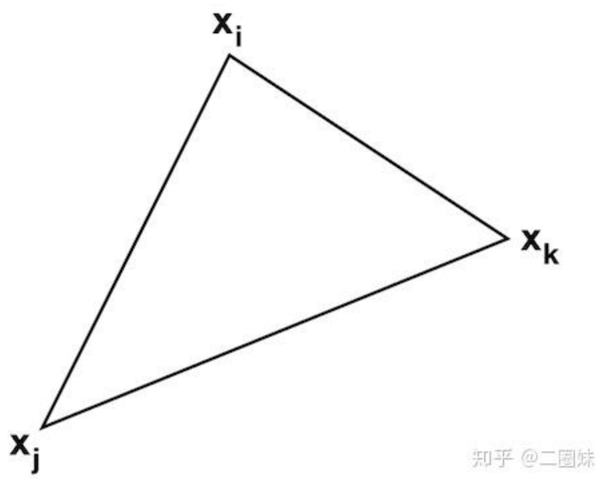
推导Discrete Laplace-Beltrami Operator

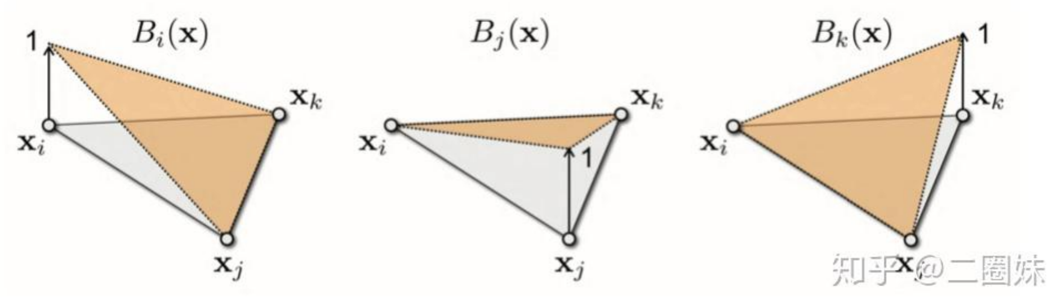
$$\Delta f(v_i) = \frac{1}{2A_i} \sum_{v_j \in \mathcal{N}_1(v_i)} (\cot \alpha_{i,j} + \cot \beta_{i,j})(f_j - f_i)$$

梯度 - nabla算子

梯度之前已经写过，之前给的梯度的求法都是跟可导函数有关，这里来讨论一下三角形网格上的梯度如何定义。



在三角形的三个顶点处有 $\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j, \mathbf{x}_k$, 我们假设有分段函数f, $f(\mathbf{x}_i) = f_i, f(\mathbf{x}_j) = f_j, f(\mathbf{x}_k) = f_k$, B_i, B_j, B_k是三角角形的一次Lagrange插值基函数：



B_i, B_j, B_k的特点都是在自身i, j, k 之处都等于1，在另外两个顶点处都为0.

