

常见的漫反射模型：朗伯模型（Lambert's Model）、Oren-Nayar Reflectance Model

Author: [zhiwei]

Link: [<https://zhuanlan.zhihu.com/p/500809166>]

目录及序言: <https://zhuanlan.zhihu.com/p/459580639>

1 BRDF 回顾

BRDF (bidirectional reflectance distribution function, 双向反射分布函数) 描述了沿空间任一方向入射到物体表面的光线，经过物体表面的反射朝空间其他方向辐射的辐射亮度分布。

由 BRDF 函数 $f_r(p, \omega_i \rightarrow \omega_o)$ 决定的，物体表面某点 p 向方向 ω_o 反射的辐射亮度 $L_o(p, \omega_o)$ 如下：

$$L_o(p, \omega_o) = \int_{\Omega^+} f_r(p, \omega_i \rightarrow \omega_o) L_i(p, \omega_i) \cos \theta_i d\omega_i$$

- Ω^+ 是点 p 处表面法线确定的正半球，包含了所有可能的光线入射方向 ω_i ；
- θ_i 是入射光线的天顶角（zenith angle），即入射方向与表面法线方向的夹角；

2 朗伯模型（Lambert's Model）描述的理想漫反射表面

朗伯模型 (Lambert's model) 是一种表面光照漫反射模型，描述了理想漫反射表面。

朗伯模型假设物体表面平滑，入射光经过完全漫反射体表面的反射后在所有方向的辐射亮度相同，漫反射的光强与入射角的余弦成正比，而和反射方向无关。

于是，朗伯模型定义的 BRDF 函数值是一个常数：

$$f_r(x, \omega_i \rightarrow \omega_o) = \frac{\rho}{\pi}$$

- ρ 是反照率（albedo），是投射到物体表面的能量中被反射的比例；

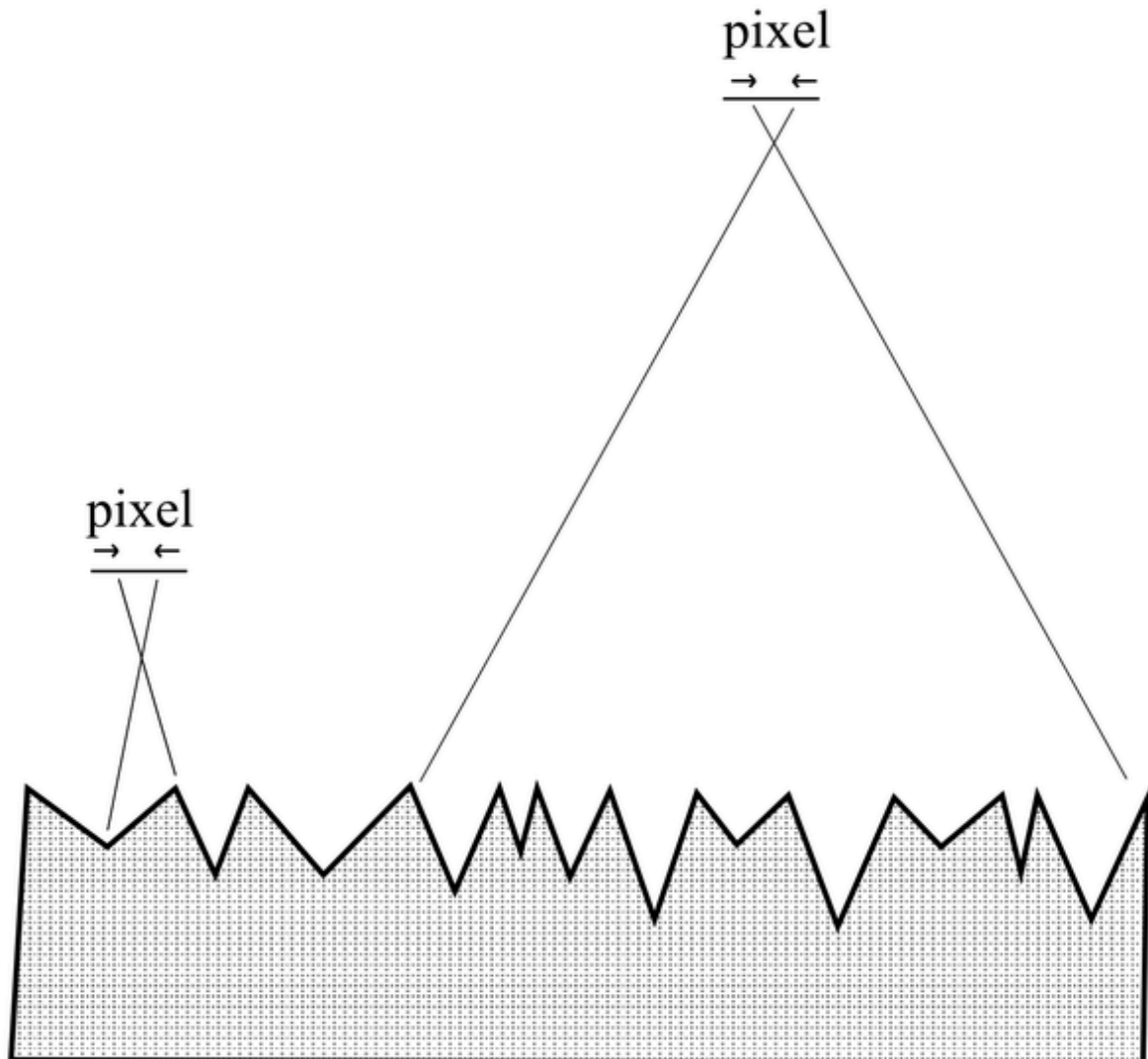
$$\begin{aligned} & \int_{\Omega^+} f_r(x, \omega_i \rightarrow \omega_o) \cos \theta_i d\omega_i \\ &= \frac{\rho}{\pi} \int_{\Omega^+} \cos \theta_i d\omega_i \\ &= \frac{\rho}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta \sin \theta d\theta d\phi \\ &= \frac{\rho}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} d\phi \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta \sin \theta d\theta \\ &= \frac{\rho}{\pi} \times 2\pi \times \frac{1}{2} \\ &= \rho \end{aligned}$$

