Feuille de TD 3
Chaînes de Markov : Classification, Convergence, Applications

Exercice 1.

On lance indéfiniment un dé équilibré à 4 faces : $E = \{1, 2, 3, 4\}$, et l'on définit la variable aléatoire X_n comme le maximum des n premiers lancers, avec $n \in \mathbb{N}_*$.

1 - Montrez que la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_*}$ est une chaîne de Markov sur E, dont on précisera la matrice de transition.

2 - Déterminez les classes de la chaîne.

3 - Calculez la loi de la variable $T = \inf\{n \geq 1 : X_n = 4\}$, le temps d'atteinte de l'état absorbant, et déduisez-en le temps moyen mis par la chaîne pour l'atteindre.

Study Title ______________ Date ______

Exercice 2.

On considère dans cet exercice la marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}$, de matrice de transition donnée par

$$P(x,y) = \begin{cases} p & \text{si } y = x+1, \\ q & \text{si } y = x-1, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

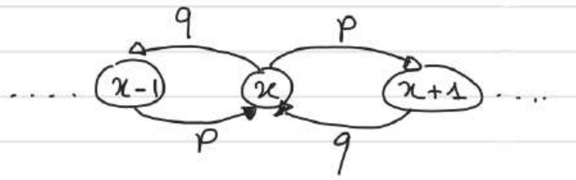
avec $p \in]0,1[$ et $q = 1-p$.

1 - Justifiez les égalités suivantes :

$$P^{2n+1}(0,0) = 0, \quad \text{et} \quad P^{2n}(0,0) = C_{2n}^{n} p^n q^n, \quad n \geq 1,$$ $\sum P^n(y,y)$

et donnez un équivalent de $P^{2n}(0,0)$ au voisinage de l'infini. On s'aidera de la formule de Stirling : $n! \sim \sqrt{2\pi n}(n/e)^n$.

2 - Déduisez-en que la chaîne est récurrente dans le cas symétrique $p = q = 1/2$, et transitoire lorsque $p \neq q$.



$\Rightarrow (X_n)_n$ est irréductible

i.e on a une seule classe

En effet $\forall x \in \mathbb{Z}$ $\begin{cases} P(x,x+1)>0 \\ P(x+1,x)>0 \end{cases} \Rightarrow x \sim x+1.$

1. $\mathbb{P}^{2n+1}(0,0) = 0$ car il y a autants de déplacements vers la droite que vers la gauche quand on va de 0 à 0.

Radmarör

On a : Si $X_0 = 0$ $\quad X_n = \sum_{k=1}^{n} Y_k$ où $Y_k \sim \mathcal{R}(p)$ et les Y_k sont $\perp\!\!\!\perp$

$\mathbb{P}(Y_k = 1) = p = 1 - \mathbb{P}(Y_k = -1)$.

$$X_n = \sum_{k=1}^{n} (2 Z_k - 1) \quad \text{où} \quad Z_k \sim \mathcal{B}(p).$$

$$= 2 \sum_{k=1}^{n} Z_k - n$$

Posons $B = \sum_{k=1}^{n} Z_k \sim \mathcal{B}(n,p)$.

On a $P^{2n}(0,0) = \mathbb{P}_0(X_{2n} = 0) = \mathbb{P}(2B_{2n} - 2n = 0) = \mathbb{P}(B_{2n} = n)$

$$= \binom{2n}{n} p^n q^{2n-n = n}$$

$B_{2n} \sim \mathcal{B}(2n,p)$

2. On a : $\sum_{k \geq 0} P^k(0,0) = \sum_{n \geq 0} P^{2n}(0,0) + 0 = \sum_{n \geq 0} \binom{2n}{n} p^n q^n = S$

la chaîne sera $\begin{cases} \text{récurrent si} & S = +\infty \\ \text{transitoire si} & S < +\infty \end{cases}$

$$\binom{2n}{n}(pq)^n = \frac{(2n)!}{(n!)^2}(pq)^n \underset{+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{4\pi n}\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}}{2\pi n\left(\frac{n}{e}\right)^{2n}}(pq)^n = \frac{\sqrt{\pi n}\, 2^{2n}}{\pi n}(pq)^n$$

$$\underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{\pi n}}(4pq)^n$$

Si $p=q=\frac{1}{2}$ alors $\binom{2n}{n}(pq)^n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$ $\left(\begin{array}{l} \sum n^{-\alpha} \text{ div} \iff \alpha < 1 \\ \sum \frac{1}{n^2} \text{ converge} \end{array} \right)$

S diverge $\iff \sum_{n\geq 0} \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$ diverge.

$\sum_{n\geq 0} \frac{1}{\sqrt{2\pi n}}$ diverge en tant que série de Riemann avec $\alpha = \frac{1}{2} < 1$

Donc $\sum_{n\geq 0} P^{2n}(0,0)$ diverge. Donc l'état 0 est récurrent et donc la chaîne est récurrente car la chaîne est irréductible.

Si $p \neq q$, on peut vérifier que $4pq = 4p(1-p) < 1$

En effet étudions $f(x) = 4x(1-x) = 4x - 4x^2$ sur $[0,1]$
D'où $f'(x) = 4 - 8x$

La dérivée s'annule en $x = \frac{1}{2}$ $\left(4 - 8x = 0 \iff 8x = 4 \iff x = \frac{4}{8}\right)$

x	0		$1/2$		1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

d'où $4x(1-x) < 1$ si $x \neq \frac{1}{2}$

$$\sum_{n\geq 0} \frac{1}{\sqrt{\pi n}}(4pq)^n \leq \sum_{n\geq 1}(4pq)^n = \frac{1}{1-4pq} < +\infty$$

Si $p \neq \frac{1}{2}$ la chaîne est transiente. $\left(\begin{array}{l} \text{état transitoire} \\ \underline{\text{chaîne}} \text{ transiente} \end{array} \right)$

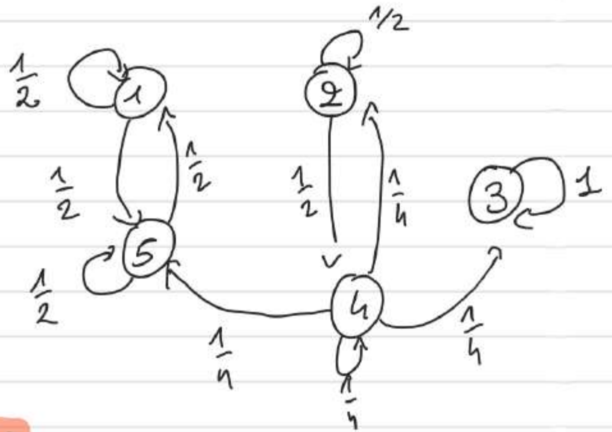
Exercice 3.

Soit une chaîne de Markov possédant 5 états notés 1, 2,..., 5 et donnée par sa matrice de transition

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

1. Identifier les classes de communication.
2. Quelles classes sont fermées ?
3. Quels sont les états récurrents et les états transients ?
4. Quelles sont les probabilités invariantes ?

1)



$C_3 = \boxed{\{3\}}$ classe fermé et fini

et $\mathbb{P}(X_{n+1}=3 \mid X_n = 3) = 1$ donc absorbant

$C_2 : \boxed{\{2, 4\}}$ classe ouvert car $P(4,5) > 0$.

$C_1 = \boxed{\{1, 5\}}$ classe fermé

* $1 \sim 5$; $\hat{P}(1,5)$ et $\hat{P}(5,1) > 0$
* $\{1,5\}$ ne communique pas avec $2, 4, 3$

$\forall x \in \{1,5\}$ et $\forall y \in \{2,3,4\}$ $\quad P(x,y) = 0$.

