Astrofísica Extragaláctica
Lista 4 – Aglomerados de Galáxias

Henrique Sarti Pires
Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR)

Curitiba - 2022

Parte A

1. Determinação de massa. Descreva três métodos de determinação de massa de aglomerados
   - Teorema do virial: Neste é possível estimar a massa do aglomerado através da medida da dispersão de velocidades de suas galáxias constituintes. Galáxias se movem mais rápido quanto maior for a massa que gera o potencial no qual elas vivem, de modo que espera-se que quanto maior a dispersão de velocidades, maior a massa do sistema. Ou seja, um sistema em equilíbrio, as energias cinética e potencial se relacionam.
   - Emissão de raios-X: Basicamente neste método envolve-se a temperatura, necessária para que o gás esteja em equilíbrio com o potencial gravitacional do aglomerado. Então determinando-se a temperatura do gás, pode-se obter uma estimativa da massa do aglomerado, através do equilíbrio hidrostático entre o gás e o material restante(Assim mostra uma evidência da matéria escura)Em geral, o gás intra-aglomerado contribui em 15% para a massa total do aglomerado.
   - Lentes gravitacionais:O efeito de lentes gravitacionais ocorrem em diferentes escalas (lentes podem ser estrelas, galáxias, aglomerados, estrutura em grande escala) e diferentes intensidades (lenteamento forte e lenteamento fraco). Como a luz percorre diferentes trajetórias, além das imagens serem distorcidas, elas podem ser múltiplas. As imagens que sofrem o lenteamento gravitacional também podem ser altamente magnificadas pelo efeito, o que nos permite estudar galáxias muito distantes, as quais não seria detectadas de outra forma. Ou seja, os aglomerados de galáxias funcionam como gigantescos telescópios gravitacionais.

2. SZ. Explique o que é o efeito Sunyaev-Zeldovich.

   É o resultado de elétrons de alta energia que distorcem a radiação cósmica de fundo em micro-ondas através de espalhamento Compton inverso, em que os fótons de baixa energia da radiação de fundo recebem um aumento médio de energia durante a colisão com os elétrons de aglomerados de alta energia.
   Distorções observadas do espectro de fundo de micro ondas cósmico são usadas para detectar as perturbações de densidade do universo.

Parte B

3. Equação de Poisson. Mostre que o perfil de densidade de Hernquist decorre do potencial gravitacional $\Phi(r) = -\frac{G,}{r+a}$ Aqui pode-se usar a Lei de Gauss na forma de diferencial, para obter a equação de Poisson para a gravidade

$$\bigtriangledown g = -4\pi G\rho$$

Reescrevendo na forma que o campo gravitacional é conservado:

$$\text{g} = \text{-} \bigtriangledown\phi$$

Substituindo na Lei de Gauss

$$\bigtriangledown(\bigtriangledown\phi) = -4\pi G\rho$$
$$\bigtriangledown^2\phi = 4\pi G\rho$$

Considerando que a densidade de massa é zero, a equação de Poisson pode ser reduzida para equação de Laplace.

$$\rho(r) = \frac{M}{2\pi}\frac{a}{r}\frac{1}{(r+a)^3}$$

Integrando, obtemos

$$\Phi(r) = \frac{-GM}{r+a}$$

4. Perfil NFW.

   (a) Calcule analiticamente a massa cumulativa M(r) do perfil NFW

   $$\rho(r) = \frac{\rho_0}{\frac{r}{R_s}\left(1 + \frac{r}{R_s}\right)^2}$$

   Lembrando que:

   $$\text{dm} = \rho(r)dV$$

   Como consideramos que é uma esfera, sabemos que $A_t = 4\pi r^2$, com os limites

   $$\text{M}{=}\int_0^{R_{max}} 4\pi r^2\rho(r)\,dr = 4\pi\rho_0 R_s^3\left[\ln\left(\frac{R_s+R_{max}}{R_s}\right) + \frac{R_s}{R_s+R_{max}} - 1\right]$$

   O raio da escala de vial

   $$\text{R}_{vir} = cR_s$$
   $$\text{M} = \int_0^{R_{vir}} 4\pi r^2\rho(r)\,dr \to 4\pi\rho_0 R_s^3\left[\ln(1+c) - \frac{c}{1+c}\right].$$

   (b) Avaliando M(r) em r_200, mostre que o parâmetro s fica determinado pela concentração $c = \frac{r_{200}}{r_s}$:

$$\rho_s = \frac{200}{3}\rho_{crit}\frac{c^3}{[ln(1+c) - \frac{c}{1+c}]}$$

$$\mathrm{M}(\mathrm{r}_{200}) = 4\pi\rho_0 \frac{r_{200}}{c}^3 [\ln(1+c) - \frac{c}{1+c}].$$

