



Физтех-школа аэрокосмических технологий

13 октября 2023 года

Лабораторная работа 1.2.3

ОПРЕДЕЛЕНИЕ МОМЕНТОВ ИНЕРЦИИ ТВЕРДЫХ ТЕЛ С ПОМОЩЬЮ ТРИФИЛЯРНОГО ПОДВЕСА

Зайцев Александр

Б03-305

Цель работы: измерение момента инерции ряда тел и сравнение результатов с расчетами по теоретическим формулам; проверка аддитивности моментов инерции и справедливости формулы Гюйгенса-Штейнера.

В работе используются: трифилярный подвес, счетчик числа колебаний, набор тел, момент инерции которых надлежит измерить (диск, брусок, кольцо и другие).

Теоретические данные.

Инерционность при вращении тела относительно оси определяется моментом инерции тела относительно этой оси (см. введение к данному разделу). Момент инерции твердого тела относительно неподвижной оси вращения вычисляется по формуле

$$I = \int r^2 dm \quad (1)$$

Здесь r — расстояние элемента массы тела dm от оси вращения.

Интегрирование проводится по всей массе тела m .

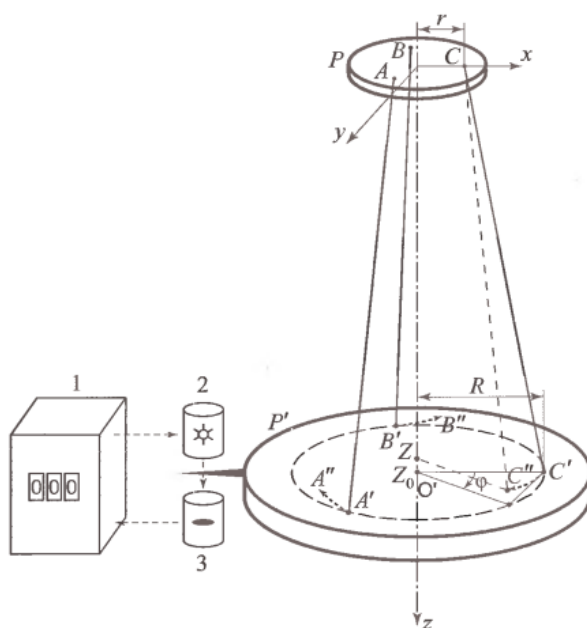


Рис 1. Трифилярный подвес

Для однородных тел известной плотности при заданных размерах и достаточно простой форме момент инерции можно вычислить. Для неоднородных тел и тел сложной формы момент инерции можно определить экспериментально. Удобно использовать устройство, показанное на рис. 1 и называемое трифилярным подвесом. Оно состоит из укрепленной на некоторой высоте неподвижной платформы P и подвешенной к ней на трех симметрично расположенных нитях AA' , BB' и CC'' вращающейся платформы P' .

Платформа P укреплена на кронштейне и снабжена рычагом (на рисунке не показан), при помощи которого в системе можно создать крутильные колебания путем небольшого поворота верхней платформы. Лучше поворачивать верхнюю платформу, закрепленную на неподвижной оси, чем подвешенную на нитях нижнюю, так как нижнюю платформу трудно закрутить не вызвав ее раскачиваний, подобных движению маятника, учет которых сильно усложнил бы расчеты. После поворота, вызывающего крутильные колебания, верхняя платформа остается неподвижной в течение всего процесса колебаний. После того, как нижняя платформа P' оказывается повернутой на угол φ относительно верхней платформы P , возникает момент сил, стремящийся вернуть нижнюю платформу в положение равновесия, при котором относительный поворот платформ отсутствует. Но в положении равновесия платформа не останавливается,

