微电子器件三大基本方程（一）：泊松方程

本文主要讨论半导体基本方程中的泊松方程。

半导体物理的三大基本方程是后续分析PN结、BJT、MOSFET的基础，其重要性来自其物理意义。

在微电子器件中，泊松方程的表达形式为：

$$\frac{d\mathrm{E}}{dx}=\frac{q}{\varepsilon_s}\left(p-n+N_D-N_A\right)$$

该式从物理量上分析可以看到，其联系了电场与电荷，左边是对电场进行求导，右边是单位体积内的总粒子个数 nTOTn_{TOT} n{TOT} 乘上一个系数 qεs$\frac{q}{\varepsilon{s}}$\frac{q}{\varepsilon_{s}} 。然后呢？似乎物理图像在脑海里不是非常明显：因为求导符号的存在。现在我们从泊松方程出发，进一步分析。

在电磁学理论中，泊松方程的表达式为：

$$\nabla^2\varphi=-\frac{\rho}{\varepsilon_s}$$

其中， ϕφ\varphi 代表电势， ρρ\rho 代表单位体积内的总电荷，对应我们研究的掺杂硅，我们进一步得到：

$$\rho = q\left(p - n + N_D - N_A\right)$$

故：

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{1}{\varepsilon_s} q\left(p - n + N_D - N_A\right)$$

似乎研究与我们的式子很像了，我们进一步研究。

由电磁场理论有：

$$\nabla^2 \varphi = -\nabla \bullet \vec{E}$$

代入上式，可以得到：

$$\nabla \bullet \vec{E} = \frac{q}{\varepsilon_s}\left(p - n + N_D - N_A\right)$$

当我们**只考虑一维情况**时，该式左侧的散度运算可以进一步简化为：

$$\nabla \bullet \vec{E} = \frac{dE}{dx}$$

至此，最初的泊松方程推导完毕。

回顾整个推导过程，我们能够发现，对电场的一阶导来自对电场求散度后的一维情况简化，但这似乎也没有给我们足够的物理图像，我们进一步分析。

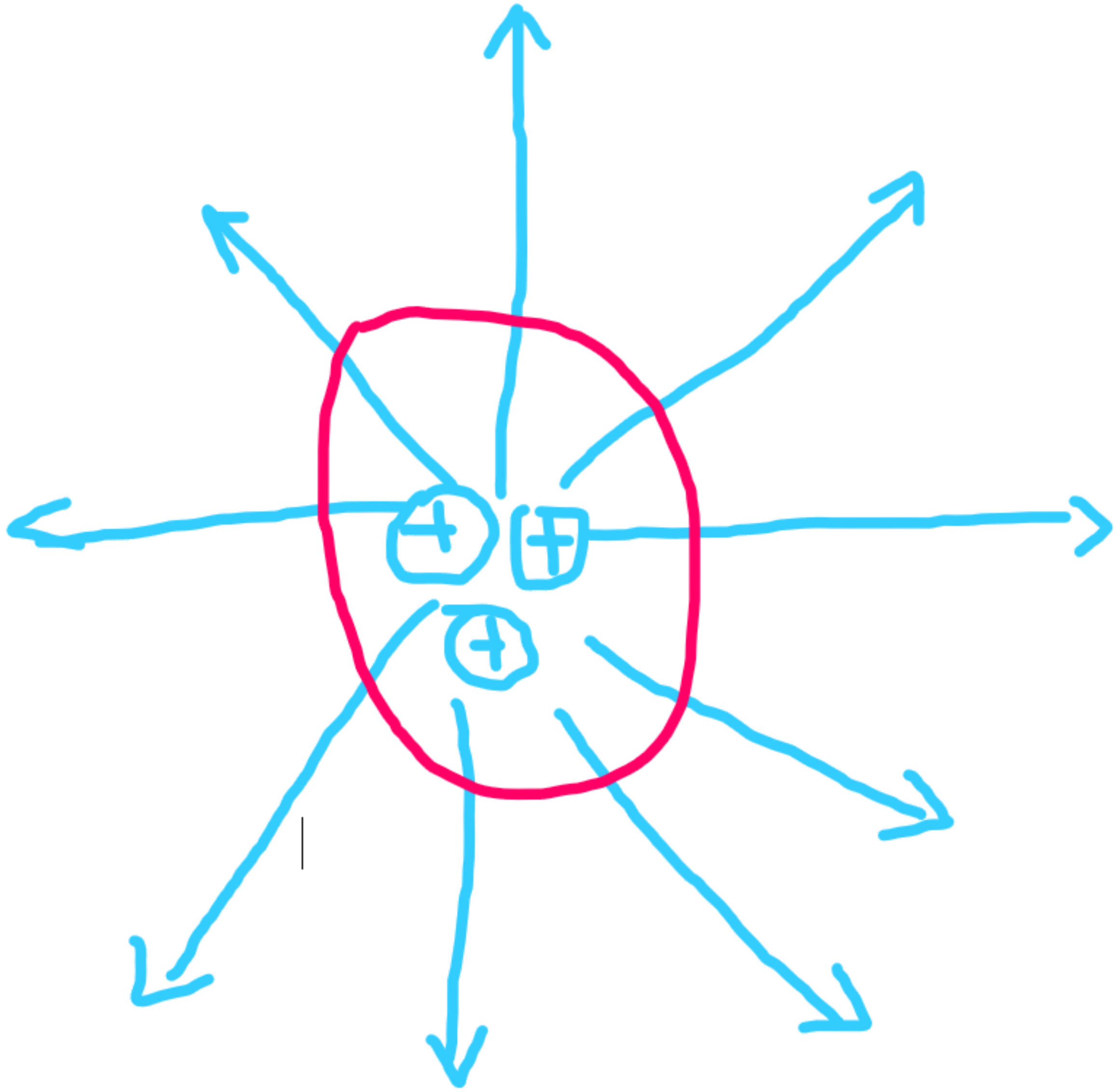
相比较于 dEdx $\frac{dE}{dx}$\frac{dE}{dx} 来说，对电场求散度的物理意义更加明显：电场的散度即反映的单位体积内的净电荷量，我们从此进一步分析。

