Analyse Mathématique

Cours n°2

EPITA Cyber 1 2024-2025

1 Sommes finies :

- Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite.

  On appelle somme partielle d'ordre n, $n \in \mathbb{N}$, de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la quantité S_n définie par
  $$s_n = \sum_{p=0}^{p=n} u_p$$

  Ici, il y a $n+1$ termes ! De 0 à n.

- Soit $n_0 \in \mathbb{N}$. Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite.

  On appelle somme partielle d'ordre n, $n \geq n_0$, de la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ la quantité S_n définie par
  $$s_n = \sum_{p=n_0}^{p=n} u_p$$

  Ici, il y a $n - n_0 + 1$ termes. En effet, on compte de n_0 à n, donc de $n_0 + 0$ à $n_0 + (n - n_0)$ c.à.d. de 0 à $n - n_0$. On a alors $n - n_0 + 1$ termes.

- Soient (u_n) et (v_n) deux suites.

  La suite, (w_n), somme des suites (u_n) et (v_n) est définie par : $\forall n \quad , \quad w_n = u_n + v_n$.

  On a alors
  $$\forall n \quad , \quad \sum_{p=0}^{p=n} w_p = \sum_{p=0}^{p=n} u_p + \sum_{p=0}^{p=n} v_p.$$

  En effet,
  $\sum_{p=0}^{p=n} w_p = \sum_{p=0}^{p=n}(u_p + v_p)$
  $= (u_0 + v_0) + (u_1 + v_1) \cdots + (u_n + v_n) = (u_0 + u_1 + \cdots + u_n) + (v_0 + v_1 + \cdots + v_n)$
  $= \sum_{p=0}^{p=n} u_p + \sum_{p=0}^{p=n} v_p$.

- Soient (u_n) une suite et $\alpha \in \mathbb{R}$.
  La suite, (w_n), produit de la suite (u_n) par le réel α est définie par : $\forall n \quad , \quad w_n = \alpha u_n$.
  On a alors,
$$\sum_{p=0}^{p=n} w_p = \alpha \sum_{p=0}^{p=n} u_p.$$
  En effet, $\sum_{p=0}^{p=n} w_p = \sum_{p=0}^{p=n} \alpha u_p = (\alpha u_0) + (\alpha u_1) + \cdots + (\alpha u_n)$
  $= \alpha(u_0 + u_1 + \cdots + u_n) = \alpha \sum_{p=0}^{p=n} u_p$.

- **Exemples :**
  1. Déterminer la somme
$$\sum_{p=0}^{p=n} (p + p^2).$$
     $\sum_{p=0}^{p=n}(p+p^2) = \sum_{p=0}^{p=n} p + \sum_{p=0}^{p=n} p^2$.

     Or on sait déjà que : $\sum_{p=0}^{p=n} p = \frac{n(n+1)}{2}$ et $\sum_{p=0}^{p=n} p^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

     Donc, $\sum_{p=0}^{p=n}(p+p^2) = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{3n(n+1)+n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$.

  2. Déterminer la somme
$$\sum_{p=0}^{p=n} 3p.$$
     $\sum_{p=0}^{p=n} 3p = 3\sum_{p=0}^{p=n} p = 3\frac{n(n+1)}{2}$.

     Car $\sum_{p=0}^{p=n} p = \frac{n(n+1)}{2}$.

- **Exercices :**
  1. Calculer la somme finie :
$$1 + 2 + \cdots + 2025.$$
  2. Calculer la somme finie :
$$1936 + 1937 + \cdots + 2025.$$
  3. On pose
$$S = 1 + \frac{1}{3} + (\frac{1}{3})^2 + (\frac{1}{3})^3 + (\frac{1}{3})^4.$$
     Déterminer $S - \frac{1}{3}S$. Puis, en déduire S.