так как имеет угловую скорость (кинетическую энергию вращения). В результате платформа совершает крутильные колебания. Если пренебречь потерями энергии на трение (о воздух и в креплениях нитей), то уравнение сохранения энергии при колебаниях можно записать следующим образом:

$$\frac{I\dot{\varphi}^2}{2} + mg(z_0 - z) = E \quad (2)$$

Здесь I — момент инерции платформы вместе с исследуемым телом, m — масса платформы с телом, $\dot{\varphi}$ — угол поворота платформы от положения равновесия системы, апострофом обозначена производная по времени (угловая скорость), z_0 — координата по вертикали центра нижней платформы O' при равновесии ($\varphi = 0$), z — координата той же точки при некотором угле поворота φ . Первый член в левой части уравнения — кинетическая энергия вращения, второй член — потенциальная энергия в поле тяжести, E — полная энергия системы (платформы с телом).

Отметим, что, как показывает соотношение (2), возвращающая сила возникает благодаря силе тяжести.

Воспользуемся системой координат x, y, z связанной с верхней платформой, как показано на рис. 1. Координаты верхнего конца одной из нитей подвеса точки C в этой системе — $(r, 0, 0)$. Нижний конец данной нити C' , находящийся на нижней платформе, при равновесии имеет координаты $(R, 0, z_0)$, а при повороте платформы на угол φ эта точка переходит в C'' с координатами $(R \cos \varphi, R \sin \varphi, z)$. Расстояние между точками C и C'' равно длине нити L . Поэтому

$$(R \cos \varphi - r)^2 + R^2 \sin^2 \varphi + z^2 = L^2 \quad (3)$$

Учитывая, что при малых углах поворота $\cos \varphi \approx 1 - \varphi^2/2$, получаем

$$z^2 = L^2 - R^2 - r^2 + 2Rr \cos \varphi = z_0^2 - 2Rr(1 - \cos \varphi) \approx z_0^2 - Rr\varphi^2 \quad (4)$$

Извлекая из (4) квадратный корень и учитывая малость угла φ , имеем

$$z \approx \sqrt{z_0^2 - Rr\varphi^2} \approx z_0 \sqrt{1 - \frac{Rr\varphi^2}{z_0^2}} \approx z_0 - \frac{Rr\varphi^2}{2z_0} \quad (5)$$

Подставляя это значение в уравнение (2), получаем

$$\frac{1}{2}I\varphi'^2 + mg\frac{Rr}{2z_0}\varphi^2 = E \quad (6)$$

Дифференцируя по времени и сокращая на φ , находим уравнение крутильных колебаний системы:

$$I\varphi'' + mg\frac{Rr}{z_0}\varphi = 0 \quad (7)$$

Производная по времени от E равна нулю, так как потерями энергии на трение, как уже было сказано выше, пренебрегаем.

Решение этого уравнения, как нетрудно убедиться простой подстановкой, имеет вид

$$\varphi = \varphi_0 \sin\left(\sqrt{\frac{mgRr}{Iz_0}}t + \theta\right) \quad (8)$$

Здесь амплитуда φ и фаза θ колебаний определяются начальными условиями. Период крутильных колебаний нашей системы равен

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{Iz_0}{mgRr}} \quad (9)$$

Обратим внимание на то, что из этой формулы при $r = R$ и $I = mR^2$ (тонкое кольцо) получаем формулу для математического маятника.

Из (9) находим формулу для определения момента инерции:

$$I = \frac{mgRrT^2}{4\pi^2 z_0} \quad (10)$$

Учитывая, что параметры установки R , g и z_0 при проведении опытов не меняются, удобно переписать последнее уравнение следующим образом:

$$I = k m T^2 \quad (11)$$

Здесь $k = \frac{gRr}{4\pi^2 z_0}$ — величина, постоянная для данной установки.

Таким образом, полученные формулы позволяют определить момент инерции платформы с телом и отдельно платформы по соответствующим периодам крутильных колебаний. Затем вычисляем момент инерции тела, пользуясь аддитивностью, в справедливости которой можно убедиться, проведя измерения сначала для каждого из двух тел отдельно, а затем для обоих тел вместе.