3. C_2 est transients car ouvert

C_1 et C_3 sont récurrents car fermées et finies

4. $\pi^T P = \pi \qquad \pi = (\pi_1, \dots, \pi_5)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}(\pi_1 + \pi_5) = \pi_1 & \Rightarrow \boxed{\pi_1 = \pi_5} \\ \frac{1}{2}\pi_2 + \frac{1}{4}\pi_4 = \pi_2 & \Rightarrow \pi_2 = 0 \\ \pi_3 + \frac{1}{4}\pi_4 = \pi_3 & \Rightarrow \pi_4 = 0 \\ \frac{1}{2}\pi_2 + \frac{1}{4}\pi_4 = \pi_4 & \\ \frac{1}{2}(\pi_1 + \pi_5) + \frac{1}{4}\pi_4 = \pi_5 & \Rightarrow \pi_4 = 0 \end{cases}$$

donc

Study Title ______ Date ______

$$\Rightarrow \quad \underset{\in \mathbb{R}}{\exists\, \alpha, \beta} \geq 0 \quad tq \quad \Pi = \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ \beta \\ 0 \\ \alpha \end{pmatrix} \quad et \quad 2\alpha + \beta = 1.$$

$$S = \left\{ (\alpha, 0, 1-2\alpha, 0, \alpha) \mid 0 \leq \alpha \leq \frac{1}{2} \right\}$$

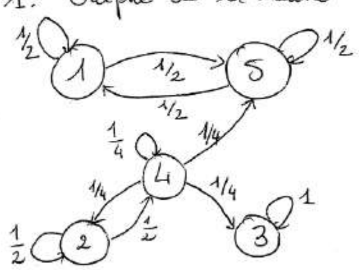
$$(\alpha, 0, 1-2\alpha, 0, \alpha) = 2\alpha\left(\frac{1}{2}, 0, 0, 0, \frac{1}{2}\right) + (1-2\alpha)(0, 0, 1, 0, 0)$$

$\Rightarrow$ combinaison convexe :

$\lambda u + (1-\lambda) v$ $\quad$ u, v vecteur

Exercice 3. Feuille 2

1. Graphe de la chaîne



- $1 \leftrightarrow 5$ car $P(1,5)$ et $P(5,1) > 0$.
- $2 \leftrightarrow 4$ car $P(2,4)$ et $P(4,2) > 0$.

$\{1,5\}$ ne communique pas avec $\{2,4,3\}$ puisque $P(1,j) = P(5,j) = 0$ $\forall j \in \{2,4,3\}$.

- 3 ne communique pas avec $\{2,4\}$ car $P(3,j) = 0$ $\forall j \in \{1,2,4,5\}$.

Conclusion : 3 classes

$\mathcal{C}_1 = \{1,5\}$, $\mathcal{C}_2 = \{2,4\}$, $\mathcal{C}_3 = \{3\}$

2. $\mathcal{C}_2$ ouverte car $P(4,3) > 0$.

$\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_3$ fermées ($\mathcal{C}_3$ absorbante)

3. $\mathcal{C}_2$ ouverte $\Rightarrow$ 2, 4 transients.

$\left.\begin{array}{l}\mathcal{C}_1 \text{ fermée et finie} \\ \mathcal{C}_3 \text{ ———}\end{array}\right\} \Rightarrow 1, 3, 5$ Récurrents.

4. Notons Π une probabilité invariante

$\Pi = (a, b, c, d, e)$ avec $\begin{cases} a,b,c,d,e \geq 0 \\ a+b+c+d+e = 1. \end{cases}$

$$\Pi \cdot P = \Pi \iff \begin{cases} \frac{1}{2}(a+e) = a \\ \frac{1}{2} b + \frac{1}{4} d = b \\ c + \frac{1}{4} d = c \\ \frac{1}{2} b + \frac{1}{4} d = d \\ \frac{1}{2} \cancel{a} + \frac{1}{4} d + \frac{1}{2} e = e \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} b = d = 0 \\ a = e \end{cases}$$

Comme $a+b+c+d+e = 1$, il vient :

Π proba invariante $\iff$

$\Pi = (a, 0, c, 0, a)$ avec $2a + c = 1$ $\iff$

$\Pi = (a, 0, 1-2a, 0, a)$ avec $a \in [0, \frac{1}{2}]$. Notons :

$\Pi_1 = \left(\frac{1}{2}, 0, 0, 0, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}(\delta_1 + \delta_5)$

$\Pi_2 = \delta_3$. Alors Π proba invariante $\iff$:

$\Pi = \lambda \Pi_1 + (1-\lambda)\Pi_2$ avec $\lambda \in [0,1]$ (C'est l'ensemble des Combinaisons convexes de Π_1 et Π_2.

Exercice 4. Soit une chaîne de Markov possédant 5 états notés 1, 2, …, 5 et donnée par sa matrice de transition

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 3/4 & 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}$$

1. Dessinez le graphe de la chaîne. Quelles sont les classes ?

2. Qualifiez les différents états de la chaîne ?

3. Dans la suite de l'exercice, l'état initial de la chaîne est l'état 2. Combien de temps lui faut-il au minimum pour parvenir dans l'état 1 ? Quelle est la probabilité de cet événement ?

4. Donnez un autre exemple de transitions d'états qui amènent de l'état 2 à l'état 1. Combien de temps en moyenne faut-il pour atteindre l'état 1 ?

Exercice 5.

On considère une fonction $f : \mathbb{N}^* \to]0,1[$ telle que $\sum_{k\geq 1} f(k) = 1$. On considère la "matrice" de transition P définie par $P(0,k) = f(k)$ pour tout $n \geq 1$ et pour tout $x \geq 1$, $P(x, x-1) = 1$. On note $(X_n)_{n\geq 0}$ la chaîne de transition P et $T := \inf\{n \geq 1, X_n = 0\}$.

1. Montrez que la chaîne est irréductible (On pourra faire un graphe).

2. Montrez que pour tout $n \geq 1$, $\mathbb{P}_0(T = n+1) = f(n)$. La chaîne est-elle récurrente ou transitoire ?

3. Montrez que la chaîne est récurrente positive si et seulement si $\sum_{k\geq 1} kf(k) < +\infty$.

4. On note λ l'unique mesure invariante de la chaîne satisfaisant $\lambda(0) = 1$. Montrez que $\lambda(1) = 1$ puis que pour tout $k \geq 1$,

$$\lambda(k+1) = \lambda(k) - f(k).$$

5. On suppose que $f(k) = 2^{-k}$. Déterminez λ puis (en justifiant), montrez que $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}_0(X_n = 0) = \frac{1}{3}$.

Exercice 6.

Soit $N \geq 2$ un entier quelconque et considérons $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la chaîne de Markov sur $E = \{0, 1, \dots, N\}$ de matrice de transition P donnée par

$$P(x,y) = C_N^y\,(\pi_x)^y\,(1-\pi_x)^{N-y}, \quad \text{avec} \quad \pi_x = \frac{1-q^x}{1-q^N}, \quad x, y \in E,$$

où $q \in]0,1[$ est un paramètre fixé. On conviendra dans la suite que $0^0 = 1$.

1 - Vérifiez que P est bien une matrice stochastique.

2 - Déterminez les classes de la chaîne ainsi que leur nature (récurrence ou transience).

