旋度的简单理解方法

$$rotA=\begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial X} & \frac{\partial}{\partial Y} & \frac{\partial}{\partial Z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

转发一篇关于旋度意义的解释。

什么是旋度：假设有一速度场，旋度是度量该速度场中的旋转分量。即以数学语言的方式来形容速度场的旋转程度。

1、旋度公式：

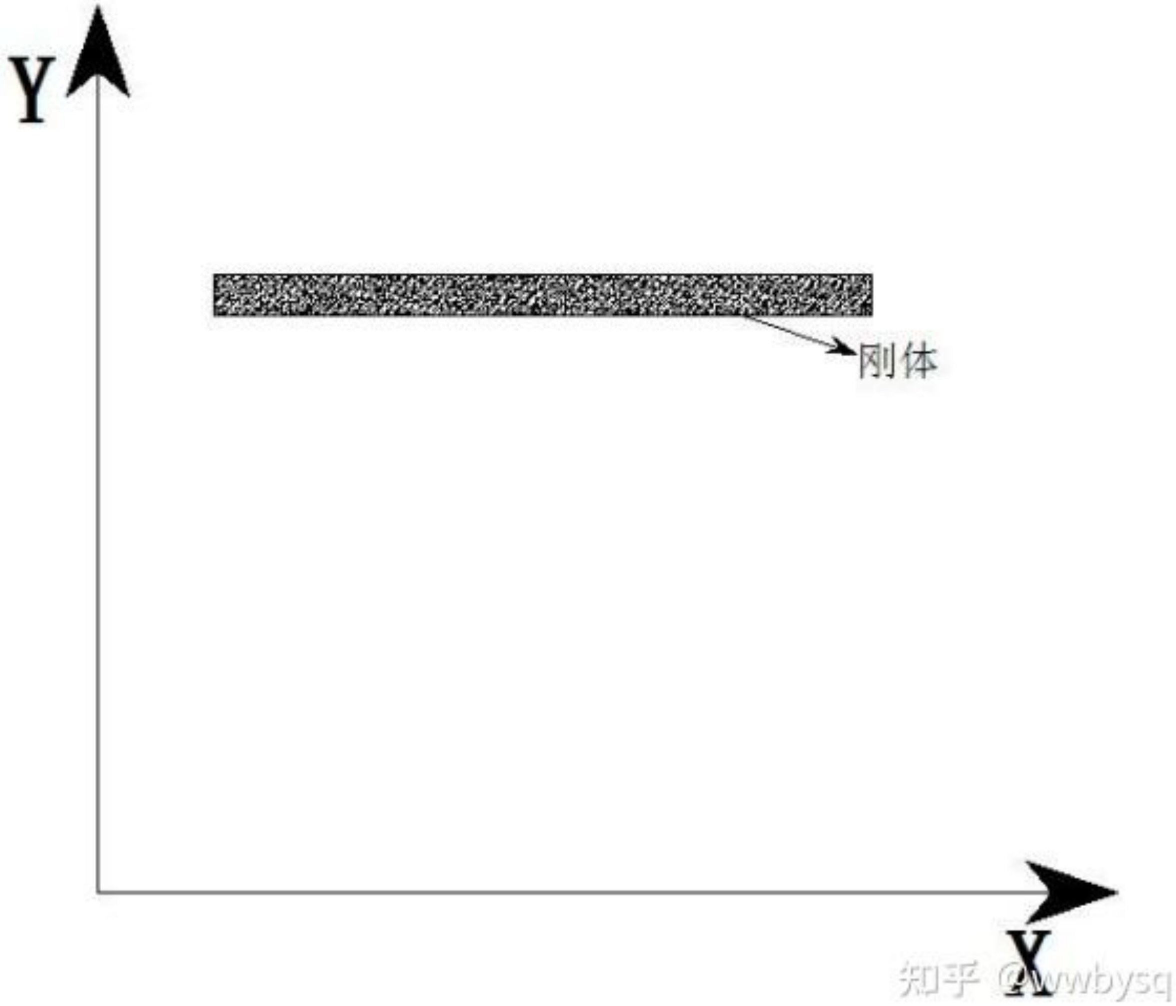
$$rotA=(\frac{\partial R}{\partial Y}-\frac{\partial Q}{\partial Z})i+(\frac{\partial P}{\partial Z}-\frac{\partial R}{\partial X})j+(\frac{\partial Q}{\partial X}-\frac{\partial P}{\partial Y})K$$

