



Физтех-школа аэрокосмических технологий

10 ноября 2023 года

## Лабораторная работа 1.2.5

# ИССЛЕДОВАНИЕ ВЫНУЖДЕННОЙ РЕГУЛЯРНОЙ ПРЕЦЕССИИ ГИРОСКОПА

Зайцев Александр

Б03-305

**Цель работы:** исследовать вынужденную прецессию гироскопа; установить зависимость скорости вынужденной прецессии от величины момента сил, действующих на ось гироскопа; определить скорость вращения ротора гироскопа и сравнить ее со скоростью, рассчитанной по скорости прецессии.

**В работе используются:** гироскоп в кардановом подвесе, секундомер, набор грузов, отдельный ротор гироскопа, цилиндр известной массы, крутильный маятник, штангенциркуль, линейка.

### Теоретические сведения.

Момент импульса твердого тела в его главных осях  $x, y, z$  равен

$$\vec{L} = \bar{i}I_x \omega_x + \bar{j}I_y \omega_y + \bar{k}I_z \omega_z \quad (1)$$

где  $I_x, I_y, I_z$  – главные моменты инерции,  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$  – компоненты вектора угловой скорости  $\vec{\omega}$ . Быстро вращающееся тело, для которого, например,  $I_z \omega_z \gg I_x \omega_x, I_y \omega_y$  принято называть гироскопом. Гироскоп называется уравновешенным, если его центр масс неподвижен.

Под действием момента  $\vec{M}$  внешних сил ось гироскопа медленно вращается вокруг оси  $y$  с угловой скоростью  $\Omega$ . Такое движение

называется регулярной прецессией гироскопа. В частности, создающей момент внешней силой может оказаться сила тяжести, если центр масс гироскопа не совпадает с точкой подвеса. Для гироскопа массой  $m_r$ , у которого ось собственного вращения наклонена на угол  $\alpha$  от вертикали, скорость прецессии, происходящей вокруг вертикальной оси под действием силы тяжести, равна

$$\Omega = \frac{M}{I_z \omega_0 \sin \alpha} = \frac{m_r g l_{\text{ц}} \sin \alpha}{I_z \omega_0 \sin \alpha} = \frac{m_r g l_{\text{ц}}}{I_z \omega_0} \quad (2)$$

где  $l_{\text{ц}}$  — расстояние от точки подвеса до центра масс гироскопа, т. е. скорость прецессии не зависит от угла  $\alpha$ .

Для изучения регулярной прецессии уравновешенного гироскопа к его оси подвешивают дополнительные грузы. Это смещает общий центр масс и создает момент сил тяжести, вызывающий прецессию. Скорость прецессии в этом случае равна

$$\Omega = \frac{mgl}{I_z \omega_0} \quad (3)$$

где  $m$  — масса груза,  $l$  — расстояние от центра карданова подвеса до точки крепления груза на оси гироскопа (рис. 2).

В данной работе исследуется регулярная прецессия уравновешенного гироскопа.

Уравновешенный гироскоп, закрепленный в кольцах карданова подвеса, показан на рис. 1. Наружное кольцо подвеса А может свободно поворачиваться вокруг вертикальной оси  $aa$ . Внутреннее кольцо Б связано с кольцом А горизонтальной осью  $bb$ . В кольце Б укреплен гироскоп, ось вращения которого  $vv$  перпендикулярна к оси  $bb$ . Центр масс гироскопа находится на пересечении всех трех осей и при любом повороте колец сохраняет свое положение в пространстве. Получается, что гироскоп как бы подвешен за центр масс.