  4. Montrer que : $1/2 = 1 - 1/2$, $1/6 = 1/2 - 1/3$, $1/12 = 1/3 - 1/4$, $1/20 = 1/4 - 1/5$.
     En déduire la somme finie : $1/2 + 1/6 + 1/12 + 1/20$

  5. Calculer la somme finie :
$$\sum_{p=1}^{p=13} \ln(\frac{p+1}{p}).$$

2 Suite arithmétique :

- (u_n) est une suite arithmétique si :

$$\exists \quad r \in \mathbb{R} \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad , \quad u_{n+1} = u_n + r$$

  r est appelé raison de la suite arithmétique (u_n).

  Il est capital d'avoir u_0 pour déterminer tous les termes de la suite.

- On a déjà vu les suites de la forme :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad , \quad u_{n+1} = au_n + b.$$

  Pour une suite arithmétique, $a = 1$ et $b = r$.

- **Exemples :**

  1. (u_n) est une suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N} \quad , \quad u_{n+1} = u_n + 7$ et $u_0 = -2$.
     (u_n) est une suite arithmétique de raison $r = 7$ et de premier terme $u_0 = -2$.
     On a alors, $u_1 = u_0 + 7 = -2 + 7 = 5$, $u_2 = u_1 + 7 = 5 + 7 = 12$, $\cdots$

  2. (u_n) est une suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N} \quad , \quad u_{n+1} = u_n - \frac{4}{3}$ et $u_0 = \frac{1}{3}$.
     (u_n) est une suite arithmétique de raison $r = -\frac{4}{3}$ et de premier terme $u_0 = \frac{1}{3}$.
     On a alors, $u_1 = u_0 - \frac{4}{3} = \frac{1}{3} - \frac{4}{3} = -1$, $u_2 = u_1 - \frac{4}{3} = -1 - \frac{4}{3} = -\frac{7}{3}$, $\cdots$

- **Méthode :** Pour montrer qu'une suite (u_n) est arithmétique, on peut chercher à montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad , \quad u_{n+1} - u_n =$ une constante qu'on notera r.

- **Exemples :**

  1. (u_n) est une suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N} \quad , \quad u_n = 5n - 4$.
     (u_n) est-elle une suite arithmétique ?
     Soit $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = 5(n+1) - 4 - (5n - 4) = 5n + 5 - 4 - 5n + 4 = 5$.
     Alors (u_n) est une suite arithmétique de raison $r = 5$ et de premier terme $u_0 = -4$.

  2. (u_n) est une suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N} \quad , \quad u_n = n^2 + 3n - 2$.
     (u_n) est-elle une suite arithmétique ?
     Soit $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = (n+1)^2 + 3(n+1) - 2 - (n^2 + 3n - 2) = n^2 + 2n + 1 + 3n + 3 - 2 - n^2 - 3n + 2 = 2n + 4$.
     $2n + 4$ n'est pas une constante !
     Alors, (u_n) n'est pas une suite arithmétique.

- Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0.

  On a donc, $\forall n, u_{n+1} - u_n = r$.

  On a, alors, les propriétés suivantes :

  1. Si $r > 0$ alors (u_n) est strictement croissante.
  2. Si $r < 0$ alors (u_n) est strictement décroissante.
  3. Si $r = 0$ alors (u_n) est constante ($\forall n, u_n = u_0$).

- **Propriétés :** Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0.

  1. $\forall n \in \mathbb{N} \quad , \quad u_n = u_0 + nr$.
  2. $\forall n \in \mathbb{N} \quad , \quad u_n = u_1 + (n-1)r$.
  3. $\forall n \in \mathbb{N} \quad , \quad \forall p \in \mathbb{N} \quad , \quad u_n = u_p + (n-p)r$.

- **Preuves :** Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0.

  1. On va montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad , \quad u_n = u_0 + nr$.
     On pose $P(n) : u_n = u_0 + nr$.
     (a) Initialisation : $P(0)$ est vraie ?
     On a bien $u_0 = u_0 + 0r$. Donc $P(0)$ est vraie.
     (b) Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n) : u_n = u_0 + nr$ est vraie
     et montrons que $P(n+1) : u_{n+1} = u_0 + (n+1)r$ est vraie.
     $u_{n+1} = u_n + r = u_0 + nr + r = u_0 + (n+1)r$.
     Donc $P(n+1)$ est vrai.
     (c) Conclusion : Initialisation + Hérédité, on alors : $\forall n \in \mathbb{N} \quad , \quad u_n = u_0 + nr$.