结合重心坐标，对于三角形平面上的一个点 $\mathbf{u}$：

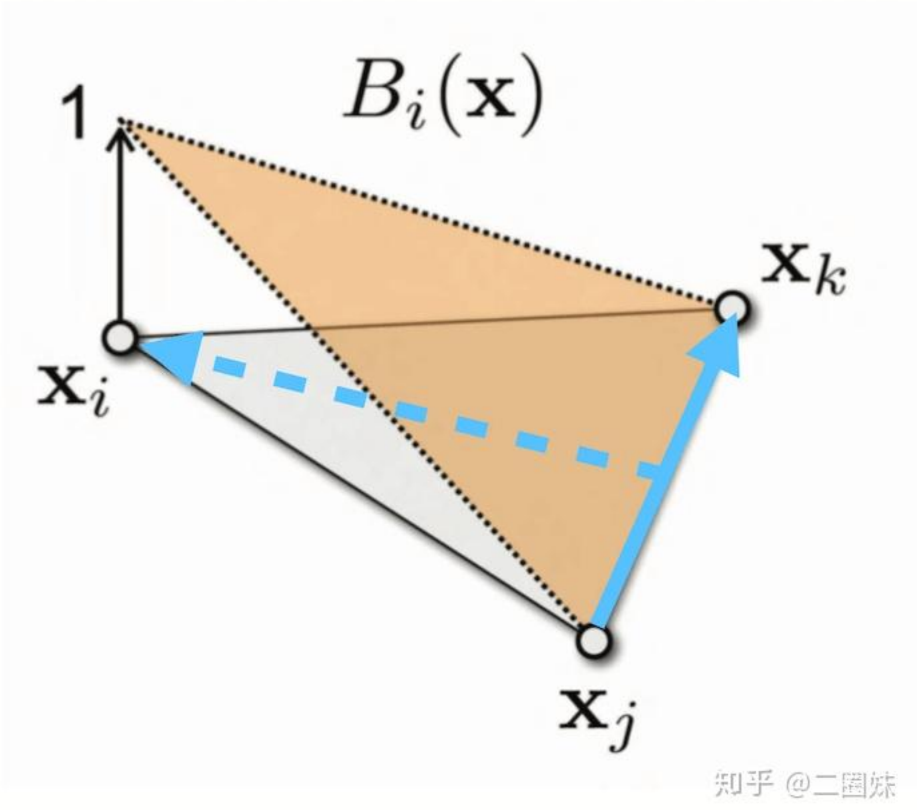
$$f(\mathbf{u}) = f_i B_i(\mathbf{u}) + f_j B_j(\mathbf{u}) + f_k B_k(\mathbf{u})$$

同时：$B_i(\mathbf{u}) + B_j(\mathbf{u}) + B_k(\mathbf{u}) = 1$，那么我们对这个基函数求梯度的话：$\nabla B_i(\mathbf{u}) + \nabla B_j(\mathbf{u}) + \nabla B_k(\mathbf{u}) = 0$，所以我们对上面的式子求梯度并代入得：

$$\nabla f(\mathbf{u}) = f_i(-\nabla B_j(\mathbf{u}) - \nabla B_k(\mathbf{u})) + f_j \nabla B_j(\mathbf{u}) + f_k \nabla B_k(\mathbf{u})$$

$$\nabla f(\mathbf{u}) = (f_j - f_i)\nabla B_j(\mathbf{u}) + (f_k - f_i)\nabla B_k(\mathbf{u})$$

同时我们来看这个 B_i, B_j, B_k，比如对于 B_i, 这个变化最大的方向当然就是跟$(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_j)$垂直的方向，再看一眼图：



所以梯度是：

$$\nabla B_i(\mathbf{u}) = \frac{(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_j)^{\perp}}{2A_T}$$

其中 $(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_j)^{\perp}$的方向是表示向量在三角形平面逆时针旋转90°， A_T表示三角形面积。想法很简单，也就是 $(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_j) \cdot h/2 = A_T, B_i(\mathbf{x}_i) = 1$.那么函数值的变化是 (1-0)，而梯度方向的变化是 (h-0),再加上方向的考量，所以 $\nabla B_i(\mathbf{u}) = \frac{1-0}{h-0}\mathbf{n}_h = \frac{(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_j)^{\perp}}{2A_T}$.

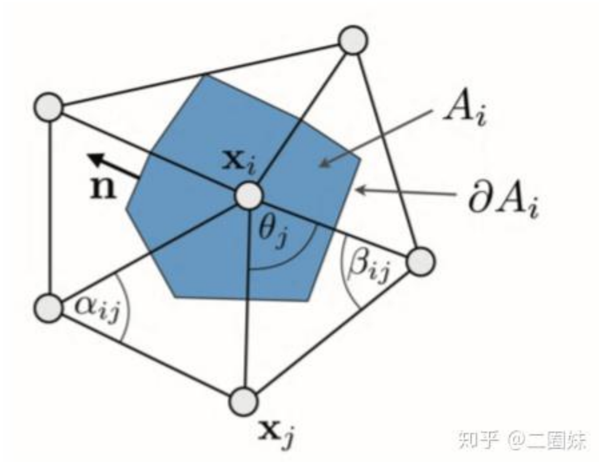
所以：

$$\nabla f(\mathbf{u}) = (f_j - f_i)\frac{(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_k)^{\perp}}{2A_T} + (f_k - f_i)\frac{(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i)^{\perp}}{2A_T}$$