При выводе формул предполагалось, что малы необратимые потери энергии, связанные с трением, то есть мало затухание колебаний.

О затухании колебаний можно судить, сравнивая время τ уменьшения амплитуды колебаний в 2-3 раза с периодом колебаний T . Необратимыми потерями энергии можно пренебречь, если выполняется условие

$$\tau \gg T \quad (12)$$

В данной работе рекомендуется период колебаний определять с относительной погрешностью 0,5%. Число колебаний, по которым надо вычислять период, определяется этой погрешностью и погрешностью измерения времени.

Для счета числа колебаний используется счетчик, состоящий из осветителя (2), фотоэлемента (3) и пересчетного устройства (1) (см. рис. 1). Легкий лепесток, укрепленный на платформе, при колебаниях пересекает световой луч дважды за период. Соответствующие сигналы от фотоэлемента поступают на пересчетное устройство.

Ход работы.

При амплитуде $\varphi = 30^\circ$ проводятся эксперименты, связанные с крутильными колебаниями. Дважды измерены периоды колебаний пустого ненагруженного трифилярного подвеса, затем по два раза измерены периоды колебаний нагруженного различными телами с массой m трифилярного подвеса. Чтобы вычислить период колебания, воспользуемся формулой $T = \frac{t}{N}$, где T - период, t - общее время колебаний, N - количество колебаний ($N = 10$). Результаты заносятся в таблицы. Затем штангенциркулем измеряются геометрические параметры для каждого тела, на лабораторных весах измеряется масса каждого тела. Результаты измерений заносятся в таблицу (*табл. 1*).

Результаты измерений.

В ходе эксперимента использовались пять различных тел: диск, кольцо, брусок и два одинаковых по форме, но разных по массе полукольца (для удобства обозначим их полукольцо 1 и полукольцо 2).

Таблица 1. Характеристики тел, используемых в эксперименте

	Масса, m г	Длина, a см	Ширина, b см	Высота, c см	Радиус, R см	Толщина, h см
Диск	584,2	-	-	0,4±0,1	8,5±0,1	-
Кольцо	730,4	-	-	5,6±0,1	7,9±0,1	0,4±0,1
Брусok	1199,4	21,1±0,1	2,8±0,1	2,8±0,1	-	-
Полукольцо 1	763,7	-	-	2,8±0,1	4,5±0,1	-
Полукольцо 2	763,3	-	-	2,8±0,1	4,5±0,1	-

Таблица 2. Характеристика установки (трифилярного подвеса)

Длина нити L, см	Радиус нижнего диска R, см	Радиус верхнего диска r, см	Расстояние между дисками z, см	Масса нижнего диска m_n , г
215,2±0,1	11,55±0,05	3,02±0,03	214,9±0,1	1026,4±0,5

Постоянная k из формулы (11) равна

$$k = 3,99 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2/\text{с}^2 \quad (13)$$

Погрешность этой постоянной вычисляется соответственно по формуле:

$$\frac{\sigma_k^2}{k^2} = \left(\frac{\partial k}{\partial R}\right)^2 \sigma_R^2 + \left(\frac{\partial k}{\partial r}\right)^2 \sigma_r^2 + \left(\frac{\partial k}{\partial z_0}\right)^2 \sigma_{z_0}^2 \quad (14)$$

где $\sigma_R, \sigma_r, \sigma_{z_0}$ — соответствующие абсолютные погрешности,

взяты из таб. 2.

$$\sigma_k = 0,001 \cdot 10^{-4} \quad (15)$$

Таблица 3. Период колебания ненагруженной платформы трифилярного подвеса

Кол-во колеб. N	Время колеб. t, с	Период колебаний T, с
10	45,52±0,01	4,552±0,002
10	45,24±0,01	4,524±0,002
Среднее	45,38±0,01	4,538±0,002