Temos que,

$$\mathrm{r}_s = \frac{r_{200}}{c}$$

Ou seja,

$$\mathrm{c} = \mathrm{r}_{200}\frac{}{r}$$

5. Relação entre Hernquist e NFW O comprimento de escala de Hernquist (a_h) e o comprimento de escala de NFW (rs) estão conectados pela concentração $c = \frac{r_{200}}{r_s}$. Exigindo que os dois perfis coincidam para raios pequenos, demonstre a relação aproximada.

$$\rho_{NFW} = \frac{200}{3}\rho_0 c^3 \frac{1}{(\frac{r}{r_s}r + \frac{r}{r_s})^2}$$

Supondo que $r << r_s$ então $\frac{1}{\frac{r}{r_s}.(1\frac{r}{r_s})^2} \approx \frac{1}{\frac{r}{r_s}} \approx \frac{rs}{r}$
Substituindo na formula o valor aproximado temos que:

$$\rho_{NFW} = \frac{200}{3}\rho_{crit}\cdot\frac{c^3}{(ln(1+c) - \frac{c}{1+c})}\frac{1}{\frac{r}{r_s}}$$

Agora pegando:

$$p_r = \frac{M_h}{2\pi}\cdot\frac{a}{r(r+a)^3} \to \frac{a}{(r+a)^3} \to \frac{1}{ra^2}\cdot\frac{1}{(1+\frac{r}{a})^3}$$
para r«a $\frac{1}{ra^2}$

Sabendo que $M_h = M_{200} = \frac{80\pi}{3} r_{200}^3 \rho_{crit}$
Colocando na formula $p_r = \frac{4000\pi}{3} r_{200}^3 \rho_{crit} \frac{a_h}{r} \cdot \frac{1}{(r+a)^3}$

Então $p_c r << a$

$$\frac{a_h}{r}\cdot\frac{1}{(r+a)^3} = \frac{1}{r_0^2 \cdot (1+\frac{r}{r_a})^3} = \frac{1}{r_a^2}$$
$$\to \rho_h = \frac{4000\pi}{3} r^3 \rho_{crit} \frac{1}{ra^2}$$

Comparando os dois perfis obtemos então:

$$\frac{a}{r_s} = \sqrt{2ln(1+c) - \frac{c}{1+C}}$$

6. Equilíbrio hidrostático. Considerando simetria esférica e um gás com perfil de densidade $g(r)$ em equilíbrio na presença de um potencial gravitacional total (r), mostre que o perfil de temperatura do gás é:

$$\frac{1}{p_g(r)}\frac{dP(r)}{dr} = -\frac{d\Phi}{dr}$$

Podemos escrever $P(r)$ como: $P(r) = nkT(r)$, e lembrando que $\mu = \frac{\rho}{nm_H}$, assim então, podemos reescrever que

$$P(r) = \frac{p_g(r)}{\mu m_H}kT(r)$$

Substituindo, temos que:

$$\frac{1}{\rho_g(r)}\frac{d(\frac{\rho_g(r)}{\mu m_H}kT(r))}{dr} - -\frac{d\Phi}{dr}$$

Arrumando formula, primeira é isolado o nosso T(r), assim realizar a integral da mesma, supondo limites de integração generalizados, assim iremos obter constantes para um lado e as varáveis em função de r dentro da integral, assim então:

$$\frac{d(\rho_g(r)T(r))}{dr} = -\frac{H\rho_g(r)}{k}\frac{d\Phi}{dr}$$
$$T(r) = -\frac{\mu m_H}{k\rho_g(r)}\int_\infty^r \rho_g(r')\frac{d\Phi}{dr'}dr'$$

7. Peso molecular médio. Mostre que, em termos de densidade numérica de elétrons, o peso molecular médio de um gás com abundância primordial totalmente ionizado é aproximadamente.

$$\mu = \frac{m}{m_H}$$

Sabemos que a densidade média de um gás é $\rho - n.m$, assim podemos reescreve-lo como:

$$\rho = n\mu m_H$$
$$\mu = \frac{\rho}{nm_H}$$

A densidade númerica de elétrons é a soma do numero de elétrons cm^{-3}

$$n_e = \frac{X\rho}{m_H} + \frac{Y\rho}{2m_H} + \frac{Z_i.Z\rho}{A_i m_H}$$

Podemos dizer que $A_i \approx 2Z_i$

$$n_e = \frac{\rho}{m_H}\left[X + \frac{Y}{2} + \frac{Z}{2}\right]$$
$$u_e = \frac{\rho}{m_H}\frac{m_H}{\rho\left[X+\frac{Y}{2}+\frac{Z}{2}\right]}$$
$$\mu_e = \frac{2}{2X+Y+Z}$$

Para aglomerados é comum a gente supor que o $Z = 0$ e que $X + Y + Z = 1$ e $Y = -X + 1$, simplificando:

$$\mu_e = \frac{2}{X+1}$$

Como $X \approx 0,75$ então, $\mu_e = 1,14$

Parte C

Nesta sessão ambos exercícios computacional os resultados serão enviado no arquivo com os códigos com passo a passo, encaminhado em conjunto a este arquivo.