Экспериментальная установка для исследования прецессии уравновешенного гироскопа показана на рис. 2. Ротором гироскопа является ротор высокооборотного электромотора М, питающегося током частотой 400 Гц. Кожух мотора (статор, имеющий обмотки, питаемые током частотой 400 Гц) скреплен с кольцом Б (рис. 1 и 2). Мотор с кольцом Б может вращаться в кольце А вокруг горизонтальной оси  $bb$ , которое может вращаться вокруг вертикальной оси  $aa$ . Ротор электромотора представляет массивный стальной цилиндр с прожилками меди,

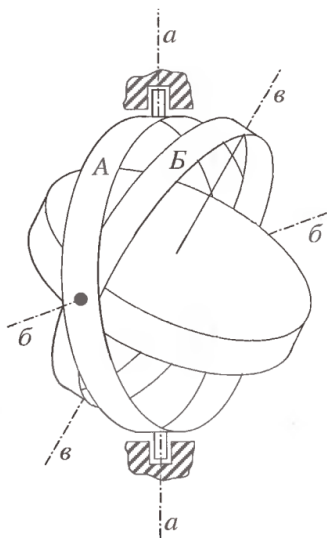


Рис. 1. Гироскоп в кардановом подвесе

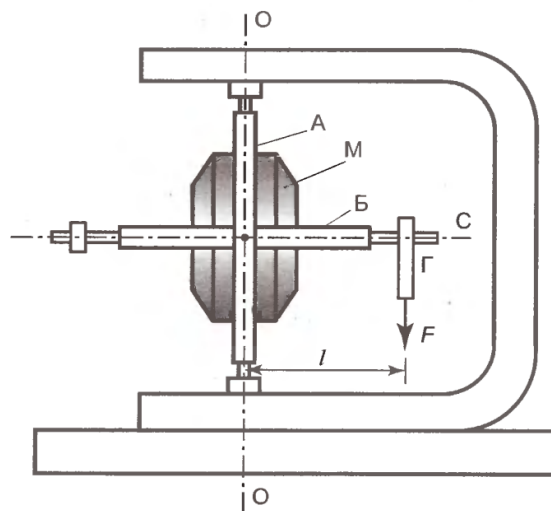


Рис. 2. Схема установки

образующими «белчье колесо». Обозначенный на рис. 2 буквой С рычаг направлен по оси симметрии ротора. На рычаг подвешивают грузы Г.

Подвешивая различные грузы, можно менять силу  $F$ , момент которой определяется расстоянием  $l$  от точки подвеса до горизонтальной оси кольца А (до центра масс гироскопа), указанным на самой установке.

Силы трения не лежат в плоскости осей вращения. Они приводят к изменению момента импульса и по направлению, и по величине. Для ротора гироскопа действие сил трения скомпенсировано действием электромотора. Для осей карданова подвеса компенсации нет.

В результате ось гироскопа будет опускаться в направлении действия груза.

### Описание лабораторной работы.

В первой части работы исследуется зависимость скорости прецессии гироскопа от момента силы, приложенной к его оси. Для этого к оси гироскопа (к рычагу С) подвешиваются грузы Г. Скорость прецессии определяется по числу оборотов рычага вокруг вертикальной оси и времени, которое на это ушло, определяемое секундомером. В процессе измерений рычаг не только поворачивается в результате прецессии гироскопа, но и опускается. Поэтому его в начале опыта следует приподнять на  $5-6^\circ$ . Опыт надо закончить, когда рычаг опустится на такой же угол.

Измерение скорости прецессии гироскопа позволяет вычислить угловую скорость вращения его ротора. Расчет производится по формуле (3). Момент инерции ротора относительно оси симметрии  $I_0$  измеряется по крутильным колебаниям точной копии ротора, подвешиваемой вдоль оси симметрии на жесткой проволоке. Период крутильных колебаний  $T_0$  зависит от момента инерции  $I_0$  и модуля кручения проволоки  $f$ :

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_0}{f}} \quad (4)$$

Чтобы исключить модуль кручения проволоки, вместо ротора гироскопа к той же проволоке подвешивают цилиндр правильной формы с известными размерами и массой, для которого легко можно вычислить момент инерции  $I_{\text{ц}}$ . Для определения момента инерции ротора гироскопа имеем

$$I_0 = I_{\text{ц}} \frac{T_0^2}{T_{\text{ц}}^2} \quad (5)$$

здесь  $T_{\text{ц}}$  — период крутильных колебаний цилиндра.