  2. On va montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad , \quad u_n = u_1 + (n-1)r$.
     Soit $n \in \mathbb{N}$, d'après 1. on a : $u_n = u_0 + nr$. Donc $u_n = u_0 + (1 - 1 + n)r = u_0 + r + (n-1)r = u_1 + (n-1)r$.
     On a bien, $\forall n \in \mathbb{N} \quad , \quad u_n = u_1 + (n-1)r$.

  3. On va montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad , \quad \forall p \in \mathbb{N} \quad , \quad u_n = u_p + (n-p)r$.
     Soit $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}$, d'après 1. on a : $u_n = u_0 + nr$ et $u_p = u_0 + pr$. Donc $u_n - u_p = u_0 + nr - (u_0 + pr) = u_0 + nr - u_0 - pr = (n-p)r$. Donc $u_n = u_p + (n-p)r$.
     On a bien, $\forall n \in \mathbb{N} \quad , \quad \forall p \in \mathbb{N} \quad , \quad u_n = u_p + (n-p)r$.

- **Exemple :**

  Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison $r = 3$ et de premier terme $u_0 = 5$.

  1. Déterminer u_9.
     On a $\forall n \in \mathbb{N} \quad , \quad u_n = u_0 + nr$.
     Donc $u_9 = u_0 + 9r = 5 + 9 \times 3 = 32$.
  2. Déterminer u_{13} en fonction de u_7.
     On a $\forall n \in \mathbb{N} \quad , \quad \forall p \in \mathbb{N} \quad , \quad u_n = u_p + (n-p)r$.
     Donc $u_{13} = u_7 + 6r = u_7 + 6 \times 3 = u_7 + 18$.

- **Sommes finies d'une suite arithmétique :**

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison $r = 1$ et de premier terme $u_0 = 0$. On pose
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad , \quad S_n = \sum_{p=0}^{p=n} u_p.$$
c.à.d.
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad , \quad S_n = 1 + 2 + \cdots + n.$$
Donc, $S_n = u_0 + u_1 = \cdots + u_n = 0 + 1 + \cdots + n$.

D'où $S_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) + n$ (1)

Et aussi, $S_n = n + (n-1) + \cdots + 2 + 1$ (2).

En additionnant, les deux égalités (1) et (2), on obtient :
$2S_n = (1+n) + (1+n) + \cdots + (1+n) = n(n+1)$.

Par suite $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$.

(On a déjà démontrer ce résultat par récurrence !).

2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison $r = 1$ et de premier terme $u_0 = 0$. Soit $n_0 \in \mathbb{N}$, On pose
$$\forall n \geq n_0 \quad , \quad T_n = \sum_{p=n_0}^{p=n} u_p.$$
c.à.d.
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad , \quad T_n = n_0 + (n_0+1) + \cdots + n.$$
Donc, $T_n = u_{n_0} + u_{n_0+1} \cdots + u_n = n_0 + (n_0+1) + \cdots + n$.

D'où $T_n = n_0 + (n_0+1) + \cdots + (n-1) + n$. (1)

Et aussi, $T_n = n + (n-1) + \cdots + (n_0-1) + n_0$. (2).

En additionnant, les deux égalités (1) et (2), on obtient :

$2T_n = (n+n_0) + (n+n_0) + \cdots + (n+n_0) = (n-n_0+1)(n+n_0)$.

Par suite $T_n = \frac{(n-n_0+1)(n+n_0)}{2}$.

