矩阵基础 | 矩阵特殊乘积运算

Author: [达布牛学习笔记]

Link: [https://zhuanlan.zhihu.com/p/280898025]

本文主要总结矩阵内积、Hadamard积、Kronecker积与Khatri-Rao积,以帮助读者区分不同的矩阵乘积运算。

矩阵内积

在许多数学场景中,将向量理解为一种特殊的矩阵,能够帮助我们更好的理解某些知识。因此,在介绍 矩阵内积之前,我们先来简单回顾一下向量内积的概念。

向量内积

先给出向量内积的公式:

 $< x,y> = x^Ty = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ 也就是说,向量内积是**两个向量对应元素乘积之和**,结果是一个标量。接下来,为了加深理解,给出向量内积的两个最广泛的应用。

• 定义两个向量之间的夹角:

$$cos\theta = rac{< x,y>}{\sqrt{< x,x>}\sqrt{< y,y>}} = rac{x^T}{||x||\cdot||y||}$$

• 判断两个向量正交:

两个常数向量 x 和 y 称为正交,并记作 $x \perp y$,若它们的内积等于0,即 < x,y>=0

矩阵内积

将向量内积推广,即可得到矩阵内积。各位同学其实也可以参照向量内积的定义来记忆矩阵内积,即**对应元素乘积之和**。下面,给出矩阵内积的定义公式,以及它的变体。

• 令 $m \times n$ 矩阵 $A=[a_1,\cdots,a_n]$ 和 $B=[b_1,\cdots,b_n]$,将这两个矩阵分别拉长为 $mn \times 1$ 向量 a=vec(A) , b=vec(B)

vec(A) 称为矩阵的(列)向量化。则矩阵的内积为两个拉长向量之间的内积

$$< A, B> = < vec < A>, vec < B> > = \sum_{i=1}^n a_i^T b_i = \sum_{i=1}^n < a_i, b_i>$$

• 也可等价写作

$$=vec(A)^Tvec(B)=tr(A^TB)$$
 式中 $tr(C)$ 表示正方矩阵 C 的迹函数,定义为该矩阵对角元素之和。

Hadamard积

 $m \times n$ 矩阵 $A = [a_{ij}]$ 和 $B = [b_{ij}]$ 的 Hadamard 积记作 A * B ,它仍然是一个 $m \times n$ 矩阵,其元素定义为两个矩阵对应元素的乘积。

与矩阵的直和运算类似,矩阵直和定义为两个矩阵矩阵对应元素的和。但要注意,Hadamard 积并不称为直积,直积是我们接下来马上要看到的Kronecker积。

Hadamard 积公式表示如下:

$$(A*B)_{ij} = a_{ij}b_{ij}$$

矩阵的 Hadamard 积在有损压缩算法 (例如IPEG) 中被使用。

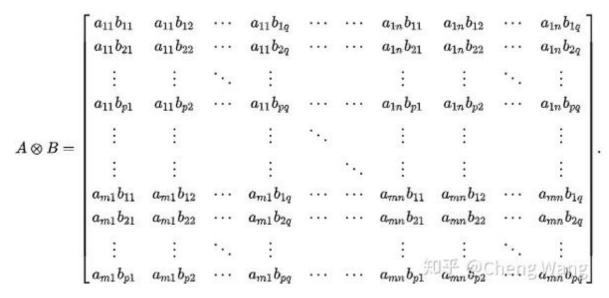
Kronecker积

两个矩阵的 Kronecker 积分为右 Kronecker 积和左 Kronecker 积。鉴于通常多采用右 Kronecker 积,**通常所说的** Kronecker **积多指右** Kronecker **积**。

右 Kronecker 积定义: $m \times n$ 矩阵 $A = [a_1, \cdots, a_n]$ 和 $p \times q$ 矩阵 B 的右 Kronecker 积记作 $A \otimes B$,是一个 $mp \times nq$ 矩阵

$$A \otimes B = [a_1 B, \cdots, a_n B] = [a_{ij} B]_{i=1, j=1}^{m, n}$$

其中 $a_{ij}B$ 代表的不是一个标量,而是一个 $p \times q$ 矩阵。将上式展开如下图所示:



左 Kronecker 积定义:

$$[A \otimes B]_{left} = [Ab_1, \cdots, Ab_q] = [b_{ij}A]_{i=1,j=1}^{p,q}$$

如果我们用右 Kronecker 积的形式来表示左 Kronecker 积,则

$$[A \otimes B]_{left} = B \otimes A$$

这也是为什么通常我们所说的 Kronecker 积是指右 Kronecker 积。该积**也称直积或张量积**。

Khatri-Rao积

两个具有相同列数的矩阵 $G_{p \times n}$ 和 $F_{q \times n}$ 的 KhatriRao 积记作:

$$F\odot G=[f_1\otimes g_1,f_2\otimes g_2,\cdot\cdot\cdot,f_n\otimes g_n]\in R^{pq imes n}$$

它由两个矩阵对应的列向量的 Kronecker 积排列而成。因此, KhatriRao 积又叫做对应列Kronecker 积。

本文仅对不同的矩阵乘积做了简单的整理,旨在帮助读者加强记忆。本文参考自《矩阵分析与应用》第二版。