Скорость вращения ротора гироскопа можно определить и не прибегая к исследованию прецессии. У используемых в работе гироскопов статор имеет две обмотки, необходимые для быстрой раскрутки гироскопа. В данной работе одну обмотку используют для раскрутки гироскопа, а вторую — для измерения числа оборотов ротора. Ротор электромотора всегда немного намагничен. Вращаясь, он наводит во второй обмотке переменную электродвижущую силу (ЭДС) индукции, частота которой равна частоте вращения ротора. Частоту этой ЭДС можно; в частности, измерить по фигурам Лиссажу, получаемым на экране осциллографа, если на один вход подать исследуемую ЭДС, а на другой — переменное напряжение с хорошо откалиброванного генератора. При совпадении частот на экране получаем эллипс.

### Результаты измерений.

Момент инерции гироскопа определяется моментом инерции цилиндра, имеющего такие же характеристики, что и сам ротор гироскопа.

Момент инерции цилиндра вычисляется по формуле

$$I_z = \frac{mR^2}{2} \quad (6)$$

Таблица 1. Характеристики цилиндра

Масса m, г	Диаметр, м	Момент инерции $I_z$ , г · м <sup>2</sup>
1616,5±0,1	0,0780±0,0001	1,229±0,006

Погрешность момента инерции, определенного по формуле (6), рассчитывается по формуле

$$\sigma_I = I \sqrt{\left(\frac{\partial I}{\partial m}\right)^2 \sigma_m^2 + \left(\frac{\partial I}{\partial R}\right)^2 \sigma_R^2} \quad (7)$$

Таблица 2. Периоды прецессии гироскопа с грузом 1

Масса груза m, г	Время t, с	Кол-во оборотов	Период T, с
334,3±0,1	89,47±0,01	3	29,82±0,01
334,3±0,1	88,84±0,01	3	29,61±0,01
334,3±0,1	89,85±0,01	3	29,95±0,01
334,3±0,1	89,40±0,01	3	29,80±0,01
334,3±0,1	89,96±0,01	3	29,99±0,01
334,3±0,1	89,85±0,01	3	29,95±0,01
334,3±0,1	90,22±0,01	3	30,07±0,01

*Таблица 3. Периоды прецессии гироскопа с грузом 2*

Масса груза m, г	Время t, с	Кол-во оборотов	Период T, с
266,6±0,1	111,63±0,01	3	37,21±0,01
266,6±0,1	113,47±0,01	3	37,82±0,01
266,6±0,1	113,41±0,01	3	37,80±0,01
266,6±0,1	111,85±0,01	3	37,28±0,01
266,6±0,1	111,67±0,01	3	37,22±0,01
266,6±0,1	112,88±0,01	3	37,63±0,01
266,6±0,1	113,03±0,01	3	37,68±0,01

*Таблица 4. Периоды прецессии гироскопа с грузом 3*

Масса груза m, г	Время t, с	Кол-во оборотов	Период T, с
214,2±0,1	140,94±0,01	3	46,98±0,01
214,2±0,1	140,97±0,01	3	46,99±0,01
214,2±0,1	141,09±0,01	3	47,03±0,01
214,2±0,1	140,87±0,01	3	46,96±0,01
214,2±0,1	140,97±0,01	3	46,99±0,01
214,2±0,1	140,09±0,01	3	46,70±0,01
214,2±0,1	140,47±0,01	3	46,82±0,01

Момент силы определяется по формуле

$$M = mgl \quad (8)$$

где  $l$  – плечо силы, равное 120 мм = 0,12 м.

*Таблица 5. Периоды прецессии гироскопа с грузом 4*

Масса груза m, г	Время t, с	Кол-во оборотов	Период T, с
141,1±0,1	214,47±0,01	3	71,49±0,01
141,1±0,1	214,44±0,01	3	71,48±0,01
141,1±0,1	214,97±0,01	3	71,66±0,01
141,1±0,1	213,19±0,01	3	71,06±0,01
141,1±0,1	213,79±0,01	3	71,26±0,01

*Таблица 6. Периоды прецессии гироскопа с грузом 5*

Масса груза m, г	Время t, с	Кол-во оборотов	Период T, с
92,6±0,1	217,15±0,01	2	108,58±0,01
92,6±0,1	217,47±0,01	2	108,74±0,01
92,6±0,1	217,44±0,01	2	108,72±0,01
92,6±0,1	217,23±0,01	2	108,62±0,01
92,6±0,1	219,41±0,01	2	109,71±0,01