<https://github.com/zhiwei-c/Monte-Carlo-Path-Tracing/blob/main/src/bsdfs/diffuse.cu>

3 Oren-Nayar BRDF 描述的粗糙漫反射表面

朗伯模型假设物体表面平滑，然而，实际情况中很多物体的表面是相对粗糙的，在微观下凹凸不平，可以看作是许多微表面的集合。

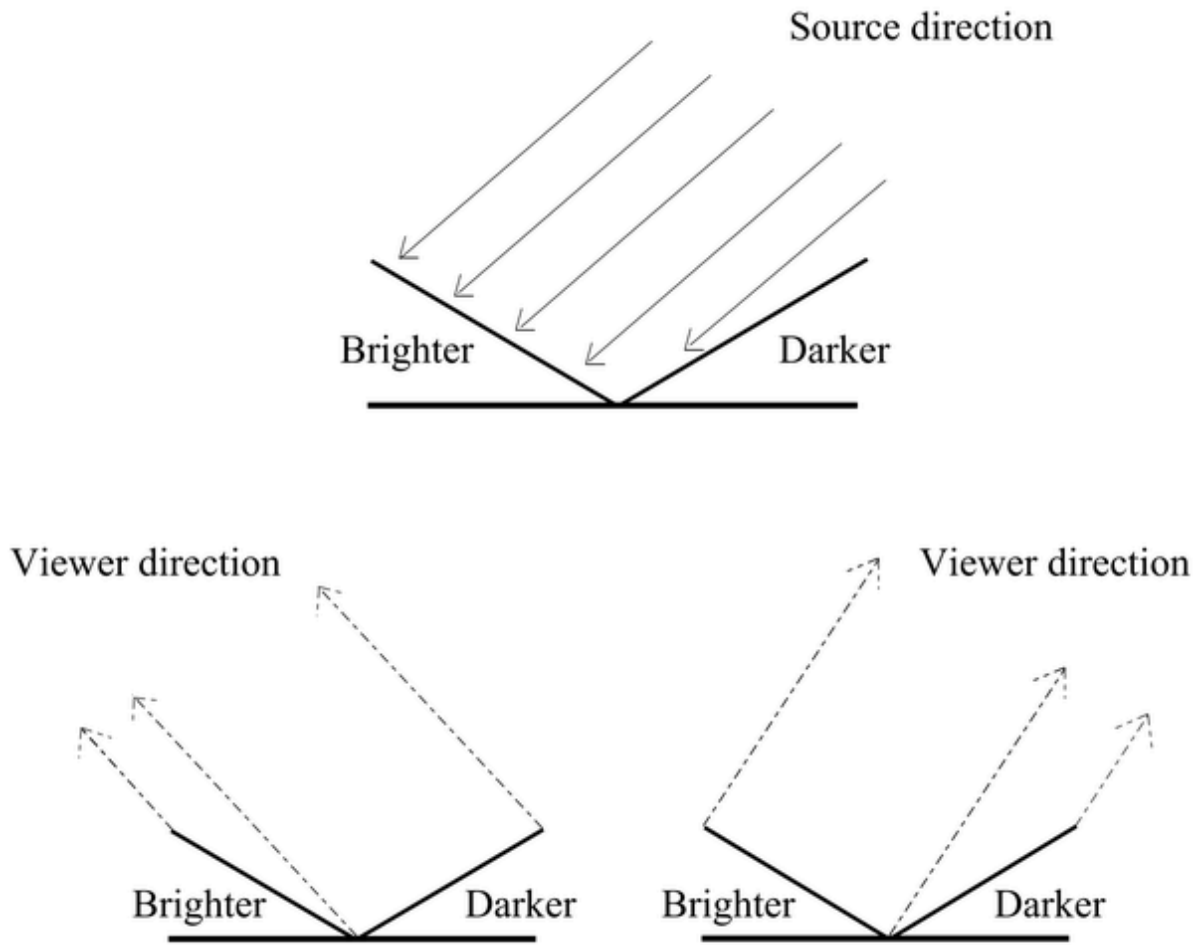
当绘制相对粗糙的漫反射材质物体表面时，在高分辨率下，生成图像中每个像素近似只包含一个微表面，此时朗伯模型的假设尚且合理，但是在低分辨率下，生成图像中每个像素可能包含了大量的微表面，此时朗伯模型的假设就存在偏差了。



