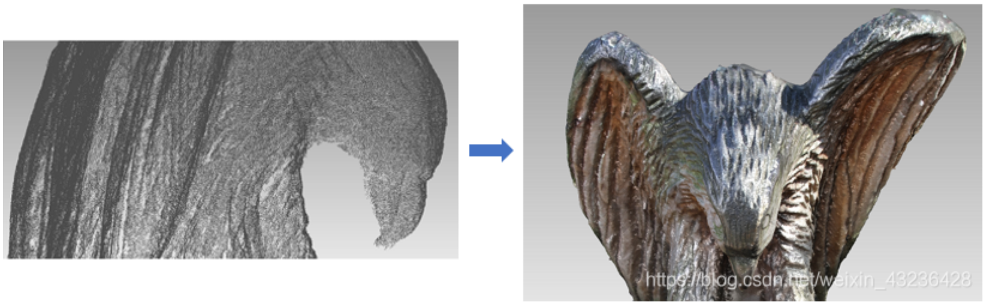
# 泊松重建（Poisson Surface Reconstruction）

### 简介

泊松重建是Michael Kazhdan等在2006年提出的网格重建方法，其文章题目为“**Poisson Surface Reconstruction**”。
Poisson-Rec的输入是带有法向量属性的 点云 数据（也可以有RGB信息），输出是三角网格模型，下面来直观的感受一下泊松重建的输入和输出：




### 表面重建流程：

**1**、构建八叉树：采用的是自适应的空间网格划分的方法（根据点云的密度调整网格的深度），根据采样点集的位置定义八叉树，然后细分八叉树使每个采样点都落在深度为D的叶节点；
**2**、设置函数空间：对八叉树的每个节点设置空间函数 F，所有节点函数 F 的线性和可以表示向量场 V，基函数F采用了盒滤波的n维卷积；
**3**、创建向量场：均匀采样的情况下，假设划分的块是常量，通过向量场 V 逼近指示函数的梯度。采用三次条样插值（三线插值）；
**4**、求解泊松方程：方程的解采用拉普拉斯矩阵迭代求出；
**5**、提取等值面：为得到重构表面，需要选择阈值获得等值面；先估计采样点的位置，然后用其平均值进行等值面提取，然后用 Marching Cubes（移动立方体）算法得到等值面。

### 算法原理

Possion-Rec是一个非常直观的方法。它的核心思想是点云代表了物体表面的位置，其法向量代表了内外的方向。通过隐式地拟合一个由物体派生的指示函数，可以给出一个平滑的物体表面的估计。
给定一个区域 M 及其边界 ∂M ，指示函数 χM 定义为：