为了便于记忆将公式写成：

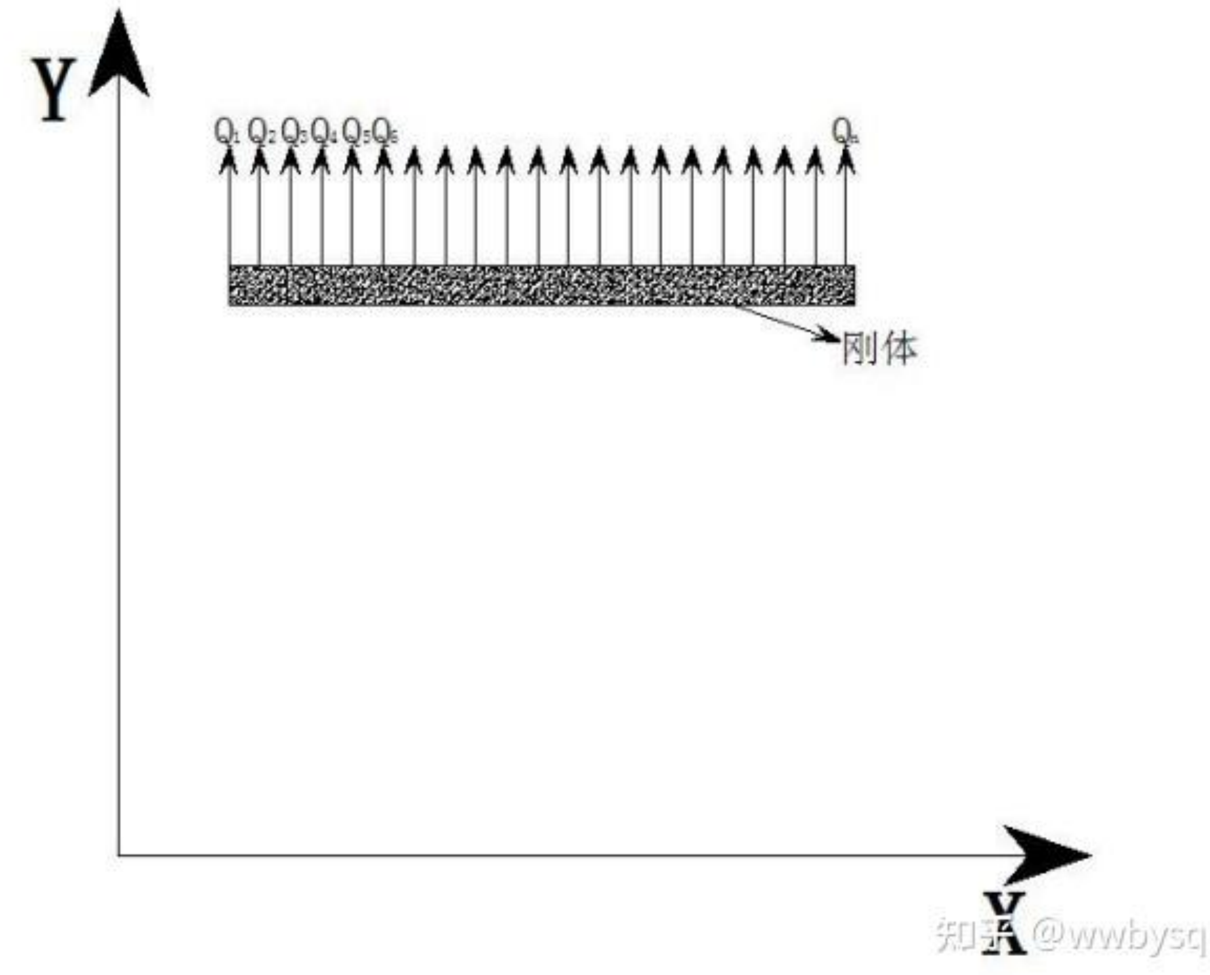
$$
rotA = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \dfrac{\partial}{\partial X} & \dfrac{\partial}{\partial Y} & \dfrac{\partial}{\partial Z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}
$$

2、我们该如何理解旋度?