3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0.
   On pose
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad , \quad S_n = \sum_{p=0}^{p=n} u_p.$$
   $S_n = \sum_{p=0}^{p=n} u_p = \sum_{p=0}^{p=n}(u_0 + pr) = \sum_{p=0}^{p=n} u_0 + r\sum_{p=0}^{p=n} p$

   $= (n+1)u_0 + r\frac{n(n+1)}{2} = (n+1)(u_0 + r\frac{n}{2}) = (n+1)\frac{2u_0+rn}{2} = \frac{n+1}{2}(2u_0 + nr)$

   $= \frac{n+1}{2}(u_0 + u_0 + nr)$

   $= \frac{n+1}{2}(u_0 + u_n).$
   Donc
$$S_n = \frac{n+1}{2}(u_0 + u_n).$$

4. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0.
   Soit $n_0 \in \mathbb{N}$, On pose
$$\forall n \geq n_0 \quad , \quad T_n = \sum_{p=n_0}^{p=n} u_p.$$
   $T_n = \sum_{p=n_0}^{p=n} u_p = \sum_{p=n_0}^{p=n}(u_0 + pr) = \sum_{p=n_0}^{p=n} u_0 + r\sum_{p=n_0}^{p=n} p$

   $= (n - n_0 + 1)u_0 + r\frac{(n+n_0)(n-n_0+1)}{2} = (n - n_0 + 1)(u_0 + r\frac{n+n_0}{2})$

   $= (n - n_0 + 1)\frac{2u_0+r(n+n_0)}{2} = \frac{n-n_0+1}{2}(2u_0 + (n + n_0)r) = \frac{n-n_0+1}{2}(u_0 + u_0 + nr + n_0r)$

   $= \frac{n-n_0+1}{2}(u_0 + n_0r + u_0 + nr) = \frac{n-n_0+1}{2}(u_{n_0} + u_n).$
   Donc
$$T_n = \frac{n - n_0 + 1}{2}(u_{n_0} + u_n).$$

- **Remarque :** La somme des termes successifs d'une suite arithmétique est de la forme :
$$SOMME = \frac{Nombre \quad de \quad termes}{2} \quad (1er \quad terme \quad + \quad Dernier \quad terme)$$

- **Exemple :**
  Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison $r = 2$ et de premier terme $u_0 = 3$.

  1. On pose $S_{13} = \sum_{p=0}^{p=13} u_p$. Calculer S_{13}.
     On a $\forall n \in \mathbb{N} \quad ; \quad S_n = \frac{n+1}{2}(u_0 + u_n)$.
     Donc $S_{13} = \frac{13+1}{2}(u_0 + u_{13})$.
     Or $u_{13} = u_0 + 13r = 3 + 13 \times 2 = 29$. Par suite $S_{13} = 7 \times 32 = 224$.

2. On pose $T_{14} = \sum_{p=5}^{p=14} u_p$. Calculer T_{14}.
   On a $\forall n \geq n_0 \quad ; \quad T_n = \frac{n-n_0+1}{2} \quad (u_{n_0} + u_n)$.
   Donc $T_{14} = \frac{14-5+1}{2}(u_5 + u_{14})$.
   Or $u_5 = u_0 + 5 \times r = 3 + 10 = 13$ et $u_{14} = u_0 + 14 \times r = 3 + 28 = 31$.
   Donc $T_{14} = 5 \times 44 = 220$.

- **Caractérisation des suites arithmétiques :**
  Une suite (u_n) est une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0
  SI ET SEULEMENT SI

$$\exists \quad a \in \mathbb{R} \quad , \exists \quad b \in \mathbb{R} \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad , \quad u_n = an + b.$$

  Et on a $a = r$ et $b = u_0$.

  En effet, supposons que (u_n) est une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0. D'après la proposition précédente, $\forall n \in \mathbb{N} \quad , \quad u_n = u_0 + nr$. On a, donc, $u_n = an + b$ où $a = r$ et $b = u_0$.

  Réciproquent, supposons que : $\exists a \in \mathbb{R} \quad , \exists b \in \mathbb{R} \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad , \quad u_n = an + b$.

  alors $u_{n+1} - u_n = a(n+1) + b - (an + b) = an + a + b - an - b = a$.

  Donc (u_n) est une suite arithmétique de raison $r = a$ et de premier terme $u_0 = b$.

- **Exercices :**

1. Soit (u_n) une suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad , \quad u_n = 2n + 1.$$

   (a) Montrer que (u_n) est une suite arithmétique (on précisera sa raison r et son premier terme u_0).
   Reponder de deux manières différentes à chacune des deux questions suivantes :
   (b) On pose $S_{23} = \sum_{p=0}^{p=23} u_p$. Calculer S_{23}.
   (c) On pose $T_{14} = \sum_{p=5}^{p=14} u_p$. Calculer T_{14}.

