矩阵基础 | 矩阵特殊乘积运算

Author: [达布牛学习笔记]

Link: [https://zhuanlan.zhihu.com/p/280898025]

> 本文主要总结矩阵内积、Hadamard积、Kronecker积与Khatri-Rao积，以帮助读者区分不同的矩阵乘积运算。

矩阵内积
在许多数学场景中，将向量理解为一种特殊的矩阵，能够帮助我们更好的理解某些知识。因此，在介绍矩阵内积之前，我们先来简单回顾一下向量内积的概念。

向量内积

先给出向量内积的公式：

$<x,y>=x^Ty=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i$ 也就是说，向量内积是**两个向量对应元素乘积之和**，结果是一个标量。接下来，为了加深理解，给出向量内积的两个最广泛的应用。

- 定义两个向量之间的夹角：
  $cos\theta=\frac{<x,y>}{\sqrt{<x,x>}\sqrt{<y,y>}}=\frac{x^T}{||x||\cdot||y||}$
- 判断两个向量正交：

> 两个常数向量 x 和 y 称为正交，并记作$x\perp y$，若它们的内积等于0，即 $<x,y>=0$

矩阵内积

将向量内积推广，即可得到矩阵内积。各位同学其实也可以参照向量内积的定义来记忆矩阵内积，即**对应元素乘积之和**。下面，给出矩阵内积的定义公式，以及它的变体。

- 令 $m\times n$ 矩阵 $A=[a_1,\cdots,a_n]$ 和 $B=[b_1,\cdots,b_n]$，将这两个矩阵分别拉长为 $mn\times 1$ 向量 $a=vec(A)$；$b=vec(B)$
  $vec(A)$ 称为矩阵的（列）向量化。则矩阵的内积为两个拉长向量之间的内积
  $<A,B>=<vec<A>,vec<B>>=\sum_{i=1}^{n}a_i^Tb_i=\sum_{i=1}^{n}<a_i,b_i>$
- 也可等价写作
  $<A,B>=vec(A)^Tvec(B)=tr(A^TB)$
  式中 $tr(C)$ 表示正方矩阵 C 的迹函数，定义为该矩阵对角元素之和。

Hadamard积

$m\times n$ 矩阵 $A=[a_{ij}]$ 和 $B=[b_{ij}]$ 的 $Hadamard$ 积记作 $A*B$，它仍然是一个 $m\times n$ 矩阵，其**元素定义为两个矩阵对应元素的乘积**。

> 与矩阵的直和运算类似，矩阵直和定义为两个矩阵矩阵对应元素的和。但要注意，$Hadamard$ 积并不称为直积，直积是我们接下来马上要看到的 $Kronecker$ 积。

$Hadamard$ 积公式表示如下：
$(A*B)_{ij}=a_{ij}b_{ij}$
矩阵的 $Hadamard$ 积在有损压缩算法（例如JPEG）中被使用。

Kronecker积

两个矩阵的 $Kronecker$ 积分为右 $Kronecker$ 积和左 $Kronecker$ 积。鉴于通常多采用右 $Kronecker$ 积，**通常所说的 $Kronecker$ 积多指右 $Kronecker$ 积。**

右 $Kronecker$ 积定义： $m \times n$ 矩阵 $A = [a_1, \cdots, a_n]$ 和 $p \times q$ 矩阵 B 的右 $Kronecker$ 积记作 $A \otimes B$，是一个 $mp \times nq$ 矩阵
$A \otimes B = [a_1 B, \cdots, a_n B] = [a_{ij} B]_{i=1,j=1}^{m,n}$
其中 $a_{ij}B$ 代表的不是一个标量，而是一个 $p \times q$ 矩阵。将上式展开如下图所示：

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} & \cdots & a_{11}b_{1q} & \cdots & \cdots & a_{1n}b_{11} & a_{1n}b_{12} & \cdots & a_{1n}b_{1q} \\ a_{11}b_{21} & a_{11}b_{22} & \cdots & a_{11}b_{2q} & \cdots & \cdots & a_{1n}b_{21} & a_{1n}b_{22} & \cdots & a_{1n}b_{2q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{11}b_{p1} & a_{11}b_{p2} & \cdots & a_{11}b_{pq} & \cdots & \cdots & a_{1n}b_{p1} & a_{1n}b_{p2} & \cdots & a_{1n}b_{pq} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}b_{11} & a_{m1}b_{12} & \cdots & a_{m1}b_{1q} & \cdots & \cdots & a_{mn}b_{11} & a_{mn}b_{12} & \cdots & a_{mn}b_{1q} \\ a_{m1}b_{21} & a_{m1}b_{22} & \cdots & a_{m1}b_{2q} & \cdots & \cdots & a_{mn}b_{21} & a_{mn}b_{22} & \cdots & a_{mn}b_{2q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}b_{p1} & a_{m1}b_{p2} & \cdots & a_{m1}b_{pq} & \cdots & \cdots & a_{mn}b_{p1} & a_{mn}b_{p2} & \cdots & a_{mn}b_{pq} \end{bmatrix}.$$

左 $Kronecker$ 积定义：
$[A \otimes B]_{left} = [Ab_1, \cdots, Ab_q] = [b_{ij} A]_{i=1,j=1}^{p,q}$
如果我们用右 $Kronecker$ 积的形式来表示左 $Kronecker$ 积，则
$[A \otimes B]_{left} = B \otimes A$
这也是为什么通常我们所说的 $Kronecker$ 积是指右 $Kronecker$ 积。该积**也称直积或张量积。**

Khatri-Rao积
两个具有相同列数的矩阵 $G_{p \times n}$ 和 $F_{q \times n}$ 的 $KhatriRao$ 积记作：
$F \odot G = [f_1 \otimes g_1, f_2 \otimes g_2, \cdots, f_n \otimes g_n] \in R^{pq \times n}$
它由两个矩阵对应的列向量的 $Kronecker$ 积排列而成。因此， $KhatriRao$ 积又叫做对应列 $Kronecker$ 积。

> 本文仅对不同的矩阵乘积做了简单的整理，旨在帮助读者加强记忆。本文参考自《矩阵分析与应用》第二版。