$$\chi_M(x)=\begin{cases}1 & x\in M\\ 0 & x\notin M\end{cases}$$

这样，把重构 S = ∂M 的问题转换为重构 χM 的问题。
作者给出了将点云及其法向量和 χM 联系起来的公式，下图非常形象地描述了这二者的联系。

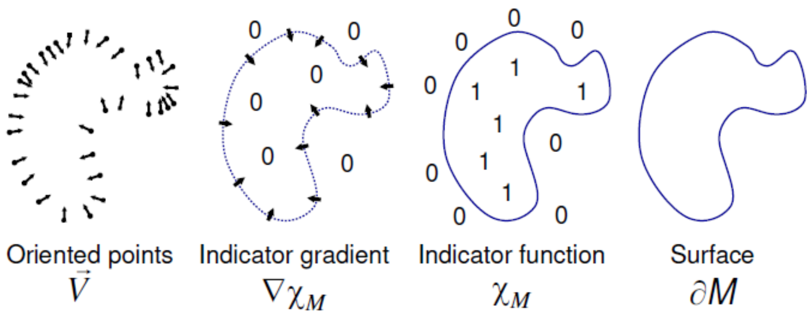



**Figure 1:** *Intuitive illustration of Poisson reconstruction in 2D.*

这个指示函数是个分段函数，定义模型内部的值大于0，外部的值小于0，而为0的部分即为等值面，提取出来就是几何目标模型的表面。

### 基本思路

由**梯度关系**得到采样点和指示函数的**积分关系**，根据**积分关系**利用划分块的方法获得点集的**向量场**，计算指示函数**梯度场**的逼近，构成泊松方程。根据泊松方程使用矩阵迭代求出近似解，采用移动立方体算法提取等值面，对所测数据点集重构出被测物体的模型，泊松方程在边界处的误差为零，因此得到的模型不存在假的表面框
直接计算梯度场会引起向量场在表面边缘的无穷大值。因此首先用平滑滤波卷积指示函数，然后求平滑函数的梯度场。
**高斯散度理论：平滑指示函数的梯度等于平滑表面法向场得到的向量场**
由于曲面未知，无法直接计算表面积分，把采样点集划分为小的区域块，通过对所有块的积分求和近似计算。知道向量场V后，可求指示函数。但向量场V不可积，使用最小平方逼近理论求解，应用散度算子得到泊松方程。
泊松表面重建一次性把所有的点都考虑在内，因此对噪声点有很好的弹性。泊松方程允许的层次结构支持局部的基函数，因此对稀疏线性系统的情况有很好的支持。在此基础上描述了多尺度的空间自适应算法，其时间和空间复杂度同重建模型的大小成正比。

### 从法向量到梯度空间

对于任意点 $p\in\partial M$ ，定义$\vec{N}_{\partial M}(p)$为向内的表面法向量，$\tilde{F}(q)$为一个平滑滤波器，$\tilde{F}_p(q)=\tilde{F}(q-p)$为$\tilde{F}$沿p方向的平移。因为 $\chi M$ 一般意义上是不好求导的，这里用 $\chi M*\tilde{F}$ 的导数来近似

$$\nabla(\chi_M*\tilde{F})(q_0)=\int_{\partial M}\tilde{F}_p(q_0)\vec{N}_{\partial M}(p)dp \quad (1)$$

**梯度空间的近似**

由于$\vec{N}\ \partial M(p)$的分布是未知的，需要通过观测$P = (pi, ni)$来近似。考虑离散点集 $\Omega$，$\partial M$被分割为互不相交的区域 $\wp s, s \in \Omega \wp s, s \in \Omega$。（1）可以转化为积分求和，并将每个小积分近似为常函数（可对照上图中的第二副图），用代表点$s.p$对应的函数值和$\wp s$的面积的积分代替：

$$\nabla(\chi_M * \tilde{F})(q) = \sum_{s\in\Omega}\int_{\wp_s} \tilde{F}_p(q)\vec{N}_{\partial M}(p)dp$$
$$\approx \sum_{s\in\Omega}|\wp_s|\tilde{F}_{s.p}(q)s.\vec{n} \equiv \vec{V}(q) \quad (2)$$

这里希望平滑滤波器$F$ 能够尽量地窄，不过分平滑数据，同时尽量地宽，使得积分近似能够更准确。高斯滤波器是一种常见的选择。

**求解泊松问题**

向量空间 $\vec{V}$ 和指示函数 $\chi$ 满足

$$\nabla\tilde{\chi} = \vec{V} \quad (3)$$

然而，$\vec{V}$ 向量场通常意义上是没法积分的。为了得到(3)式的最小二乘解，将(3)式两边求导，就得到了拉普拉斯方程：

$$\Delta\tilde{\chi} = \nabla\cdot\vec{V} \quad (4)$$

作者有一个预设，且有一系列数学的证明，证明了指示函数的梯度等于结合表面法线场计算得到的向量场。这也是高斯散度理论。(理论如此，实际是求近似）
倒三角是梯度(希望到这里你还撑的住。)
但是，指示函数不知道，梯度不知道。只能计算出向量场。所以应用散度算子这一媒介。转化成了一个泊松方程。