2. Soit (u_n) une suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad , \quad u_{n+1} = u_n + 3.$$

   (a) Montrer que (u_n) est une suite arithmétique (on précisera sa raison r.).
   Reponder aux deux questions suivantes sachant que $u_3 = 9$:
   (b) On pose $S_{23} = \sum_{p=0}^{p=23} u_p$. Calculer S_{23}.
   (c) On pose $T_{14} = \sum_{p=5}^{p=14} u_p$. Calculer T_{14}.

3. Soit (u_n) une suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad , \quad u_{n+1} = \frac{2u_n - 1}{u_n + 4} \quad et \quad u_0 = 0.$$

   (a) On pose $\forall n \in \mathbb{N} \quad , \quad v_n = \frac{1}{u_n+1}$.
   Momtrer que la suite (v_n) est une suite arithmétique (on précisera sa raison r et son premier terme v_0).
   (b) Déterminer l'expression du terme général v_n en fonction de n.
   En déduire l'expression du terme général u_n.

3 Suites géométriques :

- (u_n) est une suite géométrique si :

$$\exists \quad q \in \mathbb{R} \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad , \quad u_{n+1} = q u_n$$

  q est appelée raison de la suite géométrique (u_n).

  Il est capital d'avoir u_0 pour déterminer tous les termes de la suite.

- On a déjà vu les suites de la forme :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad , \quad u_{n+1} = a u_n + b.$$

  Pour une suite géométrique, $a = q$ et $b = 0$.

- **Exemples :** (u_n) est une suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N} \quad , \quad u_{n+1} = 3u_n$ et $u_0 = -2$.
  (u_n) est une suite géométrique de raison $q = 3$ et de premier terme $u_0 = -2$.
  On a alors, $u_1 = 3u_0 = 3(-2) = -6$, $u_2 = 3u_1 = 3(-6) = -18$, $\cdots$

- **Méthode :** Pour montrer qu'une suite (u_n) est géométrique

  1. S'assurer que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad , \quad u_n \neq 0$ (ou à partir d'un certain rang).
  2. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad , \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} =$ une constante qu'on notera q.

- **Exemples :**

  1. (u_n) est une suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N} \quad , \quad u_n = 4 \times 3^n$.
     (u_n) est-elle une suite géométrique ?
     (a) $\forall n \in \mathbb{N} \quad , \quad u_n = 4 \times 3^n \neq 0$.
     (b) Soit $n \in \mathbb{N}$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{4\times 3^{n+1}}{4\times 3^n} = 3$ une constante.
     Donc (u_n) est une suite géométrique de raison $q = 3$ et de premier terme $u_0 = 4$.
  2. (u_n) est une suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N} \quad , \quad u_n = n^2 + 3$.
     (u_n) est-elle une suite géométrique ?
     (a) $\forall n \in \mathbb{N} \quad , \quad u_n = n^2 + 3 \neq 0$.
     (b) Soit $n \in \mathbb{N}$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^2+3}{n^2+3} = \frac{n^2+2n+4}{n^2+3}$ n'est pas une constante !
     Alors, (u_n) n'est pas une suite géométrique.

- **Propriétés :** Soit (u_n) une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0.

  1. $\forall n \in \mathbb{N} \quad , \quad u_n = u_0 q^n$.
  2. $\forall n \in \mathbb{N} \quad , \quad u_n = u_1 q^{n-1}$.
  3. $\forall n \in \mathbb{N} \quad , \quad \forall p \in \mathbb{N} \quad , \quad u_n = u_p q^{n-p}$.

- **Preuves :** Soit (u_n) une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0.

  On va supposer que $q \neq 0$ car si $q = 0$, il n'y a rien à démontrer !

