机器人学之动力学笔记【11】—— 拉格朗日 动力学方程

1. 拉格朗日法

之前我们学习了如何使用牛顿-欧拉法（基于力和力矩分析）建立机械臂的动力学方程，这一节要学习拉格朗日法（基于能量分析）建立机械臂的动力学方程。

- Kinetic energy

$$k_i = \frac{1}{2} m_i v_{C_i}^T v_{C_i} + \frac{1}{2}\ {}^i\omega_i^T\ {}^{C_i}I_i\ {}^i\omega_i$$

$$k = \sum_{i=1}^{n} k_i \qquad k = k(\Theta, \dot{\Theta}) = \frac{1}{2}\dot{\Theta}^T \mathrm{M}(\Theta)\dot{\Theta}$$

动能
每一个杆件的动能 = 移动动能 + 转动动能
整个系统动能 = 所有杆件动能之和
动能是角度和角速度的函数，写成通用矩阵式

- Potential energy

$$u_i = -m_i\ {}^0g^T\ {}^0P_{C_i} + \underbrace{u_{ref_i}}_{\text{Shift the zero reference height}}$$

$$u = \sum_{i=1}^{n} u_i \qquad u = u(\Theta)$$

势能
每个杆件的势能 = 每个杆件的重力势能 + 零势能点
整个系统势能 = 所有杆件势能之和
势能是角度的函数

- Lagrangian

$$\mathcal{L}(\Theta, \dot{\Theta}) = k(\Theta, \dot{\Theta}) - u(\Theta)$$

定义 Lagrangian 表达式

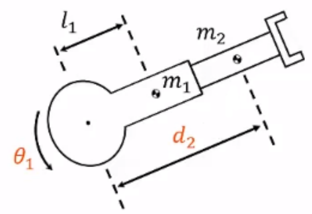
- Equation of motion for the manipulator

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\Theta}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Theta} = \tau$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial k}{\partial \dot{\Theta}} - \frac{\partial k}{\partial \Theta} + \frac{\partial u}{\partial \Theta} = \tau$$

定义运动方程表达式：Lagrangian 对 θ(dot) 求偏导后求微分 - Lagrangian 对 θ 求偏导
展开后就是第二个式子

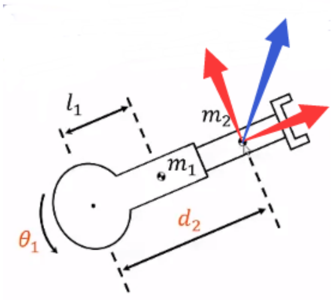
2. 举例：An RP Manipulator



$${}^{C_1}I_1 = \begin{bmatrix} I_{xx1} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy1} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz1} \end{bmatrix}$$

$${}^{C_2}I_2 = \begin{bmatrix} I_{xx2} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy2} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz2} \end{bmatrix}$$

第一个杆件的速度 $l_1\dot{\theta}_1$ ，则移动动能 = $\frac{1}{2}m_1 l_1^2\dot{\theta}_1^2$



第二个杆的移动动能要注意，一个分量是由 $\dot{\theta}_1$ 造成的，另一个分量是由 $\dot{d}_2$ 造成的，所以移动动能是 $\frac{1}{2}m_2(d_2^2\dot{\theta}_1^2+\dot{d}_2^2)$

- Kinetic energy

$$k_1=\frac{1}{2}m_1 l_1^2\dot{\theta}_1^2+\frac{1}{2}I_{zz1}\dot{\theta}_1^2$$

$$k_2=\frac{1}{2}m_2(d_2^2\dot{\theta}_1^2+\dot{d}_2^2)+\frac{1}{2}I_{zz2}\dot{\theta}_1^2$$

$$k(\Theta,\dot{\Theta})=\frac{1}{2}(m_1 l_1^2+I_{zz1}+I_{zz2}+m_2 d_2^2)\dot{\theta}_1^2+\frac{1}{2}m_2\dot{d}_2^2$$

- Potential energy

$$u_1=m_1 g l_1 sin\theta_1+\boxed{m_1 g l_1}$$

$$u_2=m_2 g d_2 sin\theta_1+\boxed{m_2 g d_{2max}}$$

让机械臂位姿最低状态时重力势能为零

$$u(\Theta)=(m_1 l_1+m_2 d_2)g sin\theta_1+\underline{m_1 g l_1+m_2 g d_{2max}}$$

Shift the zero reference height

有了动能有了位能之后，直接代入拆解后的各个部分计算

- Lagrangian

$$\frac{\partial k}{\partial\dot{\Theta}}=\begin{bmatrix}(m_1 l_1^2+I_{zz1}+I_{zz2}+m_2 d_2^2)\dot{\theta}_1\\ m_2\dot{d}_2\end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial k}{\partial\Theta}=\begin{bmatrix}0\\ m_2\dot{d}_2\ \dot{\theta}_1^2\end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial u}{\partial\Theta}=\begin{bmatrix}(m_1 l_1+m_2 d_2)g cos\theta_1\\ m_2 g\sin\theta_1\end{bmatrix}$$

