

# 拉格朗日表示 (Lagrangian Representations)

拉格朗日表示是一种通过跟踪个体粒子在空间中的运动轨迹来描述动态场景的方法。它在流体力学、粒子动力学和动态场景建模中有广泛应用。

## 1. 定义

在拉格朗日表示中，我们将动态场景建模为随时间变化的粒子集合，每个粒子携带属性（例如位置、速度、颜色等）。

通过跟踪每个粒子的运动，可以捕捉到粒子的时间演化和相互作用。

数学上，拉格朗日表示描述粒子的运动方程为：

$$\frac{d\mathbf{x}_i}{dt} = \mathbf{v}_i(t), \quad \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = \mathbf{f}_i(\mathbf{x}_i, t) \quad (1)$$

- $\mathbf{x}_i$ : 粒子  $i$  的位置。
- $\mathbf{v}_i$ : 粒子  $i$  的速度。
- $\mathbf{f}_i$ : 粒子  $i$  所受的力（由外部场或相互作用产生）。

## 2. 特点

### 优点

1. 粒子级描述：

- 可以跟踪每个粒子的运动轨迹，适合描述复杂的局部运动。

## 2. 细节捕获能力强：

- 能够自然捕捉非刚性场景中的细粒度动态细节。

## 3. 适用于复杂运动场景：

- 特别适合形变场景、非刚性物体（如人体动作）或稀疏点云建模。

# 缺点

## 1. 计算复杂性：

- 对于大规模粒子系统，计算每个粒子的运动可能开销较大。

## 2. 全局场景建模困难：

- 描述全局场景时，需处理大量粒子间的相互作用。

---

# 3. 在动态场景建模中的应用

## (1) 粒子跟踪

拉格朗日表示用于跟踪场景中的每个粒子，记录其随时间的运动轨迹。例如：

- 在流体模拟中，描述每个流体粒子的位置和速度变化。
- 在动态场景建模中，跟踪场景中每个3D点的运动。

## (2) 场景重建

拉格朗日表示通过每个粒子的属性（如位置、颜色）重建动态场景。例如：

- 动态点云：记录点云中每个点的位置随时间变化。

- 动态高斯粒子：每个粒子用高斯分布表示其影响范围（如本文方法）。

### (3) 对应关系生成

由于每个粒子具有唯一的标识，拉格朗日表示天然支持时间步之间的对应关系。这是欧拉表示所缺乏的。

## 4. 拉格朗日表示的公式描述

### (1) 粒子的动力学方程

粒子的运动由以下公式描述：

$$\frac{d\mathbf{x}_i}{dt} = \mathbf{v}_i, \quad \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = \mathbf{f}_i(\mathbf{x}_i, t) \quad (2)$$

- $\mathbf{x}_i$  是粒子的位置。
- $\mathbf{v}_i$  是粒子的速度。
- $\mathbf{f}_i$  是作用力，通常由以下方程给出：

$$\mathbf{f}_i = -\nabla p_i + \mu \nabla^2 \mathbf{v}_i + \mathbf{f}_{\text{ext}} \quad (3)$$

- $p_i$ ：粒子压力。
- $\mu$ ：粘度系数。
- $\mathbf{f}_{\text{ext}}$ ：外力。

### (2) 属性更新

粒子携带的属性（如颜色、密度）随时间变化：

$$\frac{d\phi_i}{dt} = S(\phi_i, \mathbf{x}_i, t) \quad (4)$$

- $\phi_i$ : 粒子  $i$  的属性（如颜色、密度）。
- $S$ : 属性的源项（例如场中的能量输入）。

## 5. 拉格朗日表示在本文中的应用

本文的方法基于拉格朗日表示，采用动态高斯粒子来描述动态场景：

### 1. 动态高斯粒子表示

- 每个粒子表示为一个动态高斯分布，其中心  $\mu_{i,t}$  和旋转  $R_{i,t}$  随时间变化。
- 粒子的属性（如颜色、不透明度）保持一致。

数学表示：

$$f_{i,t}(p) = \text{sigm}(o_i) \cdot \exp \left( -\frac{1}{2} (p - \mu_{i,t})^\top \Sigma_{i,t}^{-1} (p - \mu_{i,t}) \right) \quad (5)$$

- $\mu_{i,t}$ : 粒子中心。
- $\Sigma_{i,t}$ : 协方差矩阵，表示粒子的形状和方向。

### 2. 六自由度运动重建

通过跟踪每个粒子的中心位置和旋转矩阵，可以自然地重建场景中每个点的六自由度运动（位置 + 旋转）。

### 3. 基于物理的正则化

为确保粒子的运动符合物理规律，本文引入以下正则化：

- 局部刚性损失  $L_{\text{rigid}}$ : 限制粒子邻域的刚体变换一致。

- 旋转相似性损失  $L_{\text{rot}}$ ：限制相邻粒子的旋转一致性。
- 局部等距损失  $L_{\text{iso}}$ ：限制粒子间的距离随时间保持不变。

## 6. 拉格朗日表示的局限性

### 1. 粒子数量的计算复杂性

在大规模动态场景中，粒子数量的增加可能导致计算成本迅速增加。

### 2. 全局动态描述不足

拉格朗日表示更适合描述局部或个体的动态，对于全局场景的动态特性，可能需要与欧拉表示结合使用。

## 7. 示例对比

特性	欧拉表示	拉格朗日表示
运动描述	固定网格上的变化	跟踪粒子的运动路径
细节捕获	易丢失运动细节	细粒度动态细节捕获能力强
适用场景	流体场、全局动态描述	个体运动场景、粒子轨迹跟踪
计算复杂性	高维网格计算复杂	粒子数较大时复杂性增加

## 总结

拉格朗日表示通过跟踪个体粒子的运动轨迹，能够捕捉到动态场景中的细粒度动态特性。本文基于拉格朗日表示，通过动态高斯粒子表征，增强了场景的时间一致性和物理合理性，为动态场景建模和追踪任务提供了有效解决方案。

如果需要进一步的公式推导或对本文中的应用细节进行扩展，请告诉我！