Погрешность измерения периода колебаний пустой платформы трифилярного подвеса

$$\sigma_T^{\text{сист}} = 0,001 \text{ с} \quad (16)$$

$$\sigma_T^{\text{случ}} = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)} \sum_{i=1}^N (T_{\text{ср}} - T_i)^2} \approx 0,002 \quad (17)$$

$$\sigma_T = \sqrt{\sigma_t^{\text{случ}^2} + \sigma_t^{\text{сист}^2}} \approx 0,002 \quad (18)$$

Относительная погрешность момента инерции ненагруженной установки

$$\varepsilon = \sqrt{\left(\frac{\sigma_k}{k}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_m}{m}\right)^2 + \left(2\frac{\sigma_T}{T}\right)^2} \approx 0,01 \quad (19)$$

Момент инерции ненагруженного диска:

$$I_0 = 3,99 \cdot 10^{-4} \cdot 1,0264 \cdot 4.538^2 = 8,433 \cdot 10^{-3} + \sigma_{I_0} \text{ кг} \cdot \text{м}^2 \quad (20)$$

Абсолютная погрешность момента инерции ненагруженной установки

$$\sigma_{I_0} = \varepsilon I_0 \approx 0,084 \cdot 10^{-3} \text{ кг} \cdot \text{м}^2 \quad (21)$$

Получаем, что с помощью данной конструкции мы можем определять момент инерции тела с погрешностью 1%.

Таблица 4. Период колебания диска на трифилярном подвесе

Количество колеб. N	Время колеб. t, с	Период колеб. T, с
10	40,31±0,01	4,031±0,002
10	40,40±0,01	4,040±0,002
Среднее	40,36±0,01	4,036±0,002

Таблица 5. Период колебания кольца на трифилярном подвесе

Количество колеб. N	Время колеб. t, с	Период колеб. T, с
10	42,66±0,01	4,266±0,002
10	42,54±0,01	4,254±0,002
Среднее	42,60±0,01	4,260±0,002

Таблица 6. Период колебания кольца с диском на трифилярном подвесе

Количество колеб. N	Время колеб. t, с	Период колеб. T, с
10	40,18±0,01	4,018±0,002
10	40,11±0,01	4,011±0,002
Среднее	40,15±0,01	4,015±0,002

Таблица 7. Период колебания бруска на трифилярном подвесе

Количество колеб. N	Время колеб. t, с	Период колеб. T, с
10	38,30±0,01	3,830±0,002
10	38,37±0,01	3,837±0,002
Среднее	38,34±0,01	3,834±0,002

Собственный момент инерции тела (не учитывая момент инерции платформы)

$$I_{\text{тела}} = k(m_{\text{тела}} + m_{\text{платформы}})T_{\text{ср}}^2 - I_0 \quad (22)$$

Таблица 7. Моменты инерции, вычисленные с помощью формулы 22

Объект исследования	Момент инерции I, кг · м ²
Диск	$(2,035 \pm 0,020) \cdot 10^{-3}$
Кольцо	$(4,288 \pm 0,042) \cdot 10^{-3}$
Диск с кольцом	$(6,624 \pm 0,066) \cdot 10^{-3}$
Брусок	$(4,622 \pm 0,046) \cdot 10^{-3}$

Сумма моментов инерции диска и кольца сходится с моментом инерции диска и кольца в пределах погрешности.

$$(2,035 \pm 0,020) + (4,288 \pm 0,042) \approx 6,624 \pm 0,066 \quad (23)$$

Погрешность, с которой выполняется это соотношение, равна 5%.

Теоретические моменты инерции вычисляются по формулам, выведенным отдельно для каждого тела.