作微分时要注意 d2也是时间的变量，不要遗漏

整理出来

- Equations of motion

$$\tau_1=(m_1 l_1^2+I_{zz1}+I_{zz2}+m_2 d_2^2)\ddot{\theta}_1+2m_2 d_2\dot{\theta}_1\dot{d}_2 \\ +(m_1 l_1+m_2 d_2)g cos\theta_1$$

$$\tau_2=m_2\ddot{d}_2-m_2 d_2\dot{\theta}_1^2+m_2 g sin\theta_1$$

利用 State-Space representation 拆开理解

state-space representation

$$\tau=M(\Theta)\ddot{\Theta}+V(\Theta,\dot{\Theta})+G(\Theta)$$

$$M(\Theta)=\begin{bmatrix}m_1 l_1^2+I_{zz1}+I_{zz2}+m_2 d_2^2 & 0\\ 0 & m_2\end{bmatrix}$$

$$V(\Theta,\dot{\Theta})=\begin{bmatrix}2m_2 d_2\dot{\theta}_1\dot{d}_2\\ -m_2 d_2\dot{\theta}_1^2\end{bmatrix}$$

$$G(\Theta)=\begin{bmatrix}(m_1 l_1+m_2 d_2)g cos\theta_1\\ m_2 g sin\theta_1\end{bmatrix}$$

3. 转换到笛卡尔空间下

我们写出来的动力学方程是 joint space 下的方程式，也就是我们知道了每个手臂关节的状态 $\Theta, \dot{\Theta}, \ddot{\Theta}$ 就可以知道达成这个运动状态所需要的关节的扭力是多少。

在笛卡尔空间下面，在看末端点的加速度状态的时候，末端点的加速度和力的关系是什么？那现在就可以使用之前学习过的雅克比矩阵把本来的方程式转换到笛卡尔空间下面的运动方程式

$$\tau = J^T(\Theta)F$$

$$F = J^{-T}\tau = J^{-T}M(\Theta)\ddot{\Theta} + J^{-T}V(\Theta,\dot{\Theta}) + J^{-T}G(\Theta)$$

$$\dot{X} = J\dot{\Theta} \qquad \ddot{X} = \dot{J}\dot{\Theta} + J\ddot{\Theta} \qquad \ddot{\Theta} = J^{-1}\ddot{X} - J^{-1}\dot{J}\dot{\Theta}$$

之前学过，joint torque 和 end effector 的 force 之间存在一个雅克比矩阵

$$\begin{aligned} F &= J^{-T}M(\Theta)J^{-1}\ddot{X} - J^{-T}M(\Theta)J^{-1}\dot{J}\dot{\Theta} + J^{-T}V(\Theta,\dot{\Theta}) + J^{-T}G(\Theta) \\ &= M_x(\Theta)\ddot{X} + V_x(\Theta,\dot{\Theta}) + G_x(\Theta) \end{aligned}$$

$$M_x(\Theta) = J^{-T}(\Theta)M(\Theta)J^{-1}(\Theta)$$

$$V_x(\Theta,\dot{\Theta}) = J^{-T}(\Theta)\left(V(\Theta,\dot{\Theta}) - M(\Theta)J^{-1}(\Theta)\dot{J}(\Theta)\dot{\Theta}\right)$$

$$G_x(\Theta) = J^{-T}(\Theta)G(\Theta)$$

整理出来得到上式，再拆解开来。

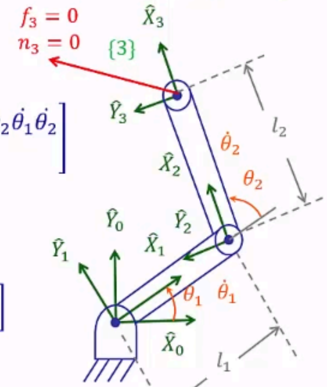
重新回看之前双旋转自由度机械臂的例子，之前是用牛顿-欧拉法去做，并且找到了一下三个矩阵

- In joint space

$$M(\Theta) = \begin{bmatrix} l_2^2 m_2 + 2l_1 l_2 m_2 c_2 + l_1^2(m_1+m_2) & l_2^2 m_2 + l_1 l_2 m_2 c_2 \\ l_2^2 m_2 + l_1 l_2 m_2 c_2 & l_2^2 m_2 \end{bmatrix}$$

$$V(\Theta,\dot{\Theta}) = \begin{bmatrix} -m_2 l_1 l_2 s_2 \dot{\theta}_2^2 - 2m_2 l_1 l_2 s_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \\ m_2 l_1 l_2 s_2 \dot{\theta}_1^2 \end{bmatrix}$$

$$G(\Theta) = \begin{bmatrix} m_2 l_2 g c_{12} + (m_1+m_2) l_1 g c_1 \\ m_2 l_2 g c_{12} \end{bmatrix}$$



