

欧拉表示 (Eulerian Representations)

欧拉表示是一种通过记录固定空间网格位置处的动态信息来描述场景运动的方式。它广泛应用于流体动力学、场景建模等领域。

1. 定义

欧拉表示在固定的网格点（例如空间中的特定位置）上记录动态属性随时间的变化。例如：

- 在流体动力学中，记录每个固定网格点的速度、密度、压力等随时间的变化。
- 在动态场景建模中，记录像素或体素值（例如颜色、密度）随时间的变化。

数学上，欧拉表示的运动方程可以描述为：

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \phi = S(\phi) \quad (1)$$

- ϕ ：待描述的动态场属性（如密度、颜色等）。

- \mathbf{v} : 场的速度向量。
 - $\nabla\phi$: 场在空间中的梯度，表示属性的空间变化。
 - $S(\phi)$: 源项，表示系统中额外的属性变化（如外力或能量输入）。
-

2. 特点

优点

1. 固定网格计算便捷:

- 使用固定网格记录动态变化，可以通过有限差分或有限元方法直接求解。

2. 适合全局场景建模:

- 能够描述整个场景的宏观变化，适用于流体场等连续系统的动态建模。

3. 计算效率较高:

- 通过网格分解，可以降低问题的自由度，从而优化计算性能。

缺点

1. 无法跟踪个体运动：

- 欧拉表示记录的是固定网格点的属性变化，无法直接描述粒子或个体物体的运动轨迹。

2. 细节保留能力不足：

- 对于形变复杂或非刚性的动态场景，可能因网格分辨率不足而丢失细节。

3. 处理非刚性场景困难：

- 对于场景中的非刚性变化（如人体运动或柔性物体），难以准确描述物体的相对运动。

3. 欧拉表示的应用

在动态场景重建中，欧拉表示通常用于基于网格的模型，以下为典型应用场景：

(1) 4D 网格分解

动态场景被分解为 x 、 y 、 z 和时间 t 维的网格。在每个网格点上记录场属性（如颜色、深度），随时间步更新。例如：

- HexPlane【文献 5】和 K-Planes【文献 10】使用4D网格分解对动态场景进行建模和优化。

(2) 动态体素 (Dynamic Voxel)

通过体素化场景，在每个体素中记录动态变化的属性（如密度或光照值）。例如：

- SudS【文献 36】通过体素哈希加速动态场景的建模。

(3) 新视角合成

在固定网格上描述动态属性（如颜色、密度）的变化，以生成未见视角的图像。

4. 欧拉表示的公式描述

在固定网格 \mathbf{x} 上记录动态属性 $\phi(\mathbf{x}, t)$ ，其演化可以通过以下控制方程描述：

(1) 连续性方程 (Continuity Equation)

描述质量守恒：

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (2)$$

- ρ : 密度。

- \mathbf{v} : 速度向量。

(2) 动量方程 (Momentum Equation)

描述动量守恒:

$$\frac{\partial(\rho \mathbf{v})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \mathbf{v}^\top) = -\nabla p + \mathbf{f} \quad (3)$$

- p : 压力。
- \mathbf{f} : 外力。

(3) 能量方程 (Energy Equation)

描述能量守恒:

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \nabla \cdot ((E + p) \mathbf{v}) = Q \quad (4)$$

- E : 总能量。
- Q : 能量输入。

5. 欧拉表示的局限性

1. 粒子对应问题:

- 欧拉表示描述的是网格点的变化，无法直接跟踪个体物体或粒子的运动路径。
- 对于动态场景中的复杂运动，需要额外处理（如光流计算）来获取粒子对应关系。

2. 非刚性场景建模：

- 对形变复杂或局部运动较大的场景（如人体动作、柔性物体），欧拉表示可能丢失运动细节。

3. 高维计算复杂性：

- 在4D或更高维场景中（例如体素），存储和计算代价迅速增加。

6. 示例对比

特性	欧拉表示	拉格朗日表示
运动描述	固定网格上的变化	跟踪粒子的运动路径
细节捕获	易丢失运动细节	粒子级别的细粒度捕获
适用场景	流体场、全局动态描述	个体运动场景、粒子轨迹跟踪
计算复杂性	高维网格计算复杂	粒子数较大时复杂性增加

总结

欧拉表示在全局场景动态描述中非常高效，但对细粒度动态细节的捕获能力不足。本文选择拉格朗日表示，通过动态3D高斯粒子改进了粒子级别的描述能力，补充了欧拉表示的不足。

如果需要深入公式推导或与拉格朗日表示的进一步对比，请告诉我！