Correction du CC

Ex 1. 1) En remontant le temps, il vient

$$\forall t \geq 1, \quad X_t = \theta_t X_{t-1} + \varepsilon_t$$
$$= \theta_t(\theta_{t-1} X_{t-2} + \varepsilon_{t-1}) + \varepsilon_t$$
$$= \dots$$
$$= P_{t,t} X_0 + P_{t,t-1}\varepsilon_1 + \dots + P_{t,2}\varepsilon_{t-2} + P_{t,1}\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$$

en anticipant sur les notations $P_{t,k}$. Comme $X_0 = 0$ et comme les θ_t sont décorrélés des ε_t, on a directement $\mathbb{E}[X_t] = 0$, $\forall t \geq 1$.

⚠ (X_t) n'est pas défini sur $\mathbb{Z}$!! De plus, θ_t dépend du temps, donc il n'est pas question d'écrire $I - \theta_t B$!!

2) $\forall k \geq 0$, $$P_{t,k} P_{t,k+h} = (\theta_t \cdots \theta_{t-k+1})(\theta_t \cdots \theta_{t-k-h+1})$$
$$= \theta_t^2 \cdots \theta_{t-k+1}^2 \underbrace{\theta_{t-k} \cdots \theta_{t-k-h+1}}_{=1 \text{ si } h=0 \text{ (convention)}}.$$

les θ_t sont iid, donc

$$\mathbb{E}[P_{t,k} P_{t,k+h}] = \underbrace{\mathbb{E}[\theta_t^2] \cdots \mathbb{E}[\theta_{t-k+1}^2]}_{k \text{ termes}} \underbrace{\mathbb{E}[\theta_{t-k}] \cdots \mathbb{E}[\theta_{t-k-h+1}]}_{h \text{ termes}}$$
$$= (\theta^2 + \tau^2)^k \theta^h.$$

3) Voici la <u>seule</u> question délicate du CC ! En reprenant la décomposition obtenue à la question 1, on trouve

$$\forall h \geq 0, \qquad X_t X_{t+h} = T_1(h) + T_2(h) + T_3(h) + T_4(h)$$

avec :

* $$T_1(h) = \sum_{k=1}^{t-1} P_{t,k}\,\varepsilon_{t-k} \sum_{l=1}^{t+h-1} P_{t+h,l}\,\varepsilon_{t+h-l}$$
$$= \sum_{k=1}^{t-1}\sum_{l=1}^{t+h-1} (P_{t,k} P_{t+h,l})\,\varepsilon_{t-k}\,\varepsilon_{t+h-l} \Rightarrow \mathbb{E}[T_1(h)] \overset{k=l-h}{=} \sigma^2 \sum_{k=1}^{t-1} \mathbb{E}[P_{t,k} P_{t+h,k+h}]$$
$$= \underbrace{\sigma^2 \sum_{k=1}^{t-1} (\theta^2+\tau^2)^k \theta^h}_{=0 \text{ si } t=1 \text{ (convention)}}.$$

* $$T_2(h) = \sum_{k=1}^{t-1} P_{t,k}\,\varepsilon_{t-k}\,\varepsilon_{t+h} \Rightarrow \mathbb{E}[T_2(h)] = 0.$$

* $$T_3(h) = \sum_{l=1}^{t+h-1} P_{t+h,l}\,\varepsilon_{t+h-l}\,\varepsilon_t \Rightarrow \mathbb{E}[T_3(h)] \overset{l=h}{=} \sigma^2 \theta^h \mathbb{1}_{\{h>0\}}.$$

* $$T_4(h) = \varepsilon_t\,\varepsilon_{t+h} \Rightarrow \mathbb{E}[T_4(h)] = \sigma^2 \mathbb{1}_{\{h=0\}}.$$

Comme $\mathbb{E}[X_t]=0$ pour tout $t \geq 1$, on en déduit

$$\mathrm{Cov}(X_t, X_{t+h}) = \sigma^2 \left[\mathbb{1}_{\{h=0\}} + \theta^h \mathbb{1}_{\{h>0\}} + \sum_{k=1}^{t-1} (\theta^2+\tau^2)^k \theta^h \right]$$

$$= \sigma^2 \theta^h \sum_{k=0}^{t-1} (\theta^2+\tau^2)^k = \sigma^2\theta^h \frac{1-(\theta^2+\tau^2)^t}{1-(\theta^2+\tau^2)}.$$

Le processus n'est donc pas stationnaire, mais

$$\lim_{t\to+\infty} \mathrm{Cov}(X_t, X_{t+h}) = \frac{\sigma^2\theta^h}{1-(\theta^2+\tau^2)} = \gamma(h)$$

sous la condition $|\theta^2+\tau^2|<1$.

