傅里叶变换、拉普拉斯变换、Z 变换的联系是什么？为什么要进行这些变换？

2017年更新：将这个答案整理了一下，写了篇博客，加了一些理解和图示，可以参考 深入理解傅里叶变换

曾经和同学上课时深入探讨过此问题，占坑，有空再来回答！！

我来说些不一样的东西吧。

我假定楼主对这些变换已有一些了解，至少知道这些变换怎么算。好了，接下来我将从几个不同的角度来阐述这些变换。

一个信号，通常用一个时间的函数$x(t)$来表示，这样简单直观，因为它的函数图像可以看做信号的波形，比如声波和水波等等。很多时候，对信号的处理是很特殊的，比如说线性电路会将输入的正弦信号处理后，输出仍然是正弦信号，只是幅度和相位有一个变化（实际上从数学上看是因为指数函数是线性微分方程的特征函数，就好像矩阵的特征向量一样，而这个复幅度对应特征值）。因此，如果我们将信号全部分解成正弦信号的线性组合（傅里叶变换）$x(t)=\Sigma_\omega X(\omega)e^{i\omega t}$，那么就可以用一个传递函数$H(w)=Y(w)/X(w)$来描述这个线性

系统。倘若这个信号很特殊，例如$e^{2t}sin(t)$，傅里叶变换在数学上不存在，这个时候就引入拉普拉斯变换来解决这个问题$x(t)=\Sigma_s X(s)e^{st}$。这样一个线性系统都可以用一个传递函数$H(s)=Y(s)/X(s)$

来表示。所以，从这里可以看到将信号分解为正弦函数（傅里叶变换）或者 复指数函数（拉普拉斯变换）对分析线性系统至关重要。

如果只关心信号本身，不关心系统，这几个变换的关系可以通过这样一个过程联系起来。

首先需要明确一个观点，**不管使用时域还是频域（或s域）来表示一个信号，他们表示的都是同一个信号！** 关于这一点，你可以从线性空间的角度理解。同一个信号，如果采用不同的坐标框架（或者说基向量），那么他们的坐标就不同。例如，采用$\{\delta(t-\tau)|\tau\in R\}$作为坐标，那么信号就可以表示为$x(t)$，而采用$\{e^{iwt}|w\in R\}$则表示为傅里叶变换的形式$X(w)$

。线性代数里面讲过，两个不同坐标框架下，同一个向量的坐标可以通过一个线性变换联系起来，如果是有限维的空间，则可以表示为一个矩阵，在这里是无限维，这个线性变换就是傅里叶变换。

如果我们将拉普拉斯的$s=\sigma+jw$域画出来，他是一个复平面，拉普拉斯变换$X(s)$是这个复平面上的一个复变函数。而这个函数沿虚轴jw的值$X(jw)$就是傅里叶变换。到现在，对信号的形式还没有多少假定，如果信号是带宽受限信号，也就是说$X(jw)$只在一个小范围内（如$-B<w<B$

）不为0。

根据采样定理，可以对时域采样，只要采样的频率足够高，就可以无失真地将信号还原出来。那么采样对信号的影响是什么呢？从s平面来看，时域的采样将$X(s)$

沿虚轴方向作周期延拓！这个性质从数学上可以很容易验证。

z变换可以看做拉普拉斯变换的一种特殊形式，即做了一个代换$z=e^{sT}$，T是采样的周期。这个变换将信号从s域变换到z域。请记住前面说的那个观点，s域和z域表示的是同一个信号，即采样完了之后的信号。**只有采样才会改变信号本身**！从复平面上来看，这个变换将与σ轴平行的条带变换到z平面的一个单叶分支$2k\pi\leq\theta\leq2(k+1)\pi$。你会看到前面采样导致的周期延拓产生的条带重叠在一起了，因为具有周期性，所以z域不同的分支的函数值$X(z)$

是相同的。换句话说，如果没有采样，直接进行z变换，将会得到一个多值的复变函数！**所以一般只对采样完了后的信号做z变换**！

这里讲了时域的采样，时域采样后，信号只有$-f_s/2\rightarrow f_s/2$

间的频谱，即最高频率只有采样频率一半，但是要记录这样一个信号，仍然需要无限大的存储空间，可以进一步对频域进行采样。如果时间有限（这与频率受限互相矛盾）的信号，那么通过频域采样（时域做周期扩展）可以不失真地从采样的信号中恢复原始信号。并且信号长度是有限的，这就是离散傅里叶变换(DFT)，它有著名的快速算法快速傅里叶变换(FFT)。为什么我要说DFT呢，因为计算机要有效地对一般的信号做傅里叶变换，都是用DFT来实现的。除非信号具有简单的解析表达式！

总结起来说，就是对于一个线性系统，输入输出是线性关系的，不论是线性电路还是光路，只要可以用一个线性方程或线性微分方程（如拉普拉斯方程、泊松方程等）来描述的系统，都可以通过傅里叶分析从频域来分析这个系统的特性，比单纯从时域分析要强大得多！两个著名的应用例子就是线性电路和傅里叶光学（信息光学）。甚至非线性系统，也在很多情况里面使用线性系统的东西！所以傅里叶变换才这么重要！你看最早傅里叶最早也是为了求解热传导方程（那里其实也可以看做一个线性系统）！

傅里叶变换的思想还在不同领域有很多演变，比如在信号处理中的小波变换，它也是采用一组基函数来表达信号，只不过克服了傅里叶变换不能同时做时频分析的问题。

最后，我从纯数学的角度说一下傅里叶变化到底是什么。还记得线性代数中的代数方程$Ax = b$吗？如果A是对称方阵，可以找到矩阵A的所有互相正交的特征向量$v_i, i = 1..n$和特征值$\lambda_i, i = 1..n$，然后将向量x和b表示成特征向量的组合$x = \Sigma_i x_i v_i, b = \Sigma_i b_i v_i$。由于特征向量的正交关系，矩阵的代数方程可以化为n个标量代数方程$\lambda_i x_i = b_i$，是不是很神奇！！你会问这跟傅里叶变换有毛关系啊？别急，再看非齐次线性常微分方程$y' + ay = z(x)$，可以验证指数函数$y = e^{sx}$是他的特征函数，如果把方程改写为算子表示$\Lambda y = z$，那么有$\Lambda y = \lambda y$，这是不是和线性方程的特征向量特征值很像。把y 和 z都表示为指数函数的线性组合，那么经过这种变换之后，常微分方程变为标量代数方程了！！而将y和z表示成指数函数的线性组合的过程就是傅里叶变换（或拉普拉斯变换）。在偏微分方程如波动方程中也有类似结论！这是我在上数理方程课程的时候体会到的。归纳起来，就是说**傅里叶变换就是线性空间中的一个特殊的正交变换！他之所以特殊是因为指数函数是微分算子的特征函数!**