3 - Montrez que l'identité suivante est satisfaite:

$$\mathbb{P}(X_{n+1} \notin \{0,N\}) = \sum_{x=1}^{N-1} \left(1 - \pi_x^N - (1-\pi_x)^N\right) \mathbb{P}(X_n = x).$$

4 - En posant $a_n = \mathbb{P}(X_n \notin \{0,N\})$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, déduisez-en qu'il existe $\beta \in]0,1[$, dépendant seulement de N, tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait $a_{n+1} \leq \beta\, a_n$.

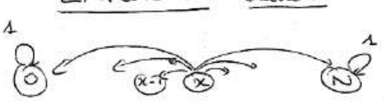
Indication : on étudiera sur $]0,1[$ la fonction $u \mapsto 1 - u^N - (1-u)^N$.

5 - Posons $T = \inf\{n \geq 0 : X_n \in \{0,N\}\}$, représentant le temps d'absorption de la chaîne par les états 0 ou N. En utilisant ce qui précède, montrez que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(T > n) \leq a_0\,\beta^n.$$

6 - Déduisez-en que $\mathbb{P}(T < \infty) = 1$. Ce résultat était-il prévisible ?

Exercice 6 Feuille 2



1. $\forall x, \sum_{y=1}^{N} P(x,y)$

$= \sum_{y=0}^{N} C_N^y (\pi_x)^y (1-\pi_x)^{N-y}$

$= (\pi_x + (1-\pi_x))^N = 1$

De plus, $P(x,y) \geq 0 \ \forall x, y$.

donc P est une matrice stochastique.

2. $\mathcal{C}_0 = \{0\}$ car $P(0,0) = 1$

$\mathcal{C}_N = \{N\}$ car $P(N,N) = 1$.

Enfin, $\mathcal{C}_1 = \{1, \dots, N-1\}$.

En effet, $\forall i \in \{1, \dots, N-2\}$,

$P(i, i+1) = C_N^{i+1} (\pi_i)^{i+1} (1-\pi_i)^{N-i-1}$

> 0 car $\pi_i > 0$ si $i \in \{1, \dots, N-1\}$.

De même $P(i+1, i) > 0$ car $\pi_{i+1} > 0$.

Ainsi, $i \sim i+1 \ \forall i \in \{1, \dots, N-2\}$

Par transitivité, $1 \sim i \ \forall i \in \{1, \dots, N-1\}$.

3. $\mathbb{P}(X_{n+1} \notin \{0,N\})$

$= \sum_{x=0}^{N} \mathbb{P}(X_{n+1} \notin \{0,N\} / X_n = x)\, \mathbb{P}(X_n = x)$

Or, $\mathbb{P}(X_{n+1} \notin \{0,N\} / X_n = x) = 0$ si $x = 0$ ou N et

$\mathbb{P}(X_{n+1} \notin \{0,N\} / X_n = x) = 1 - \pi_x^N - (1-\pi_x)^N$ sinon

car $\pi_x^N = \mathbb{P}(X_{n+1} = N / X_n = x)$

et $(1-\pi_x)^N = \mathbb{P}(X_{n+1} = 0 / X_n = x)$

4. Posons $\beta = \max_{x=1}^{N-1} (1 - \pi_x^N - (1-\pi_x)^N)$.

D'après la question 3,

$\mathbb{P}(X_{n+1} \notin \{0,N\}) \leq \beta \sum_{x=1}^{N-1} \mathbb{P}(X_n = x)$

$\leq \beta\, \mathbb{P}(X_n \notin \{0,N\})$.

Or, $\beta < 1$ car $\pi_x \in]0,1[$ $\forall x \in \{1, \dots, N-1\}$ d'où le résultat.

Study Title ______________________ Date __________

Exercice 7.
On considère une chaîne de Markov $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ irréductible sur un ensemble E fini. On suppose que la matrice de transition associée P est bi-stochastique, c'est-à-dire qu'elle vérifie

$$\sum_{x\in E} P(x,y) = \sum_{y\in E} P(x,y) = 1, \quad x, y \in E.$$

Déterminez la probabilité invariante π de la chaîne.

Exercice 7. Feuille 2

Notons $\pi = \left(\frac{1}{N}, \dots, \frac{1}{N}\right)$
où $N = \mathrm{Card}\, E$.

$\pi \cdot P = \left(\frac{1}{N}, \dots, \frac{1}{N}\right) P \Rightarrow$
$\forall x \in E$,
$(\pi P)(x) = \frac{1}{N} \sum_{y\in E} P(y,x)$

$= \frac{1}{N} = \pi(x)$.

$\Rightarrow \pi$ proba invariante.
π est l'unique proba invariante car la chaîne est irréductible et E est fini.

Exercice 8. [Transmission de messages]

Un message pouvant prendre 2 formes (oui ou non) est transmis à travers n intermédiaires. On suppose que chaque intermédiaire transmet le message de façon correcte avec une probabilité $p \in]0,1[$ ou le déforme en son contraire avec une probabilité $1-p$. On code la réponse "oui" par 1 et la réponse "non" par -1 et on note X_n l'état du message à l'instant n. On admet que $(X_n)_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov sur l'ensemble $\{-1,1\}$.

1. Déterminer la matrice de transition de la chaîne ainsi que le graphe associé.
2. On note $u_n = \mathbb{P}_x(X_n = 1)$ (avec $x \in \{-1,1\}$). Etablir une relation de récurrence pour la suite $(u_n)_{n\geq 0}$.
3. On suppose que le message "oui" a été émis. Déduire de la question précédente la probabilité que le message reçu après n étapes soit bien le message "oui".
4. Que vaut la limite de $(u_n)_{n\geq 0}$. Retrouvez ce résultat à l'aide des théorèmes de convergence de chaînes de Markov.
5. Notons $T_1 = \inf\{n \geq 1, X_n = 1\}$. Que vaut $\mathbb{E}_1[T_1]$? (On déterminera ce résultat de deux manières différentes soit par calcul direct soit via un résultat du cours).

Exercice 8. Feuille 2

- Calcul de π de trois manières différentes.

1. Résolution de $\pi \cdot P = \pi$.

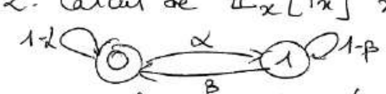
$a \in [0,1]$.

$$[a, 1-a]\begin{bmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \beta & 1-\beta \end{bmatrix} = [a, 1-a]$$

$$\Leftrightarrow a(1-\alpha) + (1-a)\beta = a.$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{\beta}{\beta+\alpha} \quad \text{d'où } \pi = \left[\frac{\beta}{\beta+\alpha}, \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right].$$

2. Calcul de $\mathbb{E}_x[T_x]$ $x \in \{0,1\}$.



$T_0 = \inf\{n \geq 1, X_n = 0\}$.