  1. On va montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad , \quad u_n = u_0 q^n$.
     On pose $P(n) : u_n = u_0 q^n$.
     (a) Initialisation : $P(0)$ est vraie ?
     On a bien $u_0 = u_0 q^0 = u_0$. Donc $P(0)$ est vraie.
     (b) Hérédité : Supposons que $P(n) : u_n = u_0 q^n$ est vraie
     et montrons que $P(n+1) : u_{n+1} = u_0 q^{n+1}$ est vraie.
     $u_{n+1} = q u_n = q q^n u_0 = q^{n+1} u_0$.
     Donc $P(n+1)$ est vrai.
     (c) Conclusion : Initialisation + Hérédité, on alors : $\forall n \in \mathbb{N} \quad , \quad u_n = q^n u_0$.

  2. On va montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad , \quad u_n = u_1 q^{n-1}$.
     Soit $n \in \mathbb{N}$, d'après 1. on a : $u_n = q^n u_0$. Donc $u_n = q^{n-1} q u_0 = q^{n-1} u_1$.
     On a bien, $\forall n \in \mathbb{N} \quad , \quad u_n = q^{n-1} u_1$.

  3. On va montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad , \quad \forall p \in \mathbb{N} \quad , \quad u_n = q^{n-p} u_p$.
     Soit $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}$, on sait d'après 1. que $u_n = q^n u_0$ et $u_p = q^p u_0$.
     Donc $u_n = q^n u_0 = q^{n-p} q^p u_0 = q^{n-p} u_p$.
     On bien $\forall n \in \mathbb{N} \quad , \quad \forall p \in \mathbb{N} \quad , \quad u_n = q^{n-p} u_p$.

- **Variation d'une suite géométrique :**

  Soit (u_n) une suite géométrique de raison q et de premier terme $u_0 \neq 0$.

  On a : $\forall n \in \mathbb{N} \quad , \quad u_{n+1} - u_n = q^{n+1} u_0 - q^n u_0 = q^n (q-1) u_0$.

  Par suite :

  1. Si $q > 1$ alors
     (a) Si $u_0 > 0$ alors la suite est strictement croissante.
     (b) Si $u_0 < 0$ alors la suite est strictement décroissante.
  2. Si $0 < q < 1$ alors
     (a) Si $u_0 > 0$ alors la suite est strictement décroissante.
     (b) Si $u_0 < 0$ alors la suite est strictement croissante.
  3. Si $q = 0$ ou $q = 1$ alors la suite est constante.
  4. Si $q < 0$ alors la suite n'est pas monotone.

- **Exemples :**

  Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison $q=2$ et de premier terme $u_0=3$.

  1. Déterminer u_9.
     On a $\forall n\in\mathbb{N} \quad , \quad u_n=q^n u_0$.
     Donc $u_9=q^9u_0=3\times 2^9$.
  2. Déterminer u_{13} en fonction de u_7.
     On a $\forall n\in\mathbb{N} \quad , \quad \forall p\in\mathbb{N} \quad , \quad u_n=q^{n-p}u_p$.
     Donc $u_{13}=q^6u_7=2^6u_7$.

- **Sommes finies d'une suite géométrique :**

  1. Soit (u_n) une suite géométrique de raison q et de premier terme $u_0=1$.

     On pose
     $$\forall n\in\mathbb{N} \quad , \quad S_n=\sum_{p=0}^{p=n}u_p.$$
     c.à.d.
     $$\forall n\in\mathbb{N} \quad , \quad S_n=1+q+q^2+\cdots q^n.$$

     (a) Si $q=1$ alors $S_n=\sum_{p=0}^{p=n}1=1+1+\cdots+1=n+1$.

     (b) Si $q\neq 1$
     Alors,

     $S_n=\sum_{p=0}^{p=n}u_p=\sum_{p=0}^{p=n}q^p=1+q+q^2+\cdots+q^n$

     et

     $qS_n=q+q^2+q^3+\cdots+q^{n+1}$.

     Par suite $S_n-qS_n=1+q+q^2+\cdots+q^n-(q+q^2+\cdots+q^{n+1})=1-q^{n+1}$.