既然要反映电场散度与电荷量的关系，我们可以有更好的选择：

$$\nabla \bullet \overline{D} = \rho$$

没有系数、一对一的映射使得**电通量密度**（D）的引入对于分析物理意义具有绝佳的表示。（我没有记错的话，国内教材叫做电位移矢量，但我更喜欢称之为电通量密度，因为其单位为 C/m2C/m^{2}C/m^{2}，这难道不是密度的单位吗？）

该式的物理意义是：单位体积内，对电通量密度求散度，结果为单位体积内的电荷量，换句话说，**电通量密度的源是电荷**。我们可以考虑以下物理图像：



电荷是电通量密度的源

其中矢量线我们可以看成是D，D和E在线性各向同性介质中的关系：

$$\overrightarrow{D} = \varepsilon_s \overrightarrow{E}$$

所以我们的推导过程可以变成这样：

$$\because \overrightarrow{D} = \varepsilon_s \overrightarrow{E}$$

$$\therefore \nabla \bullet \overrightarrow{D} = \rho$$

$$\therefore \nabla \bullet (\varepsilon_s \overrightarrow{E}) = \rho$$

$$\therefore \nabla \bullet \overrightarrow{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_s}$$

$$\therefore \nabla \bullet \overrightarrow{E} = \frac{q}{\varepsilon_s}(p - n + N_D - N_A)$$

$$(\text{一维情况下})\frac{d\mathrm{E}}{dx} = \frac{q}{\varepsilon_s}(p - n + N_D - N_A)$$

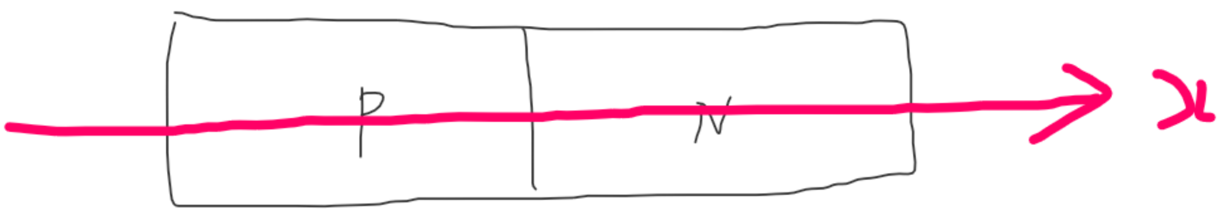
我们再看看泊松方程：右边第一项q来自电荷量，介电常数来自电通量密度与电场的映射关系，从直观来看，该式反映的就是一句话：电场（or电通量密度，两者从某种角度上可以理解为反映着同一种东西）的源是电荷，**如果是记公式的话，就记住：泊松方程表示的是，单位体积内对电通量密度（电位移）求散度，结果为体积内的电荷。（你能根据这句话写出泊松方程吗？）**

除了上面从电磁学理论出发的分析，该式从数学上也可以看成：**电场与位置的函数关系**，通过解泊松方程，便可以得到随着位置变化时，电场、电势的变化情况。这对后面分析器件的电势电场分布非常有用。

到这里再举几个简化泊松方程求解的例子。

第一个简化是前面提到的，**一维化**。

一维化对应于我们研究PN结与BJT，我们假设y方向掺杂浓度是一样的，x方向允许有所变化，根据具体情况而定。这可以极大简化我们的求解过程，毕竟多一个维度、图像就需要用三维坐标系来表示了，难度大了，意义却不大（手算）。



第二个简化是对PN结耗尽区的假设，即**耗尽近似**。

泊松方程可以简化为：

$$\frac{d\mathrm{E}}{dx}=\frac{q}{\varepsilon_s}(N_D)$$

$$\frac{d\mathrm{E}}{dx}=\frac{q}{\varepsilon_s}(-N_A)$$

该简化用于研究耗尽区内电场分布，极易求解。