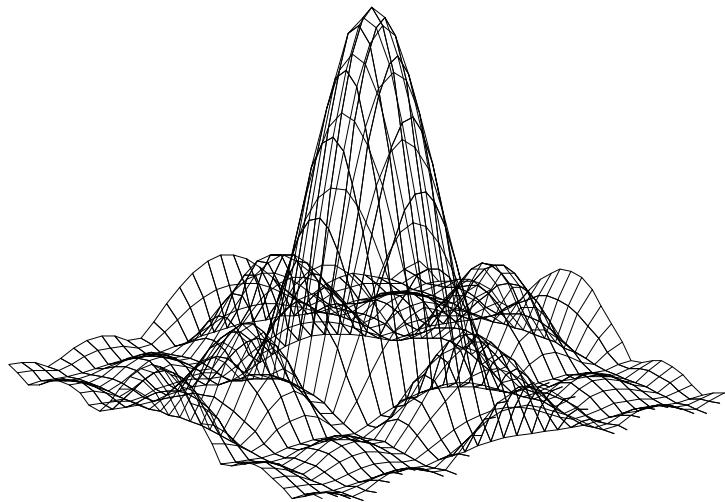


Département de Génie Electrique et Informatique Industrielle

2ème ANNEE – Semestre 3

**Cours de Mathématiques appliquées
et
Traitement du signal**



Série de Fourier et forme fréquentielle d'un signal	7
1 Introduction : forme temporelle et forme fréquentielle d'un signal	7
2 Décomposition en Série de Fourier (SF) des signaux périodiques	7
2.1 Signaux périodiques	7
2.2 Décomposition en Série de Fourier (SF).....	7
3 Théorème de Parseval	9
4 Spectre d'un signal	9
4.1 Définition de la fonction sinc : sinus cardinal.....	10
4.2 Exemple très important: impulsion rectangulaire	11
4.3 Définition des signaux $\mathbb{1}(t)$ échelon unité et $\delta(t)$ impulsion de Dirac	12
4.3.1 Echelon unité.....	12
4.3.2 Impulsion de Dirac.....	12
4.4 Décomposition en série de Fourier et spectre d'un peigne de Dirac	13
4.5 Décroissance du spectre	14
5 Expression complexe des SF : fréquences négatives	14
6 Forme fréquentielle des signaux non périodiques : Transformée de Fourier (TF)	17
6.1 Définition	17
6.2 Propriétés	19
6.2.1 Linéarité	19
6.2.2 Transformée de Fourier de fonction réelles	19
6.2.3 Dérivation.....	19
6.2.4 Changement d'origine en temps	20
6.2.5 Changement d'échelle	20
6.2.6 Changement d'origine en fréquence.....	20
6.2.7 Produit des transformées : produit de convolution temporel	20
6.2.8 Transformée d'un produit.....	20
6.3 Réponse impulsionnelle d'un système linéaire et convolution (temps continu)	20
6.4 Transformée de Fourier inverse	22
6.5 Exemple (très important) : impulsion rectangulaire	23
6.6 Etude des cas limites	23
6.7 Relation série de Fourier - Transformée de Fourier.....	25
6.8 Théorème de Parseval	28
6.9 Résumé sur SF/TF.....	28
6.10 Spectres	29
7 Applications	30
7.1 Filtrage	30
7.2 Modulation d'amplitude sans porteuse.....	32
7.2.1 Définition	32
7.2.2 Produit de deux sinusoides.....	32
7.2.3 Cas d'un signal quelconque	33
7.2.4 Démodulation synchrone	34
7.2.5 Modulation expliquée par la convolution en fréquence.....	35
7.2.5.1 Convolution par une impulsion de Dirac	35
7.2.5.2 Modulation d'amplitude sans porteuse.....	36
Echantillonnage d'un signal en temps continu - Théorème de Shannon	37
1 Introduction	37
2 Numérisation des signaux	37
3 Modélisation mathématique de l'échantillonnage - théorème de Shannon	38
3.1 Explication en utilisant la modulation	38
3.2 Explication en utilisant la convolution.....	42

3.3	Echantillonnage sans modification du spectre du signal analogique- théorème de Shannon.....	43
4	Echantillonnage des signaux réels bruités : filtre antirepliement	44
5	Choix pratique de la fréquence d'échantillonnage	45
5.1	Sur échantillonnage pour conversion Numérique/Analogique	45
5.2	La fréquence maximale du signal est connue	46
5.3	La fréquence maximale du signal est inconnue	46
5.4	Application à l'automatique	47
	La transformée en Z	49
1	Introduction : le traitement numérique du signal (digital signal processing, DSP).....	49
1.1	RAPPEL : Notations signaux continus - signaux discrets	50
2	Définition de la transformée en Z	50
2.1	Relation entre transformée en z et transformée de Laplace	50
2.2	Existence	51
2.3	Transformée en Z inverse	51
3	Exemples de transformée en Z.....	52
3.1	Impulsion de Kroneker.....	52
3.2	Echelon unité.....	52
3.3	Signal exponentiel.....	53
4	Propriétés de la transformée en Z	54
4.1	Linéarité	54
4.2	Autres propriétés	54
4.2.1	Produit par l'exponentiel	54
4.2.2	Produit par t.....	54
4.3	Transformée en Z d'un signal retardé.....	54
4.4	Transformée en Z d'un signal avancé.....	55
4.5	Théorème de la valeur finale.....	55
4.6	Théorème de la valeur initiale.....	55
5	Calcul de l'inverse de la transformée en Z	55
5.1	Décomposition en éléments simples	55
5.2	Calcul des valeurs de l'original par division euclidienne.....	56
	Utilisation de la transformée en Z	57
1	Système et fonction de transfert échantillonnée	57
2	Relation entre la fonction de transfert et l'équation récurrente	57
2.1	Passage entre Fonction de transfert et équation récurrente.....	58
3	Utilisation de l'équation récurrente pour calculer les valeurs de l'original de F(z).....	58
4	Stabilité d'un système échantillonné	59
4.1	Stabilité des systèmes échantillonnés à partir de celle des systèmes en temps continu... 59	
5	Les filtres numériques	60
5.1	Différents types de filtres numériques	60
5.2	Tracer de la réponse fréquentielle d'un filtre numérique	60
5.3	Etude des filtres de base : intégrateur et dérivateur	61
5.3.1	Intégrateur numérique	61
5.3.1.1	Intégrateur par la méthode des rectangles inférieurs	62
5.3.1.2	Intégrateur par la méthode des rectangles supérieurs	62
5.3.1.3	Intégrateur par la méthode des trapèzes	62
5.3.2	Dérivateur numérique	63
5.3.2.1	Dérivateur sur deux points	63
5.3.2.2	Dérivateur sur trois points symétriques	64
5.3.2.3	Dérivateur sur n points	64
5.4	Les filtres à réponse impulsionnelle finie (RIF)	65
5.4.1	Filtres FIR et convolution discrète.....	65

5.4.2	Stabilité des filtres FIR	65
5.4.3	Filtre causal	65
5.4.4	Synthèse de filtre à réponse impulsionnelle finie (RIF) ou (FIR).....	66
5.4.5	Propriétés des filtres FIR: filtres à phase linéaire	67
5.5	Les filtres à réponse impulsionnelle infinie (RII)	67
5.6	Synthèse de filtre numérique à partir de filtre analogique	68
6	Annexe 1 : un peu d'histoire.....	74
7	Annexe 2 - Rappel sur les fonctions sinusoïdales et les complexes.....	77
8	Annexe 3 - décomposition en série de Fourier	79
I	- Transformée de Laplace	82
II	- Transformée de Fourier	83
III	- Transformée en Z.....	84

Bibliographie pour les mathématiques en 2^{ème} année

Mathématiques, BTS industriel, tome 1; par Denis Faure, Jean-Denis Astier, Benjamin Bouchon, Chez Nathan Technique

=> pour la 1^{ère} année

Mathématiques, BTS industriel, spécialité des groupements B et C; par Françoise Comparat, France Laplume, Chez Nathan Technique

=> pour les statistiques

Mathématiques, BTS groupements B, C et D; par J.D. Astier et B. Astier, Chez Nathan Technique

=> exercices pour les fonctions, les statistiques et un peu Fourier, 2007

Mathématiques appliquées, Electricité-Electronique-Electrotechnique, par B.Dequatre,Chez Nathan

=>Résumé des mathématiques utilisées en Geii

Analyse et traitement des signaux, par Etienne Tisserand, Jean François Pautex, Patrick Schweitzer, Chez Dunod

=>Analyse de Fourier et filtre numérique, de niveau difficile avec exemple en signal et image

Mathématiques pour l'électronique et l'électrotechnique, par René Boissel, Gaëtan Meléjacq, Gilles Cozian, chez Edisciences

=>bien pour la 1^{ère} année, bien pour Fourier avec applications, incomplet sur la transformée en z

Mathématiques pour l'électronique, par Jean-Claude Belloc, Patrice Schiller, chez Masson

=>bien pour la 1^{ère} année, rapide sur Fourier, incomplet sur la transformée en z

Analyse harmonique, par Bruno Rossetto, chez Technosup-Ellipses

=>bien sur Fourier mais avec formalisme des distributions, un peu difficile

{ celui que je préfère

Série de Fourier et forme fréquentielle d'un signal

1 Introduction : forme temporelle et forme fréquentielle d'un signal

Pour l'instant, on a vu qu'un signal est fonction d'une variable qui est généralement le temps. A cette forme naturelle du signal, que l'on appelle la forme temporelle, on peut faire correspondre une autre description que l'on appelle fréquentielle et dont la variable a une dimension inverse de la variable temps. Cette description offre de nombreuses possibilités pour le traitement du signal.

2 Décomposition en Série de Fourier (SF) des signaux périodiques

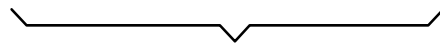
2.1 Signaux périodiques

Les signaux périodiques forment une classe très importante des signaux étudiés. Ils satisfont à la relation : $x(t+T) = x(t)$ où T est la période du signal.

2.2 Décomposition en Série de Fourier (SF)

Définition : on appelle série de Fourier (SF) une série trigonométrique de variable $t \in \mathbb{R}$ et de valeur :

$$s(t) = a_0 + (a_1 \cos(\omega_0 t) + b_1 \sin(\omega_0 t)) + (a_2 \cos(2\omega_0 t) + b_2 \sin(2\omega_0 t)) \\ + \dots + (a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)) + \dots$$


terme général de la série

$$s(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)]$$

Le terme général est la somme d'un sinus et d'un cosinus de même pulsation, multiple entière de ω_0 , et d'amplitude a_n et b_n .

Décomposition en Série de Fourier : on peut montrer que toute fonction périodique $x(t)$ de période T qui vérifie les conditions de Dirichlet (bornée, à dérivée bornée et admettant un nombre fini de discontinuités sur une période), est égale à sa décomposition en SF, sauf aux points de discontinuité :

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(n \frac{2\pi}{T} t\right) + b_n \sin\left(n \frac{2\pi}{T} t\right) \right]$$

avec $a_0 = \frac{1}{T} \int_{t'}^{t'+T} x(t) dt$; (t' quelconque) ; a_0 représente la valeur moyenne du signal $x(t)$ (ou composante continue)

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{t'}^{t'+T} x(t) \cos\left(n \frac{2\pi}{T} t\right) dt \quad \text{et} \quad b_n = \frac{2}{T} \int_{t'}^{t'+T} x(t) \sin\left(n \frac{2\pi}{T} t\right) dt \quad (\text{avec } t' \text{ quelconque}).$$

Le terme $\left[a_1 \cos\left(\frac{2\pi}{T} t\right) + b_1 \sin\left(\frac{2\pi}{T} t\right) \right]$ est le **fondamental**. Il est de même période T que $x(t)$

Le terme $\left[a_n \cos\left(n \frac{2\pi}{T} t\right) + b_n \sin\left(n \frac{2\pi}{T} t\right) \right]$ est l'**harmonique** n . Il est de période T/n

– *Signification du terme constant a_0*

Tous les harmoniques sont à valeur moyenne nulle et la valeur moyenne du signal ne se retrouve donc que dans le terme a_0 . Si on décale l'axe des ordonnées d'une valeur constante *on ne modifie pas* les coefficients a_n et b_n de la décomposition en série de Fourier du signal. Cette

remarque est utilisée pour le calcul des coefficients dans le paragraphe suivant. De plus la valeur moyenne est indépendante de l'origine des temps choisie.

Calcul des coefficients : pour faciliter le calcul des coefficients a_n et b_n on profite au maximum des symétries de $x(t)$ en choisissant astucieusement les origines des **temps** et des **ordonnées**. En effet, pour une fonction $x(t)$ paire les coefficients b_n sont nuls et la décomposition en série de Fourier ne comporte que des cosinus (fonctions paires). Pour une fonction $x(t)$ impaire les coefficients a_n sont nuls et la décomposition en série de Fourier ne comporte que des sinus (fonctions impaires).

Décomposition sous forme module-phase : en additionnant les termes de même fréquence on peut mettre la décomposition en série de Fourier sous la forme :

$$x(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[c_n \cos\left(n \frac{2\pi}{T} t + \varphi_n\right) \right]$$

avec $c_0 = a_0$; $c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ et $\varphi_n = \text{Arg}(a_n - jb_n)$;

$\varphi_n = \arctg\left(-\frac{b_n}{a_n}\right)$ sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ ou $\varphi_n = \arctg\left(-\frac{b_n}{a_n}\right) + \pi$

$\cos(\varphi_n) = a_n$ et $\sin(\varphi_n) = -b_n$

Cette somme se représente en considérant le l'amplitude complexe des vecteurs tournant associés à sinus et cosinus:

$$c_n e^{j\varphi_n} = a_n - jb_n$$

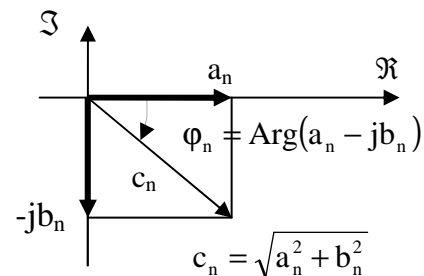


fig 1-1: représentation module/argument dans le plan complexe

Un changement d'origine temporelle du signal de t_0 se traduit par un changement d'origine de toutes les composantes sinus et cosinus de la SF:

$$x(t - t_0) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[c_n \cos\left(n \frac{2\pi}{T} (t - t_0) + \varphi_n\right) \right] = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[c_n \cos\left(n \frac{2\pi}{T} t - n \frac{2\pi}{T} t_0 + \varphi_n\right) \right] = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[c_n \cos\left(n \frac{2\pi}{T} t + \varphi'_n\right) \right]$$

Le changement d'origine d'une fonction sinusoïdale $A \cos(\omega t + \varphi)$ ne change pas l'amplitude A de la fonction, mais simplement la phase φ .

Conséquence : l'**amplitude** c_n des harmoniques contient une information relative à la **forme** du signal (triangle, carré...), la **phase** φ_n des harmoniques contient une information relative à la position temporelle du signal et à la forme du signal.

Exemple: très important

décomposition en série de Fourier d'un signal impulsionnel de période T , d'amplitude E , de largeur τ et de

rapport cyclique $\eta = \frac{\tau}{T}$

AN : $T=1\text{ms}$; $E=5\text{V}$; $\eta = \frac{\tau}{T}$

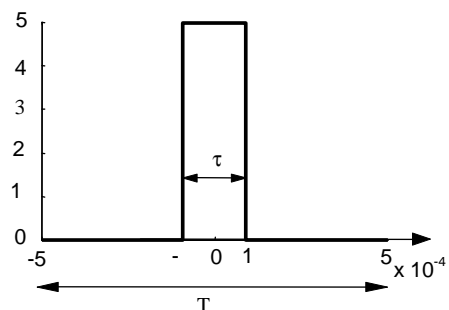


fig 1-2: signal impulsion rectangulaire positif de largeur T et de rapport cyclique $\eta = \tau/T$

avec l'origine des temps choisie, $x(t)$ est un signal pair:

$b_n = 0$ pour tout les n ;

La valeur moyenne vaut : $a_0 = E \frac{\tau}{T} = E\eta$.

On calcule les a_n à partir de la définition : $a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} V(t) \cos(n \frac{2\pi}{T} t) dt$

$$a_n = \frac{4}{T} \int_0^{\tau/2} E \cos(n \frac{2\pi}{T} t) dt = \frac{4E}{T} \left[\left[\frac{T}{2\pi n} \sin(n \frac{2\pi}{T} t) \right]_0^{\tau/2} \right] = \frac{2E}{n\pi} \sin(n\pi\eta)$$

La décomposition en série de Fourier de $x(t)$ peut s'écrire:

$$x(t) = E\eta + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2E}{n\pi} \sin(n\pi\eta) \cos(n \frac{2\pi}{T} t)$$

3 Théorème de Parseval

Définitions:

Energie d'un signal : on appelle énergie du signal $x(t)$ entre les instants t_1 et t_2 la valeur

$$\text{Energie} = \int_{t_1}^{t_2} x^2(t) dt$$

Puissance moyenne d'un signal: c'est l'énergie du signal pendant le temps T_{mes} divisé par ce même temps

$$P_{moy} = \frac{1}{T_{mes}} \int_{\theta}^{\theta+T_{mes}} x^2(t) dt$$

Puissance moyenne d'un signal périodique : c'est l'énergie du signal pendant une période divisée par cette période

$$P_{moy} = \frac{1}{T} \int_{\theta}^{\theta+T} x^2(t) dt$$

Valeur efficace d'un signal périodique: c'est la valeur constante qui possède la même puissance moyenne que le signal. Comme la puissance moyenne d'un signal constant de valeur A vaut A^2 , on obtient:

$$V_{eff}^2 = \frac{1}{T} \int_{\theta}^{\theta+T} x^2(t) dt \quad \text{soit} \quad V_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{\theta}^{\theta+T} x^2(t) dt}$$

Cas sinusoïdal : la puissance moyenne d'un signal sinusoïdal d'amplitude A est (démonstration en première année) :

$$P_{moy} = \frac{1}{T} \int_{\theta}^{\theta+T} \left(A \cos\left(\frac{2\pi}{T} t\right) \right)^2 dt = \frac{A^2}{2}$$

Théorème de Parseval : La puissance moyenne du signal est égale à la somme des puissances moyennes de chaque harmonique

$$\text{Puissance moyenne de } x(t) = c_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n^2}{2}$$

Remarque : dans le théorème de Parseval, la puissance moyenne est donnée sous la forme d'une somme **infinie**. Ce théorème **ne permet pas** de connaître la valeur exacte de la puissance moyenne.

4 Spectre d'un signal

Pour tracer le spectre d'un signal, il faut **obligatoirement** le mettre sous la forme d'une **somme de composantes sinusoïdales**. Le tracé de l'amplitude de chaque composante sinusoïdale en fonction de sa fréquence compose ce que l'on appelle le spectre d'amplitude de ce signal.

Si le signal n'est pas sous cette forme, on le décompose en série de Fourier. Chaque composante de la décomposition en SF, de numéro n , de fréquence n/T est caractérisée par son module c_n et sa phase ϕ_n . Le tracé de ces caractéristiques en fonction de la fréquence compose ce que l'on appelle le spectre de ce signal périodique.

Spectre d'amplitude : on représente la valeur des c_n en fonction soit de n , soit de la fréquence ν de l'harmonique. Il s'exprime en Volt.

Ce spectre, qui n'est défini que pour des valeurs particulières de la fréquence $\nu = n/T$ correspondant aux harmoniques, s'appelle un **spectre de raies**. Il représente l'amplitude de chaque harmonique qui compose le signal.

Spectre de puissance : la puissance moyenne contenue dans un signal sinusoïdale est fonction du carré de son amplitude $c_n^2/2$. Le **tracé des $c_n^2/2$** représente donc la répartition de la puissance du signal en fonction de n ou en fonction de la fréquence ν . On l'appelle le spectre de puissance du signal. Il s'exprime en Volt^2 . La puissance moyenne du signal $x(t)$ est égale à la somme de la puissance de chaque harmonique, c'est le théorème de Parseval.

Spectre de phase : on représente la valeur des ϕ_n en fonction de n , ou de la fréquence ν . La valeur de la phase est toujours comprise dans $(-\pi, +\pi)$.

Exemple: soit $x(t) = E + A\sin(2\pi f_1 t) - B\cos(2\pi f_2 t)$

en faisant apparaître l'amplitude et la phase de chaque composante:

$$x(t) = E + A\cos(2\pi f_1 t - \pi/2) + B\cos(2\pi f_2 t - \pi)$$

ce qui donne pour le spectre d'amplitude

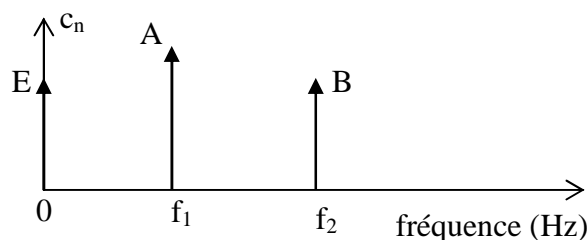


fig 1-3: exemple de spectre d'amplitude

4.1 Définition de la fonction sinc : sinus cardinal

On appelle $\text{sinc}(t)$ la fonction sinus cardinal qui a pour valeur $\text{sinc}(t) = \frac{\sin(t)}{t}$ pour $t \neq 0$ et qui vaut 1 pour $t=0$. La fonction sinc est "égale" à la fonction $\sin(t)/t$, de plus elle est définie en $t=0$ où elle a pour valeur 1. C'est le prolongement par continuité en 0 de la fonction $\sin(t)/t$. Cette fonction est très utilisée en traitement du signal.

