传染病模型

一、 模型简介

传染病的传播模型，是以传染病的传播速度、空间范围、传播途径、动力学机理等为研究对象，用于指导传染病的预防和控制工作。常见的传染病模型按照具体的传染病特点可分为SI，SIS，SIR,$SIRS$，$SEIR$. 其中S,E,I,R的现实含义如下：

符号	现实含义
S	易感者，指缺乏免疫能力健康人，与感染者接触后容易受到感染
E	暴露者，指接触过感染者但暂无传染性的人，可用于存在潜伏期的传染病
I	患病者，指有传染性的病人，可以传播给 S，将其变为 E 或 I
R	康复者，指病愈后具有免疫力的人，如是终身免疫性传染病，则不可被重新变为 S 、E 或 I，如果免疫期有限，就可以重新变为 S 类，进而被感染。

由以上四类人群根据不同的传染病进行组合，就可以产生不一样的模型。

二、 详细模型：

1. SI 模型：

（1）适用范围：适用于只有易感者和患病者两类人群，且不会反复发作的疾病。如 T 病毒。

（2）模型假设：

a. 易感者与患病者有效接触即被感染，变为患病者，无潜伏期、无治愈情况、无免疫力。

b. 以一天作为模型的最小时间单元。

c. 总人数为 N，不考虑人口的出生与死亡，迁入与迁出，此总人数不变。

d. t时刻两类人群占总人数的比率分别记为$s(t)$、$i(t)$，两类人群的数量为$S(t),I(t)$。

e. 初始时刻 t=0 时，各类人数量所占初始比率为s_0,i_0。

f. 每个患病者每天有效接触的易感者的平均人数(日接触数量)是λ,成为日接触率。

（3）数学描述：

由假设可知,每天可使$\lambda * s(t)$个易感者变为患病者，且患病者人数为$N * i(t)$，所以每天有 $\lambda * s(t) * N * i(t)$个易感者被感染，即每天新增的患病者数，

由

$$\mathrm{N}\frac{\mathrm{di}}{\mathrm{dt}} = \mathrm{N}\lambda \mathrm{s_i}$$

得：

$$\frac{\mathrm{di}}{\mathrm{dt}} = \lambda\mathrm{i}(1-\mathrm{i}), \quad \mathrm{i}(0) = \mathrm{i}_0$$

这是 Logistic 模型，用分离变量法可以求出其解析解为:

$$i(t) = \frac{1}{1 + (1/i_0 - 1)e^{-\lambda t}}$$

$$I(t) = Ni(t)$$

可以发现在$i(t) = 0.5$时，患者数目增加得最快。

2. SIS 模型:

(1) 适用范围：适用于只有易感者和患病者两类人群，但会反复发作的疾病。如细菌性痢疾等治愈后免疫力很低的疾病。

(2) 模型假设:

a. 易感者与患病者有效接触即被感染，变为患病者，可被治愈再次变为易感者，无潜伏期、无免疫力。
b. 以一天作为模型的最小时间单元。
c. 总人数为 N，不考虑人口的出生与死亡，迁入与迁出，此总人数不变。
d. t时刻两类人群占总人数的比率分别记为$s(t)$、$i(t)$，两类人群的数量为$S(t), I(t)$。
e. 初始时刻 t=0 时，各类人数量所占初始比率为s_0, i_0。
f. 每个患病者每天有效接触的易感者的平均人数(日接触数量)是λ,成为日接触率。
g. 每天被治愈的患病者人数占病人总数的比率为 μ，即日治愈率。患病者被治愈后成为易感者，则 1/μ 为该传染病的平均传染期，即从患病到治愈的天数。

（3）数学描述:

由假设，每个病人每天可使 $\lambda * s(t)$ 个易感者变为患病者，且患病者人数为$N * i(t)$，所以每天有 $\lambda * s(t) * N * i(t)$ 个易感者被感染，即每天新增的患病者数。且每天的患病人数 $N * i(t)$ 中，又有 $\mu * N * i(t)$被治愈成为易感者。可得微分方程:

$$N * \frac{di(t)}{dt} = \lambda * s(t) * N * i(t) - \mu * N * i(t)$$

$$s(t) + i(t) = 1 i(0) = i_0$$

解得

$$\text{当 } \lambda = \mu \text{ 时，} \quad i(t) = \frac{i_0}{\lambda t i_0 + 1}$$

$$\text{当 } \lambda \neq \mu \text{ 时，} \quad i(t) = \frac{1}{1 - \sigma^{-1}} + \frac{i_0(1 - \sigma^{-1})e^{(\lambda - \mu)t}}{(1 - \sigma^{-1}) - i_0}$$