*Таблица 7. Усредненные периоды прецессии, сопоставленные с массой груза, моментом силы тяжести и соответствующей угловой скоростью прецессии гироскопа*

T, с	29,88±0,01	37,52±0,01	46,92±0,01	71,39±0,01	108,87±0,01
m, г	334,3±0,1	266,6±0,1	214,2±0,1	141,1±0,1	92,9±0,1
M, Н · м	0,39±0,01	0,31±0,01	0,25±0,01	0,16±0,01	0,11±0,01
Ω, рад/с	0,21±0,02	0,16±0,02	0,13±0,02	0,08±0,02	0,05±0,02

Угловая скорость прецессии вычисляется по формуле

$$\Omega = \frac{2\pi}{T} \quad (9)$$

$$\sigma_T = \frac{\Delta T}{N}, \quad \sigma_\Omega = \frac{\Omega}{T} \sigma_T = 0,02 \text{ рад/с} \quad (10, 11)$$

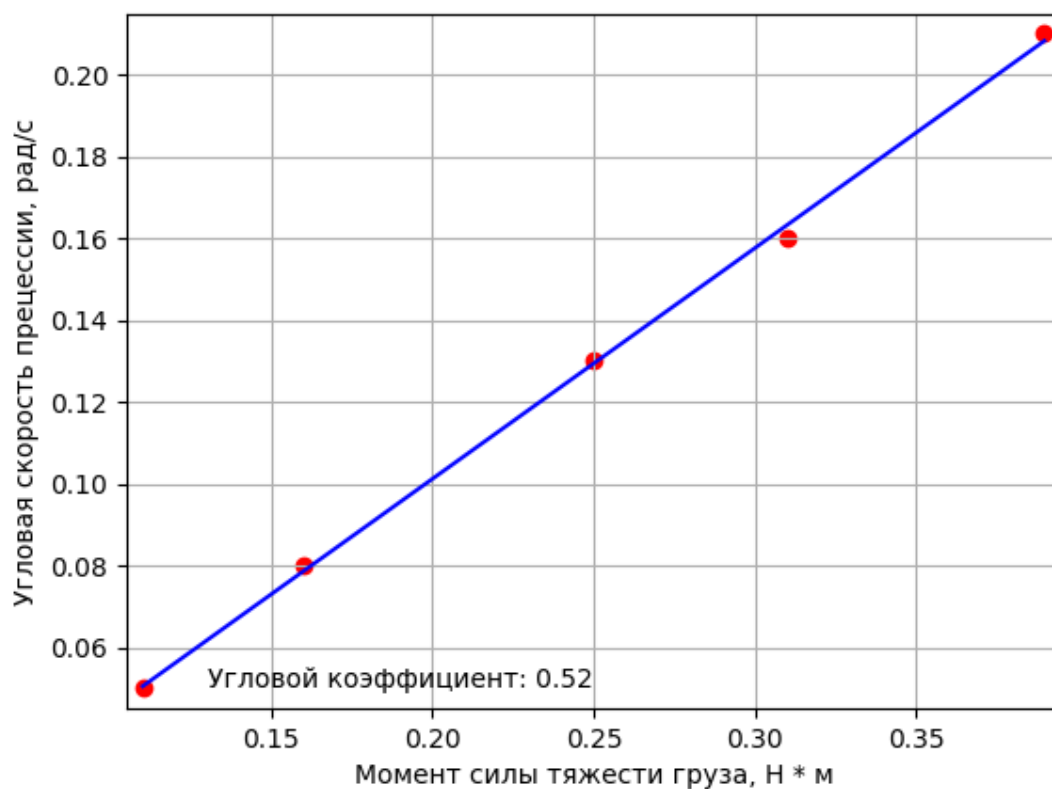


Рис. 1 График зависимости угловой скорости прецессии от момента силы тяжести груза

Здесь обратный коэффициент угла наклона есть момент импульса гироскопа.