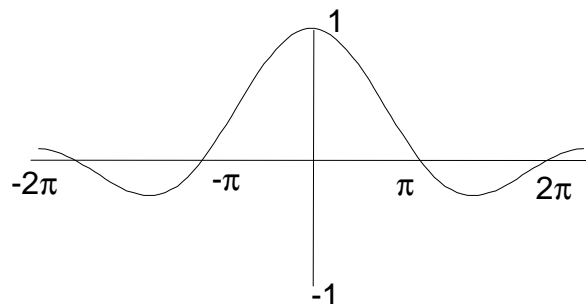


fig 1-4: fonction $\text{sinc}(t)$

4.2 Exemple très important: impulsion rectangulaire

On a vu que la décomposition en SF d'une suite d'impulsions rectangulaires de période T et de rapport cyclique $\eta = \tau/T$ est :

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n \frac{2\pi}{T} t)$$

$$\text{avec } a_n = \frac{2E}{n\pi} \sin(n\pi\eta)$$

et $a_0 = E\eta$ la valeur moyenne

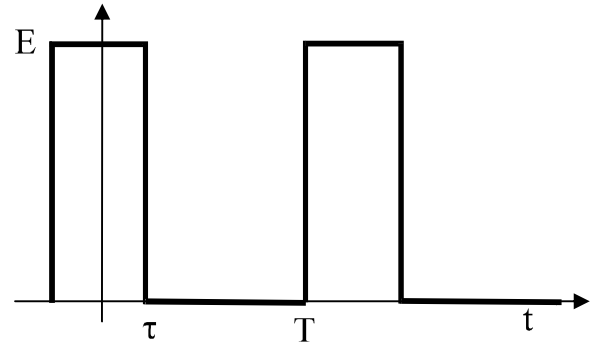


fig 1-5: signal impulsion rectangulaire positif périodique de largeur τ et de rapport cyclique $\eta = \tau/T$

Le tracé de son spectre d'amplitude (les $c_n = |a_n|$) en fonction du numéro de l'harmonique n est de la

$$\text{forme : } c_n = |a_n| = \left| \frac{2E}{n\pi} \sin(n\pi\eta) \right| = \left| 2E\eta \frac{\sin(n\pi\eta)}{n\pi\eta} \right| = \left| \alpha \frac{\sin(\beta)}{\beta} \right| = |\alpha \text{sinc}(\beta)| \quad \text{avec } \beta = n\pi\eta \text{ et } \alpha = 2E\eta$$

La fonction **sinus cardinal sinc(t)**, est maximale pour $t=0$ ou elle a pour valeur 1, elle s'annule ensuite pour $t = k\pi$. L'enveloppe s'annule donc pour $n\pi\eta = k\pi$ soit $n = k \frac{1}{\eta}$

Le spectre n'est défini que pour les n entiers, mais la courbe d'équation $\text{Env}(n) = \left| 2E\eta \frac{\sin(n\pi\eta)}{n\pi\eta} \right|$

tracée pour $n \in \mathbb{N}$ correspond à **l'enveloppe des raies du spectre pour n strictement supérieur à 1**. Le terme pour $n = 0$ correspond à la valeur moyenne et n'est pas donnée par cette formule.

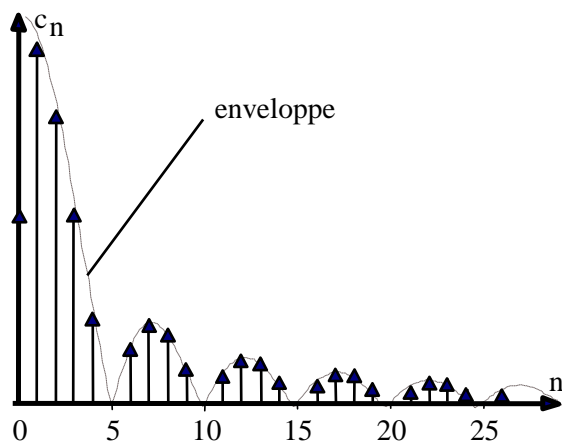


fig 1-6: spectre d'amplitude d'un signal impulsion rectangulaire de rapport cyclique $\eta = \tau/T = 0.2$
pas de raie pour $n = k/0.2 = 5k$
pas de raie pour $n=5; n=10, \dots$

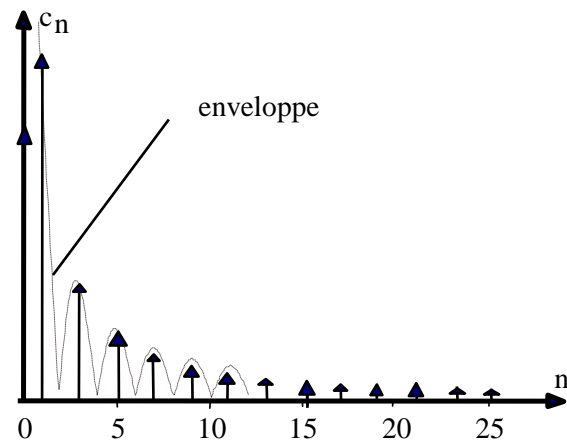


fig 1-7: spectre d'amplitude d'un signal impulsion rectangulaire de rapport cyclique $\eta = \tau/T = 0.5$
pas de raie pour $n = k/0.5 = 2k$
pas de raie pour $n=2; n=4, n=6, \dots$

L'enveloppe des raies est utilisée ici pour faciliter le tracé du spectre d'amplitude. Ici cette enveloppe ne passe pas par le terme c_0 . Dans le cas général, il n'est pas possible de tracer une fonction enveloppant toutes les raies du spectre.

Tracé des spectres en fonction de la fréquence

Le tracé du spectre du signal n'a pas seulement pour but de décrire le contenu fréquentiel du signal. Dans les applications qui nous intéressent, le signal est modulé, échantillonné ... Son spectre est alors modifié. Il est **indispensable** de faire apparaître la fréquence de modulation ou d'échantillonnage en

même temps que le spectre du signal. C'est pourquoi tous les spectres de ce cours seront gradués en fonction de la fréquence et non pas en fonction du numéro de l'harmonique. Il suffit pour cela de considérer que l'harmonique n est de fréquence n/T .

Ainsi, l'enveloppe des harmoniques a pour équation :

$$\text{Env}\left(\frac{n}{T}\right) = \left| 2E\eta \frac{\sin(n\pi\eta)}{n\pi\eta} \right| = \left| 2E\eta \frac{\sin\left(n\pi \frac{\tau}{T}\right)}{n\pi \frac{\tau}{T}} \right| = \left| 2E\eta \frac{\sin\left(\tau\pi \frac{n}{T}\right)}{\tau\pi \frac{n}{T}} \right|$$

En notant ν la variable "fréquence" qui peut prendre les valeurs n/T , l'enveloppe s'écrit :

$$\text{Env}(\nu) = \left| 2E\eta \frac{\sin(\tau\pi\nu)}{\tau\pi\nu} \right|.$$

L'enveloppe s'annule pour $\tau\pi\nu = k\pi$ soit pour $\nu = k \frac{1}{\tau}$.

La figure suivante donne le tracé du spectre d'une suite d'impulsions rectangulaires de largeur $\tau = 0,2\text{ms}$ de période $T = 1\text{ms}$, soit de rapport cyclique $\eta = \tau/T = 1/5$:

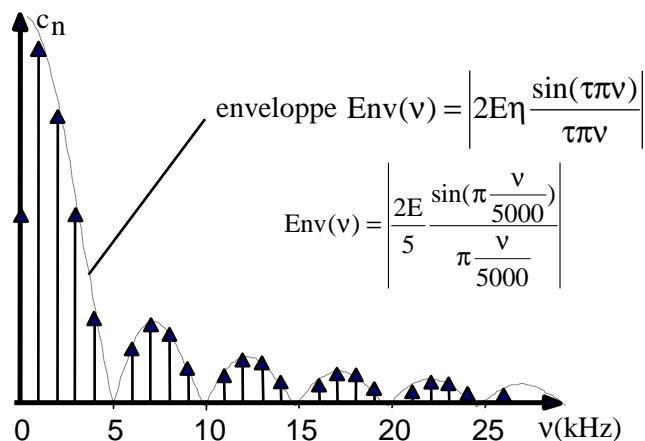


fig 1-8: spectre d'amplitude d'un signal impulsion rectangulaire de période $T = 1\text{ms}$, de largeur $\tau = 0,2\text{ms}$, ($1/T = 1\text{kHz}$ et $1/\tau = 5\text{kHz}$), soit de rapport cyclique $\eta = \tau/T = 1/5$)

4.3 Définition des signaux $\mathbb{1}(t)$ échelon unité et $\delta(t)$ impulsion de Dirac

En traitement du signal, l'emploi des transformées (Laplace, Fourier) conduit à la définition de deux fonctions de base non périodique: l'échelon unité et l'impulsion de Dirac.

4.3.1 Echelon unité

On appelle $\mathbb{1}(t)$ l'échelon unité (ou échelon de Heaviside) la fonction définie par :

$$\mathbb{1}(t) = 0 \text{ pour } t < 0$$

$$\mathbb{1}(t) = 1 \text{ pour } t > 0$$

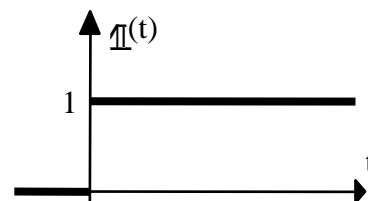


fig 1-9: échelon unité (ou échelon de Heaviside)

4.3.2 Impulsion de Dirac

On appelle impulsion de Dirac $\delta(t)$ une "distribution" (car on ne peut définir $\delta(t)$ comme une fonction), défini comme la limite quand $\varepsilon \rightarrow 0$ de la fonction $\delta_\varepsilon(t)$:

$\delta_\epsilon(t) = 0$ pour $t \in]-\infty; -\epsilon/2[\cup]\epsilon/2; \infty[$
 $\delta_\epsilon(t) = 1/\epsilon$ pour $t \in [-\epsilon/2; \epsilon/2]$
 la surface de l'impulsion vaut 1 :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_\epsilon(t) dt = 1$$

On dit que le Dirac est de **pooids** unité.

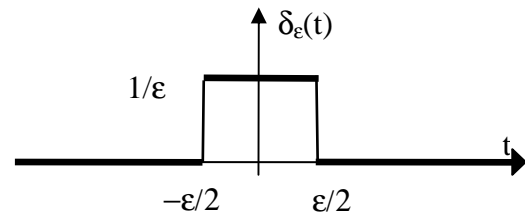


fig 1-10: impulsion de largeur ϵ et de surface unité

Quand ϵ tend vers 0, la largeur de l'impulsion tend vers 0 alors que son amplitude tend vers l'infini, **tout en conservant une surface unité.**

Propriété: $\delta(t)$ est la dérivée de l'échelon unité $\mathbb{1}(t)$

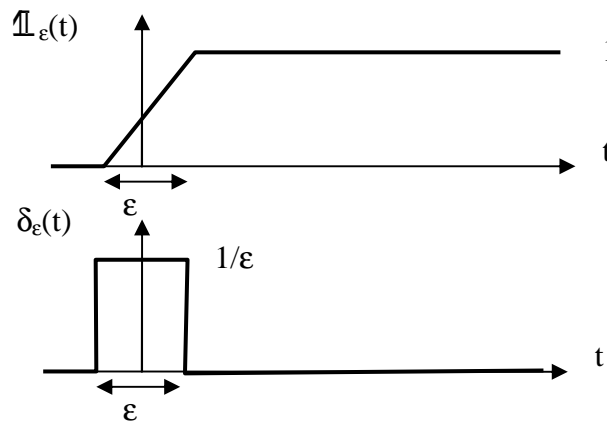


fig 1-11: dérivée de l'échelon montant en ϵ

On peut le voir directement sur la figure ci-dessus dans le cas de l'échelon montant en ϵ .

On peut aussi montrer la réciproque, c'est à dire que l'échelon est l'intégrale de l'impulsion de Dirac.

$$\left. \begin{aligned} \int_{-\infty}^t \delta(t') dt' &= 0 \text{ si } t < 0 \\ \int_{-\infty}^t \delta(t') dt' &= 1 \text{ (surface du Dirac) si } t > 0 \end{aligned} \right\} \text{ce qui correspond à la définition de } \mathbb{1}(t).$$

Représentation : La représentation graphique d'une impulsion de Dirac de poids unité est une flèche verticale de hauteur unité. La hauteur de la flèche représente donc la surface de l'impulsion de Dirac.

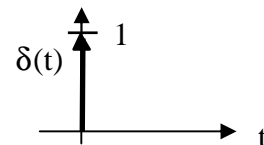


fig 1-12: impulsion de Dirac de poids unité (la hauteur de la flèche indique la **surface** du Dirac)

Propriété : La propriété suivante, qui est ici déduite de notre définition du Dirac, est en fait la propriété définissant l'impulsion de Dirac en tant que distribution.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) f(t) dt = f(0)$$

Exemple : dérivée de fonction non continue

4.4 Décomposition en série de Fourier et spectre d'un peigne de Dirac

En faisant tendre la largeur de l'impulsion rectangulaire périodique vers zéro, tout en lui conservant une surface unité on arrive à une "fonction" périodique $\mathbb{I}(t)$ de période T composée d'impulsions de Dirac, appelée peigne de Dirac ou train d'impulsions :

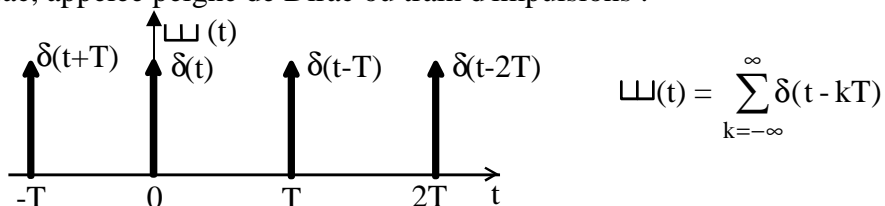


fig 1-13: fonction peigne de Dirac de période T

Dans la décomposition en série de Fourier des impulsions on fait tendre la largeur τ , donc le rapport cyclique η vers 0 et l'amplitude E vers l'infini, tout en conservant un poids du Dirac de $E\tau=1$ (la surface est égale à 1 par définition de l'impulsion de Dirac).

$$\lim_{\substack{E \rightarrow \infty \\ \eta \rightarrow 0}} a_n = \lim_{\substack{E \rightarrow \infty \\ \eta \rightarrow 0}} \frac{2E}{n\pi} \sin(n\pi\eta) = \lim_{\substack{E \rightarrow \infty \\ \eta \rightarrow 0}} 2E\eta \frac{\sin(n\pi\eta)}{n\pi\eta} = \lim_{\substack{E \rightarrow \infty \\ \eta \rightarrow 0}} 2E\eta = \lim_{\substack{E \rightarrow \infty \\ \tau \rightarrow 0}} 2E \frac{\tau}{T} = \frac{2}{T} \lim_{\substack{E \rightarrow \infty \\ \tau \rightarrow 0}} 1 = \frac{2}{T}$$

Toutes les raies ont donc une amplitude constante égale à $2/T$ et la décomposition en série de Fourier s'écrit :

$$\square(t) = \frac{1}{T} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{T} \cos(n \frac{2\pi}{T} t)$$

Ce résultat sera utilisé dans le chapitre sur l'étude de l'échantillonnage d'un signal en temps continu.

Le spectre du peigne de Dirac a donc l'allure suivante. L'enveloppe du spectre s'annule pour une fréquence rejetée à l'infini.

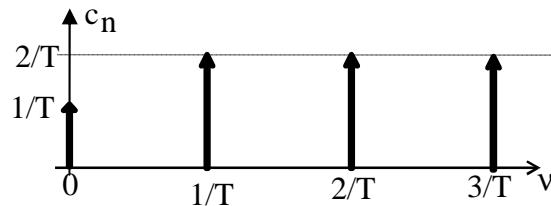


fig 1-14: spectre d'amplitude du peigne de Dirac de période T

4.5 Décroissance du spectre

Un signal continu présente une décroissance rapide (au moins en $1/n^2$) de son spectre d'amplitude. Toute discontinuité se traduit par une décroissance lente du spectre d'amplitude en $1/n$. Une discontinuité dans un signal correspond à une variation très rapide du signal donc à la présence de très hautes fréquences dans son spectre.

5 Expression complexe des SF : fréquences négatives

Chaque terme de la décomposition en série de Fourier $c_n \cos(n \frac{2\pi}{T} t + \varphi_n)$ peut, dans le plan complexe,

se diviser en deux termes par la relation d'Euler: $\frac{c_n}{2} \left[e^{j(n \frac{2\pi}{T} t + \varphi_n)} + e^{-j(n \frac{2\pi}{T} t + \varphi_n)} \right]$

Les deux termes ont même amplitude $c_n/2$ mais une phase opposée. Ainsi chaque harmonique n d'amplitude c_n et de phase φ_n , peut se décomposer en deux harmoniques d'amplitude $c_n/2$. L'un correspond au numéro $+n$ et possède une phase φ_n . L'autre au numéro $-n$ et possède une phase $-\varphi_n$. Ou si on les exprime en fonction des fréquences : l'un correspond à une fréquence n/T avec une phase φ_n , l'autre à une fréquence $-(n/T)$ avec une phase $-\varphi_n$.

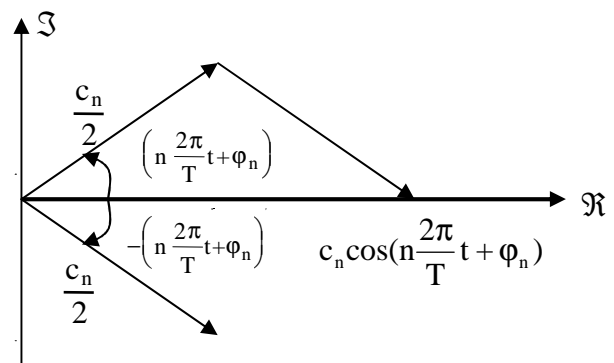


fig 1-15: illustration de la relation d'Euler dans le plan complexe

$$\text{On peut écrire : } x(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{c_n}{2} \left[e^{j(n \frac{2\pi}{T} t + \varphi_n)} + e^{-j(n \frac{2\pi}{T} t + \varphi_n)} \right] \right]$$

$$x(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{c_n}{2} e^{j\varphi_n} e^{jn \frac{2\pi}{T} t} \right] + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{c_n}{2} e^{-j\varphi_n} e^{-jn \frac{2\pi}{T} t} \right]$$

en posant : $X_n = \frac{c_n}{2} e^{j\varphi_n}$; $X_{-n} = \frac{c_n}{2} e^{-j\varphi_n}$ et $X_0 = c_0$, on a $X_{-n} = X_n^*$ (conjugué)

d'après la définition des c_n (figure 1.1): $X_n = \frac{a_n - jb_n}{2}$; $X_{-n} = \frac{a_n + jb_n}{2}$

on a :

$$x(t) = X_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[X_n e^{jn\frac{2\pi}{T}t} \right] + \sum_{n=1}^{\infty} \left[X_{-n} e^{-jn\frac{2\pi}{T}t} \right] = X_0 e^{j0} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[X_n e^{jn\frac{2\pi}{T}t} \right] + \sum_{n=-1}^{-\infty} \left[X_n e^{jn\frac{2\pi}{T}t} \right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[X_n e^{jn\frac{2\pi}{T}t} \right]$$

On obtient ainsi la décomposition en série de Fourier complexe, elle est définie pour les fréquences positives $n2\pi/T$ et négatives $-n2\pi/T$

On peut tracer le module et l'argument des X_n pour $n \in \mathbb{Z}$. On obtient pour le module un tracé symétrique par rapport à l'axe de fréquence nulle car on a $|X_n| = |X_{-n}|$; et pour l'argument un tracé symétrique par rapport à l'origine car $\arg(X_n) = -\arg(X_{-n})$

Calcul des X_n :

Il est facile de montrer que:

$$X_n = \frac{a_n - jb_n}{2} = \frac{1}{2} \left[\frac{2}{T} \int_{t'}^{t'+T} x(t) \cos(n\frac{2\pi}{T}t) dt - \frac{2j}{T} \int_{t'}^{t'+T} x(t) \sin(n\frac{2\pi}{T}t) dt \right]$$

$$X_n = \frac{1}{T} \int_{t'}^{t'+T} x(t) \left(\cos(n\frac{2\pi}{T}t) - j\sin(n\frac{2\pi}{T}t) \right) dt$$

$$\text{soit: } X_n = \frac{1}{T} \int_{t'}^{t'+T} x(t) e^{-jn\frac{2\pi}{T}t} dt$$

En pratique, l'intégration dans le plan complexe s'effectue séparément sur l'axe réel et sur l'axe imaginaire, ce qui revient à calculer séparément a_n sur l'axe réel et b_n sur l'axe imaginaire, puis d'en déduire X_n .