散度 - Laplace算子

有了上面的梯度计算，我们可以开始推导散度-Laplace算子在网格上的公式。首先回忆我们的散度的物理意义其实是‘空间中的这个点是否产生液体，其实也就是来看在此点处向内的箭头比较多还是向外的箭头比较多’。散度的计算我们用的是 Laplace 算子，也就是： $\Delta = \frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial z^2}$,对于网格上的一点(当然我们这

里的网格都是已经经过处理了，性质非常良好的网格，不会是那种刚刚scan好的，比如有洞啊，奇奇怪怪的网格)，使用高斯公式：



$$\int_{A_i} div\mathbf{F}(\mathbf{u})dA = \int_{\partial A_i} \mathbf{F}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{u})ds$$

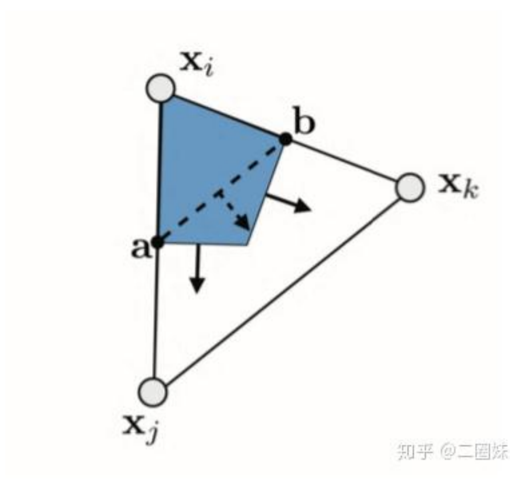
A_i，∂A_i入上图所示，这里的 A_i区域是 mixed Voronoi cell, 也就是周边三角形的外心，当然三角形的外心可能在三角形之外，我们把它clip到三角形的边上的中点。之所以选择 mixed Voronoi cell 是因为它产生的error最小（leads to tight error bounds for the discrete operators as shown in [Meyer et al. 03]）.

同时还值得注意的一点就是，虽然我们这里貌似把这些三角形都画在一个平面上，但是我们要知道，这些三角形与三角形之间，当然可能不在同一个平面上。

继续使用高斯公式：

$$\int_{A_i} \Delta f(\mathbf{u})dA = \int_{A_i} div\nabla f(\mathbf{u})dA = \int_{\partial A_i} \nabla f(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{u})ds$$

∇f在每个三角形上是常量，所以我们对单个三角形来计算：



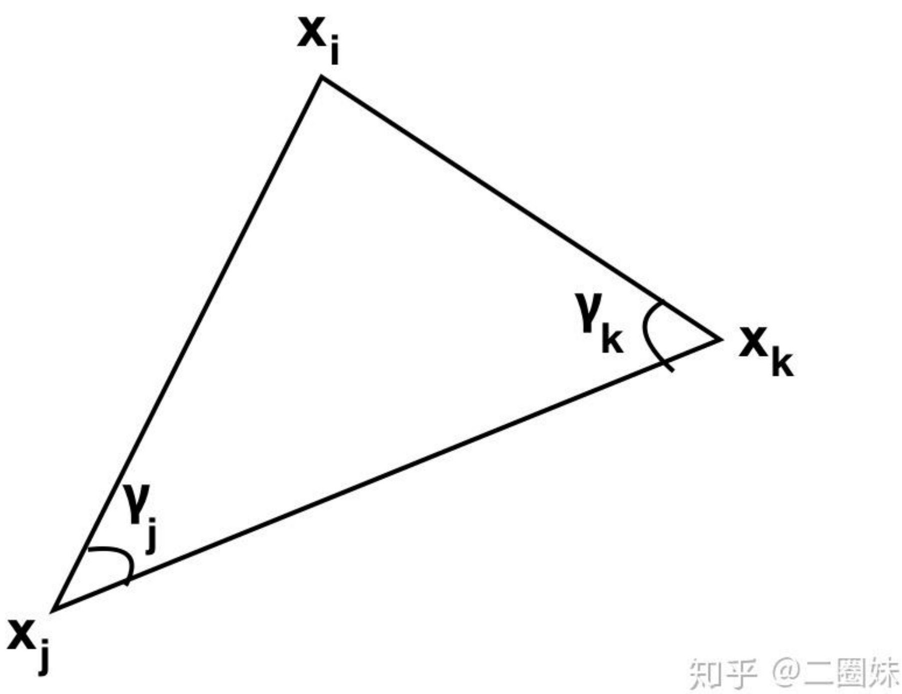
$$\int_{\partial A_i \cap T} \nabla f(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{u}) ds = \nabla f \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{b})^{\perp} = \frac{1}{2} \nabla f \cdot (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_k)^{\perp}$$