微表面示意 图源: [Oren and Nayar, 1994]

在1994年，Oren 和 Nayar 根据微表面理论改进了朗伯模型。新模型假设物体的宏观表面由许多对称的“V”形孔腔组成，所有孔腔的上边缘位于同一平面，每一个孔腔可以看作由两个相对的微表面构成，每个微表面都假设是朗伯模型描述的理想漫反射表面。

新模型考虑了后向散射（backscattering），即物体表面会向光源方向反射更多的能量，而不是向外均匀反射，当观察方向趋近于光源方向时，观察到的反射辐射亮度会增加。



当观察方向趋近于光源方向时，观察到的反射辐射亮度会增加 图源：[Oren and Nayar, 1994]

新模型假设每个微表面的面积 da 远小于单个像素所对应的物体表面积 dA ，而入射光线波长 λ 的尺度又远小于每个微表面的面积，即 $\lambda^2 \ll da \ll dA$ ，于是可根据几何光学推导反射模型。

当考虑了微表面之间的阴影、遮蔽和互相反射时没有解析解，Oren 和 Nayar 提出了如下近似解：

$$f_r(x, \omega_i \rightarrow \omega_o) = \frac{1}{\pi} [f_1(x, \omega_i \rightarrow \omega_o) + f_2(x, \omega_i \rightarrow \omega_o)]$$

$$f_1(x, \omega_i \rightarrow \omega_o) = \rho \left[C_1 + \cos \phi_{\text{diff}} \cdot C_2 \cdot \tan \beta + (1 - |\cos \phi_{\text{diff}}|) \cdot C_3 \cdot \tan \frac{\alpha + \beta}{2} \right]$$

$$f_2(x, \omega_i \rightarrow \omega_o) = \rho^2 \cdot C_4 \cdot \left[1 - \cos \phi_{\text{diff}} \left(\frac{2\beta}{\pi} \right)^2 \right]$$

其中， $C_1 = 1 - 0.5 \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + 0.33}$

$$C_2 = \begin{cases} 0.45 \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + 0.09} \sin \alpha & \text{if } \cos \phi_{\text{diff}} > 0 \\ 0.45 \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + 0.09} \left[\sin \alpha - \left(\frac{2\beta}{\pi} \right)^3 \right] & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$C_3 = 0.125 \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + 0.09} \left(\frac{4\alpha\beta}{\pi^2} \right)^2$$

$$C_4 = 0.17 \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + 0.13}$$

$$\alpha = \max(\theta_i, \theta_o), \quad \beta = \min(\theta_i, \theta_o), \quad \phi_{\text{diff}} = \phi_o - \phi_i$$

- $f_1(x, \omega_i \rightarrow \omega_o)$ 是直接光照成分的近似；
- $f_2(x, \omega_i \rightarrow \omega_o)$ 是微表面相互反射成分的近似；

- ρ 是反照率, σ 是物体表面的粗糙程度;

上述函数比较复杂, 在忽略了 C_3 项和微表面相互反射成分后, Oren 和 Nayar 提出了如下定性的、拟合得很好的、更简明的近似解:

$$f_r(x, \omega_i \rightarrow \omega_o) = \frac{\rho}{\pi} [A + B \cdot \max(0, \cos \phi_{\text{diff}}) \cdot \sin \alpha \cdot \tan \beta]$$

