1. **Найти предел последовательности:**
не стал подробно раскрывать скобки, оставил n только в максимальной степени

$$\text{а)}\quad \lim_{n\to\infty} \frac{(23-2n^2)(3n^2+17)^2}{4n^6+n-1} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \frac{-18n^6}{4n^6} = -\frac{18}{4} = -\frac{9}{2}$$

$$\text{б)}\quad \lim_{n\to\infty} \frac{(97-2n)^3}{2n(3n^2+15)+8n} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \frac{-8n^3}{6n^3} = -\frac{8}{6} = -\frac{4}{3}$$

$$\text{в)}\quad \lim_{n\to\infty} \frac{2n^3+13n(n+18)}{(27-n)(2n+19)^2} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \frac{2n^3}{-4n^3} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$\text{г)}\quad \lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+1}-n) = (\infty-\infty) = \lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+1}-n)\frac{\sqrt{n^2+1}+n}{\sqrt{n^2+1}+n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n} = 0$$

$$\text{д)}\quad \lim_{n\to\infty} \frac{(-4)^n+5\cdot 7^n}{(-4)^{n-1}+7^{n+2}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \frac{(7^n)\frac{(-4)^n}{(7^n)}+5}{-\frac{1}{4}(7^n)\frac{(-4)^n}{(7^n)}+49} = \frac{5}{49}$$

2. **Представьте 1 в виде суммы трех рациональных дробей с разными знаменателями и числителем равным 1.**

1/2 + 1/3 + 1/6

3. *** Тоже задание, только в виде суммы шести дробей.**

1/2 + 1/4 + 1/6 + 1/24 +1/36 +1/72
* Пробовал алгоритмом, но без повторений не получилось

4. **Пользуясь критерием Коши, докажите сходимость последовательности:**

$$a_n = \frac{\sin 1}{2} + \frac{\sin 2}{2^2} + \frac{\sin 3}{2^3} + .. \frac{\sin n}{2^n} \quad \Rightarrow$$

$$\left\{a_n\right\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\frac{\sin 1}{2}, \frac{\sin 1}{2} + \frac{\sin 2}{2^2}, \ldots, a_n, \ldots\right\}$$

Критерий сходимости Коши

Для любого $\varepsilon > 0$ существует номер $N(\varepsilon)$, такой что, для любого $n > N(\varepsilon)$ и любого $k \geq 1$ верно неравенство $|a_n - a_{n+k}| < \varepsilon$.

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N(\varepsilon), \ \ \forall n > N(\varepsilon) \ \ \forall k \geq 1 : |a_n - a_{n+k}| < \varepsilon$$

$$|a_n - a_{n+k}| = \left|\frac{sin1}{2} + \frac{sin2}{2^2} + \dots + \frac{\sin n}{2^n} + \dots + \frac{\sin(n+k)}{2^{n+k}} - \left(\frac{sin1}{2} + \frac{sin2}{2^2} + \dots + \frac{\sin n}{2^n}\right)\right| =$$

$$= \left|\frac{\sin(n+1)}{2^{n+1}} + \frac{\sin(n+2)}{2^{n+2}} + \dots + \frac{\sin(n+k)}{2^{n+k}}\right| \le$$

$$\le \left|\frac{\sin(n+1)}{2^{n+1}}\right| + \left|\frac{\sin(n+2)}{2^{n+2}}\right| + \dots + \left|\frac{\sin(n+k)}{2^{n+k}}\right| \le$$

$$\le \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+2}} + \dots + \frac{1}{2^{n+k}} + \dots = \frac{\frac{1}{2^{n+1}}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{2}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^n} < \varepsilon$$

Таким образом, для любого $\forall\epsilon>0$ существует N, а значит рассматриваемая последовательность является фундаментальной, а тогда по критерию Коши она является сходящейся.

*Какой член последовательности можно взять в качестве предела с точностью $\varepsilon=10^{-7}$?

$N(\varepsilon) = -log_2\varepsilon + 1$

В [57]:
```
import math
eps = 10**(-7)
N = -math.log(eps,2)
n = int(N+1)
print (n)
```
executed in 10ms, finished 13:43:51 2021-02-22

```
24
```

5*. Пользуясь критерием Коши, докажите расходимость последовательности:

$$b_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots \frac{1}{n} \quad \Rightarrow$$

$$\left\{b_n\right\}_{n=1}^{\infty} = \left\{1, 1 + \frac{1}{2}, 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}, \dots, b_n, \dots\right\}$$

Эталонный ряд.

Критерий расходимости:

$$\exists\varepsilon > 0 \;\; \forall N(\varepsilon), \;\; \exists n > N(\varepsilon) \;\; \exists k \ge 1 : |a_n - a_{n+k}| \ge \varepsilon$$

$$|a_n - a_{n+k}| \left|\left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{n+p}\right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right)\right| = \left|\frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{n+p}\right| >$$

$$> \left|\frac{1}{n+p} + \dots + \frac{1}{n+p}\right| = \frac{p}{n+p}$$

Пусть p=n, тогда $\frac{p}{n+p} = \frac{n}{n+n} = 1/2$. Таким образом для $\varepsilon_0 = 1/2$, и произвольного номера N найдены натуральные числа n=N+1> N и p=n, для которых

$$\sum_{n=k}^{n+p} \frac{1}{n} > \frac{1}{2} = \varepsilon_0$$