REMARQUE :

On peut montrer que pour tout signal réel, le spectre complexe X_n considéré pour des fréquences positives et négatives présente les propriétés suivantes :

- le spectre d'amplitude est pair
- le spectre de phase est impair

Le coefficient X_{-n} pour les fréquences négatives est le conjugué du coefficient X_n pour les fréquences positives: $X_{-n} = X_n^*$

Exemple :

- Soit $x(t) = A \cos(2\pi\nu_0 t)$, il se compose d'une seule fréquence ν_0 d'amplitude A . Son spectre est:

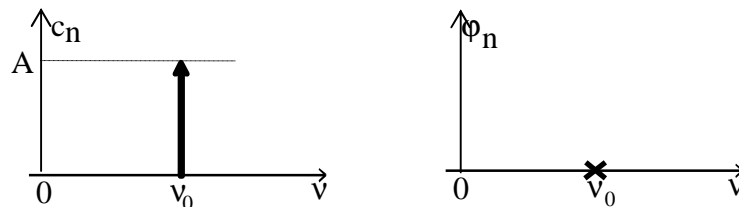


fig 1-16: spectre d'amplitude et de phase de la fonction $x(t) = A \cos(2\pi\nu_0 t)$

$$\text{or } x(t) = \frac{A}{2} (e^{j2\pi\nu_0 t} + e^{-j2\pi\nu_0 t}) = X_{-1} e^{-j2\pi\nu_0 t} + X_1 e^{j2\pi\nu_0 t} \text{ avec } X_{-1} = X_1 = \frac{A}{2}$$

Le spectre d'amplitude complexe est

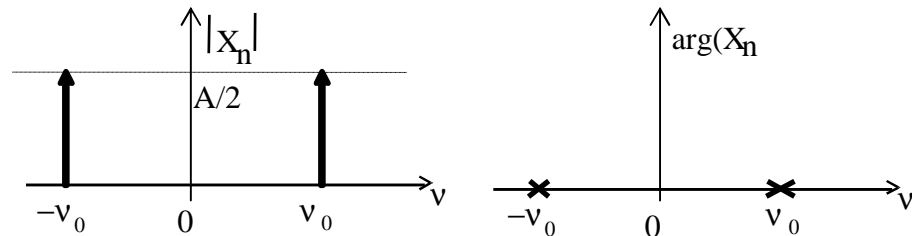


fig 1-17: spectre d'amplitude et de phase complexe de la fonction $x(t) = A \cos(2\pi\nu_0 t)$

- Soit $x(t) = A \sin(2\pi\nu_0 t) = A \cos(2\pi\nu_0 t - \pi/2)$ son spectre est

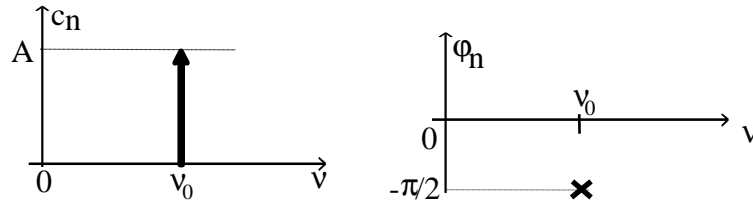


fig 1-18: spectre d'amplitude et de phase de la fonction $x(t) = A \sin(2\pi\nu_0 t)$

$$\text{or } x(t) = \frac{A}{2j} (e^{j2\pi\nu_0 t} - e^{-j2\pi\nu_0 t}) = \frac{A}{2} j e^{-j2\pi\nu_0 t} - \frac{A}{2} j e^{j2\pi\nu_0 t} = \frac{A}{2} e^{j\frac{\pi}{2}} e^{-j2\pi\nu_0 t} + \frac{A}{2} e^{-j\frac{\pi}{2}} e^{j2\pi\nu_0 t}$$

$$\text{soit } x(t) = X_{-1} e^{-j2\pi\nu_0 t} + X_1 e^{j2\pi\nu_0 t} \text{ avec; } X_{-1} = \frac{A}{2} e^{j\frac{\pi}{2}} \text{ et } X_1 = \frac{A}{2} e^{-j\frac{\pi}{2}}$$

Le spectre d'amplitude complexe est

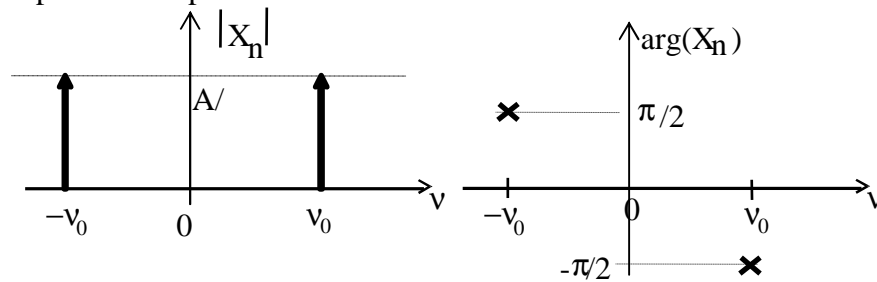


fig 1-19: spectre d'amplitude et de phase complexe de la fonction $x(t) = A \sin(2\pi\nu_0 t)$

On remarque que les spectres de $A \sin(2\pi\nu_0 t)$ et $A \cos(2\pi\nu_0 t)$ sont identiques pour le module mais se différencie par la phase.

On peut représenter en trois dimensions (3D), en même temps le spectre d'amplitude $|X_n|$ et le spectre de phase $\arg(X_n)$

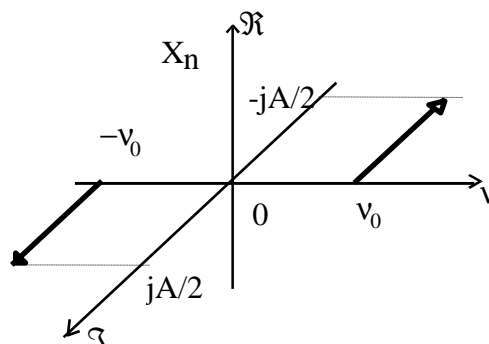


fig 1-20: tracé en perspective des termes de la décomposition en série de Fourier complexe de la fonction $x(t) = A \sin(2\pi\nu_0 t)$

- Soit $x(t) = K$, ce signal se compose d'une seule fréquence nulle d'amplitude K . La composante continue K correspond au terme c_0 de la décomposition en série de Fourier réel et au terme X_0 de la

décomposition en série de Fourier complexe. **Pour la composante continue**, le spectre réel est donc identique au spectre complexe.

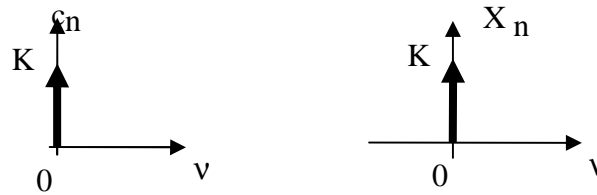


fig 1-21: spectre d'amplitude réel et spectre d'amplitude complexe de la fonction $x(t) = K$

6 Forme fréquentielle des signaux non périodiques : Transformée de Fourier (TF)

6.1 Définition

Les fonctions non périodiques peuvent être considérées comme des fonctions périodiques de période T tendant vers l'infini. Les raies du spectre d'amplitude qui sont séparées de la valeur $1/T$, se rapprochent indéfiniment quand T tend vers l'infini. Le spectre tend vers un spectre continu. Dans le même temps,

l'amplitude des raies $c_n = 2|X_n| = \frac{2}{T} \left| \int_{t'}^{t'+T} x(t) e^{-jn \frac{2\pi}{T} t} dt \right|$ diminue pour tendre vers 0 quand T tend vers

l'infini.

Pour voir plus précisément comment les choses se passent, considérons une suite d'impulsions rectangulaire dont la période augmente alors que la largeur reste constante.

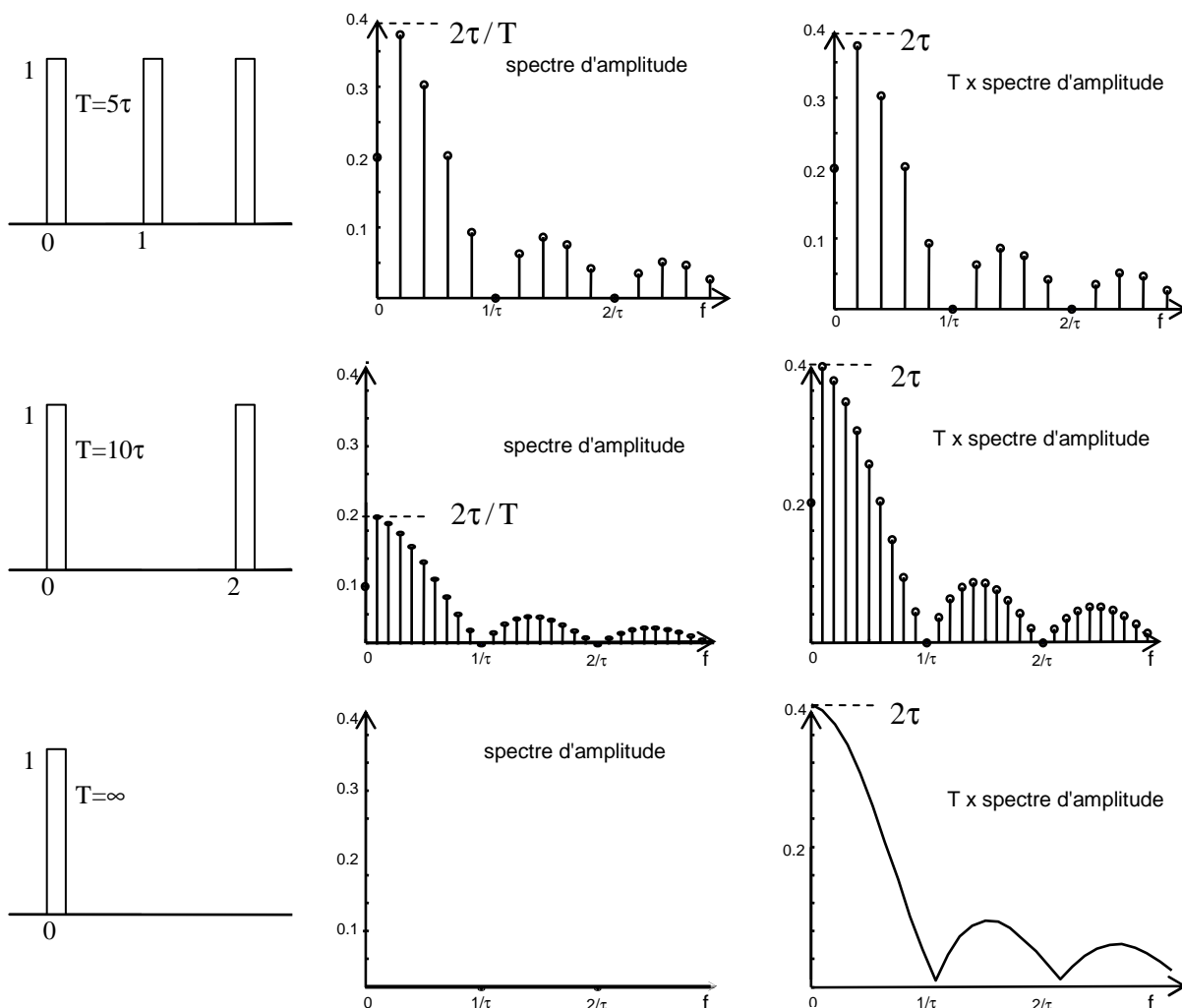


fig 1-22: passage de la série de Fourier à la densité spectrale (transformée de Fourier)

On comprend sur cette figure qu'il est préférable de graduer les spectres non pas en harmoniques mais en fréquence afin de pouvoir les comparer. La valeur des coefficients X_n qui correspond à la fréquence n/T tend vers une fonction continue mais de valeur nulle (colonne du milieu):

$$X_n = X\left(\frac{n}{T}\right) = \frac{1}{T} \int_{t'}^{t'+T} x(t) e^{-jn\frac{2\pi}{T}t} dt$$

Pour éviter le problème de l'annulation de X_n lorsque T tend vers l'infinie, on considère la fonction TX_n (colonne de droite):

$$TX_n = TX\left(\frac{n}{T}\right) = \int_{t'}^{t'+T} x(t) e^{-jn\frac{2\pi}{T}t} dt$$

$$TX_n = TX\left(\frac{n}{T}\right) = TX(v) = \int_{t'}^{t'+T} x(t) e^{-j2\pi\frac{n}{T}t} dt = \int_{t'}^{t'+T} x(t) e^{-j2\pi vt} dt$$

Quand T tend vers l'infinie, TX_n tend vers une fonction continue de la fréquence $v=n/T$, à valeur dans \mathbb{C} . La généralisation de la notion de SF dans le cas des fonctions non périodiques conduit à ce que l'on appelle la transformation de Fourier du signal $x(t)$.

$$TF[x(t)] = X(v) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi vt} dt \quad \text{où } v \text{ est la fréquence.}$$

La transformée de Fourier représente la **densité spectrale** de $x(t)$.

Dimension : Si $x(t)$ s'exprime en Volt, les coefficients X_n de la série de Fourier sont en **Volt**. De part l'intégration sur le temps, la transformée de Fourier, comme celle de Laplace, s'exprime en Volt.Seconde ou en **Volt/Hertz**..

La fonction $X(v)$, transformée de Fourier de $x(t)$, s'appelle la **forme fréquentielle** du signal temporel $x(t)$. $X(v)$ est une fonction définie sur l'ensemble des réels (positifs **et** négatifs) et à valeurs complexes (module et phase).

Notation : $x(t) \Longleftrightarrow X(v)$

Existence : Signaux à puissance moyenne finie et signaux à énergie finie

La Transformée de Fourier $F(v)$ n'existe, en tant que fonction, que si l'intégrale converge. Son existence est assurée lorsque f est absolument intégrable sur \mathbb{R} : $\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)| dt$ est convergente.

En pratique on distingue les signaux à **énergie finie**: $E = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)^2 dt$; (E l'énergie est finie).

Entre autres, les signaux bornés qui, en module, tendent plus vite vers 0 que $1/t$ quand le temps tend vers l'infini, sont des signaux à **énergie finie**. Ils possèdent une transformée de Fourier. Ceci est, bien sur, le cas des signaux à durée de vie limitée (définis sur un support borné).

Ce n'est, par contre, pas le cas des signaux périodiques dont l'énergie est infinie mais dont la puissance moyenne est, elle, finie : $P = \frac{1}{T} \int_{\theta}^{\theta+T} x(t)^2 dt$ (P , la puissance moyenne **est finie**)

La transformée de Fourier des fonctions périodiques existe bien, mais pas en tant que fonction, elle se compose de Diracs (distributions).

Dans le cas des signaux à énergie infinie et puissance moyenne finie non périodique (cas du bruit en électronique), on est amené à considérer la densité spectrale de puissance qui fait appel à des notions statistiques qui sortent du cadre de ce cours.

Remarque : relation transformée de Fourier , transformée de Laplace

transformée de Laplace : $TL[x(t)] = TL[x(t)\mathbb{1}(t)] = X(p) = \int_0^{\infty} x(t)e^{-pt} dt$

transformée de Fourier : $TF[x(t)] = X(v) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi vt} dt$

Pour la TL, l'intégrale est calculée sur l'intervalle $[0, +\infty[$ ce qui correspond au cas des fonctions causales et à l'étude des transitoires. Pour la TF l'intégrale est calculée sur l'intervalle $]-\infty, +\infty[$ ce qui correspond aux signaux établis.

Mise à part les bornes d'intégration, la TF est un cas particulier de la TL où on prend une valeur particulière, imaginaire pure, pour la variable de Laplace : $p = j2\pi v$. Cela correspond au cas particulier de l'étude harmonique (avec des signaux sinusoïdaux de fréquence v).

De plus la transformée de Fourier n'existe pas pour :

- les signaux instables qui tendent vers l'infini (donc ne sont pas à énergie finie) et dont les pôles de la transformée de Laplace sont à partie réelle positive.
- les signaux périodiques qui eux aussi ne sont pas à énergie finie. Les signaux périodiques se décomposent en une somme de sinusoïdes. Ces signaux ont des pôles imaginaires pures car chaque sinusoïde correspond à deux pôles imaginaires pures conjugués. Pour les signaux périodiques la TF n'existe pas **en tant que fonction**, mais elle existe en tant que **distribution** car elle donne une somme de Dirac (spectre de raies, voir paragraphe suivant)

Si une fonction $x(t)$ est

- à énergie finie
- causale (nulle pour $t < 0$)

alors sa transformée de Fourier $X(v)$ est égale à sa transformée de Laplace $X(p)$ en remplaçant par $j2\pi v$. Dans tous les autres cas les deux transformées sont différentes, si elles existent.

En ce qui concerne la **fonction de transfert d'un système** qui est par définition un **rapport** de deux transformées :

$$H(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} \text{ et } H(v) = \frac{Y(v)}{X(v)}$$

On peut toujours écrire que $H(v) = H(p)|_{p=j2\pi v}$. La fonction de transfert $H(v)$ est égale à la fonction de transfert $H(p)$ en remplaçant p par $j2\pi v$.

6.2 Propriétés

6.2.1 Linéarité

$$TF[\alpha x(t) + y(t)] = \alpha TF[x(t)] + TF[y(t)]$$

6.2.2 Transformée de Fourier de fonction réelles

Si $x(t)$ est une fonction à valeurs réelles alors : $X(-v) = X(v)^*$

Pour les valeurs négatives de la fréquence, la transformée de Fourier a une valeur conjuguée de celle prise pour les fréquences positives.

$$\begin{cases} |X(-v)| = |X(v)| \\ \arg(X(-v)) = -\arg(X(v)) \end{cases}$$

6.2.3 Dérivation

$$\text{On démontre: } TF[x'(t)] = j2\pi v X(v)$$

6.2.4 Changement d'origine en temps

On démontre: $TF[x(t - t_0)] = e^{-j2\pi v t_0} X(v)$ avec $TF[x(t)] = X(v)$

6.2.5 Changement d'échelle

On démontre: $TF[x(at)] = \frac{1}{|a|} X\left(\frac{v}{a}\right)$ avec $TF[x(t)] = X(v)$

6.2.6 Changement d'origine en fréquence

On démontre: $TF[e^{j2\pi v_0 t} x(t)] = X(v - v_0)$ avec $x(t) = TF^{-1}[X(v)]$

6.2.7 Produit des transformées : produit de convolution temporel

On peut démontrer, de manière identique à la transformée de Laplace, que le produit de deux transformées de Fourier est la transformée de Fourier du produit de convolution des fonctions temporelles

$$TF[x(t) \otimes y(t)] = X(v) Y(v) \text{ avec } x(t) \otimes y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-u) y(u) du = \int_{-\infty}^{\infty} x(t') y(t-t') dt'$$

6.2.8 Transformée d'un produit

De manière symétrique, la transformée de Fourier du produit de deux fonctions est égale au produit de convolution des deux transformées de Fourier.

$$TF[x(t)y(t)] = X(v) \otimes Y(v) \text{ avec } X(v) \otimes Y(v) = \int_{-\infty}^{\infty} X(v-u) Y(u) du = \int_{-\infty}^{\infty} X(v') Y(v-v') dv'$$

ATTENTION: La transformée d'un produit de fonction n'est donc pas le produit des transformées.

~~$TF[x(t)y(t)] = X(v) Y(v)$~~

6.3 Réponse impulsionnelle d'un système linéaire et convolution (temps continu)

On introduit ici comment apparaît naturellement le produit de convolution lors de l'étude des systèmes linéaires. Soit un système linéaire d'entrée $x(t)$ et de sortie $y(t)$:

L'étude des systèmes linéaires se fait en utilisant comme outils les transformées soit de Laplace soit de Fourier.

$$\begin{array}{ccc} TL[x(t)] = X(p) & \boxed{\begin{array}{c} H(p) \\ \text{ou} \\ H(v) \end{array}} & TL[y(t)] = Y(p) \\ TF[x(t)] = X(v) & & TF[y(t)] = Y(v) \end{array}$$

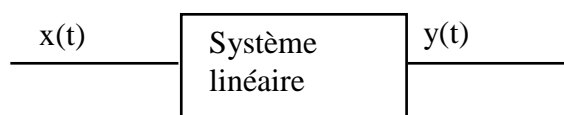
fig 1-23: fonction de transfert d'un système linéaire

La fonction de transfert du **système** est par définition le **rapport** de la transformée de la sortie sur la transformée de l'entrée : $H(v)$

$$H(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} \text{ et } H(v) = \frac{Y(v)}{X(v)}$$

On peut obtenir $H(v)$ en remplaçant p par $j2\pi v$ dans l'expression de $H(p)$

On se propose ici d'étudier le système linéaire directement sous forme temporelle, sans passer par les transformées de Laplace ou de Fourier.



Réponse impulsionnelle d'un système

On cherche la réponse du système à une entrée de type impulsionnelle en appliquant sur l'entrée une **impulsion de Dirac** $x(t)=\delta(t)$ ce qui correspond à $X(p) = X(v) = 1$;

alors $Y(p) = H(p) X(p) = H(p)$ (ou $Y(v) = H(v)$)

en prenant la transformée de Laplace (ou Fourier) inverse :

$y(t) = h(t)$ = réponse impulsionnelle

La réponse impulsionnelle correspond à la transformée de Laplace (ou Fourier) inverse de la fonction de transfert. On utilise cette propriété pour l'identification des systèmes linéaires.