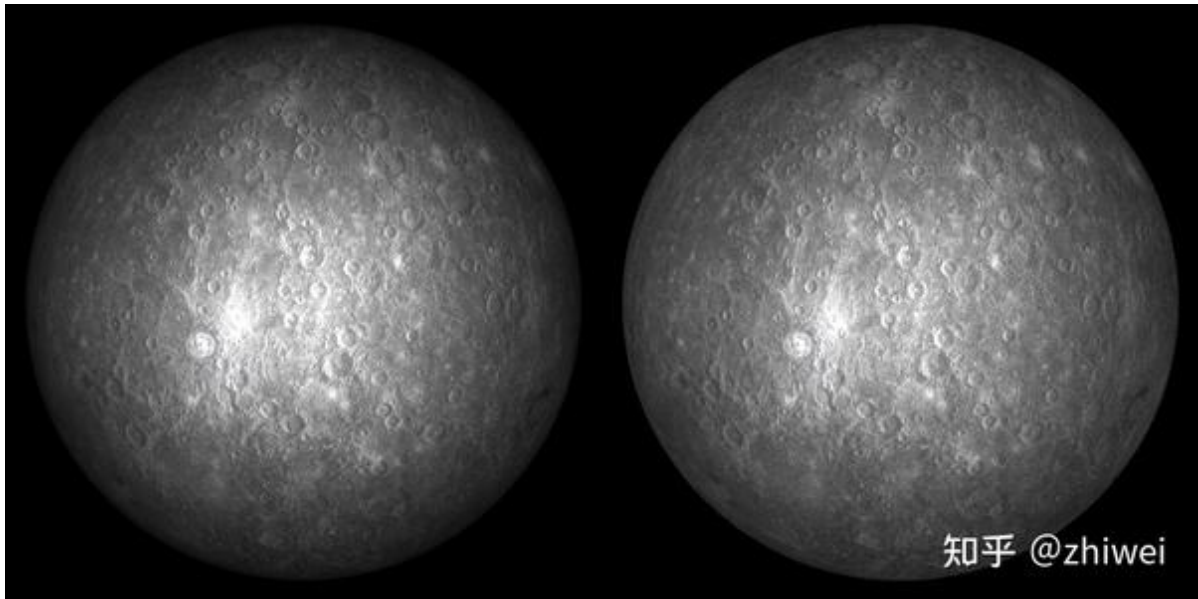
$$\text{其中, } A = 1 - 0.5 \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + 0.33}$$

$$B = 0.45 \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + 0.09}$$

$$\alpha = \max(\theta_i, \theta_o), \quad \beta = \min(\theta_i, \theta_o), \quad \phi_{\text{diff}} = \phi_o - \phi_i$$

- ρ 是反照率, σ 是物体表面的粗糙程度;

朗伯模型是当物体表面粗糙程度 $\sigma = 0$ 时 Oren-Nayar 反射模型的极端情况。



左图根据朗伯模型生成, 右图根据 Oren-Nayar BRDF 生成。可以发现靠近球体边缘的地方, 右图比左图更亮一些。

<https://github.com/mitsuba-renderer/mitsuba/blob/master/src/bsdfs/roughdiffuse.cpp>

4 漫反射的重要性抽样方法

为了降低使用蒙特卡罗路径追踪算法求取的辐射亮度数学期望的方差, 可以使用**重要性抽样法 (importance sampling method)**, 选择那些贡献更大的光线方向来估计景物表面某点的辐射亮度。

重要性抽样光线方向的球坐标 (θ, ϕ) 的公式如下:

$$\theta = \arccos \sqrt{\xi_1}, \quad \phi = 2\pi\xi_2$$

4.1 推导漫反射的重要性抽样方法

漫反射材质对应的绘制方程如下:

$$L_o(\omega_o) = \int_{\Omega^+} L_i(\omega_i) f_r(\omega_i, \omega_r) \cos \theta_i d\omega_i$$

对于简易的光线追踪算法, 在着色景物表面的某一点时并不知道入射光线辐射亮度 $L_i(\omega_i)$ 的分布情况, 能利用的只有 BRDF $f_r(\omega_i, \omega_r)$ 和余弦项 $\cos \theta_i$, 而漫反射材质的 BRDF 是常数, 所以就只能考虑余弦项 $\cos \theta_i$ 了。