Формула момента инерции для диска

$$I = \frac{mR^2}{2} \quad (24)$$

Формула момента инерции для кольца

$$I = m \frac{(R-h)^2 + R^2}{2} \quad (25)$$

Формула момента инерции для бруска (прямоугольного параллелепипеда)

$$I = \frac{m}{12} (a^2 + b^2) \quad (26)$$

Таблица 8. Сравнение теоретических и экспериментальных моментов инерции тел

Тело	Момент инерции I, кг · м ²	
	Экспериментальный	Теоретический
Диск	$(2,035 \pm 0,020) \cdot 10^{-3}$	$2,110 \cdot 10^{-3}$
Кольцо	$(4,288 \pm 0,042) \cdot 10^{-3}$	$4,333 \cdot 10^{-3}$
Брусек	$(4,622 \pm 0,046) \cdot 10^{-3}$	$4,528 \cdot 10^{-3}$

Теоретические значения моментов инерции совпадают с экспериментальными значениями моментов инерции в пределах допустимой погрешности.

Диск, разрезанный по диаметру, помещают на установку, с каждым разом постепенно раздвигая половинки диска так, чтобы их общий центр масс все время оставался на оси вращения платформы. Чтобы выявить зависимость момента инерции такой системы I от расстояния h до оси вращения h, необходимо построить график зависимости $I(h^2)$ по точкам, которые получены экспериментально.

Таблица 9. Измерение зависимости моментов инерции двух полуколец от расстояния до оси вращения.

№	h, м	t_1 , с	T_1 , с	t_2 , с	T_2 , с	T_{cp} , с	I, кг · м ²
1	0	31,31 ±0,01	3,131 ±0,002	31,37 ±0,01	3,137 ±0,002	3,134 ±0,002	$1,910 \cdot 10^{-3}$
2	0,015 ±0,001	31,95 ±0,01	3,195 ±0,002	31,63 ±0,01	3,163 ±0,002	3,179 ±0,002	$1,936 \cdot 10^{-3}$
3	0,040 ±0,001	32,49 ±0,01	3,249 ±0,002	32,91 ±0,01	3,291 ±0,002	3,270 ±0,002	$1,992 \cdot 10^{-3}$
4	0,070 ±0,001	34,08 ±0,01	3,408 ±0,002	33,97 ±0,01	3,397 ±0,002	3,403 ±0,002	$2,037 \cdot 10^{-3}$
5	0,090 ±0,001	36,07 ±0,01	3,607 ±0,002	35,92 ±0,01	3,592 ±0,002	3,600 ±0,002	$2,193 \cdot 10^{-3}$

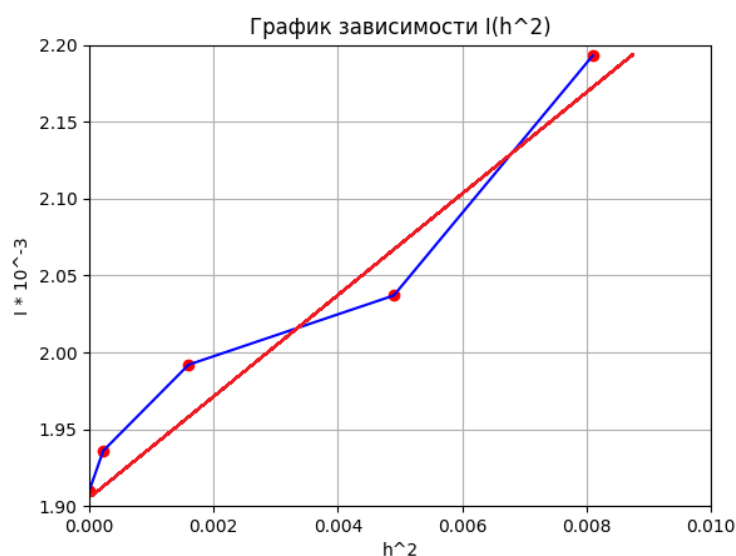


Рис. 2. График зависимости $I(h^2)$

Вывод.

Трифиллярный подвес — установка, с помощью которой можно достаточно точно измерить момент инерции тела. Такая точность обусловлена слабыми затуханиями колебаний. Экспериментально доказана аддитивность моментов инерции. Полученная зависимость $I(h^2)$ аппроксимируется линейной зависимостью.