-1) \cdot (-2) \cdot 2 + 10 \cdot 1 \cdot 4 - 2 \cdot 1 \cdot 10 - 4 \cdot (-2) \cdot 2 - 1 \cdot 1 \cdot (-1) = 43$$

$$x_1 = \frac{detA_1}{detA} = \frac{86}{43} = 2, x_2 = \frac{detA_2}{detA} = -\frac{43}{43} = -1, x_3 = \frac{detA_3}{detA} = -\frac{43}{43} = 1$$

Проверка- получили тождество:

c) $\begin{cases} 2 \cdot 2 - (-1) + 5 \cdot 1 = 10 \\ 2 - 1 - 3 = -2 \\ 2 \cdot 2 + 4(-1) + 1 = 1 \end{cases}$

2. *Найти L-матрицу LU-разложения для матрицы коэффициентов:

a) $A \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 9 & 12 \\ 3 & 26 & 30 \end{pmatrix}$

Вычтем из 2й строки 1ю, умноженную на $\boxed{2}$ $\Rightarrow$ В матрицу L добавим $l_{21} = 2$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & 4 \\ 3 & 26 & 30 \end{pmatrix}$

Вычтем из 3й строки 1ю, умноженную на $\boxed{3}$ $\Rightarrow$ В матрицу L добавим $l_{31} = 3$

$U \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 20 & 18 \end{pmatrix}$

Вычтем из 3й строки 2ю, умноженную на $\boxed{4}$ $\Rightarrow$ В матрицу L добавим $l_{32} = 4$

Получаем матрицу L:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

b) A $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 8 & 9 \\ 3 & 18 & 29 & 18 \\ 4 & 22 & 53 & 33 \end{pmatrix}$

1) Вычтем из 2й строки 1ю, умноженную на $\boxed{2} \overset{1}{\Rightarrow}$ В матрицу L добавим $l_{21} = 2$
2) Вычтем из 3й строки 1ю, умноженную на $\boxed{3} \overset{2}{\Rightarrow}$ В матрицу L добавим $l_{31} = 3$
3) Вычтем из 4й строки 1ю, умноженную на $\boxed{4} \overset{3}{\Rightarrow}$ В матрицу L добавим $l_{41} = 4$
4) Вычтем из 3й строки 2ю, умноженную на $\boxed{5} \overset{4}{\Rightarrow}$ В матрицу L добавим $l_{32} = 5$
5) Вычтем из 4й строки 2ю, умноженную на $\boxed{6} \overset{5}{\Rightarrow}$ В матрицу L добавим $l_{42} = 6$
6) Вычтем из 4й строки 3ю, умноженную на $\boxed{7} \overset{6}{\Rightarrow}$ В матрицу L добавим $l_{43} = 7$

$$\begin{pmatrix}1&1&2&4\\2&5&8&9\\3&18&29&18\\4&22&53&33\end{pmatrix}\overset{1}{\Rightarrow}\begin{pmatrix}1&1&2&4\\0&3&8&1\\3&18&29&18\\4&22&53&33\end{pmatrix}\overset{2}{\Rightarrow}\begin{pmatrix}1&1&2&4\\0&3&4&1\\0&15&23&6\\4&22&53&33\end{pmatrix}\overset{3}{\Rightarrow}\begin{pmatrix}1&1&2&4\\0&3&4&1\\0&15&23&6\\0&18&45&17\end{pmatrix}\overset{4}{\Rightarrow}$$

$$\begin{pmatrix}1&1&2&4\\0&3&4&1\\0&0&3&1\\0&18&45&17\end{pmatrix}\overset{5}{\Rightarrow}\begin{pmatrix}1&1&2&4\\0&3&4&1\\0&0&3&1\\0&0&21&11\end{pmatrix}\overset{6}{\Rightarrow}\begin{pmatrix}1&1&2&4\\0&3&4&1\\0&0&3&1\\0&0&0&3\end{pmatrix}$$

Получаем матрицу L:

c) $L\begin{pmatrix}1&0&0&0\\2&1&0&0\\3&5&1&0\\4&6&7&1\end{pmatrix}$

3. * Решить систему линейных уравнений методом LU-разложения

$$\begin{cases}2x_1+x_2+3x_3=1\\11x_1+7x_2+5x_3=-6\\9x_1+8x_2+4x_3=-5\end{cases}$$