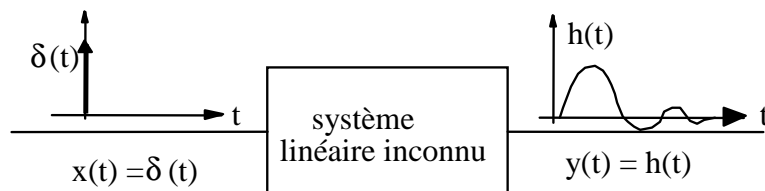
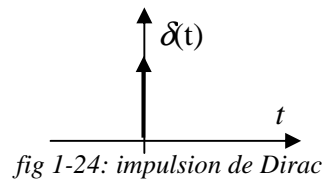


fig 1-25: schéma d'obtention de la réponse impulsionnelle d'un système

La convolution intervient dans le lien qui relie les formes temporelles de l'entrée $x(t)$ et de la sortie $y(t)$ d'un système linéaire connue par sa réponse impulsionnelle $h(t)$.

L'explication de la convolution est généralement mieux comprise dans sa version discrète que l'on présente dans un premier temps.

Version discrète

Un signal quelconque $x(t)$, peut être considéré comme une somme infinie d'impulsions de Dirac. Chaque impulsion a pour amplitude la valeur de la fonction à l'instant considéré:

$$x(t) = \sum_{t'=-\infty}^{\infty} x(t')\delta(t-t')$$

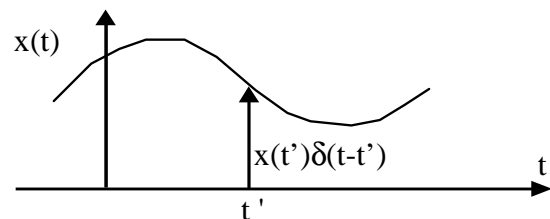


fig 1-26: découpage d'une fonction en somme de Dirac

Pour chacune des impulsions $x(t')\delta(t-t')$ qui compose le signal d'entrée $x(t)$, le système fournit en sortie la réponse impulsionnelle commençant à l'instant t' et multipliée par $x(t')$ l'amplitude de l'impulsion à cet instant.

$$\begin{array}{ccc}
 & x(t) \rightarrow y(t) & \\
 & \delta(t) \rightarrow h(t) & \\
 \text{entrée} & \delta(t-t') \rightarrow h(t-t') & \text{sortie} \\
 & x(t')\delta(t-t') \rightarrow x(t')h(t-t') & \\
 \sum_{t'=-\infty}^{\infty} x(t')\delta(t-t') \rightarrow \sum_{t'=-\infty}^{\infty} x(t')h(t-t') & &
 \end{array}$$

La réponse totale du système est la somme de toutes les réponses impulsionnelles dues aux impulsions

qui composent le signal d'entrée: $y(t) = \sum_{t'=-\infty}^{\infty} x(t')h(t-t')$

Pour un signal analytique la sommation se traduit sous forme intégrale et on obtient:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t')h(t-t')dt'$$

Version continue

La valeur du signal à l'instant t peut s'écrire d'après la propriété de l'impulsion de Dirac:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t') \delta(t - t') dt'$$

En sortie, pour chacune des impulsions $\delta(t-t')$ à l'instant t' , le système fournit la réponse impulsionnelle $h(t-t')$ commençant à l'instant t' . En remplaçant $\delta(t-t')$ par $h(t-t')$ dans l'équation on obtient pour la sortie $y(t)$:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t') h(t - t') dt'$$

Cas d'un signal causal

Comme $h(t)$ est causale, c'est à dire que $h(t-t')$ est nulle pour $(t-t') < 0$, donc pour $t' > t$, on

$$a: y(t) = \int_{-\infty}^t x(t') h(t - t') dt'$$

Les bornes d'intégration de l'équation traduisent le fait que la sortie à l'instant t dépend seulement de la valeur de l'entrée aux instants précédents. Si on effectue le changement de variable $u = t - t'$; $t' = t - u$,

$$dt' = -du; \int_{t'=-\infty}^{t'=t \Rightarrow u=0} \Rightarrow u=\infty; \text{ on obtient: } y(t) = \int_0^{\infty} x(t - u) h(u) du$$

Cette équation peut s'interpréter de la manière suivante en prenant la somme sous forme discrète:

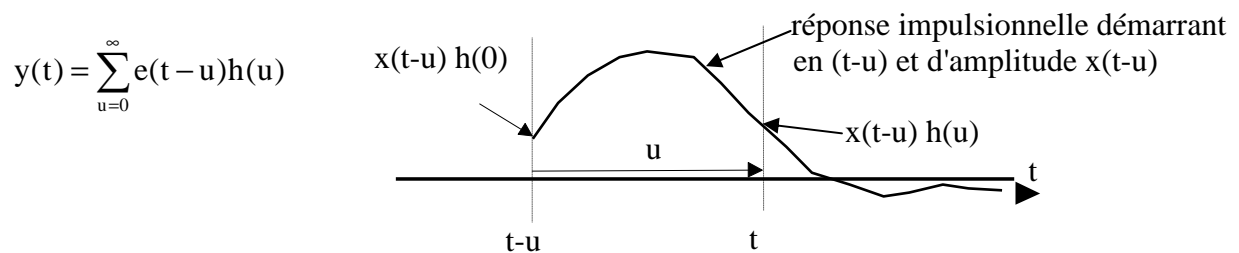


fig 1-27: contribution de l'entrée à l'instant $(t-u)$ à la sortie à l'instant t

A l'instant t , la contribution de l'impulsion qui a eut lieu en $(t-u)$ se traduit par la valeur de la réponse impulsionnelle d'amplitude $e(t-u)$ et prise à l'instant u

On dit que $y(t)$ est le produit de convolution de $x(t)$ et de $h(t)$ et on note \otimes ou $*$ ce produit:

$$y(t) = x(t) \otimes h(t) = \int_{-\infty}^t x(t') h(t - t') dt' = \int_0^{\infty} x(t - u) h(u) du$$

6.4 Transformée de Fourier inverse

On montre que si : $X(v) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi vt} dt$, alors, on a : $x(t) = \text{TF}^{-1}[X(v)] = \int_{-\infty}^{+\infty} X(v) e^{j2\pi vt} dv$

TF^{-1} est la transformée de Fourier inverse.

$x(t)$ est la forme temporelle de x

$X(v)$ est la forme fréquentielle de x

6.5 Exemple (très important) : impulsion rectangulaire

on considère le signal à énergie finie, composé de une impulsion rectangulaire de largeur τ et de hauteur E encore appelé $\Pi_\tau(t)$ fonction porte de largeur τ .

$$\text{TF}[\Pi_\tau(t)] = X(v) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi vt} dt = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} E e^{-j2\pi vt} dt$$

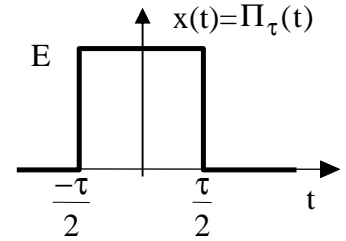


fig 1-28: signal impulsion rectangulaire positif de largeur τ

$$X(v) = E \left[\frac{e^{-j2\pi vt}}{-j2\pi v} \right]_{-\tau/2}^{\tau/2} = \frac{E}{2\pi v} \left[\frac{e^{-j\pi v\tau} - e^{j\pi v\tau}}{-j} \right] = \frac{E}{\pi v} \sin(\pi v\tau) = E\tau \frac{\sin(\pi v\tau)}{\pi v\tau}$$

$X(v)$ est de la forme $\text{sinc}(y) = \frac{\sin(y)}{y}$ avec

$y = \pi v\tau$. Le tracé de $X(v)$ s'annule pour $y = k\pi$,

soit pour toutes fréquences multiples de $\frac{1}{\tau}$. Pour

la fréquence nulle $y=0$, $\frac{\sin(y)}{y}$ tend vers 1 et

$X(v)$ passe par valeur $E\tau$.

$$\text{TF}[\Pi_\tau(t)] = E \frac{\sin(\pi v\tau)}{\pi v} = E\tau \text{sinc}(\pi v\tau)$$

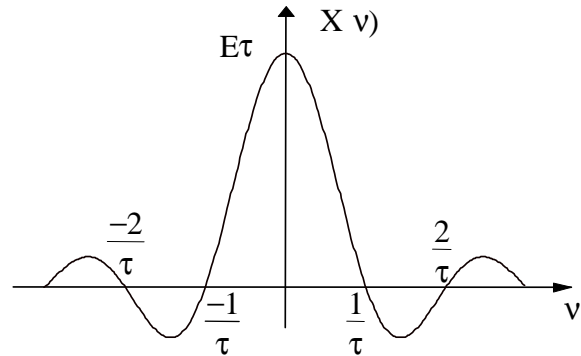


fig 1-29: transformée Fourier du signal impulsion rectangulaire positif de largeur τ et hauteur E

6.6 Etude des cas limites

- transformée de Fourier de l'impulsion de Dirac

Si on considère une impulsion $\delta_\epsilon(t)$ de largeur ϵ et de hauteur $1/\epsilon$, sa transformée de

$$\text{Fourier a pour valeur : } \text{TF}[\delta_\epsilon(t)] = \frac{1}{\epsilon} \frac{\sin(\pi v\epsilon)}{\pi v\epsilon} = \frac{\sin(\pi v\epsilon)}{\pi v\epsilon}$$

si de plus on fait tendre la largeur de l'impulsion ϵ vers 0, on obtient :

$$\text{TF}[\delta(t)] = \text{TF}[\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \delta_\epsilon(t)] = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \text{TF}[\delta_\epsilon(t)] = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi v\epsilon)}{\pi v\epsilon} = 1$$

Plus l'impulsion est étroite plus son spectre est large. La transformée de Fourier d'une impulsion de Dirac, qui est infiniment étroite, est égale à une constante 1. C'est à dire que cette impulsion contient, avec la même densité, **toutes** les fréquences.

- transformée de Fourier inverse de l'impulsion de Dirac

De même si on considère un signal dont la transformée de Fourier $Y(v)$ a une forme rectangulaire encore appelée $\Pi_{v_0}(v)$ fonction porte de largeur v_0 , c'est à dire ne se compose, avec une même densité, que des fréquences inférieures à $v_0/2$. Par transformée inverse le signal $y(t)$ s'écrit:

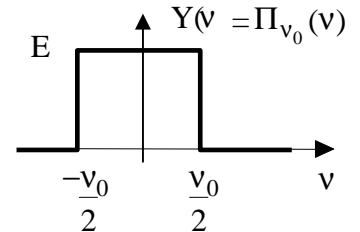


fig 1-30: transformée de Fourier correspondant à une fonction porte de largeur v_0 et de hauteur E

$$TF^{-1}[Y(v)] = y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} Y(v) e^{j2\pi vt} dv = \int_{-v_0/2}^{v_0/2} E e^{j2\pi vt} dv$$

$$y(t) = E \left[\frac{e^{j2\pi vt}}{j2\pi t} \right]_{-v_0/2}^{v_0/2} = \frac{E}{\pi t} \left[\frac{e^{j\pi v_0 t} - e^{-j\pi v_0 t}}{2j} \right] = E v_0 \frac{\sin(\pi v_0 t)}{\pi v_0 t}$$

$y(t)$ est de la forme $\frac{\sin(x)}{x}$ avec $x = \pi v_0 t$.

Le tracé de $y(t)$ s'annule pour $x = k\pi$, soit pour t multiples de $\frac{1}{v_0}$. Pour $t=0$, $y(t)$ tend vers la valeur $E v_0$.

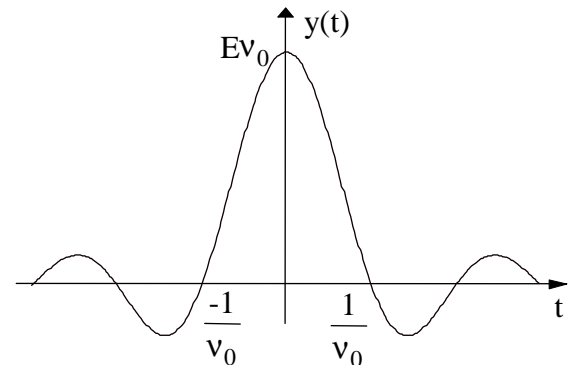


fig 1-31: transformée de Fourier inverse de la fonction porte de largeur v_0 et de hauteur E

Si on considère une impulsion en fréquence $\delta_\epsilon(v)$ de largeur ϵ et de hauteur $1/\epsilon$, la transformée de Fourier inverse a pour valeur :

$$TF^{-1}[\delta_\epsilon(v)] = \frac{1}{\epsilon} \frac{\sin(\pi \epsilon t)}{\pi \epsilon t} = \frac{\sin(\pi \epsilon t)}{\pi \epsilon t}$$

si, de plus, on fait tendre la largeur de l'impulsion ϵ vers 0, on obtient :

$$TF^{-1}[\delta(v)] = TF^{-1}[\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \delta_\epsilon(v)] = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} TF^{-1}[\delta_\epsilon(v)] = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi \epsilon t)}{\pi \epsilon t} = 1$$

ou encore en prenant la transformée de Fourier : $TF[1] = \delta(v)$

La transformée d'une constante égale à 1 est donc une impulsion de Dirac de poids (surface) unité à la fréquence nulle.

Ces deux cas limites, très importants, peuvent se résumer par les dessins suivants:

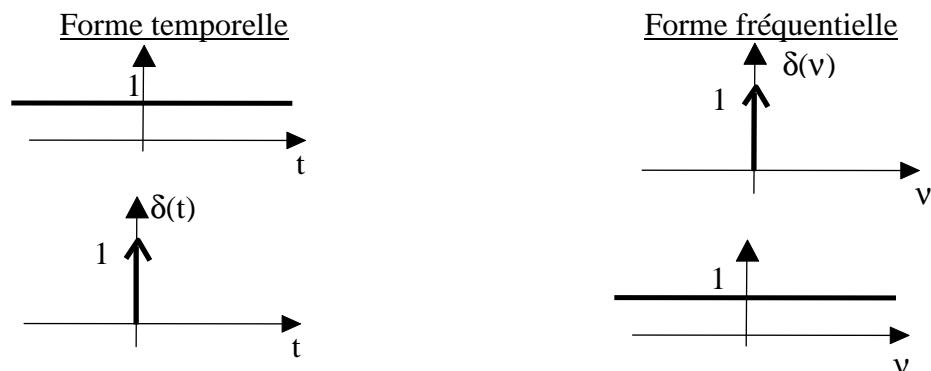


fig 1-32: relation entre la localisation temporelle et fréquentielle d'un signal:

- plus un signal est localisé en temps ($\delta(t)$) plus grand est le nombre de fréquences qu'il contient,
- plus un signal est localisé en fréquences ($\delta(v)$) plus grand est l'intervalle de temps où il est non nul.

6.7 Relation série de Fourier - Transformée de Fourier

Cas d'une sinusoïde :

On a vu que le spectre complexe (X_n) d'une sinusoïde $x(t) = A \cos(2\pi\nu_0 t)$ peut se représenter par des "flèches".

En remarquant que la transformée de Fourier de $e^{j2\pi\nu_0 t}$ s'écrit $\text{TF}[e^{j2\pi\nu_0 t} x(t)]$ avec $x(t) = 1$ et en utilisant la propriété du changement d'origine en fréquence, on montre que

$$\text{TF}[e^{j2\pi\nu_0 t}] = \delta(\nu - \nu_0) \text{ car } \delta(\nu) = \text{TF}[1]$$

Ainsi, la transformée de Fourier de $A \cos(2\pi\nu_0 t)$ est en fait composé de **deux impulsions de Dirac**.

$$\text{TF}[A \cos(2\pi\nu_0 t)] = \text{TF}[A/2(e^{j2\pi\nu_0 t} + e^{-j2\pi\nu_0 t})]$$

$$\text{TF}[A \cos(2\pi\nu_0 t)] = A/2(\text{TF}[e^{j2\pi\nu_0 t}] + \text{TF}[e^{-j2\pi\nu_0 t}])$$

$$\text{TF}[A \cos(2\pi\nu_0 t)] = A/2(\delta(\nu - \nu_0) + \delta(\nu + \nu_0))$$

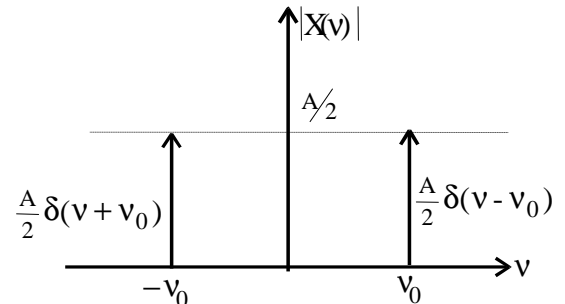


fig 1-33: transformée de Fourier de la fonction $x(t) = A \cos(2\pi\nu_0 t)$

La **surface** (le poids) des impulsions vaut $A/2$.

De même la transformée de Fourier d'une sinusoïde $A \cos(2\pi\nu_0 t + \phi)$ a le même module mais une phase (liée à la partie imaginaire) différente.

$$\text{TF}[A \cos(2\pi\nu_0 t + \phi)] = \text{TF}[A/2(e^{j(2\pi\nu_0 t + \phi)} + e^{-j(2\pi\nu_0 t + \phi)})]$$

$$\text{TF}[A \cos(2\pi\nu_0 t + \phi)] = A/2(e^{j\phi} \text{TF}[e^{j2\pi\nu_0 t}] + e^{-j\phi} \text{TF}[e^{-j2\pi\nu_0 t}])$$

$$\text{TF}[A \cos(2\pi\nu_0 t + \phi)] = \frac{e^{j\phi} A}{2} \delta(\nu - \nu_0) + \frac{e^{-j\phi} A}{2} \delta(\nu + \nu_0)$$

Et ainsi : $\text{TF}[A \sin(2\pi\nu_0 t)] = -\frac{jA}{2} \delta(\nu - \nu_0) + \frac{jA}{2} \delta(\nu + \nu_0)$ car le sinus est en retard de $\pi/2$ sur le cosinus.

Cas général

De manière identique, les spectres de raies obtenus pour les fonctions périodiques correspondent à une transformée de Fourier composée d'une somme de Dirac.

Soit $x(t)$ un signal périodique dont la décomposition en série de Fourier s'écrit :

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos(n \frac{2\pi}{T} t) + b_n \sin(n \frac{2\pi}{T} t) \right] = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[c_n \cos(n \frac{2\pi}{T} t + \phi_n) \right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n e^{jn \frac{2\pi}{T} t}$$

$$\text{avec: } X_n = \frac{c_n}{2} e^{j\phi_n} = \frac{a_n - jb_n}{2}; X_{-n} = \frac{c_n}{2} e^{-j\phi_n} = \frac{a_n + jb_n}{2} \text{ et } X_0 = c_0 = a_0$$

On obtient ainsi pour un signal $x(t)$ quelconque:

$$X(\nu) = \text{TF} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n e^{jn \frac{2\pi}{T} t} \right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n \text{TF} \left[e^{jn \frac{2\pi}{T} t} \right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n \delta \left[\nu - \frac{n}{T} \right]$$

ou encore:

$$X(\nu) = c_0 \delta(\nu) + \sum_{n=1}^{\infty} X_n \delta \left(\nu - \frac{n}{T} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} X_{-n} \delta \left(\nu + \frac{n}{T} \right) = c_0 \delta(\nu) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{2} e^{j\phi_n} \delta \left(\nu - \frac{n}{T} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{2} e^{-j\phi_n} \delta \left(\nu + \frac{n}{T} \right)$$

Pour chaque harmonique n (n entier) de fréquence n/T de la série de Fourier, on a pour la transformée de Fourier deux Dirac $\delta(v - \frac{n}{T})$ et $\delta(v + \frac{n}{T})$ de poids respectifs les coefficients $X_n = \frac{c_n}{2} e^{j\varphi_n} = \frac{a_n - jb_n}{2}$ et $X_{-n} = \frac{c_n}{2} e^{-j\varphi_n} = \frac{a_n + jb_n}{2}$ de la décomposition en série de Fourier.