$\mathbb{P}_0(T_0 = 1) = 1-\alpha$ et $\forall k \geq 2$,

$$\mathbb{P}_0(T_0 = k) = \mathbb{P}_0(X_1 = 1, \dots, X_{k-1} = 1, X_k = 0)$$
$$= P(0,1)\, P(1,1)^{k-2}\, P(1,0)$$
$$= \alpha (1-\beta)^{k-2} \cdot \beta$$

Exercice 8 (suite)

$$\Rightarrow \mathbb{E}_0[T_0] = \sum_{k=1}^{+\infty} k\, \mathbb{P}_0(T_0 = k)$$
$$= 1-\alpha + \alpha \sum_{k=2}^{+\infty} k (1-\beta)^{k-2} \cdot \beta$$
$$= (1-\alpha) + \alpha \sum_{k=2}^{+\infty} (k-1)(1-\beta)^{k-2} \cdot \beta + \alpha\beta \underbrace{\sum_{k=2}^{+\infty} (1-\beta)^{k-2}}_{1/\beta}$$
$$= 1 + \alpha \underbrace{\sum_{\ell=1}^{+\infty} \ell (1-\beta)^{\ell-1} \cdot \beta}_{\text{Espérance d'une géométrique de paramètre } \beta}$$
$$= \frac{1}{\beta}$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}_0[T_0] = 1 + \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\beta+\alpha}{\beta}.$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\mathbb{E}_0[T_0]} = \frac{\beta}{\beta+\alpha}$$

(Plus rapidement, on a:
$\mathbb{E}_0[T_0] = 1 + \alpha\, \mathbb{E}[\mathcal{G}(\beta)]$)

3. Calcul de P^n puis de la limite quand $n \to +\infty$.

D'après le théorème du cours, comme $(X_n)_n$ est irréductible et apériodique (et que Card E est fini),

$$P^n(x,y) \longrightarrow \pi(y) \quad \forall y \in \{0,1\}.$$

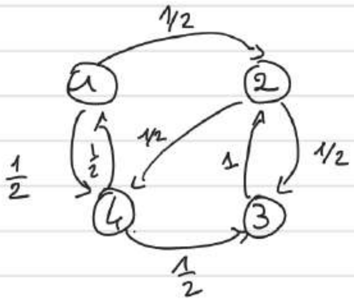
(Déjà Fait)

Exercice 9.

Soit une chaîne de Markov (X_n) possédant 4 états notés 1, 2,..., 4 et donnée par sa matrice de transition

$$\begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Tracer le graphe de cette chaîne.
2. Montrer que (X_n) est irréductible, récurrente positive.
3. Montrer que $P^3(1,1) > 0$ et $P^5(1,1) > 0$.
4. Montrer que la chaîne est apériodique.
5. Calculer μ la probabilité invariante de cette chaîne.
6. Montrer que pour tous couple d'états (x,y), $(P^n(x,y))_n$ tend vers une limite quand n tend vers l'infini. Déterminer cette limite.
7. Soit $T_4 = \inf\{n \geq 1 : X_n = 4\}$. Calculer $E_4(T_4)$.



2. $P(1,2) = \frac{1}{2} > 0$ et $P^2(2,1) \geq P(2,4)\,P(4,1) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} > 0$

Donc $1 \sim 2$

$P(2,3) = \frac{1}{2} > 0$ et $P(3,2) = 1 > 0$ donc $2 \sim 3$

$P^2(3,4) \geq P(3,2)\,P(2,4) = 1 \cdot \frac{1}{2} > 0$. et $P(4,3) = \frac{1}{2} > 0$ donc $3 \sim 4$

$P(4,1) = \frac{1}{2}$ et $P(1,4) = \frac{1}{2} > 0$ donc $4 \sim 1$.

$\sim$ est une relation d'équivalence donc elle est transitive. donc toute les états communiquent entre elles.

La chaîne est irreductible sur un ensemble fini donc elle est récurrente positive.

3- $P^3(1,1) \geq P(1,2).\ P(2,4)\ P(4,1) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{8} > 0$

$P^5(1,1) \geq P(1,2)\,P(2,3)\,P(3,2)\,P(2,4)\,P(4,1) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{16} > 0$

4. Etant donné que la chaîne est irréductible, il nous suffit de montrer que d_1 est apériodique pour montrer que la chaîne est apériodique.

. $P^3(1,1) > 0$ et $P^5(1,1) > 0$ (montré question précédente)

donc 3 et $5 \in \{n \in \mathbb{N}^*, P^n(1,1) > 0\}$

d'où d_1 divise 5 et 3 or 5 et 3 sont 1^{ers} entre eux
donc $d_1 = 1$.
Càd d_1 est apériodique.

Finalement la chaîne est apériodique. (donc IRPA)

5. Comme la chaîne est IRPA, il y a existence d'une unique proba invariante μ tq $\mu^T P = \mu$

$$(x \;\; y \;\; u \;\; v) \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ u \\ v \end{pmatrix} \iff \begin{cases} \frac{1}{2} v = x \\ \frac{1}{2} x + u = y \\ \frac{1}{2} y + \frac{1}{2} v = u \\ \frac{1}{2} x + \frac{1}{2} y = v \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} v = 2x \\ x + 2u = 2y \\ y + v = 2u \\ x + y = 2v \\ x + y + u + v = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} v = 2x \\ x + 2u = 2y \\ y + v = 2u \\ y = 3x \\ x + y + u + v = 1 \end{cases} \longrightarrow 2u = 2.(3x) - x$$

$$\iff \begin{cases} v = 2x \\ y = 3x \\ 2u = 5x \\ x + y + u + v = 1 \end{cases} \longrightarrow x + 3x + \frac{5}{2} x + 2x = 1 \iff x = \frac{2}{17}$$

$$\iff \begin{cases} v = 4/17 \\ y = 6/17 \\ u = 5/17 \\ x = 2/17 \end{cases}$$

Study Title ______________________ Date __________

Donc $\mu = \left[\frac{2}{17}, \frac{6}{17}, \frac{5}{17}, \frac{4}{17}\right]$

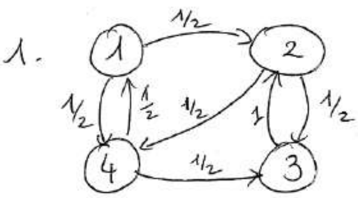
6) Comme chaîne IRPA : $P^n(x,y) = \mathbb{P}_x(X_n = y) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mu(y)$

$\Rightarrow \forall x \in \{1,2,3,4\} \quad P^n(x,y) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \begin{cases} 2/17 & \text{si } y=1 \\ 6/17 & \text{si } y=2 \\ 5/17 & \text{si } y=3 \\ 4/17 & \text{si } y=4 \end{cases}$

7- $\mathbb{E}_4(T_4) = \frac{1}{\pi(4)} = \frac{17}{4}$ D'après le cours

Exercice 9

1.



2. $1 \sim 4$ car $P(1,4)$ et $P(4,1) > 0$.

$1 \sim 2$ car $P(1,2) > 0$

et $P^2(2,1) \geqslant P(2,4) \cdot P(4,1) > 0$.

$2 \sim 3$ car $P(2,3) > 0$ et $P(3,2) > 0$.

Conclusion : Une seule classe de communication. $(X_n)_n$ est irréductible. Comme E est fini, elle est donc récurrente positive.

3. $P^3_{1,1} \geqslant P(1,2)\, P(2,4) \cdot P(4,1)$
$\geqslant \left(\frac{1}{2}\right)^3 > 0$.

$P^5_{1,1} \geqslant P^3_{1,1} \times P(1,4) P(4,1) > 0$.

4. 3 et 5 sont premiers entre eux donc 1 est apériodique.
La chaîne étant irréductible est donc apériodique.