Составим матрицу коэффициентов:

$$A\begin{pmatrix}2&1&3\\11&7&5\\9&8&4\end{pmatrix}$$

1) Вычтем из 2й строки 1ю, умноженную на $\boxed{5{,}5}\overset{1}{\Rightarrow}$ В матрицу L добавим $l_{21}=5{,}5$
2) Вычтем из 3й строки 1ю, умноженную на $\boxed{4{,}5}\overset{2}{\Rightarrow}$ В матрицу L добавим $l_{31}=4{,}5$
3) Вычтем из 3й строки 2 ю, умноженную на $\boxed{\frac{7}{3}}\overset{3}{\Rightarrow}$ В матрицу L добавим $l_{32}=\frac{7}{3}$

$$\begin{pmatrix}2&1&3\\11&7&5\\9&8&4\end{pmatrix}\overset{1}{\Rightarrow}\begin{pmatrix}2&1&3\\0&1{,}5&-11{,}5\\9&8&4\end{pmatrix}\overset{2}{\Rightarrow}\begin{pmatrix}2&1&3\\0&1{,}5&-11{,}5\\0&3{,}5&-9{,}5\end{pmatrix}\overset{3}{\Rightarrow}U\begin{pmatrix}2&1&3\\0&1{,}5&-11{,}5\\0&0&\frac{52}{3}\end{pmatrix}$$

$$L\begin{pmatrix}1&0&0\\5.5&1&0\\4.5&\frac{7}{3}&1\end{pmatrix}$$

Решим систему: $Ly=b$

$$\begin{cases}y_1=1\\5.5y_1+y_2=-6\\4.5y_1+\frac{7}{3}y_2+y_3=-5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y_1=1\\y_2=-11.5\\y_3=-9.5+\frac{7}{3}\cdot\frac{23}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y_1=1\\y_2=-11.5\\y_3=\frac{52}{3}\end{cases}$$

Решим систему: $Ux=y$

$$\begin{cases}2x_1+x_2+3x_3=1\\1.5x_2-11.5x_3=-11.5\\\frac{52}{3}x_3=\frac{52}{3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=-1\\x_2=0\\x_3=1\end{cases}$$

Проверка исходной системы: получаем тождество

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 1 \\ 11x_1 + 7x_2 + 5x_3 = -6 \\ 9x_1 + 8x_2 + 4x_3 = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2(-1) + 3 \cdot 1 = 1 \\ 11(-1) + 5 = -6 \\ 9(-1) + 4 \cdot 1 = -5 \end{cases}$$

4. *Решить систему методом Холецкого:

$$\begin{cases} 81x_1 - 45x_2 + 45x_3 = 531 \\ -45x_1 + 50x_2 - 15x_3 = -460 \\ 45x_1 - 15x_2 + 38x_3 = 193 \end{cases}$$

Составим матрицу коэффициентов:

$$A\begin{pmatrix} 81 & -45 & 45 \\ -45 & 50 & -15 \\ 45 & -15 & 38 \end{pmatrix}$$

Произведем разложение на LL^T :

$$l_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}^2},$$

$$l_{ij} = \frac{1}{l_{jj}}\left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} l_{jk}\right),\ j < i.$$

$$l_{11} = \sqrt{a_{11}} = 9$$

$$l_{21} = \frac{a_{21}}{l_{11}} = -5$$

$$l_{31} = \frac{a_{31}}{l_{11}} = 5$$

$$l_{22} = \sqrt{a_{22} - l_{21}^2} = \sqrt{50 - 25} = 5$$

$$l_{32} = \frac{a_{32} - l_{31} - l_{21}}{l_{22}} = \frac{-15 + 25}{5} = 2$$

$$l_{33} = \sqrt{a_{33} - l_{31}^2 - l_{32}^2} = \sqrt{38 - 25 - 4} = 3$$

Получаем матрицы:

$$L\begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ -5 & 5 & 0 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad L^T\begin{pmatrix} 9 & -5 & 5 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Решим систему $Ly = b$:

$$\begin{cases} 9y_1 = 531 \\ -5y_1 + 5y_2 = -460 \\ 5y_1 + 2y_2 + 3y_3 = 193 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = 59 \\ (-5) \cdot 59 + 5y_2 = -460 \\ 5 \cdot 59 + 2y_2 + 3y_3 = 193 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = 59 \\ y_2 = -33 \\ 5 \cdot 59 + 2(-33) + 3y_3 = 193 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} y_1 = 59 \\ y_2 = -33 \\ y_3 = -12 \end{cases}$$

Решим систему $L^T x = y$:

$$\begin{cases} 9x_1 - 5x_2 + 5x_3 = 59 \\ 5x_2 + 2x_3 = -33 \\ 3x_3 = -12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_3 = -4 \\ 5x_2 - 8 = -33 \\ 9x_1 - 5(-5) + 5(-4) = 59 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 6 \\ x_2 = -5 \\ x_3 = -4 \end{cases}$$

Проверка исходного выражения:

$$\begin{cases} 81 \cdot 6 - 45 \cdot (-5) + 45 \cdot (-4) = 531 \\ -45 \cdot 6 + 50 \cdot (-5) - 15 \cdot (-4) = -460 \\ 45 \cdot 6 - 15 \cdot (-5) + 38 \cdot (-4) = 193 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 531 = 531 \\ -460 = 460 \\ 193 = 193 \end{cases}$$

Получили тождество