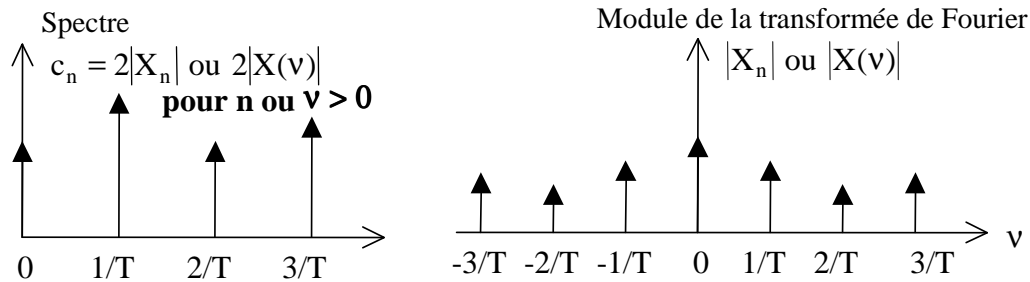


fig 1-34: comparaison du tracé du spectre d'amplitude où n'apparaissent que les fréquences positives et du tracé du module de la transformée de Fourier où sont représentées les fréquences positives et négatives

Transformée de Fourier de $x_0(t)$, un seul motif de $x(t)$ autour de l'origine :

Il existe une relation entre le poids X_n des Diracs de la décomposition en série de Fourier d'une fonction périodique $x(t)$ (à puissance moyenne finie) de période T , et la transformée de Fourier de la fonction $x_0(t)$ constitué d'un seul motif de $x(t)$ autour de l'origine ($x_0(t)$ est à support borné donc à énergie finie):

$$X\left(n \frac{1}{T}\right) = X_n \delta\left(v - \frac{n}{T}\right) = \frac{1}{T} X_0\left(\frac{n}{T}\right) \delta\left(v - \frac{n}{T}\right) \quad \text{avec } X_0(v) = \text{TF}[x_0(t)]$$

$$\text{ou encore } X_n = \frac{1}{T} X_0\left(\frac{n}{T}\right)$$

Preuve: $X_0(v) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_0(t) e^{-j2\pi vt} dt = \int_{-T/2}^{T/2} x_0(t) e^{-j2\pi vt} dt ; \implies X_0\left(n \frac{1}{T}\right) = \int_{-T/2}^{T/2} x_0(t) e^{-j2\pi \frac{n}{T} t} dt$

or par définition $X_n = \frac{1}{T} \int_{t'}^{t'+T} x(t) e^{-jn \frac{2\pi}{T} t} dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-jn \frac{2\pi}{T} t} dt$

et comme sur l'intervalle $[-T/2; T/2]$, $x(t)$ est égale à $x_0(t)$

Remarque: pour un signal d'amplitude constante, plus sa "durée" est grande (temps où sa valeur est "significative") et plus $X_0(v)$ sa densité d'énergie est grande. Si ce signal est périodique la valeur de $X_0(v)/T$ est, elle, constante et correspond à la puissance moyenne à la fréquence v .

Unité: Si $x(t)$ est en Volt, $X_0(v)$ la transformée de Fourier est une densité spectrale, elle s'exprime en Volt/Hz. Ainsi, on retrouve bien que les X_n sont en Volt et correspondent à la surface des Dirac.

Illustration: Cela peut se représenter sur les figures suivantes :

$x(t)$ signal à puissance moyenne fini

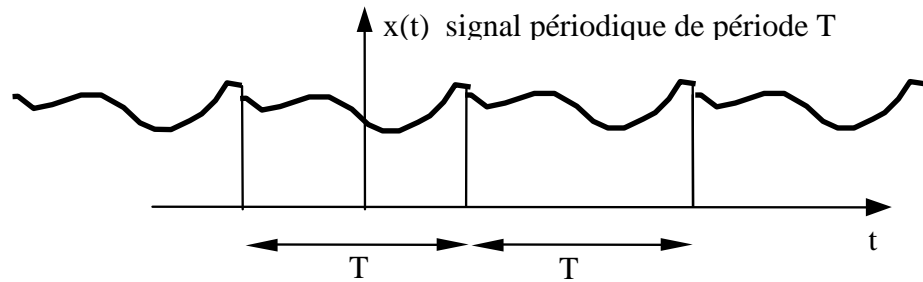


fig 1-35: forme temporelle de $x(t)$ signal périodique donc à puissance moyenne fini

$x_0(t)$ signal à énergie fini

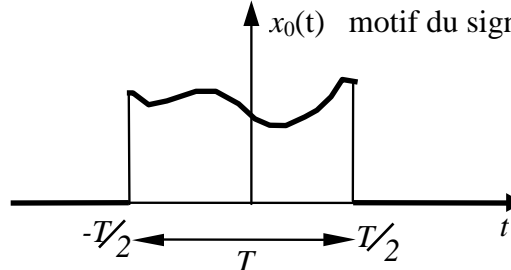


fig 1-36: $x_0(t)$ signal composé de la période de $x(t)$ centrée sur $t=0$: signal à énergie fini

$X_0(v) = \text{TF}[x_0(t)]$
spectre continu

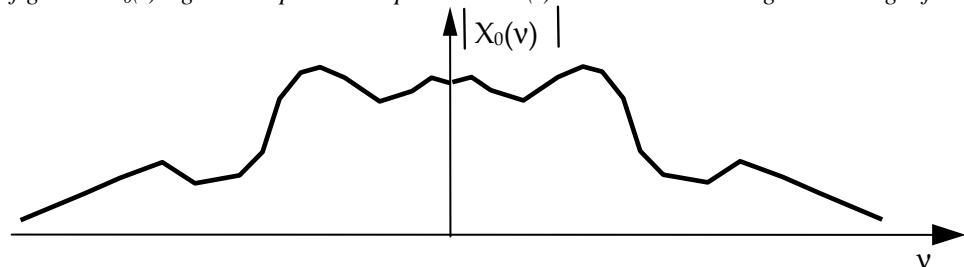
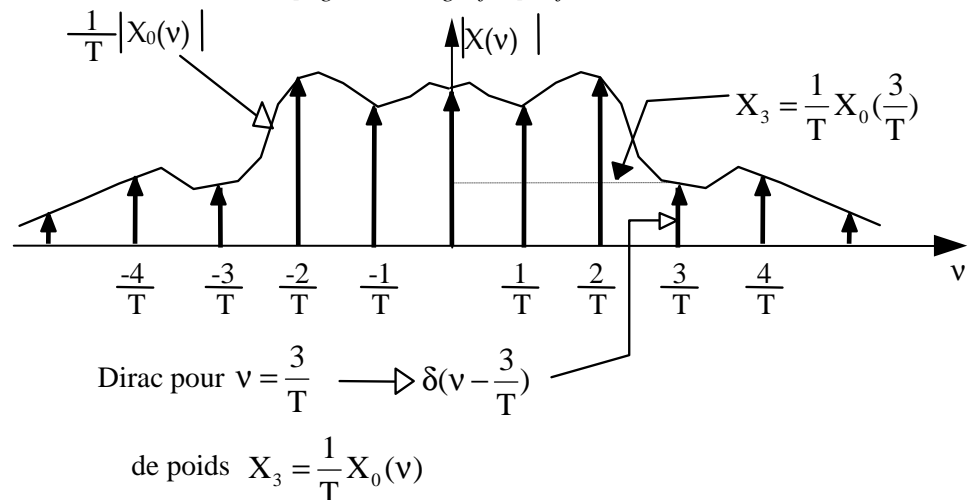


fig 1-37: transformée de Fourier de $x_0(t)$ signal composé de la période de $x(t)$ centrée sur $t=0$: $\text{TF}[\text{signal à énergie fini}] = \text{fonction continue de } v$

$X(v) = \text{TF}[x(t)]$
spectre de raies constituées de Dirac de poids X_n

$$X(v) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_n \delta\left(v - \frac{n}{T}\right)$$



Dirac pour $v = \frac{3}{T} \rightarrow \delta\left(v - \frac{3}{T}\right)$

de poids $X_3 = \frac{1}{T} X_0\left(\frac{3}{T}\right)$

fig 1-38: transformée de Fourier de $x(t)$ signal périodique et donc décomposable en série de Fourier : $\text{TF}[\text{signal à puissance moyenne fini}] = \text{somme de Dirac correspondant à chacun des harmoniques de fréquence } n/T$

Conséquence: l'allure de la transformée de Fourier et donc la répartition de l'amplitude en fonction de la fréquence est donc **identique** si on considère **une période d'un signal ou l'ensemble du signal périodique**.

- Dans le cas où on ne considère qu'une seule période, il s'agit d'un spectre continu défini pour **toutes les fréquences**.
- Dans le cas où on considère le signal périodique, on obtient un **spectre de raies** composé d'une raie (un Dirac) pour chacun des harmoniques. Il est **nul sauf pour les fréquences multiples de la fréquence de base du signal**. La surface de chaque raie correspond au module du coefficient de la décomposition en série de Fourier complexe X_n .

6.8 Théorème de Parseval

Théorème de Parseval : l'énergie du signal peut s'exprimer soit sous forme temporelle soit sous forme fréquentielle:

$$\text{Energie de } x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} X(v)^2 dv$$

Si $x(t) \in \Re$ alors $X(-v) = X(v)^*$ et Energie de $x(t) = \int_0^{+\infty} 2X(v)^2 dv$

6.9 Résumé sur SF/TF

	SF	TF (sauf cas Dirac(v))
Domaine d'application	Signal périodique (T) (puissance moyenne finie)	Signal à énergie finie
Définition	Somme de sinusoides (t) (harmoniques)	Fonction de la fréquence (v)
Définition	$x(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[c_n \cos\left(n \frac{2\pi}{T} t + \varphi_n\right) \right]$ $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n e^{jn \frac{2\pi}{T} t}$ $X_n = \frac{c_n}{2} e^{j\varphi_n} ; X_{-n} = \overline{X_n}$	$\text{TF}[x(t)] = X(v) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi vt} dt$
Parseval	$P_{\text{moy}} = \frac{1}{T} \int_{\theta}^{\theta+T} x^2(t) dt = c_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n^2}{2}$	$\text{Energie} = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} X(v)^2 dv$

Le lien entre SF et TF est réalisé en considérant la TF d'un vecteur tournant qui donne une impulsion de Dirac, qui n'est pas une fonction mais une « distribution » : $\text{TF}\left[e^{jn \frac{2\pi}{T} t}\right] = \delta\left(v - \frac{n}{T}\right)$

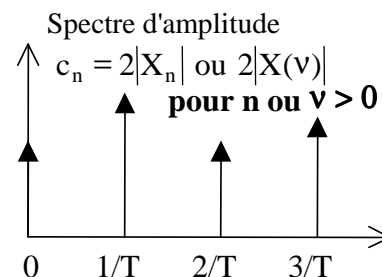
$$\text{TF}[x(t)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n \delta\left(v - \frac{n}{T}\right)$$

Les spectres associés sont :

Pour les c_n	
Pour les X_n	
Pour la TF	

Le tracé de la TF est donc identique au tracé des coefficients X_n . Dans le tracé de la TF chaque « flèche » représente une impulsion de Dirac, alors que ce n'est qu'un simple dessin dans le tracé des X_n .

En conséquence, pour la suite on notera le spectre d'amplitude soit c_n , soit $2|X_n|$, soit $2X(v)$, pour n ou $v > 0$.



6.10 Spectres

Densité spectrale d'amplitude : c'est le tracé de $2|X(v)|$ pour les valeurs de v strictement positives, la valeur $X(0)$ est inchangée car elle correspond à la valeur moyenne du signal. La densité spectrale de $x(t)$ qui s'exprime en Volt/Hz .

Spectre de phase : c'est le tracé de l'argument de $X(v)$ ($\text{Arg}(X(v))$) pour les valeurs de v positives. $X(v)$ est à valeurs complexes.

Densité spectrale d'énergie : c'est le tracé de $(2|X(v)|^2)$ pour les valeurs de v strictement positives. Il représente la répartition de l'énergie du signal en fonction de la fréquence v . On l'appelle la densité spectrale d'énergie de $x(t)$. La somme (l'intégrale) de toute la densité spectrale d'énergie correspond à l'énergie totale du signal, c'est le théorème de Parseval.

La densité spectrale d'énergie s'exprime en $\text{Volt}^2/\text{Hz}^2$

Densité spectrale de puissance : dans le cas des signaux à énergie infinie mais à **puissance moyenne finie**, par exemple périodique, on considère le signal $x(t)$ sur un support borné, un temps T_{mes} fini (une période T pour un signal périodique). L'énergie du signal sur T_{mes} s'écrit

$\int_0^{+\infty} 2X(v)^2 dv$. Pour calculer la puissance il faut diviser l'énergie par le temps T_{mes} . On

défini ainsi la **densité spectrale de puissance** :

$$P = \frac{1}{T_{mes}} \int_0^{+\infty} 2X(v)^2 dv = \int_0^{+\infty} \frac{2X(v)^2}{T_{mes}} dv = \int_0^{+\infty} DSP(v) dv$$

$X(v)^2$ est en $\text{Volt}^2/\text{Hz}^2$, la DSP s'exprime en Volt^2/Hz .

La somme (l'intégrale) de toute la densité spectrale de puissance correspond à la

puissance moyenne du signal, c'est le théorème de Parseval : $P = \int_0^{+\infty} DSP(v) dv$

7 Applications

7.1 Filtrage

On connaît classiquement un filtre par sa réponse en fréquence (diagramme de Bode), c'est à dire d'une part le module de sa réponse $|H(j\omega)|$ et d'autre part sa phase (ou son argument $\arg(H(j\omega))$)

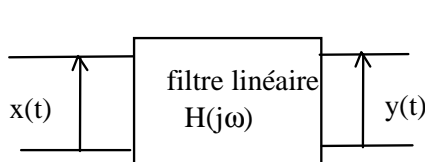


fig 1-39: schéma du filtrage linéaire d'un signal sous forme temporelle

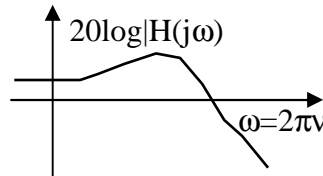


fig 1-40: gain du filtre en fonction de la fréquence

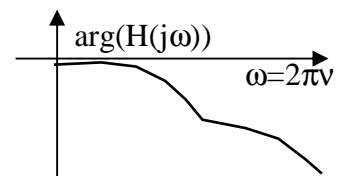


fig 1-41: déphasage du filtre en fonction de la fréquence

Soit en entrée un signal quelconque considéré sous sa forme fréquentielle : $X(v) = TF[x(t)]$

Pour chaque fréquence v_0 qui compose le signal $x(t)$ on a à l'entrée du système une amplitude $|X(v_0)|$ et une phase de valeur $\arg(X(v_0))$. Pour cette fréquence v_0 , le filtre va :

- multiplier l'amplitude par $|H(j2\pi v_0)|$
- déphaser de $\arg(H(j2\pi v_0))$

Ce qui correspond au produit des grandeurs complexes $X(v_0)$ et $H(j2\pi v_0)$. On obtient ainsi la composante de la sortie pour la fréquence v_0 :

$$Y(v_0) = X(v_0) H(j2\pi v_0)$$

Le filtrage correspond au produit des formes spectrales de l'entrée et du filtre (de la même manière qu'il correspond au produit de la transformée de Laplace de l'entrée par la fonction de transfert).

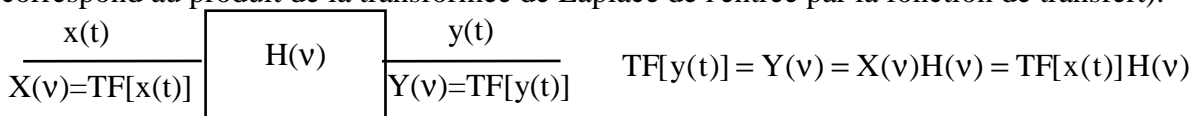


fig 1-42: schéma du filtrage linéaire d'un signal sous forme fréquentielle

Exemple : Soit un signal carré symétrique d'amplitude $\pm E$, de rapport cyclique 0,5 et de fréquence $v_0 = 1/T = 0,5\text{kHz}$. Sa décomposition en série de Fourier s'écrit :

$$x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4E}{n\pi} \sin(n\frac{\pi}{2}) \cos(n 2\pi\nu_0 t)$$

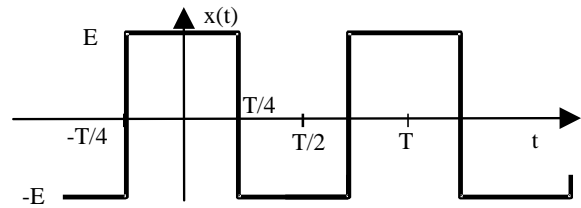


fig 1-43: signal carré symétrique d'amplitude $\pm E$

On considère le filtre RC suivant. Sa fonction de transfert $H(p)$ s'écrit :

$$H(p) = \frac{1}{1 + \tau p}$$

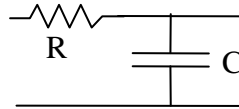


fig 1-44: filtre RC

avec $\tau = RC$

sa forme fréquentielle $H(\nu)$:

$$H(\nu) = \frac{1}{1 + j2\pi\nu\tau} = \frac{1}{1 + j\frac{\nu}{\nu_1}}$$

AN: $R = 31\,831\,\Omega$; $C = 10\text{ nF}$; $\nu_1 = 1/(2\pi RC) = 500\text{ Hz}$

Appelons $x_1(t)$ le fondamental de $x(t)$:

$x_1(t)$ correspond à la partie réelle d'un vecteur tournant complexe $v_1(t)$

$$x_1(t) = \frac{4E}{\pi} \cos(2\pi\nu_0 t)$$

$$v_1(t) = \frac{4E}{\pi} e^{j2\pi\nu_0 t}$$

Au cours du filtrage par le filtre RC ce vecteur tournant est **multiplié** par le gain complexe $H(\nu_0)$ à la fréquence ν_0 pour donner en sortie le vecteur tournant $w_1(t)$:

$$w_1(t) = \frac{4E}{\pi} e^{j2\pi\nu_0 t} H(\nu_0) = \frac{4E}{\pi} e^{j2\pi\nu_0 t} |H(\nu_0)| e^{j\arg(H(\nu_0))} = \frac{4E}{\pi} |H(\nu_0)| e^{j(2\pi\nu_0 t + \arg(H(\nu_0)))}$$

Ce vecteur a pour partie réelle $y_1(t)$ la sortie du filtre RC au fondamentale $x_1(t)$:

$$y_1(t) = \frac{4E}{\pi} |H(\nu_0)| \cos(2\pi\nu_0 t + \arg(H(\nu_0)))$$

$$\text{AN: } \nu_0 = \nu_1; H(\nu_0) = \frac{1}{1 + j\frac{\nu_0}{\nu_1}}; |H(\nu_0)| = \frac{1}{\sqrt{2}};$$

$$\arg(H(\nu_0)) = -\pi/4$$

$$y_1(t) = \frac{4E}{\pi} \frac{1}{\sqrt{2}} \cos(2\pi\nu_0 t + (-\pi/4))$$

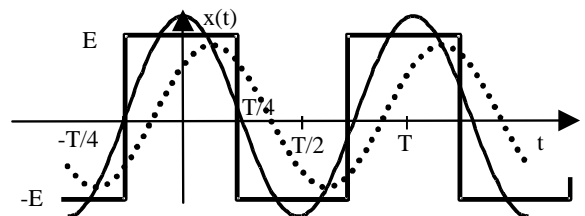
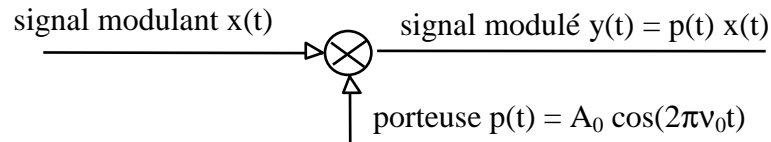


fig 1-45: tracé de $x(t)$, $x_1(t)$ et $y_1(t)$

Les fonctions $x(t)$, $x_1(t)$ et $y_1(t)$ sont tracées.

7.2 Modulation d'amplitude sans porteuse

7.2.1 Définition



On module le signal $x(t)$ par la porteuse $p(t)$ en réalisant le produit de ces deux signaux

7.2.2 Produit de deux sinusoides

Soit $x(t) = A_1 \cos(2\pi\nu_1 t)$, avec $\nu_1 < \nu_0$

Son spectre d'amplitude est :

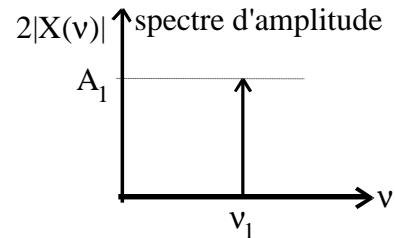


fig 1-46: spectre d'amplitude de la fonction $x(t) = A_1 \cos(2\pi\nu_1 t)$

Le spectre d'amplitude de la porteuse est :

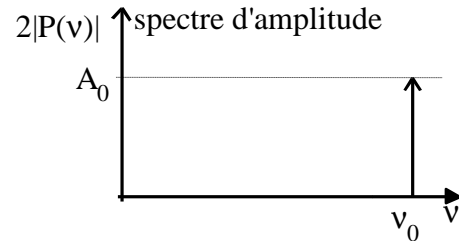


fig 1-47: spectre d'amplitude de la porteuse $p(t) = A_0 \cos(2\pi\nu_0 t)$

Le signal modulé est : $y(t) = p(t) x(t)$

$$y(t) = A_0 \cos(2\pi\nu_0 t) A_1 \cos(2\pi\nu_1 t)$$

$$y(t) = \frac{A_0 A_1}{2} (\cos(2\pi(\nu_0 - \nu_1)t) + \cos(2\pi(\nu_0 + \nu_1)t))$$

Il a pour spectre :

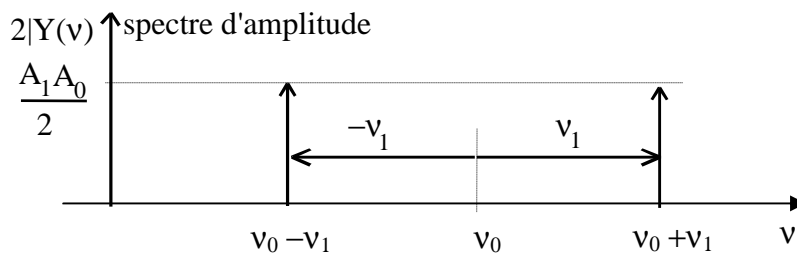


fig 1-48: spectre d'amplitude du produit de $x(t)$ et de la porteuse $p(t)$

Le signal modulé est donc composé de deux raies d'amplitude $\frac{A_0 A_1}{2}$: une à la différence de fréquences $\nu_0 - \nu_1$, et une à la somme des fréquences $\nu_0 + \nu_1$

7.2.3 Cas d'un signal quelconque

Soit $x(t)$ un signal de spectre quelconque

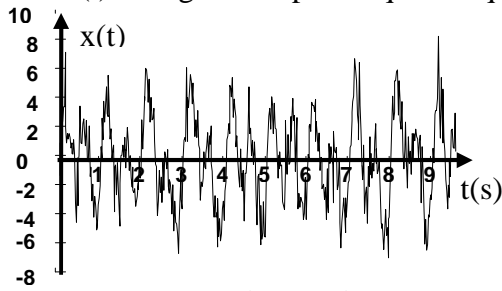


fig 1-49: signal $x(t)$ quelconque

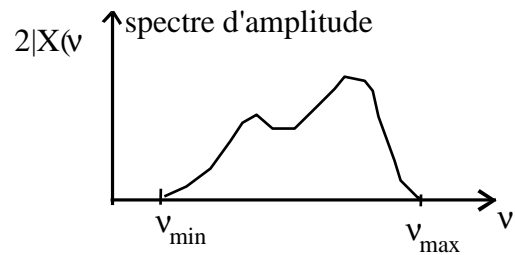


fig 1-50: spectre d'amplitude quelconque du signal $x(t)$ supposé bornée en fréquence

Le spectre est supposé borné, c'est à dire compris entre les valeurs v_{\min} et v_{\max}

avec $v_{\max} < v_0$

La forme du spectre étant quelconque, on représente **symboliquement** ce spectre par un triangle. Afin de différencier facilement les deux extrémités, on convient de placer la partie basse du triangle pour v_{\min} et la partie haute du triangle (que l'on fixe arbitrairement à la valeur A) pour v_{\max} .