5. Comme $(X_n)_n$ est IRP (Irréd. Récurrente positive), (X_n) admet une ! proba invariante μ.

Posons $\mu = (a, b, c, d)$

$\mu \cdot P = \mu \iff \begin{cases} \frac{1}{2} d = a \\ \frac{1}{2} a + c = b \\ \frac{1}{2} b + \frac{1}{2} d = c \\ \frac{1}{2}(a+b) = d \end{cases}$

$\iff \begin{cases} d = 2a \\ c = b - \frac{1}{2}a = \frac{5}{2}a \\ b = 2d - a = 3a \end{cases}$

Comme $a+b+c+d = 1$, il vient
$a + 3a + \frac{5}{2}a + 2a = 1$
$\iff \frac{17}{2} a = 1 \iff \boxed{a = \frac{2}{17}}$

Conclusion : $\pi = \frac{2}{17}\left(1, 3, \frac{5}{2}, 2\right)$

6. (X_n) IRPA (Apériodique)

D'après un théorème du cours,
$P^n_{i,j} \xrightarrow{n\to+\infty} \pi(j) \quad \forall i, j$

$\Rightarrow P^n_{i,j} \to \begin{cases} 2/17 & \text{si } j=1 \\ 6/17 & \text{si } j=2 \\ 5/17 & \text{si } j=3 \\ 4/17 & \text{si } j=4. \end{cases}$

7. D'après le cours,

$\mathbb{E}_4[T_4] = \frac{1}{\pi(4)} = \boxed{\frac{17}{4}}$

Exercice 10.
Une puce se déplace sur un ensemble à N éléments ($N \geq 2$), noté $\mathscr{D}_N$. À chaque étape, la puce choisit de rester au même endroit avec probabilité $p \in]0,1[$, ou de sauter uniformément au hasard vers l'un des $N-1$ autres états. On suppose que le mouvement de la puce décrit une chaîne de Markov à valeurs dans $\mathscr{D}_N$, de matrice de transition P.
1 - Déterminez la matrice de transition P.
2 - Étudiez la nature des états de la chaîne.
3 - Déterminez, si elle existe, la probabilité invariante.
4 - Calculez $\mathbb{E}_x[T_x]$, où $T_x := \inf\{n \geq 1 : X_n = x\}$ est le temps de retour en un état $x \in \mathscr{D}_N$.

Exercice 10. Feuille 2

1. $P(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = y \\ \frac{1}{N-1} & \text{si } x \neq y. \end{cases}$

2. $\forall i \in \{2, N\}$, $1 \sim i$ car $P(1,i) = P(i,1) = \frac{1}{N-1} \Rightarrow$ une seule classe récurrente positive.
$P^2(1,1) \geq P(1,2) \cdot P(2,1) = \left(\frac{1}{N-1}\right)^2 > 0.$
$P^3(1,1) \geq P(1,2) \cdot P(2,3) \cdot P(3,1) = \left(\frac{1}{N-1}\right)^3 > 0$
$\Rightarrow d_1 = \text{PGCD}\{2,3\} = 1.$
La chaîne est donc apériodique.

Exercice 11.

L'objectif de cet exercice est de résoudre le problème de la ruine du joueur, qui est le suivant. Anis et Bilal jouent à un jeu de Pile ou Face avec une pièce de monnaie. Ils ont chacun à leur disposition une certaine somme d'argent.

- Si le résultat lors du lancer est Pile, alors Bilal donne un euro à Anis ;
- Si c'est Face, alors c'est Anis qui donne 1 euro à Bilal.

Puis on relance la pièce en suivant à chaque fois les mêmes règles, jusqu'à ce que l'un des deux joueurs ait gagné (l'autre joueur est donc ruiné, le malheureux). Quelle est la probabilité qu'il y ait un gagnant (c'est-à-dire que le jeu prenne fin) ? Quelle est la probabilité qu'Anis gagne ? Et quelle est la durée moyenne d'une partie ?

Pour répondre à ces questions, nous allons modéliser ce problème par une chaîne de Markov. Soit N un entier non nul quelconque et considérons la chaîne de Markov $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans l'espace $E = \{0, 1, \cdots, N\}$, représentant l'évolution de la fortune d'Anis en fonction du temps. Notons p la probabilité d'obtenir Pile ($p \in]0, 1[$) et $q = 1 - p$ celle d'obtenir Face.

1 - Dessinez le graphe de cette chaîne de Markov, et déterminez ses classes ainsi que leur nature.

2 - En utilisant le même argument que pour l'exercice 6, montrez qu'il y a forcément un gagnant.

3 - Posons $u_x = \mathbb{P}_x(T_N < \infty)$, où $x \in E$ et $T_N = \inf\{n \geq 1 : X_n = N\}$ est le premier temps de retour en N. Montrez que pour tout $x \in \{1, \cdots, N-1\}$, on a la relation suivante :

$$u_x = pu_{x+1} + qu_{x-1}, \quad u_0 = 0, \quad u_N = 1. \qquad (*)$$

Indication : on montrera que $\mathbb{P}(T_N < \infty | X_1 = y) = u_y$ pour tout $y \in E$.

4 - Résolvez $(*)$ et déduisez-en la probabilité qu'Anis gagne sachant qu'elle possède initialement x euros (on étudiera les cas $p = 1/2$ et $p \neq 1/2$).

5 - Soit $T = \inf\{n \geq 0 : X_n \in \{0, N\}\}$ la v.a. représentant la durée d'une partie. On suppose que $p = 1/2$. En utilisant un raisonnement similaire à celui des questions précédentes, montrez que $\mathbb{E}_x[T] = x(N - x)$.

X_n : fortune du joueur A à l'instant n

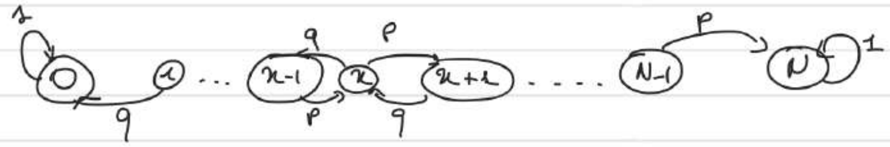
$X_0 = x_0$

Fortune du joueur $B = N - X_n$

Le jeu s'arrête à $T := \inf\{n \geq 0,\ X_n = 0 \text{ ou } N\}$

A a perdu   A a gagné

1.



$\mathcal{C}_0 = \{0\}$ et $\mathcal{C}_N = \{N\}$ forment des classes absorbants fermées car $P(0,0) = P(N,N) = 1$.

$\forall x \in [\![1, N-2]\!]$ $\quad x \sim x+1$ car $\begin{cases} P(x,x+1) = p > 0 \\ P(x+1,x) = q > 0 \end{cases}$ $\quad p \in]0,1[$

$\mathcal{C}_1 := \{1, \dots, N-1\}$ forme une classe de communication ouverte car $P(N, N-1) = p > 0$

2. Montrons que $P(T < +\infty) = 1$

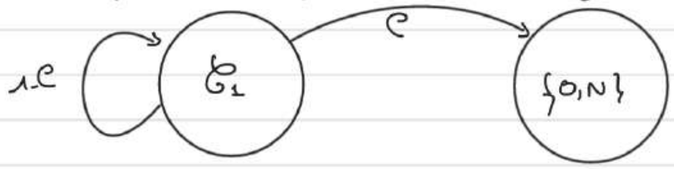
On a $\forall x \in [\![1, N-1]\!]$, $P^N(x, \{0, N\}) > 0$

En effet $P^x(x,0) \geq \underbrace{P(x,x-1)}_{>0} \dots \underbrace{P(1,0)}_{>0} > 0$

$$\Rightarrow \mathcal{P}^N(x,0) \geq \mathcal{P}^x(x,0) \times \underbrace{\mathcal{P}^{N-x}(0,0)}_{=1} > 0.$$

$$\Rightarrow \quad C := \min_{x\in\{1,\dots,N-1\}} \mathcal{P}^N(x,\{0,N\}) > 0$$