我们现在想做的事是把它换到笛卡尔空间下面，在机器人学之运动学笔记【8】—— 微分运动学中我们已经得到了雅克比矩阵 *J(θ)*，所以它的逆矩阵和导数如下：

Jacobian

$$J(\Theta) = \begin{bmatrix} l_1 s_2 & 0 \\ l_1 c_2 + l_2 & l_2 \end{bmatrix} \qquad J^{-1}(\Theta) = \frac{1}{l_1 l_2 s_2}\begin{bmatrix} l_2 & 0 \\ -l_1 c_2 - l_2 & l_1 s_2 \end{bmatrix}$$

$$\dot{J}(\Theta) = \begin{bmatrix} l_1 c_2 \dot{\theta}_2 & 0 \\ -l_1 s_2 \dot{\theta}_2 & 0 \end{bmatrix}$$

然后就是代公式，找到这个机械臂在笛卡尔空间下面的表达法：

- In Cartesian space

$$M_x(\Theta) = J^{-T}(\Theta)M(\Theta)J^{-1}(\Theta) = \begin{bmatrix} m_2 + \frac{m_1}{s_2^2} & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} V_x(\Theta,\dot{\Theta}) &= J^{-T}(\Theta)\left(V(\Theta,\dot{\Theta}) - M(\Theta)J^{-1}(\Theta)\dot{J}(\Theta)\dot{\Theta}\right) \\ &= \begin{bmatrix} -(m_2 l_1 c_2 + m_2 l_2)\dot{\theta}_1^2 - m_2 l_2 \dot{\theta}_2^2 - (2m_2 l_2 + m_2 l_1 c_2 + m_1 l_1 \frac{c_2}{s_2^2})\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \\ m_2 l_1 s_2 \dot{\theta}_1^2 + m_2 l_1 s_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$G_x(\Theta) = J^{-T}(\Theta)G(\Theta) = \begin{bmatrix} m_1 g \frac{c_1}{s_2} + m_2 g s_{12} \\ m_2 g c_{12} \end{bmatrix}$$

像之前一样将科式力和离心力也拆解出来，拆解的更彻底一点

- In Cartesian space

$$\tau = J^T(\Theta)F = J^T(\Theta)(M_x(\Theta)\ddot{X} + V_x(\Theta,\dot{\Theta}) + G_x(\Theta))$$

$$\tau = J^T(\Theta)M_x(\Theta)\ddot{X} + B_x(\Theta)[\dot{\Theta}\dot{\Theta}] + C_x(\Theta)[\dot{\Theta}^2] + G(\Theta)$$

$$\Rightarrow \quad J^T(\Theta)V_x(\Theta,\dot{\Theta}) = B_x(\Theta)[\dot{\Theta}\dot{\Theta}] + C_x(\Theta)[\dot{\Theta}^2]$$

代入求解:

$$J^T(\Theta)V_x(\Theta,\dot{\Theta}) = B_x(\Theta)[\dot{\Theta}\dot{\Theta}] + C_x(\Theta)[\dot{\theta}^2]$$

$$= \begin{bmatrix} l_1 s_2 & l_1 c_2 + l_2 \\ 0 & l_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -(m_2 l_1 c_2 + m_2 l_2)\dot{\theta}_1{}^2 - m_2 l_2 \dot{\theta}_2{}^2 - (2m_2 l_2 + m_2 l_1 c_2 + m_1 l_1 \frac{c_2}{s_2{}^2})\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \\ m_2 l_1 s_2 \dot{\theta}_1{}^2 + l_1 m_2 s_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}$$

$$B_x(\Theta) = \begin{bmatrix} -m_1 l_1{}^2 \frac{c_2}{s_2} - m_2 l_1 l_2 s_2 \\ m_2 l_1 l_2 s_2 \end{bmatrix}$$

$$C_x(\Theta) = \begin{bmatrix} 0 & -m_2 l_1 l_2 s_2 \\ m_2 l_1 l_2 s_2 & 0 \end{bmatrix}$$

4. 考虑能量损耗

- Viscous friction

$$\tau_{friction} = v\dot{\theta}$$

- Coulomb friction

$$\tau_{friction} = c\ sgn\dot{\theta}$$

$\dot{\theta} = 0$, $c =$ "static coefficient"

$\dot{\theta} \neq 0$, $c =$ "dynamic coefficient"

注意:

我们在推导拉格朗日方程的时候认为力做的功都转换为了动能和势能，过程中没有损耗。但是在实际机械臂中，没有摩擦是不可能的。这里引入阻尼力损耗的概念，那另外一个就是库仑摩擦，基本上是一个定值，但是它在静止时和运动时是不一样的，分为静摩擦和动摩擦