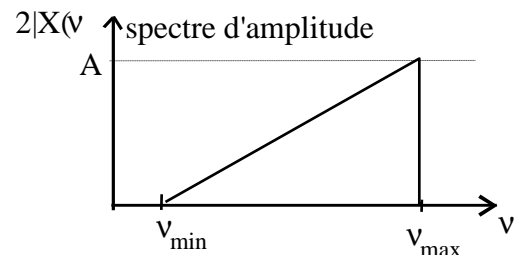


fig 1-51: forme symbolique du spectre d'amplitude d'un signal à spectre bornée

Lors de la modulation, le produit $y(t) = p(t) x(t)$ se fait **pour chaque fréquence qui compose le signal $x(t)$** . Par exemple pour la fréquence $v = v_{\min}$, l'amplitude du spectre de $x(t)$ vaut $2 |X(v_{\min})|$ ou $X(v) = TF[x(t)]$. En sortie cette amplitude est multipliée par $A_0/2$ et se retrouve aux fréquences $(v_0 - v_{\min})$ et $(v_0 + v_{\min})$. Sur le tracé du spectre le bas du triangle va donc se retrouver à ces deux fréquences.

De même pour la fréquence $v = v_{\max}$, l'amplitude du spectre de $x(t)$ vaut $2 |X(v_{\max})|$. En sortie cette amplitude est multipliée par $A_0/2$ et se retrouve aux fréquences $(v_0 - v_{\max})$ et $(v_0 + v_{\max})$. Sur le tracé du spectre le haut du triangle va donc se retrouver à ces deux fréquences avec une amplitude $\frac{A_0 A}{2}$. Ce qui donne pour le spectre du signal modulé

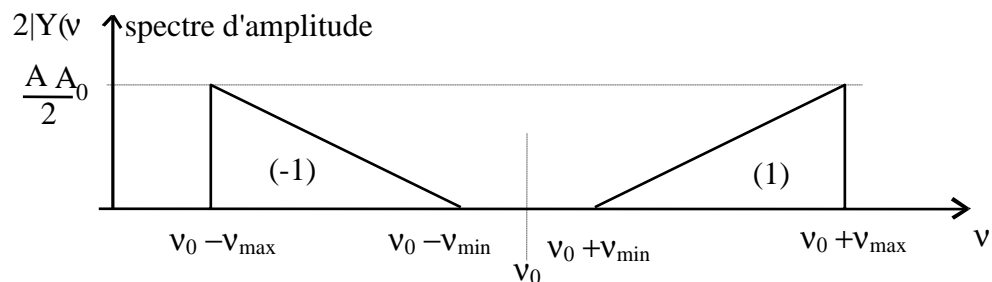


fig 1-52: spectre d'amplitude résultant de la modulation de $x(t)$ par la porteuse $p(t) = A_0 \cos(2\pi v_0 t)$

Le spectre se compose de :

- (1) du spectre de $x(t)$ multiplié par $A_0/2$ et décalé de la valeur v_0
- (-1) du symétrique du spectre de $x(t)$ multiplié par $A_0/2$ et décalé de la valeur v_0

Ce spectre occupe une bande de fréquence de largeur $2 v_{\max}$

Remarque : si le signal modulant $x(t)$ ne contient aucune composante continue, alors $y(t)$ le signal modulé ne contient aucune composante pour la fréquence de la porteuse ν_0 .

7.2.4 Démodulation synchrone

Après transmission et réception du signal $y(t)$, on effectue le produit du signal reçu par la porteuse $p(t)$ afin d'obtenir le signal démodulé $d(t)$

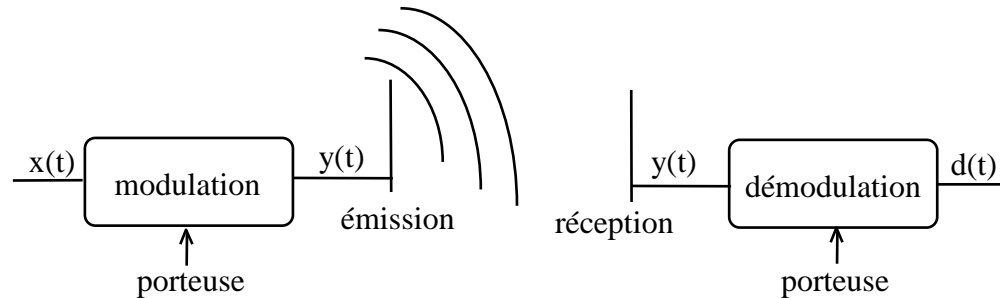


fig 1-53: schéma de la transmission d'un signal modulé en amplitude par une porteuse

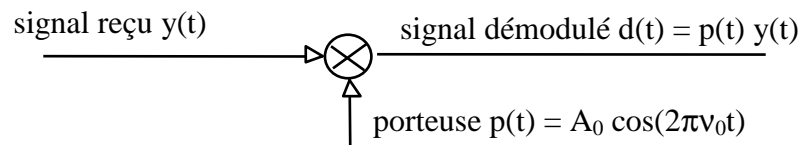


fig 1-54: schéma de la démodulation synchrone d'un signal modulé en amplitude par une porteuse

Remarque : la porteuse doit être présente à la réception, donc soit transmise entièrement soit reconstituée par des moyens électroniques. C'est pourquoi ce type de démodulation s'appelle démodulation synchrone car elle nécessite la présence d'un signal sinusoïdal de même fréquence et phase que la porteuse donc **synchrone** avec celle-ci.

Cas d'un signal sinusoïdal : $d(t) = p(t)y(t)$

$$d(t) = A_0 \cos(2\pi\nu_0 t) \frac{A_0 A_1}{2} (\cos(2\pi(\nu_0 - \nu_1)t) + \cos(2\pi(\nu_0 + \nu_1)t))$$

$$d(t) = \frac{A_0^2 A_1}{4} [\cos(2\pi(-\nu_1)t) + \cos(2\pi\nu_1 t) + \cos(2\pi(2\nu_0 - \nu_1)t) + \cos(2\pi(2\nu_0 + \nu_1)t)]$$

$$d(t) = \frac{A_0^2 A_1}{4} [2\cos(2\pi\nu_1 t) + \cos(2\pi(2\nu_0 - \nu_1)t) + \cos(2\pi(2\nu_0 + \nu_1)t)]$$

$$d(t) = \frac{A_0^2}{2} x(t) + \frac{A_0^2 A_1}{4} [\cos(2\pi(2\nu_0 - \nu_1)t) + \cos(2\pi(2\nu_0 + \nu_1)t)]$$

On retrouve donc le signal $x(t)$ dans le signal démodulé.

Le spectre de $d(t)$ vaut :

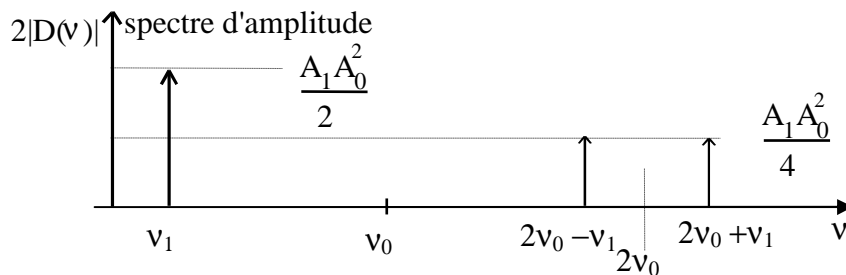


fig 1-55: spectre d'amplitude du produit du signal reçu $y(t)$ et de la porteuse $p(t)$

En éliminant les composantes hautes fréquences $(2\nu_0 - \nu_1)$ et $(2\nu_0 + \nu_1)$ par un filtre passe bas, on retrouve le signal modulant $x(t)$.

Cas d'un signal quelconque : par un raisonnement analogue sur chacune des fréquences qui compose le spectre on obtient pour le spectre du signal démodulé :

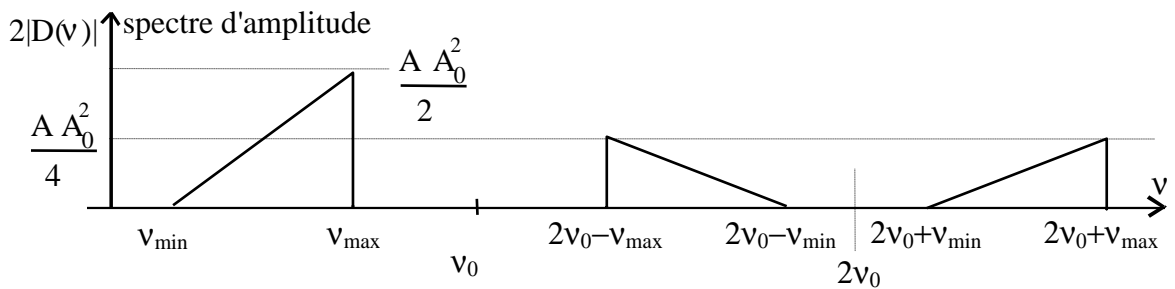


fig 1-56: spectre d'amplitude résultant de la démodulation du signal reçu $y(t)$ par la porteuse $p(t) = A_0 \cos(2\pi v_0 t)$

En éliminant les composantes hautes fréquences autour de $2v_0$ par un filtre passe bas, on retrouve le signal modulant $x(t)$.

Application :

- changement de fréquence d'un signal
- instrumentation : détecteur synchrone;
- transmission de la couleur des signaux vidéo en PAL;
- codage et déformation des sons.

7.2.5 Modulation expliquée par la convolution en fréquence

7.2.5.1 Convolution par une impulsion de Dirac

Le produit de convolution a pour définition:

$$x(t) \otimes y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t') y(t - t') dt' = \int_{-\infty}^{\infty} x(t - u) y(u) du$$

On a démontré au paragraphe 4.3.2 que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) f(t) dt = f(0)$$

La convolution de $x(t)$ par une impulsion de Dirac s'écrit donc:

$$x(t) \otimes \delta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t - u) \delta(u) du = (x(t - u))|_{u=0} = x(t)$$

Le Dirac est par conséquent l'élément neutre de la convolution.

La convolution de $x(t)$ par une impulsion de Dirac décalée s'écrit:

$$x(t) \otimes \delta(t - t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t - u) \delta(u - t_0) du$$

en posant: $u' = u - t_0$

$$x(t) \otimes \delta(t - t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t - (u' + t_0)) \delta(u') du' = (x(t - (u' + t_0)))|_{u'=0} = x(t - t_0)$$

La convolution par un Dirac décalé correspond à un changement d'origine de la fonction.

$$\boxed{x(t) \otimes \delta(t - t_0) = x(t - t_0)}$$

7.2.5.2 Modulation d'amplitude sans porteuse

La transformée de Fourier de la porteuse $p(t)$ est composée de deux impulsions de Dirac.

$$\text{TF}[A_0 \cos(2\pi\nu_0 t)] = A_0/2 (\delta(\nu - \nu_0) + \delta(\nu + \nu_0))$$

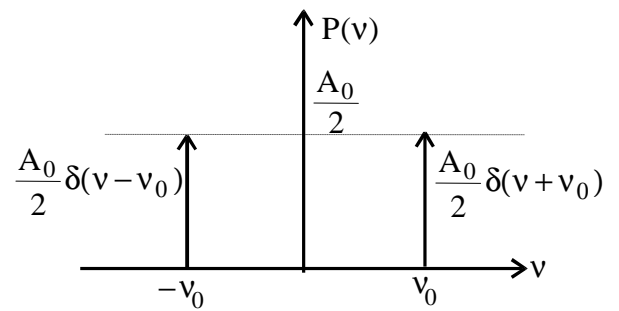


fig 1-57: transformée de Fourier de la porteuse $p(t) = A_0 \cos(2\pi\nu_0 t)$

La transformée de Fourier du signal modulé est:

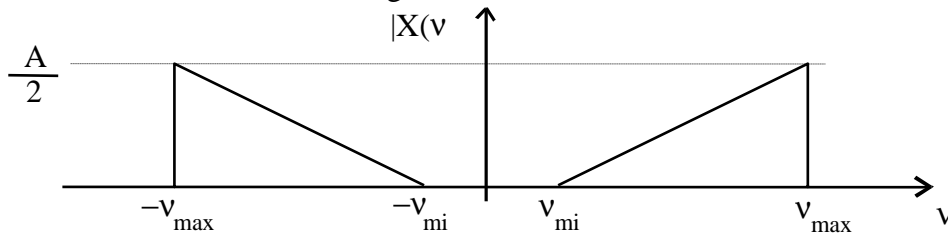


fig 1-58: module de la transformée de Fourier du signal modulant $x(t)$

Le produit $y(t)$ de la porteuse par le signal modulé a pour transformée de Fourier le produit de convolution des transformées de Fourier:

$$\text{TF}[x(t)p(t)] = X(\nu) \otimes P(\nu) = X(\nu) \otimes (A_0/2 (\delta(\nu - \nu_0) + \delta(\nu + \nu_0)))$$

$$\text{TF}[y(t)] = A_0/2 (X(\nu) \otimes \delta(\nu - \nu_0) + X(\nu) \otimes \delta(\nu + \nu_0))$$

en utilisant la propriété de la convolution par un Dirac décalé:

$$\text{TF}[y(t)] = A_0/2 (X(\nu - \nu_0) + X(\nu + \nu_0))$$

La transformée de Fourier de $x(t)$ est donc dupliquée autour de ν_0 et de $-\nu_0$.

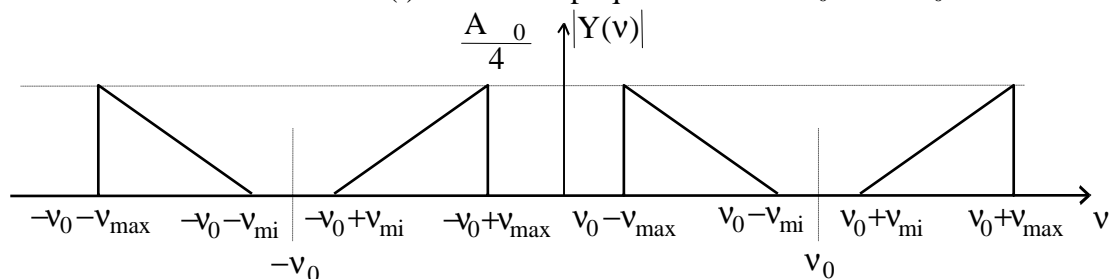


fig 1-59: module de la transformée de Fourier du résultat de la modulation de $x(t)$ par la porteuse $p(t) = A_0 \cos(2\pi\nu_0 t)$

Le tracé de $2|Y(\nu)|$ correspond bien au spectre trouvé précédemment (fig 48).

Echantillonnage d'un signal en temps continu - Théorème de Shannon

1 Introduction

Quelle que soit la grandeur physique (intensité de lumière, pression sonore, ...), elle peut être traduite par l'intermédiaire d'un capteur en une information électrique. La grandeur électrique est, de même que la grandeur physique, une fonction **continue** de la variable. On parle alors de signal **analogique**. Un signal analogique correspond mathématiquement à une fonction continue, définie sur un intervalle et à valeurs généralement dans l'ensemble des réels. Elle est donc définie pour l'infinité des valeurs possibles de la variable et peut prendre pour valeur ou amplitude l'ensemble des réels. Ces deux infinités de valeurs (de la variable et de l'amplitude) sont incompatibles avec le traitement des signaux par ordinateur où les données manipulées doivent avoir des tailles finies.

On suppose par la suite que l'on se place dans le cas monovariable et que cette variable est notée t car les signaux dépendent généralement du **temps**. Un signal analogique est donc représenté par une fonction $x(t)$, forme temporelle du signal.

Si l'amplitude du signal n'est connue que pour **certaines valeurs du temps** appelées **instants d'échantillonnage**, on parle de signal **discret** ou **échantillonné**.

Si l'amplitude du signal ne peut prendre que **certaines valeurs**, c'est à dire si l'on traduit avec une précision finie l'amplitude du signal sous forme numérique, on parle de signal **quantifié**.

Un signal échantillonné dont l'amplitude est quantifiée et qui ne peut prendre que des valeurs discrètes est appelé un **signal numérique**.

Notations signaux continus - signaux discrets

Un signal discret ou échantillonné est représenté par la suite des valeurs de la fonction $x(t)$ aux instants d'échantillonnage. Ces instants sont généralement périodiques et se répètent avec un intervalle de temps **T_e** appelé **période d'échantillonnage**. On note cette suite de nombres : $x(kT_e)$ ou encore $x(k)$.

$x(k)$ n'est défini que pour des valeurs entières de k

$x(t)$ est défini pour toutes les valeurs de t

Lorsque pour les besoins d'une mise en oeuvre par calculateur numérique, on transforme un signal analogique $x(t)$ en un signal numérique $x(kT_e) = x(k)$, on désire que cette transformation soit **réversible**. On souhaite ne perdre **aucune information** du signal analogique et pouvoir retrouver le signal initial par une transformation inverse numérique-analogique.

Le seul paramètre à ajuster est la période d'échantillonnage T_e de la conversion analogique numérique. Elle conditionne le nombre de valeurs acquises par seconde (ou fréquence d'échantillonnage) et donc le débit d'informations numériques. Un raisonnement sur le spectre des signaux analogique et numérique permet d'énoncer le **théorème de Shannon** qui fixe le **choix de T_e** .

2 Numérisation des signaux

Les valeurs obtenues aux instants d'échantillonnage ne peuvent avoir une précision infinie, ce qui nécessiterait une place mémoire infinie. On limite la précision de ces nombres suivant les besoins et la quantité de bruit présent dans le signal.

On se limite généralement à un codage sur 8 bits soit 256 valeurs possibles et une précision relative de $\pm 1/256$, soit 0,4 %. Mais il est tout à fait courant de travailler sur 10 bits (1024 valeurs possibles, soit

une précision de 0,1%) voir 12 bits pour l'imagerie médicale (4096 valeurs possibles, soit une précision de 0,025%). Par exemple, le codage du son pour un Compact Disc se fait sur 16 bits, soit 65 536 valeurs possibles (l'oreille est un instrument très sensible et le niveau du son peut varier dans une grande plage de valeurs pendant un morceau de musique).

Le convertisseur analogique-numérique (CAN ou DAC : Digital Analog Converter) est le composant électronique qui effectue l'échantillonnage et la numérisation. La durée de l'échantillonnage est généralement très courte devant la période d'échantillonnage surtout avec l'utilisation d'échantillonneur bloqueur avant le CAN. Elle sera négligée ici.

3 Modélisation mathématique de l'échantillonnage - théorème de Shannon

3.1 Explication en utilisant la modulation

Mathématiquement, l'échantillonnage correspond au produit du signal analogique $x(t)$ par un peigne de Dirac $\square(t)$ de période T_e , la période d'échantillonnage (on note $v_{ech} = 1/T_e$ la fréquence d'échantillonnage).