（倒三角和正三角什么鬼！）其中，

$$\tilde{\chi}$$

是我们想要求解出的函数，这个正三角就是，梯度的散度（也是拉普拉斯算子）
也就是 $\chi$ 梯度的散度等于向量场的散度，即：

$$\Delta\chi \equiv \nabla\cdot\nabla\chi = \nabla\cdot\vec{V}$$

解这个泊松方程就能找到指示函数。方程的解采用拉普拉斯矩阵迭代求出

**梯度与散度补充：**

1. 哈密尔顿算子：$\nabla$ -nabla

在介绍梯度等概念之前，首先引入CFD非常常见的运算符之一：$\nabla$，它是某一物理量在三个坐标方向的偏导数的矢量和，定义如下：

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}$$

2. 梯度（Gradient）

当 $\nabla$ 作用于标量 $s$ 时即可得到该标量在空间中的梯度，下面列出了CFD中梯度的各种表达形式：

$$grad\ s = \nabla\cdot s = \nabla s = \frac{\partial s}{\partial x_i} = \frac{\partial s}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial s}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial s}{\partial z}\mathbf{k}$$

可以看出***标量场的梯度是一个矢量场***，它表示$s$ 在空间某一位置沿某一方向的变化量。如果想要的到 $s$ 在某一特定方向 $\mathbf{e}_l$（方向 $l$ 上的单位矢量）上的梯度，即方向导数，则可以根据矢量点乘的几何意义来进行计算：

$$\frac{ds}{dl} = \nabla s\cdot\mathbf{e}_l = \|\nabla s\| cos(\nabla s, \mathbf{e}_l)$$

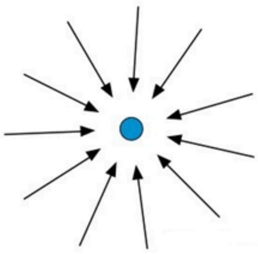
由此可见，当 $cos(\nabla s, \mathbf{e}_l) = 1$，即空间任意方向 $l$ 与梯度方向一致时沿该方向具有最大梯度，因此 $\nabla s$ 代表了空间中任意点上梯度变化最大的方向和变化量，而且 $\nabla s$ 垂直于该点处的等值线或等值面。

3. 散度

根据矢量点乘的运算规则，$\nabla$ 与一个矢量的点乘是一个标量，它代表了矢量场的散度：

$$div\ \mathbf{v} = \nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

可以看出矢量的散度是一个标量，在CFD中它表示空间中某一区域流入或流出的矢量的多少，比较典型的例子有点源或者点汇。如下图是一个点汇，周围的矢量均流向该点。



点汇周围的矢量场（旋度为0）

• 标量的梯度为矢量，因此对该矢量可以继续求散度，从而引入拉普拉斯算子 $\nabla^2$ ：

$$\nabla \cdot (\nabla s) = \nabla^2 s = \frac{\partial^2 s}{\partial x_i^2} = \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial z^2}$$

上式代表了梯度的散度，可以看出标量经过拉普拉斯算子运算以后仍然是标量。

• 矢量的散度为标量，因此对该标量可以继续求梯度：

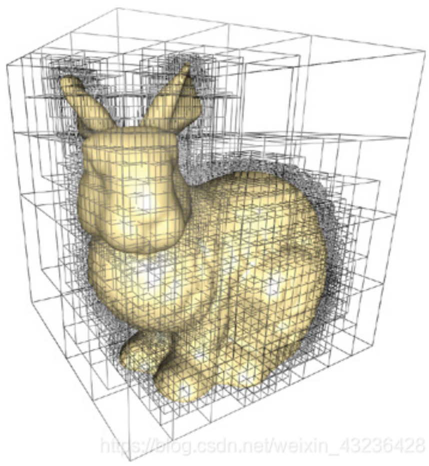
$$\nabla \cdot (\nabla \cdot \mathbf{v}) = \nabla^2 \mathbf{v} = \nabla^2 u_i = (\nabla^2 u)\mathbf{i} + (\nabla^2 v)\mathbf{j} + (\nabla^2 w)\mathbf{k}$$