首先我们不考虑三维空间，建立一个二维平面，即 XY 平面。假设速度场沿 X 方向速度分量是 P（x,y）i,沿 Y 方向的速度分量是 Q（x,y）j。在 XY 平面中有一刚体。如下图：



图中的刚体可以是一块木板、玻璃什么的。



当向量 Q1=Q2=Q3=......Qn的时候，其中Q向量代表速度，向量的长度代表速度的大小。大家可以发现刚体将沿着平行于 Y 轴的方向运动，而不会发生旋转，那么我们说刚体的旋度是 0。即

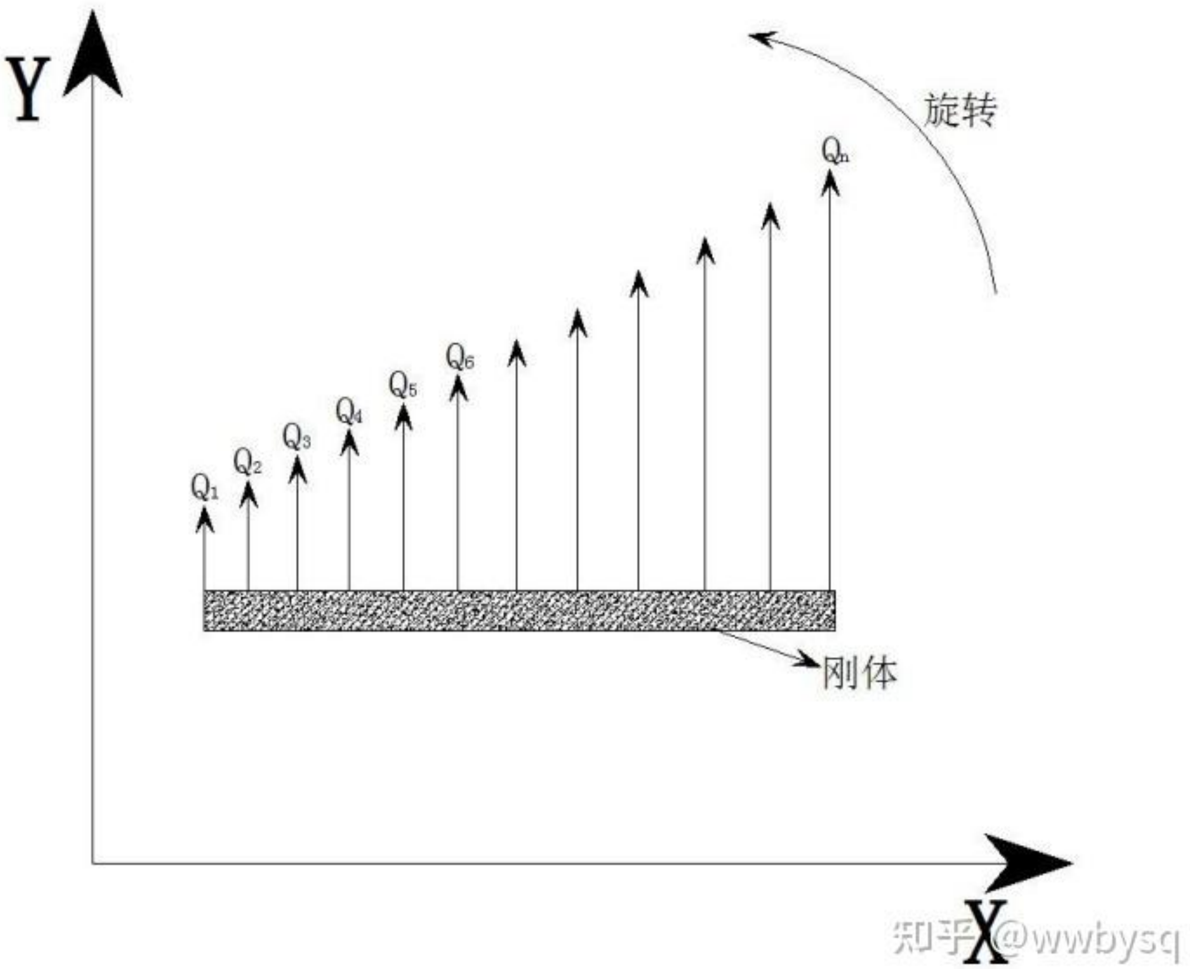
$$\frac{\partial Q}{\partial X}=0$$

刚体将不发生旋转。那么刚体如何才能旋转呢?