Schématiquement, on peut contrôler la dynamique sur N coups par



$k\in\mathbb{N}^*$ $\quad \mathbb{P}(T>Nk) = \mathbb{P}(T>Nk,\ T>N(k-1)) = \underbrace{\mathbb{P}(T>Nk \mid T>N(k-1))}_{\text{proba de ne pas sortir en N coups } < 1-C} \times \mathbb{P}(T>N(k-1))$

car $\{T>Nk\} \subset \{T>N(k-1)\}$

$\dots \leq (1-C)^k$

Ccl : $\forall k\in\mathbb{N},\ \mathbb{P}(T>Nk) \leq (1-C)^k$

Par convergence monotone, on en conclut que : $0 \leq \mathbb{P}(T=+\infty) \leq \lim_{k\to+\infty} (1-C)^k = 0$

$$\Rightarrow \quad \mathbb{P}(T=+\infty) = 0.$$

3. $T_N = \inf\{n\geq 1,\ X_n = N\}$ Déterminer $P_x(T_N<+\infty) = P(A \text{ gagne})$

$$\begin{aligned} P_x(T_N<+\infty) &= \mathbb{P}_x(T_N<+\infty, X_1=x-1) + \mathbb{P}_x(T_N<+\infty, X_1=x+1) \\ &= \mathbb{P}(T_N<+\infty \mid X_1=x-1)\,.\underbrace{\mathbb{P}_x(X_1=x-1)}_{q} + \mathbb{P}(T_N<+\infty \mid X_1=x+1)\,.\underbrace{\mathbb{P}_x(X_1=x+1)}_{p} \\ &= p\,\underbrace{\mathbb{P}(T_N<+\infty \mid X_1=x+1)}_{u_{x+1}} + q\,\underbrace{\mathbb{P}(T_N<+\infty \mid X_1=x-1)}_{u_{x-1}} \end{aligned}$$

$\to$ prop de Markov.

$u_x = p\,u_{x+1} + q\,u_{x-1}$ or $p+q=1$

4. $(p+q)u_x = p\,u_{x+1} + q\,u_{x-1} \iff q(u_x - u_{x-1}) = p(u_{x+1}-u_x)$

On pose $v_x = u_x - u_{x-1}$ d'où $q\,v_x = p\,v_{x+1} \iff v_{x+1} = \frac{q}{p} v_x$

Donc v_x est une suite géométrique et $v_x = \left(\frac{q}{p}\right)^{x-1} v_1$

$u_x = \sum_{l=1}^{x} u_l - u_{l-1} + \underbrace{u_0}_{=0}$ car en partant d'une fortune 0 on ne peut pas atteindre N !

$$u_x = \sum_{l=1}^{x} \left(\frac{q}{p}\right)^{l-1} v_1 = v_1 \sum_{l=1}^{x} \left(\frac{q}{p}\right)^{l-1} = v_1 \cdot \begin{cases} \dfrac{1-\left(\frac{q}{p}\right)^x}{1-\left(\frac{q}{p}\right)} & \text{si } p\neq q \\ x. & \text{si } p=q=\frac{1}{2} \end{cases}$$

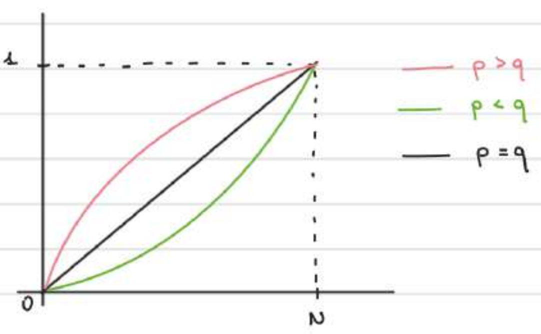
Si $p\neq q$ $\quad u_N = 1 \iff u_N = \dfrac{1-\left(\frac{q}{p}\right)^N}{1-\frac{q}{p}} v_1 = 1 \iff v_1 = \dfrac{1-\frac{q}{p}}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^N}$

$$\Rightarrow \quad u_x = \frac{1-\left(\frac{q}{p}\right)^x}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^N}$$

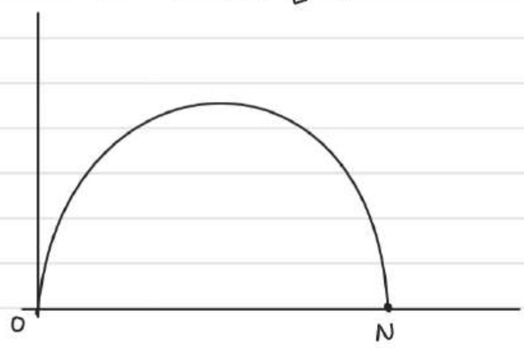
Study Title ______________________ Date __________

Si $p=q$ $\quad u_N = 1 = v_1 \times N \iff v_1 = \frac{1}{N}$ d'où $u_x = \frac{x}{N}$ $\quad \forall x \in \{0,\dots,N\}$

$x \to P_x(T_N < +\infty)$



$x \longrightarrow \mathbb{E}_x[T]$



5. Quelques mots sur $\mathbb{E}_x[T]$ où $\mathbb{E}_x[T]$: Temps moyen d'une partie lorsque $X_0 = x$

Posons $u_x = \mathbb{E}_x[T]$ $\quad$ On a $u_0 = u_N = 0$

Ensuite on utilise un raisonnement similaire au précédent

$x \in \{1,\dots,N-1\}$

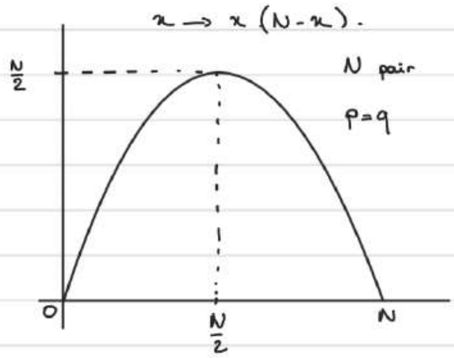
$$\begin{aligned} u_x &= \mathbb{E}_x\left[T \cdot \mathbb{1}_{\{X_1 = x+1\}}\right] + \mathbb{E}_x\left[T \cdot \mathbb{1}_{\{X_1 = x-1\}}\right] \\ &= \mathbb{E}_x\left[T \mid X_1 = x+1\right] \cdot \mathbb{P}_x(X_1 = x+1) + \mathbb{E}_x\left[T \mid X_1 = x-1\right] \cdot \mathbb{P}_x(X_1 = x-1) \\ &= (1 + u_{x+1}) \cdot p + (1 + u_{x-1}) \cdot q \\ &= p u_{x+1} + q u_{x-1} + 1. \end{aligned}$$

$N = 2$:
0 1 2

$$\begin{aligned} u_1 &= \mathbb{E}_1[T] \; (= 1) \\ &= \underbrace{\mathbb{E}_1[T \mid X_1 = 2]}_{1+u_2}\, p + \underbrace{\mathbb{E}_1[T \mid X_1 = 0]}_{1+u_0}\, q \end{aligned}$$

$$\mathbb{E}_x[T \mid X_1 = x+1] = \underbrace{\mathbb{E}_x[T - 1 \mid X_1 = x+1]}_{u_{x+1}} + 1$$

$x \to x(N-x)$.