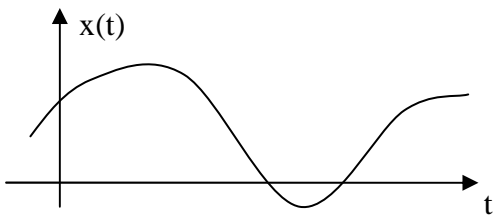


fig 2-1: fonction $x(t)$ à échantillonner

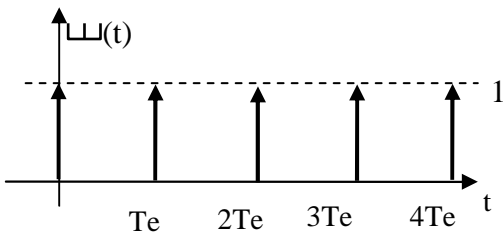
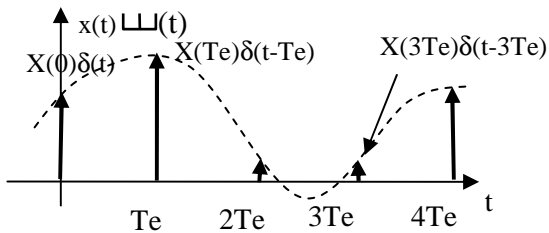


fig 2-2: peigne de Dirac de période T_e

$$T_e \square(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} T_e \delta(t - kT_e)$$



$$x_{ech}(t) = x(t) T_e \square(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT_e) T_e \delta(t - kT_e)$$

fig 2-3: échantillonnage théorique par produit avec un peigne de Dirac de période T_e

Afin que la surface du signal $x(t)$ entre deux instants d'échantillonnage ($T_e \cdot x(kT_e)$), soit égale à la surface du signal $x(t)$ échantillonnée entre ces deux instants ($x(kT_e)$ multiplié par le poids du Dirac), il convient de considérer pour l'échantillonnage un peigne de Dirac de poids T_e , comme cela est illustré sur la figure 4.

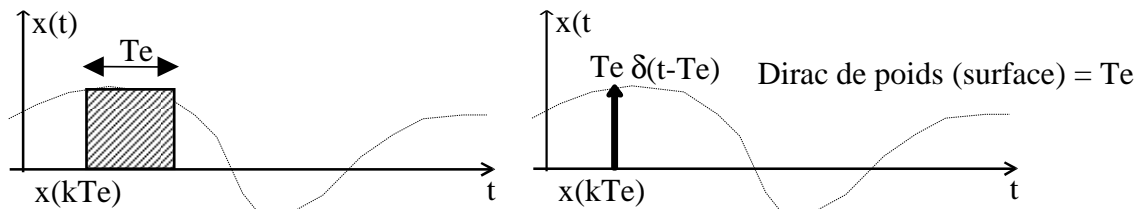


fig 2-4: comparaison de la surface de la fonction $x(t)$ entre deux échantillons ($Te \cdot x(kTe)$) et de la surface du Dirac correspondant à l'échantillonnage à l'instant kTe , ($x(kTe)$ multiplié par Te le poids du Dirac)

On a vu que la décomposition en série de Fourier du peigne de Dirac de poids unité vaut :

$$\square(t) = \frac{1}{Te} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{Te} \cos(n \frac{2\pi}{Te} t) = \frac{1}{Te} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{Te} \cos(n 2\pi v_{ech} t)$$

et que son spectre a l'allure suivante :

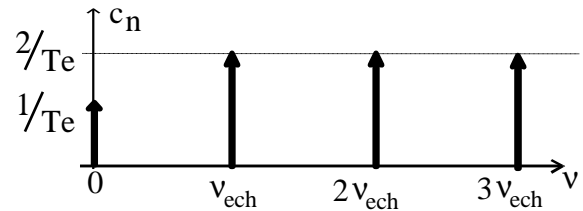


fig 2-5: spectre d'amplitude du peigne de Dirac de période $Te = 1/v_{ech}$

En remplaçant $\square(t)$ par sa décomposition en SF on obtient :

$$x_{ech}(t) = x(t)Te \square(t) = x(t)Te \left(\frac{1}{Te} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{Te} \cos(n 2\pi v_{ech} t) \right)$$

$$x_{ech}(t) = x(t) + \sum_{n=1}^{\infty} 2 x(t) \cos(n 2\pi v_{ech} t)$$

Le terme $x(t) \cos(n 2\pi v_{ech} t)$ correspond à la modulation du signal $x(t)$ par une sinusoïde de fréquence v_{ech} .

On considère un signal $x(t)$ dont le spectre **borné** $2|X(v)|$ présente une valeur nulle pour les fréquences supérieures à v_{max} .

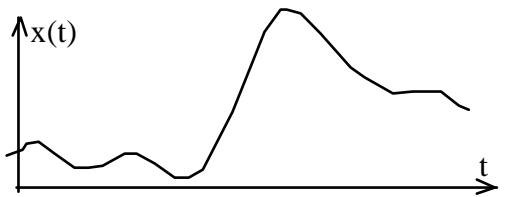


fig 2-6: forme temporelle du signal $x(t)$

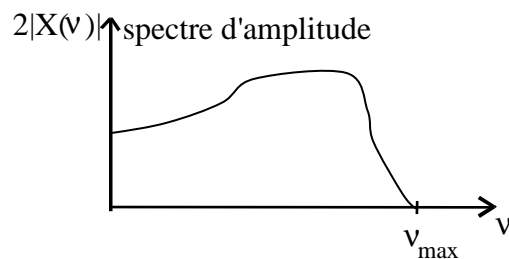


fig 2-7: spectre d'amplitude bornée du signal $x(t)$

Comme pour la modulation sans porteuse, la forme du spectre étant quelconque, on représente **symboliquement** ce spectre par un triangle. Afin de différencier facilement les deux extrémités, on convient de placer la partie basse du triangle pour 0 et la partie haute du triangle (que l'on fixe arbitrairement à la valeur A) pour v_{\max}

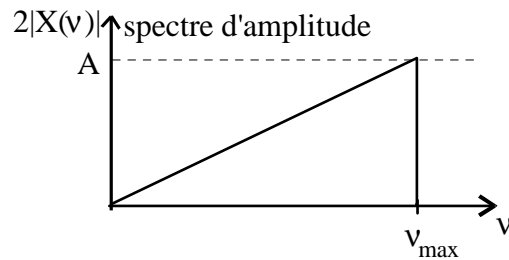


fig 2-8: forme symbolique du spectre d'amplitude d'un signal à spectre bornée

Le spectre résultant de la modulation de $x(t)$ par $2\cos(n2\pi v_{\text{ech}} t)$ une sinusoïde de fréquence nv_{ech} est:

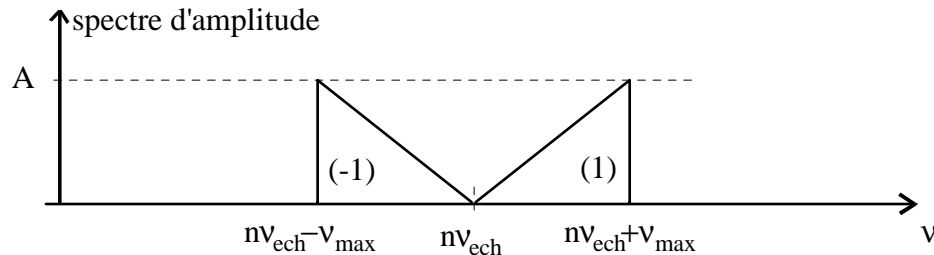


fig 2-9: spectre d'amplitude résultant de la modulation de $x(t)$ par $2 \cos(n 2\pi v_{\text{ech}} t)$

en effectuant la somme infinie de toutes les n modulations on obtient le spectre correspondant au signal échantillonné $x_{\text{ech}}(t)$:

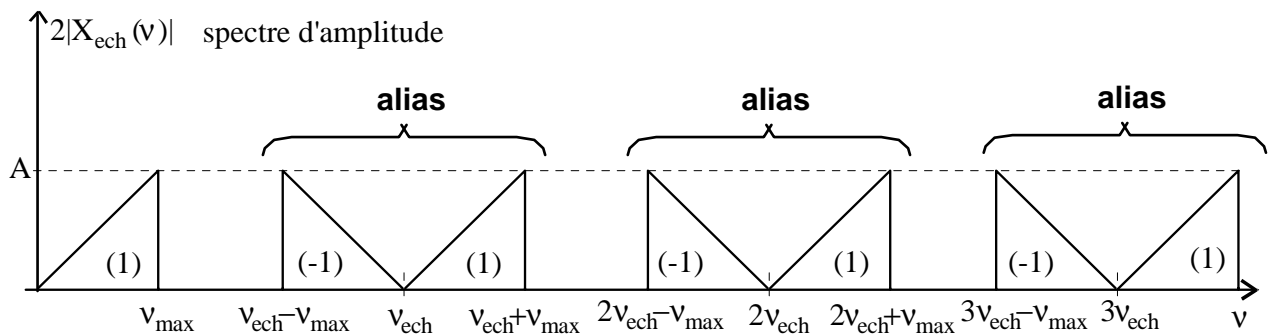


fig 2-10: spectre d'amplitude du signal $x(t)$ échantillonné

Le spectre du signal échantillonné se compose, **en plus** du spectre de $x(t)$, de la répétition autour des fréquences multiples de $v_{\text{ech}}=1/T_e$, d'un motif composé du spectre du signal $x(t)$ (noté (1)) et de son symétrique (noté (-1)) par rapport à l'axe des ordonnées. On appelle **alias**, les motifs du spectre qui se dupliquent de part et d'autre des multiples entiers de la réponse d'échantillonnage.

Illustration 1 : la figure 11 donne le spectre d'amplitude d'un signal sinusoïdal de 500Hz échantillonné à 2000Hz. C'est un cas particulier de la figure 10 dans le cas où $x(t)$ est une sinusoïde de 500hz et la fréquence d'échantillonnage vaut 2000Hz.

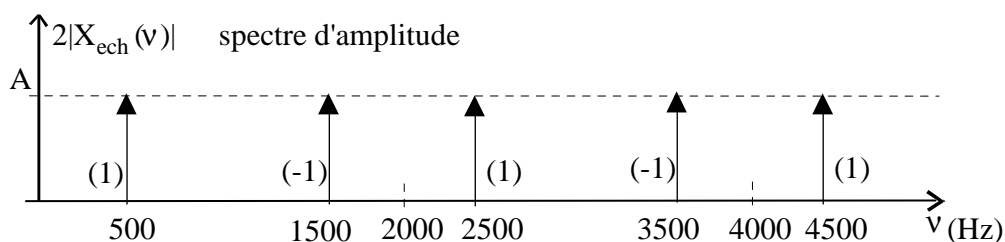


fig 2-11: alias d'un signal sinusoïdal de 500Hz échantillonné à 2000Hz

On peut essayer d'expliquer ce phénomène de duplication des spectres dans le domaine temporel. Sur la figure 12 on a tracé en trait plein un signal sinusoïdale de fréquence $f_{si}=500\text{Hz}$ (période $T=2\text{ms}$). On a représenté par un point noir les valeurs obtenues par l'échantillonnage de ce signal avec une fréquence d'échantillonnage f_{ech} de 2000Hz (période $T_e=0,5\text{ms}$). Bien sur tous les points noirs (d'échantillonnage) sont situés sur le signal de 500Hz . Mais on a tracé aussi deux autres signaux qui **passeraient aussi par tous les points d'échantillonnage** : un de fréquence $f_{ech}-f_{si} = 1500\text{Hz}$ et un de fréquence $f_{ech}+f_{si} = 2500\text{Hz}$. On pourrait ainsi faire passer par ces mêmes points tous les signaux de fréquences $nf_{ech}-f_{si}$ et $nf_{ech}+f_{si}$.

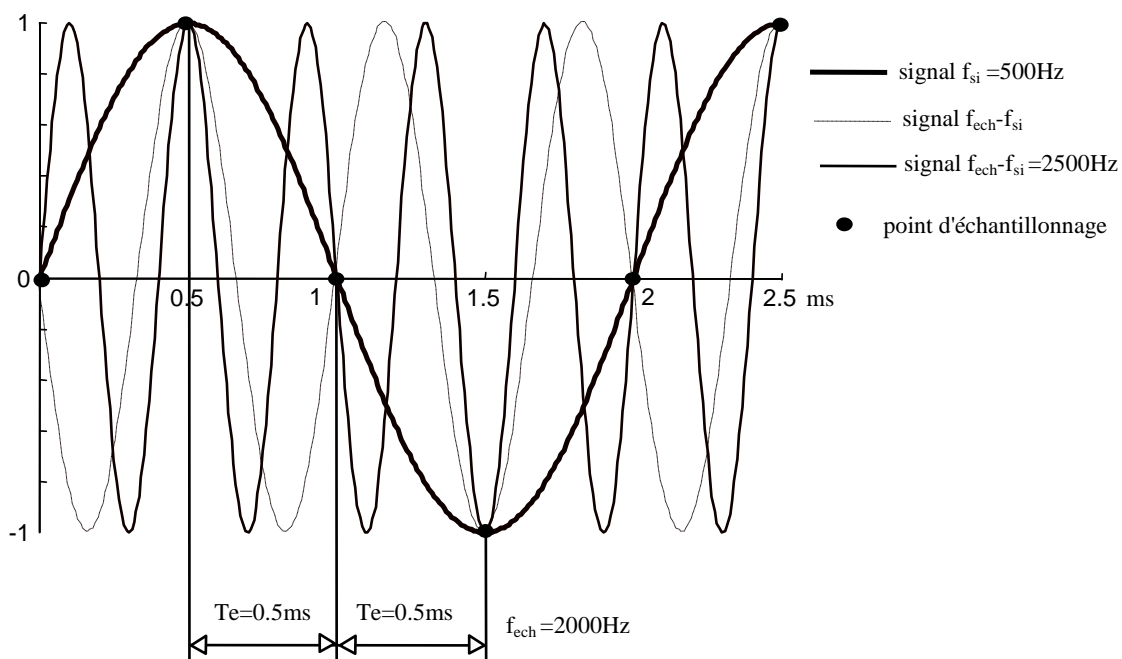


fig 2-12: courbes (alias) passant par les points d'échantillonnage d'un signal sinusoïdal de 500Hz

Illustration 2 : échantillonnage à une fréquence proche de celle de la sinusoïde: on se place maintenant dans le cas d'un signal sinusoïdal de 500Hz échantillonné une fréquence proche de celle du signal, par exemple 480Hz . En se plaçant en temporel, on trace sur la figure 13 en trait plein un signal sinusoïdal de fréquence $f_{si}=500\text{Hz}$ (période $T=2\text{ms}$) et comme précédemment, on représente par un point noir les valeurs obtenues par l'échantillonnage. Ces points **semblent former** une courbe sinusoïdale de fréquence $|480-500|=20\text{Hz}$, très inférieure à 500Hz .

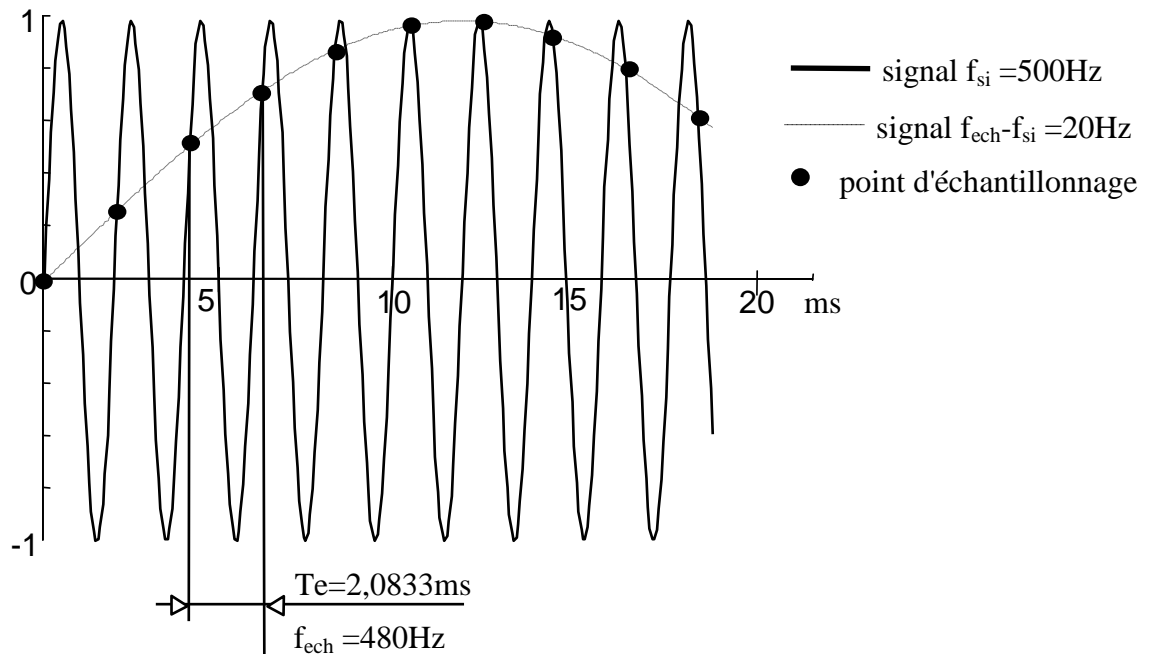


fig 2-13: illustration de l'échantillonnage d'un signal sinusoïdal de 500Hz à une fréquence proche de 500Hz

La figure 14 explique ce phénomène en donnant le spectre d'amplitude du signal ainsi échantillonné.

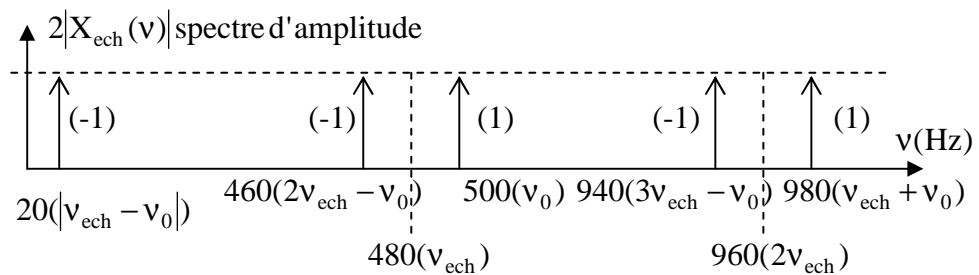


fig 2-14: alias d'un signal sinusoïdal de 500Hz échantillonné à 480Hz

La fréquence de l'alias (-1) autour de la fréquence d'échantillonnage 480Hz, a pour valeur: $480 - 500 = -20\text{Hz}$. Sur le spectre d'amplitude, où ne sont représentées que les fréquences positives, on voit apparaître une raie pour la fréquence de 20Hz.

Ce phénomène peut se produire très facilement, sans que l'opérateur sans rende compte, quand on travail avec un oscilloscope numérique.

3.2 Explication en utilisant la convolution

On vient de voir que le signal échantillonné idéalisé s'écrit :

$$x_{\text{ech}}(t) = x(t) \cdot \text{Te} \cdot \text{rect}_{\text{Te}}(t)$$

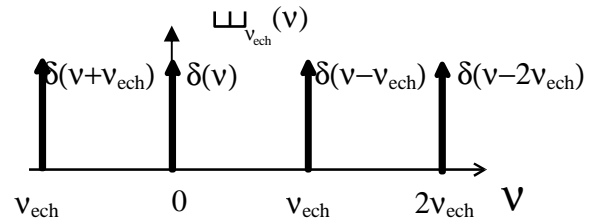
En prenant la transformée de Fourier de ce signal on obtient :

$$X_{\text{ech}}(v) = \text{Te} \cdot X(v) * \text{TF}[\text{rect}_{\text{Te}}(t)]$$

où * désigne le produit de convolution.

En remplaçant $\text{TF}[\text{rect}_{\text{Te}}(t)]$ par sa valeur

$$\text{TF}[\text{II}_{T_e}(t)] = \frac{1}{T_e} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(v - \frac{k}{T_e}) = \frac{1}{T_e} \text{II}_{1/T_e}(v)$$



On a : $X_{\text{ech}}(v) = T_e X(v) * \left(\frac{1}{T_e} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(v - \frac{k}{T_e}) \right)$

$$X_{\text{ech}}(v) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(v) * \delta(v - \frac{k}{T_e})$$

et d'après la propriété de la convolution par un Dirac : $x(t) * \delta(t - t_0) = x(t - t_0)$

$$X_{\text{ech}}(v) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(v - \frac{k}{T_e}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(v - k v_{\text{ech}})$$

La fonction $X(v - k v_{\text{ech}})$ correspond à la fonction $X(v)$ à laquelle on applique un changement d'origine en fréquence et se retrouve maintenant centré autour de la fréquence $k v_{\text{ech}}$. En utilisant la convention symbolique précédente pour un signal à support borné en fréquence on obtient les figure 15 et 16.