**具体实现**

**空间划分**

作者采用了一种自适应的网格结构octree来划分空间，并且octree上定义了一个函数空间$F_o$。下图给出了octree在三维空间对一个物体的划分,物体边缘的网格密度远大于远离物体的网格密度。



**空间上的基函数选择**

如何选择函数空间$F_o$实际上挺有学问的。因为$F_o$一旦给定，定义在这个octree上的向量空间$\vec{V}$和指示函数$\chi$都会通过$F_o$的线性组合去近似。这样，求解$\chi$就转化为求解$F_o$上的参数组合，进而转化为求解一个线性方程组。

给定octree的深度$D$，作者根据选择了下面的基函数$F$：

$$F(x,y,z) \equiv (B(x)B(y)B(z))^{*n}$$

$$B(t) = \begin{cases} 1 & |t| < 0.5 \\ 0 & other \end{cases}$$

$*n$代表n次卷积。当$n$趋向于无穷时，$F$趋向于高斯函数，它的定义域也越来越大。当$n = 3$时，定义域为$[-1.5, 1.5]^3$。

octree上某个节点o对应的函数$F_o$定义为：

$$F_0(q) \equiv F\left(\frac{q - o.c}{o.w}\right)\frac{1}{(o.w)^3}$$

其中$o.c$是的o中心，$o.w$是o的宽度。假设根节点（第0层）的宽度为$W$，那么第$d$层节点的宽度为$W/2^d$。这个函数空间和小波空间很像。

**Poisson求解**

（坚持一下，就快讲完了！）

Poisson求解的方法是$L2$投影。定义octree的节点集合为$O$。向量空间$\vec{V}$可以近似为：

$$\vec{V}(q) \equiv \sum_{s \in S} \sum_{o \in Ngbr_D(s)} \alpha_{o,s} F_o(q) s.\vec{N}$$

其中，$\mathrm{NgbrD(s)}$是s的八个最近邻的叶节点，$\alpha\mathrm{o,s}$是三线性插值的权重

虽然$\mathrm{V}^{\cdot}$和$\chi$都可以在函数空间上表示出来，$\Delta\chi$和$\nabla\cdot\mathrm{V}^{\cdot}$ 却未必有定义。因此将(4)近似为最小化其在$\mathrm{F}\ \mathrm{o}$上的投影：

$$\sum_o \left\| \left\langle \Delta\tilde{\chi} - \nabla\cdot\vec{V}, F_o \right\rangle \right\|^2 = \sum_o \left\| \left\langle \Delta\tilde{\chi}, F_o \right\rangle - \left\langle \nabla\cdot\vec{V}, F_o \right\rangle \right\|^2$$

令

$$\tilde{\chi} = \sum_o x_o F_o$$

那么求解$\chi$即是求解$\mathrm{xo}$

$$\left\langle \Delta\tilde{\chi}, F_{o'} \right\rangle = \sum_o x_o \left\langle \Delta F_o, F_{o'} \right\rangle$$

$$\sum_o \left\| \left\langle \Delta\tilde{\chi}, F_o \right\rangle - \left\langle \nabla\cdot\vec{V}, F_o \right\rangle \right\|^2 = \sum_{o'} \left\| \sum_o x_o \left\langle \Delta F, F_{o'} \right\rangle - \left\langle \nabla\cdot\vec{V}, F_{o'} \right\rangle \right\|^2$$

对上式右边$\mathrm{x} = \mathrm{x0}$求偏导得，

$$\min_x \left\| Lx - v \right\|^2$$

其中，设octree的节点数为$\mathrm{N}$，$\mathrm{N}\times\mathrm{N}$矩阵$\mathrm{L}$在$(\mathrm{o,o\prime})$位置上的值为：

$$L_{o,o'} \equiv \left\langle \frac{\partial^2 F_o}{\partial x^2}, F_{o'} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial^2 F_o}{\partial y^2}, F_{o'} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial^2 F_o}{\partial z^2}, F_{o'} \right\rangle$$

**表面提取**

用Marching Cubes类似的方法。注意 iso（等值面） 的值取自S个划分的平均，作者还讨论了非均匀采样下的算法。