当入射光线方向与景物表面越接近于垂直，和景物表面法线的夹角 θ_i 越小，则余弦项 $\cos \theta_i$ 越接近 1，那么这根光线对出射光线辐射亮度 $L_o(\omega_o)$ 的贡献就有可能越大。

所以，出射方向 ω_o 的概率 $\text{pdf}(\omega_o)$ 应该和 $\cos \theta_i$ 成正比：

$$\text{pdf}(\omega_o) = c \cdot \cos \theta \quad \text{其中, } c \text{ 是常数}$$

另外，因为所有出射方向的概率之和应该为 1：

$$1 = \int_{\Omega^+} \text{pdf}(\omega) d\omega$$

所以，可以求取出常数 c ：

$$\begin{aligned} 1 &= \int_{\Omega^+} \text{pdf}(\omega) d\omega \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} c \cdot \cos \theta d\omega \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} c \cdot \cos \theta \cdot \sin \theta d\theta d\phi \\ &= c \cdot \pi \\ \therefore c &= \frac{1}{\pi} \end{aligned}$$

所以，出射方向 ω_o 的概率：

$$\text{pdf}(\omega_o) = \frac{1}{\pi} \cos \theta$$

另外，因为立体角的概率和天顶角 θ 方位角 ϕ 的概率之间存在转换关系：

$$\text{pdf}(\theta, \phi) = \sin \theta \cdot \text{pdf}(\omega)$$

所以，以球坐标表示的出射方向 (θ, ϕ) 的概率：

$$\text{pdf}(\theta, \phi) = \sin \theta \cdot \text{pdf}(\omega) = \frac{1}{\pi} \sin \theta \cos \theta$$

所以，可以求取天顶角的概率 $\text{pdf}_\theta(\theta)$ ，以及给定天顶角时方位角的条件概率分布函数 $\text{pdf}_{\phi|\theta}(\phi | \theta)$ ：

$$\begin{aligned} \text{pdf}_\theta(\theta) &= \int_0^{2\pi} \text{pdf}(\theta, \phi) d\phi = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\pi} \sin \theta \cos \theta d\phi = \sin 2\theta \\ \text{pdf}_{\phi|\theta}(\phi | \theta) &= \frac{\text{pdf}(\theta, \phi)}{\text{pdf}_\theta(\theta)} = \frac{\frac{1}{\pi} \sin \theta \cos \theta}{\sin 2\theta} = \frac{1}{2\pi} \end{aligned}$$

所以，可以求取天顶角的累积概率分布函数 $\text{cdf}_\theta(\theta)$ ，以及给定天顶角时方位角的累积条件概率分布函数 $\text{cdf}_{\phi|\theta}(\phi | \theta)$ ：

$$\begin{aligned} \text{cdf}_\theta(\theta) &= \int_0^\theta \text{pdf}_\theta(t) dt = \int_0^\theta \sin 2t dt = \sin^2 \theta \\ \text{cdf}_{\phi|\theta}(\phi | \theta) &= \int_0^\phi \text{pdf}_{\phi|\theta}(t | \theta) dt = \int_0^\phi \frac{1}{2\pi} dt = \frac{\phi}{2\pi} \end{aligned}$$

取两个独立同分布的随机变量 $\xi_1, \xi_2 \sim U(0, 1)$ ，令：

$$\begin{cases} 1 - \text{cdf}_\theta(\theta) = \xi_1 \\ \text{cdf}_{\phi|\theta}(\phi | \theta) = \xi_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 - \sin^2 \theta = \xi_1 \\ \frac{\phi}{2\pi} = \xi_2 \end{cases}$$

所以， $\theta = \arccos \sqrt{\xi_1}$ ， $\phi = 2\pi\xi_2$ 。

参考资料

- Oren M, Nayar S K. [https://www1.cs.columbia.edu/CAVE/publications/pdfs/Oren_SIGGRAPH94.pdf](https://www1.cs.columbia.edu/CAVE/publications/pdfs/Oren_SIGGRAPH94.pdf)[C]//Proceedings of the 21st annual conference on Computer graphics and interactive techniques. 1994: 239-246.
- 《<https://www.cs.cmu.edu/~motoole2/16823-s20/>》 Spring 2020, <http://www.cs.cmu.edu/~motoole2/>;
- 《<https://sites.cs.ucsb.edu/~lingqi/teaching/games101.html>》 2020 年春, <https://sites.cs.ucsb.edu/~lingqi/>;
- 《高级计算机图形学——真实感图像合成》 2020 年冬, <http://www.cad.zju.edu.cn/home/rwangs/>;
- Pharr M, Jakob W, Humphreys G. <https://www.pbrt.org/>[M]. Morgan Kaufmann, 2016.