     D'où $(1-q)S_n=1-q^{n+1}$. Alors, $S_n=\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

     Ainsi
     $$1+q+q^2+\cdots+q^n=\frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

2. Soit (u_n) une suite géométrique de raison q et de premier terme $u_0 = 1$.

   Soit $n_0 \in \mathbb{N}$, on pose

$$\forall n \geq n_0 \quad , \quad T_n = \sum_{p=n_0}^{p=n} u_p.$$

   c.à.d.

$$\forall n \geq n_0 \quad , \quad T_n = q^{n_0} + q^{n_0+1} + \cdots + q^n.$$

   (a) Si $q = 1$ alors $T_n = \sum_{p=n_0}^{p=n} 1 = 1 + 1 + \cdots + 1 = n - n_0 + 1$.

   (b) Si $q \neq 1$
   Alors,

   $T_n = \sum_{p=n_0}^{p=n} u_p = \sum_{p=n_0}^{p=n} q^p = q^{n_0} + q^{n_0+1} + \cdots + q^n$

   et

   $qT_n = q^{n_0+1} + q^{n_0+2} + \cdots + q^{n+1}$.

   Par suite $T_n - qT_n = q^{n_0} + q^{n_0+1} + \cdots + q^n - (q^{n_0+1} + q^{n_0+1} + \cdots + q^{n+1}) = q^{n_0} - q^{n+1}$.

   D'où $(1-q)T_n = q^{n_0} - q^{n+1}$. Alors, $T_n = \frac{q^{n_0} - q^{n+1}}{1-q}$.

   Ainsi

$$q^{n_0} + q^{n_0+1} + \cdots + q^n = \frac{q^{n_0} - q^{n+1}}{1-q}.$$

   Donc

$$q^{n_0} + q^{n_0+1} + \cdots + q^n = q^{n_0} \frac{1 - q^{n-n_0+1}}{1-q}.$$

3. Soit (u_n) une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0.

   On pose
   $$\forall n \in \mathbb{N} \quad , \quad S_n = \sum_{p=0}^{p=n} u_p.$$

   (a) Si $q = 1$ alors $S_n = \sum_{p=0}^{p=n} u_p = \sum_{p=0}^{p=n} u_0 = u_0 + u_0 + \cdots + u_0 = (n+1)u_0$.

   (b) Si $q \neq 1$
   Alors,

   $S_n = \sum_{p=0}^{p=n} u_p = \sum_{p=0}^{p=n} u_0 q^p = u_0 \sum_{p=0}^{p=n} q^p = u_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

   Ainsi
   $$S_n = \sum_{p=0}^{p=n} u_p = u_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

4. Soit (u_n) une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0.

   Soit $n_0 \in \mathbb{N}$, on pose
   $$\forall n \geq n_0 \quad , \quad T_n = \sum_{p=n_0}^{p=n} u_p.$$

   (a) Si $q = 1$ alors $T_n = \sum_{p=n_0}^{p=n} u_0 = u_0 + u_0 + \cdots + u_0 = (n - n_0 + 1)u_0$.

   (b) Si $q \neq 1$
   Alors,

   $T_n = \sum_{p=n_0}^{p=n} u_p = \sum_{p=n_0}^{p=n} u_0 q^p = u_0 \sum_{p=n_0}^{p=n} q^p = u_0 q^{n_0} \frac{1-q^{n-n_0+1}}{1-q} = u_{n_0} \frac{1-q^{n-n_0+1}}{1-q}$.

   Ainsi
   $$T_n = \sum_{p=n_0}^{p=n} u_p = u_{n_0} \frac{1-q^{n-n_0+1}}{1-q}.$$

- **Remarque :**

  La somme de termes successifs d'une suite géométrique est donnée par la formule suivante : Somme = 1er terme (1-q**Nombre de termes)/(1-q).

- **Exemple :**

  Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison $q = 2$ et de premier terme $u_0 = 3$.