Таблица 8. Периоды крутильных колебаний цилиндра и ротора

$T_{\text{ц}}, \text{с}$	$T_0, \text{с}$	$I_0, \text{г} \cdot \text{м}^2$
$4,01 \pm 0,06$	$3,17 \pm 0,06$	$0,768 \pm 0,004$

Момент инерции ротора вычисляется по формуле (5).

Для определения погрешности момента инерции ротора используется формула

$$\sigma_{I_0} = I_0 \sqrt{\left(\frac{\partial I_0}{\partial I_{\text{ц}}}\right)^2 \sigma_{I_{\text{ц}}}^2 + \left(\frac{\partial I_0}{\partial T_0}\right)^2 \sigma_{T_0}^2 + \left(\frac{\partial I_0}{\partial T_{\text{ц}}}\right)^2 \sigma_{T_{\text{ц}}}^2} = 0,004 \text{ г} \cdot \text{м}^2 \quad (12)$$



### Частота вращения ротора.

При помощи формулы (3) и связи угловой скорости с частотой, определяется частота вращения ротора гироскопа

$$\nu = \frac{M}{2\pi I_0 \Omega} \quad (13)$$

Таблица 9. Частота вращения ротора гироскопа, вычисленная при помощи определения скорости прецессии

$\nu$ , Гц	$M$ , Н · м	$I_0$ , г · м <sup>2</sup>	$\Omega$ , рад/с
$385 \pm 10$	$0,39 \pm 0,01$	$0,768 \pm 0,004$	$0,21 \pm 0,02$
$402 \pm 10$	$0,31 \pm 0,01$	$0,768 \pm 0,004$	$0,16 \pm 0,02$
$399 \pm 10$	$0,25 \pm 0,01$	$0,768 \pm 0,004$	$0,13 \pm 0,02$
$408 \pm 10$	$0,16 \pm 0,01$	$0,768 \pm 0,004$	$0,08 \pm 0,02$
$415 \pm 10$	$0,11 \pm 0,01$	$0,768 \pm 0,004$	$0,05 \pm 0,02$

Частота вращения ротора, полученная при помощи определения скорости прецессии, равна

$$401,8 \pm 10 \text{ Гц}$$

Частота вращения ротора, полученная при помощи осциллографа, равна

$$391,5 \pm 0,5 \text{ Гц}$$

### Измерение момента силы трения.

Чтобы определить момент сил трения, возникающих в осях карданного подвеса, в котором закреплен гироскоп, необходимо определить скорость прецессии оси гироскопа в вертикальной плоскости. Для определения скорости прецессии используется формула

$$\Omega_{\text{верт}} = \frac{2\alpha}{t} \quad (14)$$

где  $\alpha = 6^\circ$ ,  $t$  – время, за которое произошло опускание. В качестве времени используется среднее значение, используемое для определения периода регулярной прецессии.

Величину момента сил трения можно определить по следующей формуле

$$M_{\text{тр}} = 2\pi\Omega_{\text{верт}} I_0 \omega = 2\pi\Omega_{\text{верт}} L = 2\pi\Omega_{\text{верт}} / K \quad (15)$$

Получаем

$$M_{\text{тр}} = \frac{24\pi^2}{180Kt}$$

*Таблица 10. Измерение момента силы трения*

t, с	$M_{\text{тр}}, \cdot 10^{-2} \text{ Н} \cdot \text{м}$
89,66±0,01	2,81±0,01
112,56±0,01	2,24±0,01
140,77±0,01	1,79±0,01
214,17±0,01	1,18±0,01
217,74±0,01	1,16±0,01

### **Вывод.**

Частота вращения ротора гироскопа измерена двумя разными способами: экспериментально и при помощи осциллографа. Значения частоты  $411,2 \pm 10$  Гц и  $391,5 \pm 0,5$  Гц соответственно. Частоты почти совпадают в пределах погрешности. Скорее всего это связано из-за большого влияния человеческого фактора на работу, так как периоды и углы отклонения не были идеально точно измерены. Крутильные колебания, по которым определялся момент инерции ротора гироскопа, были не идеальны. Погрешность значений оказалась не такой большой, порядка 2-3%. На практике были подтверждены все теоретические зависимости, используемые в данной работе.