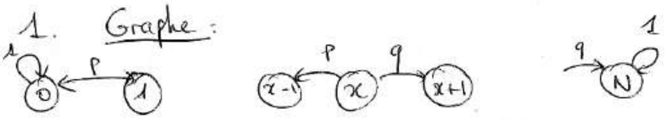
Ainsi,

$$\begin{aligned} & (p+q)\, u_x = p u_{x+1} + q u_{x-1} + 1 \\ \Rightarrow\ & q(u_x - u_{x-1}) = p(u_{x+1} - u_x) + 1 \\ \Rightarrow\ & u_{x+1} - u_x = \frac{q}{p}(u_x - u_{x-1}) - \frac{1}{p} \qquad x \in \{1,\dots,N-1\} \end{aligned}$$

$$u_x = \begin{cases} x(N-x) & \text{si } p = q = 1/2 \\ \dfrac{\left[N \cdot \dfrac{1-\left(\frac{p}{q}\right)^x}{1-\left(\frac{p}{q}\right)^N}\right] - x}{p-q} & \text{si } p \neq q. \end{cases}$$

Exercice 11 (1)

1. Graphe :



. $\forall x \in \{1,\dots,N-2\}$, $x \sim x+1$ car $P(x,x+1) = p > 0$ et $P(x+1,x) = q > 0$.

. 0 et N sont absorbants $\Longrightarrow$

3 classes : $\mathcal{C}_1 = \{1,\dots,N-1\}$

$\mathcal{C}_0 = \{0\}$ et $\mathcal{C}_N = \{N\}$.

. $\mathcal{C}_0$, $\mathcal{C}_N$ fermées (absorbantes)

. $\mathcal{C}_1$ ouverte car $P(1,0) = p > 0$.

2. On remarque que $\forall x \in \{1,\dots,N-1\}$,

$$P^{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor + 1}(x, \{0,N\}) > 0.$$

Posons $Q = P^{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor + 1}$ et

$$\lambda = \min_{x \in \{1,\dots,N-1\}} P^{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor + 1}(x, \{0,N\})$$

$\lambda > 0$.

(2)

Posons $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la chaîne de transition Q et

$T = \min\{n \in \mathbb{N}^*, Y_n \in \{0,N\}\}$

Comme $\{0,N\}$ absorbe la chaîne,

$$\mathbb{P}_x(T > n) = \mathbb{P}_x(Y_n \in \{1,\dots,N-1\})$$

On remarque que :

$$\mathbb{P}_x(Y_{n+1} \notin \{0,N\}) = \mathbb{P}_x(Y_{n+1} \notin \{0,N\} / Y_n \notin \{0,N\}) \cdot \mathbb{P}_x(Y_n \notin \{0,N\})$$

$$\leqslant (1-\lambda) \cdot \mathbb{P}_x(Y_n \notin \{0,N\})$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}_x(Y_n \notin \{0,N\}) \leqslant (1-\lambda)^n$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}_x(T > n) \leqslant (1-\lambda)^n$$

$$\Rightarrow 0 \leqslant \mathbb{P}_x(T = +\infty) \leqslant \lim_{n\to+\infty} (1-\lambda)^n = 0$$

3. $\mathbb{P}_x(T_N < +\infty)$

$$= \mathbb{P}_x(T_N < +\infty, X_1 = x-1) + \mathbb{P}_x(T_N < +\infty, X_1 = x+1) \quad \forall x \in \{1,\dots,N-1\}$$

$$= \underbrace{\mathbb{P}_x(T_N < +\infty / X_1 = x-1)}_{\mathbb{P}_{x-1}(T_N < +\infty)} \cdot p + \underbrace{\mathbb{P}_x(T_N < +\infty / X_1 = x+1)}_{\mathbb{P}_{x+1}(T_N < +\infty)} \cdot q$$

d'où le résultat si $x \in \{1,\dots,N-1\}$. (3)

Si $x = 0$, $\mathbb{P}_x(T_N < +\infty) = 0$.

Si $x = N$, $\mathbb{P}_x(T_N < +\infty) = 1$.

4. $(*) \iff \begin{cases} u_{x+1} - u_x = \frac{p}{q}(u_x - u_{x-1}) \\ \text{si } x \in \{1,\dots,N-1\} \\ u_0 = 0, \ u_N = 1. \end{cases}$

Posons $v_x = u_x - u_{x-1}$. On a :

$$v_{x+1} = \left(\frac{p}{q}\right)^x v_1 \quad \forall x \in \{1,\dots,N-1\}.$$

$$\iff u_x - u_{x-1} = \left(\frac{p}{q}\right)^{x-1} \underbrace{(u_1 - u_0)}_{u_1}, \ x = 1,\dots,N.$$

Cas 1 : $p = q$

$$u_x - u_{x-1} = u_1 - u_0 = u_1, \ x = 1,\dots,N.$$

$$\Rightarrow u_x = \sum_{k=1}^{x} (u_k - u_{k-1})$$

$$= u_1 \cdot x, \ x = 1,\dots,N.$$

$\Rightarrow u_N = u_1 \cdot N$. Or $u_N = 1$.

$\Rightarrow u_1 = \frac{1}{N} \Rightarrow \boxed{\forall x \in \{0,\dots,N\}, u_x = \frac{x}{N}}$

(4)

Cas $p \neq q$.

Dans ce cas,

$$u_x = \sum_{k=1}^{x} (u_k - u_{k-1})$$

$$= u_1 \sum_{l=0}^{x-1} \left(\frac{p}{q}\right)^l$$

$$= u_1 \frac{1 - (p/q)^x}{1 - p/q} \ ; x = 1,\dots,N.$$

Or $u_N = 1 \Rightarrow u_1 = \dfrac{1 - p/q}{1 - (p/q)^x}$.

$\Rightarrow \forall x \in \{0,\dots,N\}$,

$$\boxed{u_x = \frac{1 - (p/q)^x}{1 - (p/q)^N}}$$

Exercice 12.

Étant donné un entier $d \geq 2$, considérons d boules numérotées de 1 à d et réparties dans deux urnes A et B. On tire un nombre i au hasard entre 1 et d, et la boule numéro i est alors changée d'urne. Soit X_n le nombre de boules dans l'urne A après les n premiers tirages, X_0 étant le nombre de boules dans A à l'instant initial. La suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est appelée chaîne d'Ehrenfest. On admettra qu'il s'agit d'une chaîne de Markov sur l'espace d'état $E = \{0, \ldots, d\}$.

1 - Montrez que la matrice de transition P est donnée par

$$P(x,y) = \begin{cases} \frac{d-x}{d} & \text{si } y = x+1, \\ \frac{x}{d} & \text{si } y = x-1, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

et déduisez-en que la chaîne est irréductible.

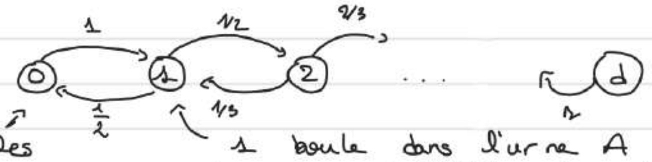
2 - Calculez les deux constantes réelles a et b vérifiant pour tout $x \in E$,

$$\sum_{y\in E} y\,P(x,y) = ax + b.$$

3 - Déterminez par récurrence sur n l'expression de $\mathbb{E}_x[X_n]$ en fonction de x, a et b.

4 - Déduisez-en sa limite lorsque n tend vers l'infini. Ce résultat était-il intuitif ?

1 -



0 boules dans l'urne A

1 boule dans l'urne A
donc la probabilité qu'on tire le numéro de la boule qui est en A est $\frac{1}{d}$

Et la probabilité qu'on tire le numéro d'une boule dans l'urne B est $\frac{d-1}{d}$.