这里是因为我们选取的是三角形的外心，所以当然 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_k)$有以上关系。

我们继续代入上面求得的关于梯度的表达式：

$$\int_{\partial A_i \cap T} \nabla f(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{u}) ds = (f_j - f_i) \frac{(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_k)^{\perp} \cdot (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_k)^{\perp}}{4A_T} + (f_k - f_i) \frac{(\mathbf{x}_j -}{}$$

用 γ_j, γ_k来表示 v_j, v_k处的角度，我们有：



$$A_T = \frac{1}{2} \sin \gamma_j |\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i||\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_k| = \frac{1}{2} \sin \gamma_k |\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_k||\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_k|$$

又根据点乘关系：

$$\cos \gamma_j = \frac{(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i) \cdot (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_k)}{|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i||\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_k|}$$

$$\cos \gamma_k = \frac{(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_k) \cdot (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_k)}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_k||\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_k|}$$

所以上面的式子可以化简为：

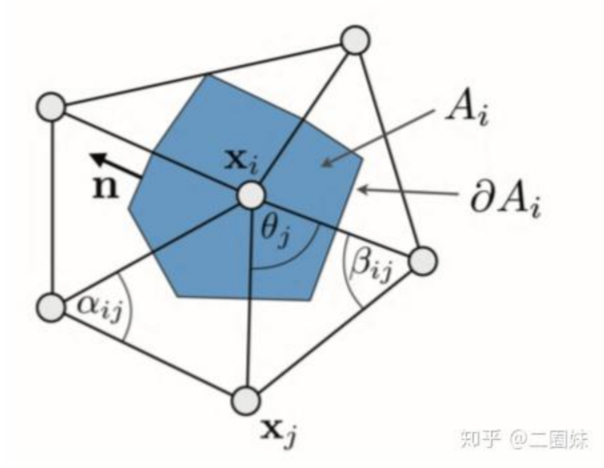
$$\begin{aligned}\int_{\partial A_i \cap T} \nabla f(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{u}) ds &= (f_j - f_i) \frac{\cos \gamma_k |\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_k||\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_k|}{2 \sin \gamma_k |\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_k||\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_k|} + (f_k - f_i) \\ &= \frac{1}{2}(\cot \gamma_k (f_j - f_i) + \cot \gamma_j (f_k - f_i))\end{aligned}$$

注意上面的式子， $f_j - f_i$对应的角是 γ_k, $f_k - f_i$也是对边的角 γ_j.

所以如果对整个 A_i区域积分：

$$\int_{A_i} \Delta f(\mathbf{u}) dA = \frac{1}{2} \sum_{v_j \in \mathcal{N}1(v_i)} (\cot \alpha_{i,j} + \cot \beta_{i,j})(f_j - f_i)$$

其中 $\mathcal{N}_1(v_i)$*是指的 *v_i的 one-ring neighbor，也就是周围一圈的邻居，而 $\alpha_{i,j}, \beta_{i,j}$是 $f_j - f_i$作为边对应的两个角：



所以：

$$\Delta f(v_i) = \frac{1}{2A_i} \sum_{v_j \in \mathcal{N}_1(v_i)} (\cot \alpha_{i,j} + \cot \beta_{i,j})(f_j - f_i)$$

这也就是大名鼎鼎的 Laplace - Beltrami operator，也叫做 Cotan Formula（毕竟两个contangent), 也有许多别的方式可以推导出这个公式，此处不再赘述。

参考：

- Polygon Mesh Processing 第三章

有关于它的更多推导信息和引用可以参见书中提到的论文：

- Discrete Differential-Geometry Operators for Triangulated 2-Manifolds
- Computing Discrete Minimal Surfaces and Their Conjugates