  1. On pose $S_{13} = \sum_{p=0}^{p=13} u_p$. Calculer S_{13}.
     On a $\forall n \in \mathbb{N} \quad ; \quad S_n = u_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$.
     Donc $S_{13} = u_0 \frac{1-q^{14}}{1-q} = 3\frac{1-2^{14}}{1-2} = 3(2^{14} - 1)$.
  2. On pose $T_{14} = \sum_{p=5}^{p=14} u_p$. Calculer T_{14}.
     On a $\forall n \geq n_0 \quad ; \quad T_n = u_{n_0} \frac{1-q^{n-n_0+1}}{1-q}$.
     Donc $T_{14} = u_5 \frac{1-2^{10}}{1-2}$.
     Or $u_5 = q^5 u_0 = 2^5 \times 3$.
     Donc $T_{14} = 3 \times 2^5(2^{10} - 1)$.

- **Caractérisation d'une suite géométrique :** (u_n) une suite géométrique de raison q, $q \neq 0$ et de premier terme u_0, $u_0 \neq 0$

  SI ET SEULEMENT SI

  $$\exists \quad a \in \mathbb{R}^* \quad , \quad \exists \quad b \in \mathbb{R}^* \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad , \quad u_n = ba^n.$$

  En effet, (u_n) une suite géométrique de raison q, $q \neq 0$ et de premier terme u_0, $u_0 \neq 0$ alors $\forall n \in \mathbb{N} \quad , \quad u_n = u_0 q^n$.

  On a bien la forme $u_n = ba^n$ pour $a = q$ et $b = u_0$.

  Réciproquement, supposons que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad , \quad u_n = ba^n$.

  1. Comme $a \neq 0$ et $b \neq 0$ alors $\forall n \in \mathbb{N} \quad , \quad u_n \neq 0$.
  2. Soit $n \in \mathbb{N} \quad , \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{ba^{n+1}}{ba^n} = a$ une constante.
     Alors (u_n) une suite géométrique de raison $q = a$ et de premier terme $u_0 = b$.

- **Exercices :**

  1. (u_n) est une suite définie par :

     $$\forall n \in \mathbb{N} \quad , \quad u_n = 4 \times 3^n + 5n + 7.$$

     On pose

     $$\forall n \in \mathbb{N} \quad , \quad S_n = \sum_{p=0}^{p=n} u_p.$$

     Déterminer S_n.

2. Soit (u_n) une suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad , \quad u_n = 5 \times 3^n.$$

   (a) Montrer que (u_n) est une suite géométrique (on précisera sa raison r et son premier terme u_0).
   Reponder de deux manières différentes à chacune des deux questions suivantes :

   (b) On pose $S_{23} = \sum_{p=0}^{p=23} u_p$. Calculer S_{23}.

   (c) On pose $T_{14} = \sum_{p=5}^{p=14} u_p$. Calculer T_{14}.

3. Soit (u_n) une suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad , \quad u_{n+1} = 3u_n.$$

   (a) Montrer que (u_n) est une suite arithmétique (on précisera sa raison r.).
   Reponder aux deux questions suivantes sachant que $u_3 = 27$:

   (b) On pose $S_{23} = \sum_{p=0}^{p=23} u_p$. Calculer S_{23}.

   (c) On pose $T_{14} = \sum_{p=5}^{p=14} u_p$. Calculer T_{14}.

4. Soit (u_n) une suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad , \quad u_{n+1} = 3u_n + 4 \quad et \quad u_0 = 0.$$

   (a) On pose $\forall n \in \mathbb{N} \quad , \quad v_n = u_n + 2$.
   Momtrer que la suite (v_n) est une suite géométrique (on précisera sa raison r et son premier terme v_0).

   (b) Déterminer l'expression du terme général v_n en fonction de n.
   En déduire l'expression du terme général u_n.

   (c) On pose

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad , \quad S_n = \sum_{p=0}^{p=n} u_p.$$

   Déterminer S_n.

5. Soit (u_n) une suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad , \quad u_{n+1} = \frac{3u_n + 6}{u_n + 4} \quad et \quad u_0 = 0.$$

   (a) On pose $\forall n \in \mathbb{N} \quad , \quad v_n = \frac{u_n+3}{u_n-2}$.
   Momtrer que la suite (v_n) est une suite géométrique (on précisera sa raison r et son premier terme v_0).

   (b) Déterminer l'expression du terme général v_n en fonction de n.
   En déduire l'expression du terme général u_n.