$E = [\![0, d]\!]$

$$P(x,y) = \begin{cases} \frac{\text{Card (nb de boules dans B)}}{\text{Card(nb de boules)}} = \frac{d-x}{d} & \text{si } y = x+1 \\ \frac{\text{Card (nb de boules dans A)}}{\text{Card (nb de boules)}} = \frac{x}{d} & \text{si } y = x-1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$\forall x \in E \setminus \{d\}$ $\quad x \rightsquigarrow x+1$ $\quad P(x, x+1) = \frac{d-x}{d} > 0$

$\forall x \in E \setminus \{0\}$ $\quad x \rightsquigarrow x-1$ $\quad P(x, x-1) = \frac{x}{d} > 0 \quad \Rightarrow \quad x+1 \rightsquigarrow x.$

Donc $x \sim x+1$. $\forall x \in E \setminus \{d\}$

Donc la chaîne est irréductible.

2. $\displaystyle\sum_{y\in E} y\,P(x,y) = (x+1)\,P(x, x+1) + (x-1)\,P(x, x-1)$

$= (x+1)\left(\frac{d-x}{d}\right) + (x-1)\frac{x}{d}$

$= (x+1) + \frac{(-x(x+1)) + (x-1)x}{d}$

$= (x+1) + \frac{(-x^2 - x + x^2 - x)}{d} = (x+1) - \frac{2}{d}x.$

$= \frac{d-2}{d}x + 1 = \mathbb{E}_x[X_1]$

3. $\mathbb{E}_x[X_{n+1}] \overset{(*)}{=} \mathbb{E}_x\left[\mathbb{E}_x[X_{n+1} \mid X_n]\right] \overset{*}{=} \mathbb{E}_x[aX_n + b]$

$= a\,\mathbb{E}_x[X_n] + b.$

$u_n = \mathbb{E}_x[X_n] \qquad u_{n+1} = a u_n + b \quad = a(a u_{n-1} + b) + b$

Soit le point fixe $\ell = a\ell + b \iff \ell = \frac{b}{1-a}$

On pose $v_n = u_n - \ell$ On trouve $v_{n+1} = a v_n \Rightarrow v_n = a^n v_0$

$u_n = a^n(u_0 - \ell) + \ell.$

$$\mathbb{E}_x[X_n] = \underbrace{\left(1 - \frac{2}{d}\right)}_{\left|1-\frac{2}{d}\right| < 1.}{}^{n}\left(x - \frac{d}{2}\right) + \frac{d}{2} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{d}{2}$$

(*) Ou bien $\mathbb{E}_x[X_{n+1}] = \sum_{y \in E} \underbrace{\mathbb{E}_x[X_{n+1} \mid X_n = y]}_{\mathbb{E}_y[X_1]} \mathbb{P}_x(X_n = y)$

$$= \sum_{y \in E} (ay + b)\, \mathbb{P}_x(X_n = y)$$

$$= a \underbrace{\sum_{y \in E} y\, \mathbb{P}_x(X_n = y)}_{\mathbb{E}_x[X_n].} + b$$

* $\mathbb{E}_x[X_{n+1} \mid X_n] = \phi(X_n)$ tel que $\phi(y) = \mathbb{E}[X_{n+1} \mid X_n = y]$

$$= \sum_{z \in E} z\, \underbrace{\mathbb{P}(X_{n+1} = z \mid X_n = y)}_{P(y,z)}$$

$\mathbb{P}(X_1 = z \mid X_0 = X)$

$$= \mathbb{E}_y[X_1] = ay + b.$$

Study Title ______ Date ______

5 - Soit π une mesure de probabilité sur E. On dit qu'elle est réversible si l'égalité suivante est vérifiée : pour tous $x, y \in E$,

$$\pi(x)\, P(x,y) = \pi(y)\, P(y,x).$$

Montrez qu'une probabilité réversible est forcément invariante.

6 - Déduisez-en l'expression de l'unique probabilité invariante π de la chaîne.

7 - Déterminez la période de la chaîne. La quantité $P^n(x,y)$ converge-t-elle lorsque n tend vers l'infini ?

8 - On modifie la chaîne de la façon suivante : lorsque la boule a été extraite d'une urne suivant la procédure décrite, on tire au sort avec même probabilité l'urne A ou B dans laquelle on la place.

a) Déterminez sa nouvelle matrice de transition P ainsi que sa probabilité invariante π.

b) Montrez que la chaîne est apériodique et déterminez la limite de $P^n(x,y)$ lorsque n tend vers l'infini.

5_ π est réversible si

$$\forall x,y \quad \underbrace{\pi(x) \,.\, P(x,y)}_{\mathbb{P}_\pi(X_0 = x, X_1 = y)} = \underbrace{\pi(y)\, P(y,x)}_{\mathbb{P}_\pi(X_0 = y, X_1 = x)} .$$

Proposition : Si π reversible, π invariante.

$$\forall x, E, \quad (\pi P)(x) = \sum_{y \in E} \pi(y)\, P(y.x) \overset{\pi \text{ réversible}}{=} \sum_{y \in} \pi(x)\, P(x,y)$$

$$= \pi(x) \underbrace{\sum_{y \in E} P(x,y)}_{1} = \pi(x)$$

6. Cherchons une proba réversible. Pour cette chaîne, π est réversible

$$\iff \forall x \in [\![0, d-1]\!] \quad \pi(x)\, P(x, x+1) = \pi(x+1)\, P(x+1, x).$$

$$\iff \forall x \in [\![0, d-1]\!] \quad \pi(x+1) = \frac{d-x}{\cancel{d}} \cdot \frac{\cancel{d}}{x+1}\, \pi(x)$$

$$\iff \forall x \in [\![1, d-1]\!] \quad \pi(x) = \left(\prod_{k=0}^{x-1} \frac{d-k}{k+1} \right) \pi(0).$$

$\Leftrightarrow \forall x \in [\![1, d-1]\!] \quad \pi(x) = \dfrac{d(d-1)\dots(d-(x-1))}{x!} \pi(0)$

$\Leftrightarrow \forall x \in [\![1, d-1]\!] \quad \pi(x) = \binom{d}{x} \pi(0).$

Comme $\sum_{x=0}^{d} \pi(x) = 1$ on en déduit que $\pi(0) \underbrace{\sum_{x=0}^{d} \binom{d}{x}}_{2^d} = 1$

D'où $\pi(0) = \frac{1}{2^d}$

<u>Conclusion:</u> π est définie par $\pi(x) = \frac{1}{2^d}\binom{d}{x}$, $x \in [\![0, d]\!]$

est proba reversible (donc ! proba invariante car $(X_n)_n$ est récurrente positive).

En fait, $\pi \sim \mathcal{B}(d, \frac{1}{2})$ $\left(\binom{d}{x} p^x (1-p)^{d-x} \overset{\text{Si } p=1/2}{=} \frac{1}{2^d}\binom{d}{x} \right)$

7_ On peut revenir en 2 étapes à un état donné, mais il est impossible de revenir en 1 nb impair d'étapes

En effet, pour aller de x à x, il faut faire autant de déplacements vers la droite que vers la gauche.

$\Rightarrow$ la chaîne est de période 2. " La chaîne n'étant pas périodique $(P^n(x,y))_{n\geq 0}$ ne converge pas ".

En effet si $|y-x|$ est pair, $\left| \begin{array}{l} P^{2n+1}(x,y) = 0 \xrightarrow{n \to +\infty} 0. \\ P^{2n}(x,y) \neq 0 \end{array} \right.$