大家很容易发现当

$$\frac{\partial Q}{\partial X} \neq 0$$

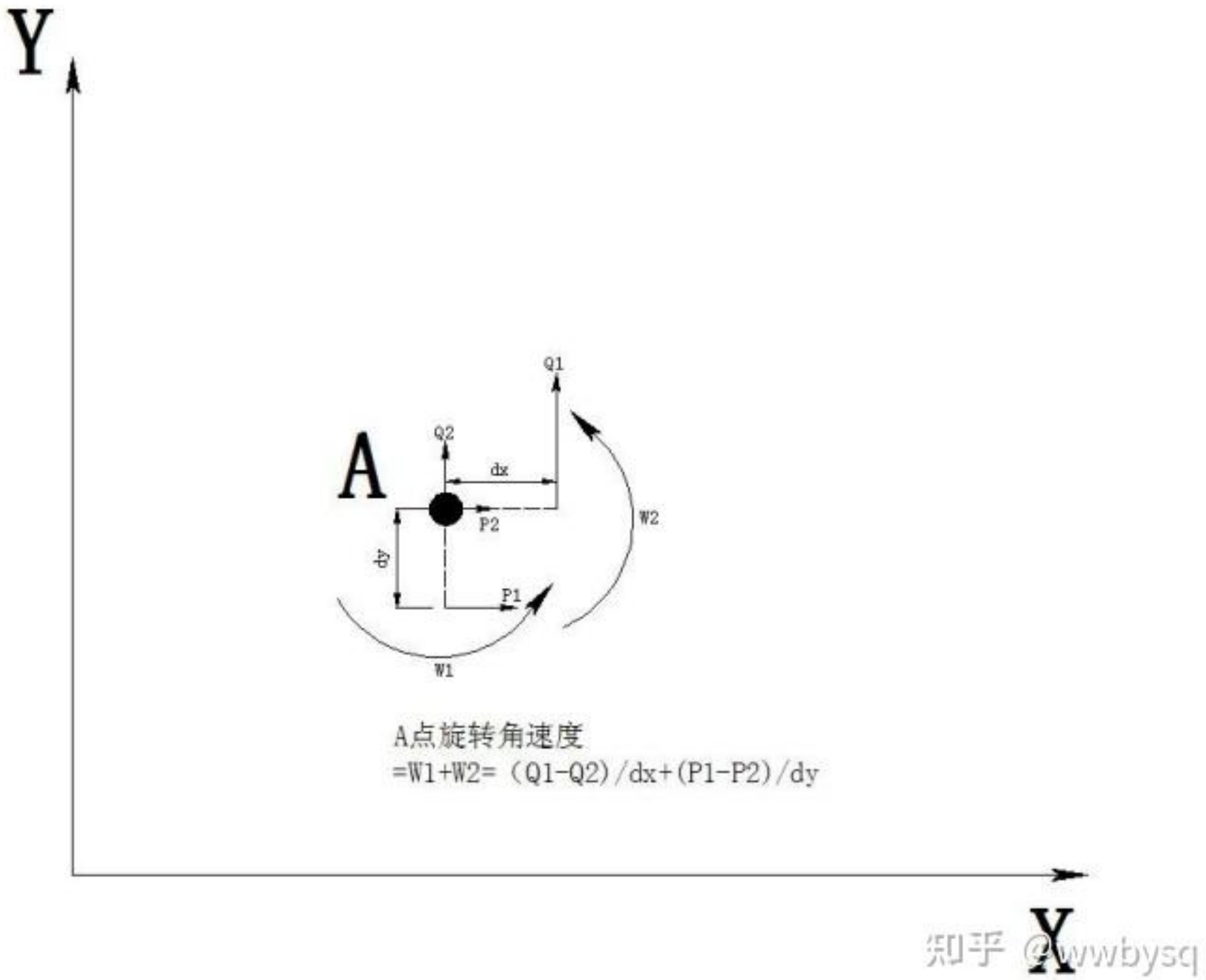
的时候，即沿着刚体的方向 Q 发生变化时候刚体将产生旋转，如下图：



物理学中我们知道旋转线速度=角速度 半径（v=w r），所以角速度

$$\omega = \frac{\partial v}{\partial r}, \text{即} \frac{\partial Q}{\partial X}\text{。}$$

旋转轴方向垂直于 XY 平面。接下来我们看图中的 A 点，如下图：



这里的P1,P2和Q1,Q2指刚体上不同的点相对于Y轴和X轴的角速度变化。

那么很容易发现该旋转是两个旋转的叠加，某一点的角速度

$$\omega = \frac{\partial Q}{\partial X} - \frac{\partial P}{\partial Y}$$

即旋度为

$$\omega = \left(\frac{\partial Q}{\partial X} - \frac{\partial P}{\partial Y}\right) \mathrm{k}$$

由于这是在XOY平面得出的结果，同样在YOZ、XOZ平面也可以得出同样的推论，因此得到旋度公式

$$rotA = \left(\frac{\partial R}{\partial Y} - \frac{\partial Q}{\partial Z}\right)i + \left(\frac{\partial P}{\partial Z} - \frac{\partial R}{\partial X}\right)j + \left(\frac{\partial Q}{\partial X} - \frac{\partial P}{\partial Y}\right)K$$

通过上面的推理大家应该已经能够差不多理解旋度的意义了。