Rem: si $\tau^2=0$, les coefficients ne sont plus aléatoires, on retrouve un AR(1) au sens usuel avec $\theta_t=\theta \ \forall t$. La condition ci-dessus s'écrit $|\theta|<1$ et on vérifie facilement que $\gamma(h)$ correspond à l'autocovariance de l'AR(1) causal (cf. poly p.26).

Ex 2. 1) On a $\phi(B)X_t = \varepsilon_t$ avec
$$\forall z \in \mathbb{C}, \ \phi(z) = 1 - z + \frac{z^2}{4}.$$

Comme $\phi(z)=0 \iff z=2$, $\phi(z)\neq 0$ pour $|z|\leq 1$, il s'agit d'un AR(2) causal. Selon la remarque en p.28 du poly, on a directement
$$\forall k \geq 0, \ \psi_k = (1+k)2^{-k}.$$

2) $$\gamma(0) = \underbrace{\sigma^2 \sum_{k\geq 0} \psi_k^2}_{\text{causalité}} = \sigma^2 \sum_{k\geq 0} (1+k)^2 4^{-k} \overset{\ell=k+1}{=} 4\sigma^2 \sum_{\ell \geq 1} \frac{\ell^2}{4^\ell}$$

$$= 4\sigma^2 \left(\frac{2\times\frac{1}{4}}{(1-\frac{1}{4})^3} - \frac{\frac{1}{4}}{(1-\frac{1}{4})^2} \right) = \frac{80}{27}\sigma^2.$$

3) Par un raisonnement de type Yule-Walker,
$$X_t X_{t-1} = X_{t-1}^2 - \frac{1}{4} X_{t-1} X_{t-2} + X_{t-1}\varepsilon_t$$
qui donne, en passant à l'espérance,
$$\gamma(1) = \gamma(0) - \frac{1}{4}\gamma(1), \quad \text{car par causalité } \mathbb{E}[X_{t-1}\varepsilon_t] = 0. \text{ Ainsi,}$$
$$\gamma(1) = \frac{4}{5}\gamma(0) = \frac{64}{27}\sigma^2.$$

4) L'AR(2) étant causal, il vient immédiatement

$$\alpha(h) = \begin{cases} \frac{4}{5} & \text{si } h=1 \leftarrow \rho(1) \\ -\frac{1}{4} & \text{si } h=2 \leftarrow \phi_2 \\ 0 & \text{si } h \geq 3. \end{cases}$$

Ex3. 1) On sait que $F(B) = I - B^s$ élimine les tendances s-périodiques. De plus,

$$(I - B^s)(a_0 + a_1 t) = a_0 + a_1 t - a_0 - a_1(t-s)$$
$$= a_1 s.$$

Ainsi, $F(B)X_t = a_1 s + \varepsilon_t - \varepsilon_{t-s}$. Ce processus est un MA(1) centré en $m = a_1 s$, donc stationnaire.

2) Pour $h \geq 0$, $\mathrm{Cov}(X_t, X_{t-h}) = \mathrm{Cov}(\varepsilon_t - \varepsilon_{t-s}, \varepsilon_{t-h} - \varepsilon_{t-h-s})$

$$= \sigma^2\left(\mathbb{1}_{\{h=0\}} - \mathbb{1}_{\{h=s\}} + \mathbb{1}_{\{h=0\}}\right).$$

Finalement,

$$\forall h \in \mathbb{Z}, \quad \gamma(h) = \begin{cases} 2\sigma^2 & \text{si } h=0 \\ -\sigma^2 & \text{si } |h|=s \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{et } \rho(h) = \begin{cases} 1 & \text{si } h=0 \\ -\frac{1}{2} & \text{si } |h|=s \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$