其中$\sigma = \frac{\lambda}{\mu}$，代表的时每个患者在传染期$\frac{1}{\mu}$天内，有效接触的易感者人数，即接触数。

接触数可通过佩戴口罩，洗手消毒等措施减小λ进而减小σ

3. SIR 模型:

（1）适用范围：适用于有易感者、患病者和康复者三类人群，治愈后不会再发的疾病。如水痘，康复者具有很强免疫力，不会被再次感染。对于致死性的传染病也可以使用这个模型，死亡的病人也可以归入康复者。此时的康复者可以理解为退出了传染系统。。

（2） 模型假设:

a. 易感者与患病者有效接触即被感染，变为患病者，可被治愈变为康复者，无潜伏期，有终身免疫力。
b. 以一天作为模型的最小时间单元。
c. 总人数为 N，不考虑人口的出生与死亡，迁入与迁出，此总人数不变。
d. t时刻两类人群占总人数的比率分别记为$s(t)$、$i(t)$、$r(t)$，两类人群的数量为$S(t)$,$I(t)$,$R(t)$。
e. 初始时刻 t=0 时，各类人数量所占初始比率为s_0,i_0，r_0。
h. 每个患病者每天有效接触的易感者的平均人数(日接触数量)是λ,成为日接触率。
i. 每天被治愈的患病者人数占病人总数的比率为 μ ，即日治愈率。平均治愈天数 1/μ ，又称平均传染期，即从患病到治愈的天数。
j. $\sigma = \frac{\lambda}{\mu}$,即每个患者在整个传染期$\frac{1}{\mu}$天内，有效接触的易感者人数

（3）数学描述：
由假设，每个病人每天可使 $\lambda * s(t)$ 个易感者变为患病者，且患病者人数为$N * i(t)$，所以每天有 $\lambda * s(t) * N * i(t)$ 个易感者被感染，即每天新增的患病者数。且每天的患病人数 $N * i(t)$ 中，又有 μ$* N * i(t)$被治愈成为康复者。
则有微分方程

$$N * \frac{ds(t)}{dt} = -\lambda * s(t) * i(t)$$

$$N * \frac{di(t)}{dt} = \lambda * s(t) * N * i(t) - \mu * N * i(t)$$

$$N * \frac{dr(t)}{dt} = \mu * N * i(t)$$

$$s(t) + i(t) + r(t) = 1$$

4. SIRS 模型:

（1）适用范围：适用于有易感者、患病者和康复者三类人群，康复者只有暂时性的免疫力，单位时间后变为易感者，有可能再次被感染而患病。
（2） 模型假设：(其余与模型 3 相同)
a. 易感者与患病者有效接触即被感染，变为患病者，可被治愈变为康复者，无潜伏期，有短暂免疫力。
b. 日丧失免疫数γ,即每天丧失免疫力的康复者占看扶着总数的比率

（3） 数学描述：（其余与模型三相同）
每天的康复者$N * r(t)$中，有$\gamma * N * r(t)$丧失免疫力成为易感者

$$N * \frac{ds(t)}{dt} = -\lambda * s(t) * N * i(t) + \gamma * N * r(t)$$

$$N * \frac{di(t)}{dt} = \lambda * s(t) * N * i(t) - \mu * N * i(t)$$

$$N * \frac{dr(t)}{dt} = \mu * N * i(t) - \gamma * N * r(t)$$

$$s(t) + i(t) + r(t) = 1$$

5. SEIR 模型:

（1）适用范围：适用于存在易感者、暴露者、患病者和康复者四类人群，有潜伏期、治愈后获得终身免疫的疾病。如带状疱疹。

（3） 模型假设：(其余与模型 3 相同)

a. 易感者与患病者有效接触即变为暴露者，暴露者经过平均潜伏期后成为患病者，患病者可被治愈成为康复者，康复者终身免疫不再易感。

b. t时刻两类人群占总人数的比率分别记为$s(t)$、$e(i)$、$i(t)$、$r(t)$，两类人群的数量为$S(t), I(t), R(t)$。

c. 初始时刻 t=0 时，各类人数量所占初始比率为s_0, e_0, i_0，r_0。

（4） 数学描述：（其余与模型三相同）

每个病人每天可使 $\lambda * s(t)$ 个易感者变为暴露者，且患病者人数为$N * i(t)$，所以每天有 $\lambda * s(t) * N * i(t)$ 个易感变成暴露者。每天新增的暴露者$N * e(t)$中，又有$\delta * N * e(t)$发病成为患病者。且每天的患病人数 $N * i(t)$ 中，又有 μ$* N * i(t)$被治愈成为康复者。

$$N * \frac{ds(t)}{dt} = -\lambda * s(t) * N * i(t)$$

$$N * \frac{de(t)}{dt} = \lambda * s(t) * N * i(t) - \delta * N * e(t)$$

$$N * \frac{d\mathrm{i}(t)}{dt} = \delta * N * e(t) - \gamma * N * r(t)$$

$$N * \frac{dr(t)}{dt} = \mu * N * i(t)$$

$$s(t) + i(t) + r(t) + e(t) = 1$$