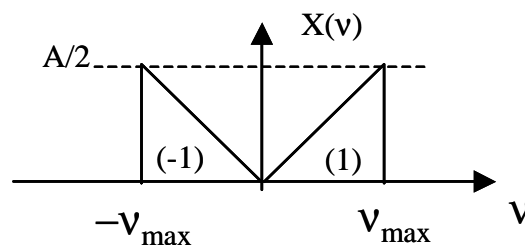


fig 2-15: Transformée de Fourier d'un signal $x(t)$ à spectre borné

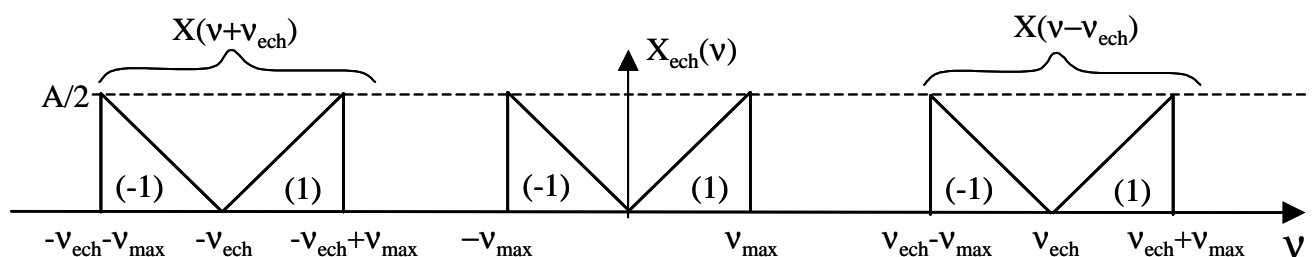


fig 2-16: Transformée de Fourier d'un signal $x(t)$ à spectre borné échantillonné

Le spectre d'amplitude de $x_{\text{ech}}(t)$ correspond bien à celui de la figure 3-10

3.3 Échantillonnage sans modification du spectre du signal analogique- théorème de Shannon

Lors de l'échantillonnage, on ne veut **surtout pas modifier le spectre du $x(t)$** . Comme on peut le voir sur le spectre du signal échantillonné figure 10, si l'on désire retrouver le spectre du signal $x(t)$ à partir du spectre du signal échantillonné $x(kT_e)$, il suffit d'enlever tous les alias centrés autour des fréquences multiples de v_{ech} . Cela peut être réalisé par un filtre passe bas qui ne conserve que les fréquences comprises entre 0 et v_{max} .

Mais cette transformation ne restitue le spectre de $x(t)$ que **si sa forme n'a pas été dégradée** lors de l'échantillonnage et la création des motifs centrés en $n v_{\text{ech}}$. Comme le spectre du signal échantillonné est la somme des différents motifs, **il ne faut pas que ces motifs se chevauchent** et entre autres que le premier motif centré sur v_{ech} ne se superpose pas avec le spectre de $x(t)$.

Ces deux spectres sont séparés par : $v_{ech} - 2v_{max}$

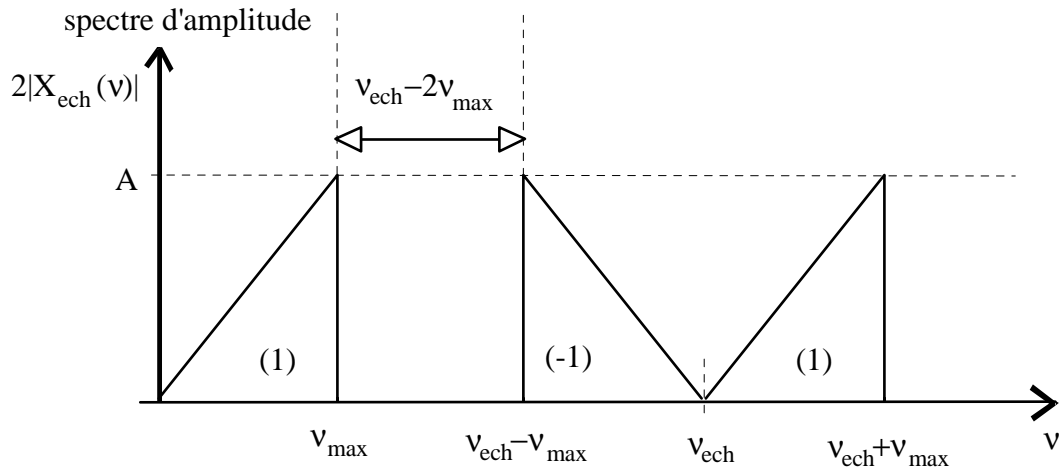


fig 2-17: séparation du motif de base du signal non échantillonné et du premier alias

Cette valeur doit être positive : $v_{ech} - 2v_{max} \geq 0$

ou encore

$$\frac{1}{T_e} = v_{ech} \geq 2v_{max}$$

La fréquence d'échantillonnage doit être supérieure à deux fois la plus grande des fréquences présentes dans le signal.

Cette condition s'appelle le **théorème de Shannon**.

On appelle parfois fréquence de Nyquist la valeur $v_{ech}/2$. Le théorème de Shannon s'énonce alors : la fréquence maximale contenue dans le signal à échantillonner doit être inférieure à la fréquence de Nyquist.

4 Echantillonnage des signaux réels bruités : filtre antirepliement

Pour être sûr de ne pas créer de recouvrement de spectre intempestif lors de l'échantillonnage, on préfère éliminer **avant échantillonnage, donc de manière analogique**, toutes les fréquences qui donneraient lieu à ces recouvrements, donc les fréquences supérieures à la moitié de la fréquence d'échantillonnage c'est à dire la fréquence de Nyquist.

Le schéma de la chaîne d'acquisition d'un signal numérique se compose donc **toujours** de :

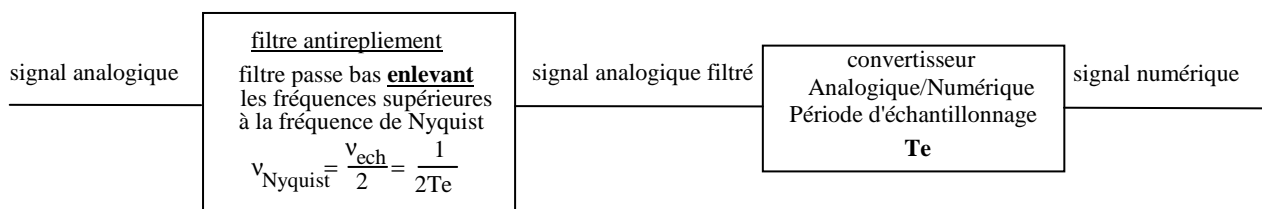


fig 2-18: schéma théorique d'une chaîne d'acquisition numérique ne présentant aucun repliement spectral (T_e donné)

La forme du filtre antirepliement idéal est un filtre passe bas ne modifiant pas les fréquences inférieures à $v_{Nyquist}$ et coupant parfaitement les fréquences supérieures à $v_{Nyquist}$. Ce filtre n'existe malheureusement pas en pratique.

On choisit le filtre par son gabarit, comme cela se fait en électronique. On sélectionne la bande passante utile du signal $[0 ; v_{util}]$, et la bande coupée $[v_{Nyquist} ; +\infty]$. Cela donne comme tracé du gabarit du filtre antirepliement :

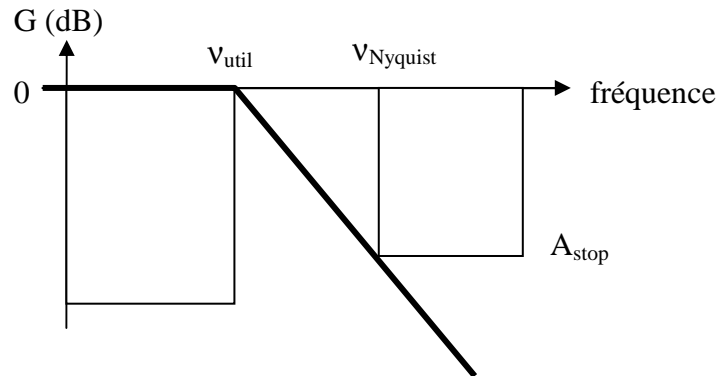


fig 2-19: gabarit du filtre antirepliement

On choisit un filtre passe bas présentant **peu de déphasage dans la bande passante** (un filtre de Bessel par exemple ou encore de Butterworth) **d'ordre assez élevé afin de réduire la bande de transition.**

Dans le cas d'un filtre de Butterworth et pour un signal échantillonné de spectre constant, on peut montrer que si on veut que la puissance du signal donnant lieu à un recouvrement soit 1% celle du signal filtré, il faut échantillonner à une fréquence de **6 fois** la fréquence de coupure du filtre pour un filtre d'ordre **deux**, et à une fréquence de **3 fois** la fréquence de coupure du filtre pour un filtre d'ordre **quatre** (au lieu de deux fois comme le dit la théorie dans le cas d'un filtre idéale). D'où le schéma suivant :

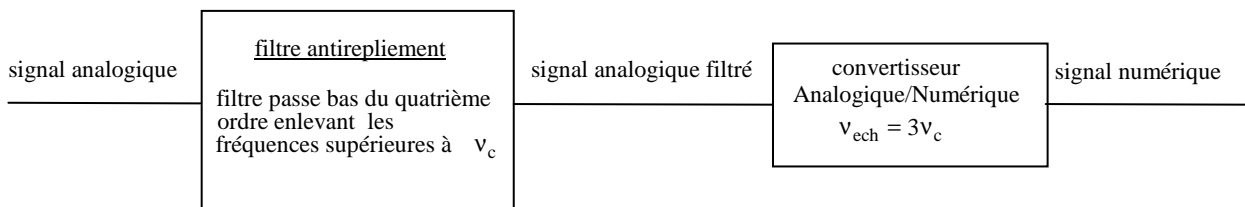


fig 2-20: mise en oeuvre d'un filtre anti-repliement dans une chaîne d'acquisition numérique de manière à assurer qu'il n'y a aucun repliement spectral

Remarque : en anglais filtre antirepliement se dit *antialiasing filter*

5 Choix pratique de la fréquence d'échantillonnage

5.1 Sur échantillonnage pour conversion Numérique/Analogique

Le fonctionnement du convertisseur Numérique/Analogique réel est assez éloigné de ce que réaliserait un filtre passe-bas ne conservant que le premier motif du spectre échantillonné. On se contente souvent d'un bloqueur ou d'une interpolation linéaire entre deux échantillons successifs. Si l'on désire après numérisation et traitements reconstruire le signal analogique, la condition de Shannon doit être majorée. La qualité de la reconstruction peut être considérée comme correcte (erreur maximum inférieure à 5 %) si $v_{ech} > 10 v_{max}$.

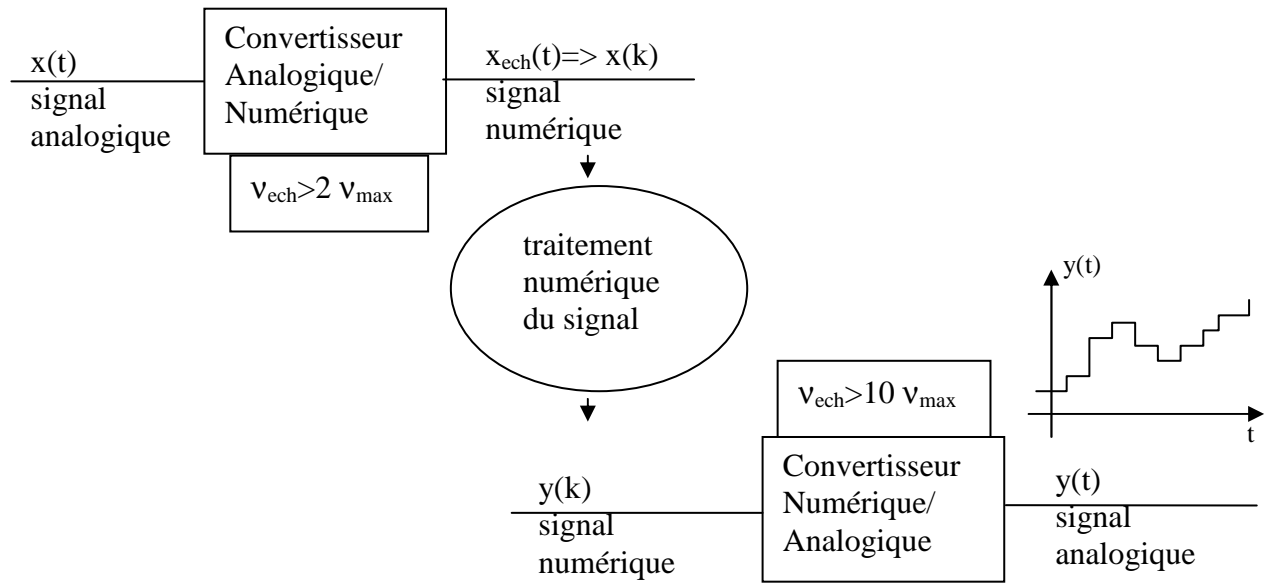


fig 2-21: Choix de la fréquence d'échantillonnage pour un traitement numérique du signal

La condition pour avoir une bonne qualité de la reconstruction analogique du signal est beaucoup plus contraignante que celle du théorème de Shannon pour la numérisation du signal. En pratique on réalise un sur échantillonnage du signal numérique $y(k)$ juste avant de l'envoyer au CNA. Par exemple, pour un sur échantillonnage par 8, on calcul 7 valeurs intermédiaires entre deux échantillons de $y(k)$. On obtient le signal $y_{\text{sur-ech}}(k)$ qui est ensuite converti en analogique par un convertisseur N/A fonctionnant à une fréquence égale à $8 v_{\text{ech}}$ selon la figure 22. On conserve ainsi une fréquence d'échantillonnage devant vérifier seulement la condition de Shannon, ce qui entraîne des contraintes moins importantes pour le traitement du signal numérique : plus de temps pour faire le traitement en temps réels, volume de données plus faibles.

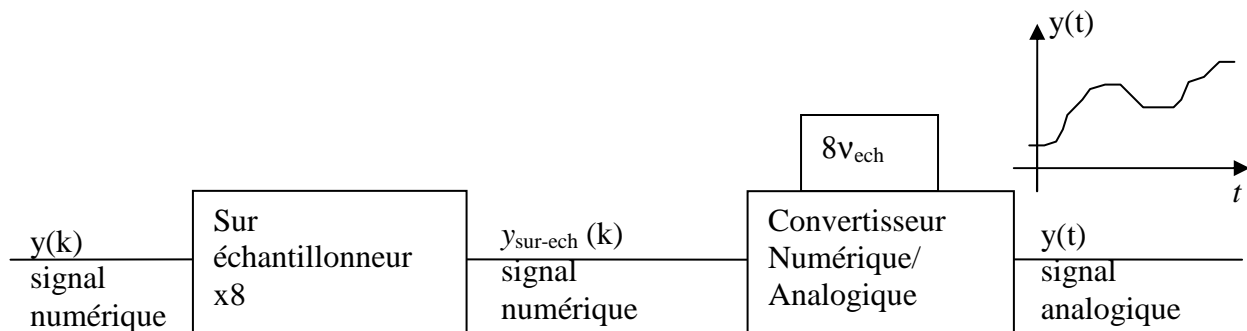


fig 2-22: Sur échantillonnage du signal numérique pour la conversion numérique/analogique

5.2 La fréquence maximale du signal est connue

On applique le théorème de Shannon avec plus ou moins de marge comme indiqué ci-dessus. Sans oublier de mettre un filtre antirepliement avant échantillonnage.

5.3 La fréquence maximale du signal est inconnue

Dans un premier temps, on essaye d'estimer v_{max} . Pour cela on échantillonne le plus vite possible et on calcule numériquement la forme spectrale du signal par FFT (voir chapitre suivant). On mesure v_{max} sur ce spectre en prenant les précautions indiquées dans le prochain chapitre. On ajuste ensuite la fréquence d'échantillonnage suivant la valeur mesurée (paragraphe précédent).

5.4 Application à l'automatique

On désire asservir un système dont la fonction de transfert en boucle ouverte est de la forme :

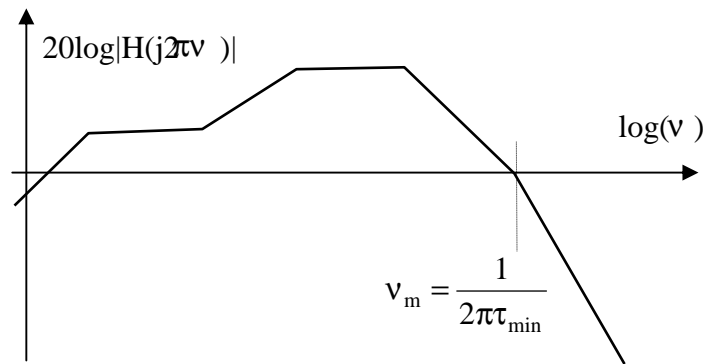


fig 2-23: gain en dB de la fonction de transfert en boucle ouverte

avec : * τ_{\min} la plus petite constante de temps du système

* $v_m = 1/2\pi\tau_{\min}$ la plus grande fréquence de coupure du système

Il est de plus en plus fréquent de réaliser un asservissement à l'aide d'un ordinateur numérique.

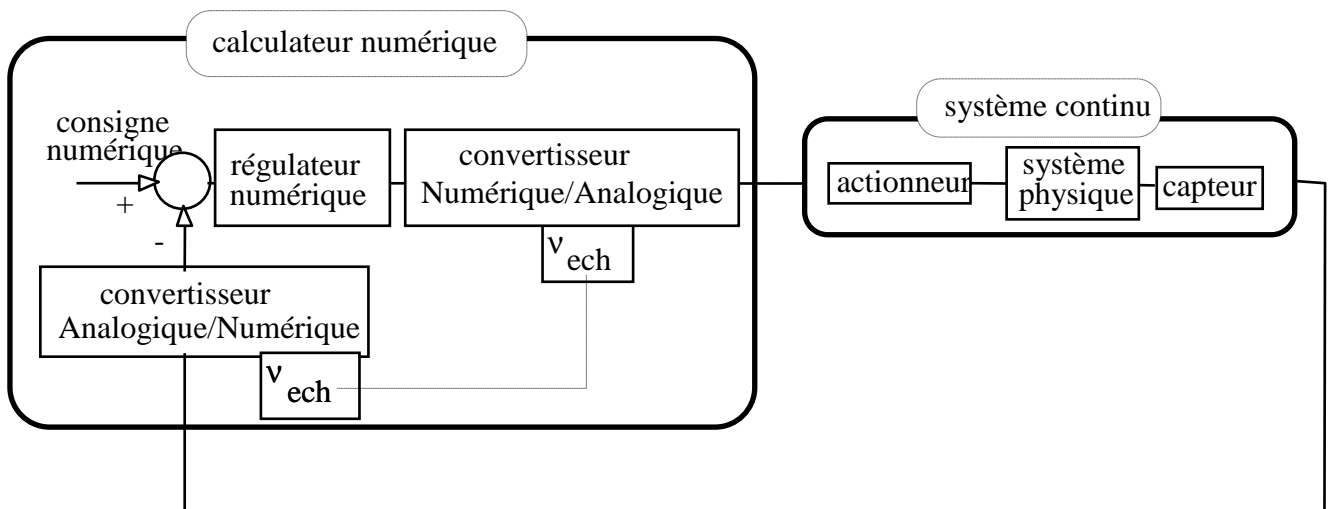


fig 2-24: diagramme de l'asservissement numérique d'un système continu

Il se pose alors le choix de la période d'échantillonnage T_e ($v_{\text{ech}} = 1/T_e$) permettant de réaliser correctement cet asservissement numérique. L'électronicien et l'automaticien habitué au système continu ont souvent la volonté d'échantillonner le plus rapidement possible, afin de se rapprocher du continu. On va étudier quelle valeur minimale on peut prendre pour la fréquence d'échantillonnage v_{ech} tout en conservant un fonctionnement correct de l'asservissement.

Pour asservir un système, il faut conserver l'information du module et **surtout celle de phase**, qui est cruciale pour la stabilité du système, pour toute la plage où peuvent se produire des conditions d'oscillation, c'est à dire toute la plage où la variation de phase est importante. On sait que le diagramme de phase d'un système est assez loin du diagramme asymptotique et que la phase varie de manière non négligeable jusqu'à une valeur égale à 10 fois la plus haute fréquence de coupure. On applique donc le théorème de Shannon en prenant pour v_{max} , ma plus grande fréquence utile dans le signal, la valeur $10v_m$. Ce qui donne : $v_{\text{ech}} > 2 (10 v_m)$. Soit :

$$\begin{aligned}
 & \boxed{v_{\text{ech}} > 20 v_m} \\
 & \left(v_{\text{ech}} = \frac{1}{T_e} \right) > \left(20 v_{\text{max}} = \frac{20}{2\pi\tau_{\text{min}}} \right) \\
 & T_e < \frac{2\pi\tau_{\text{min}}}{20} \Rightarrow \boxed{T_e < 0,31 \tau_{\text{min}}}
 \end{aligned}$$

La transformée en Z

1 Introduction : le traitement numérique du signal (digital signal processing, DSP)

Quelle que soit la grandeur physique (intensité de lumière, pression sonore, ...), elle peut être traduite par l'intermédiaire d'un capteur en une information électrique. Comme il est de plus en plus usuel d'introduire un ordinateur numérique pour l'acquisition et le traitement des signaux, cette grandeur électrique **analogique** est ensuite convertie en une grandeur **numérique**. On a vu au cours du chapitre sur l'échantillonnage des signaux continus les précautions qu'il faut prendre pour que ce passage sous forme numérique se fasse sans perte d'information. On va voir à présent les méthodes mathématiques permettant de mettre en oeuvre sur les signaux numériques tous les traitements que l'on connaît déjà pour les signaux continus, comme par exemple les filtres, mais aussi une introduction à de nouvelles techniques.

Le traitement du signal

Les signaux doivent être traités pour en extraire de l'information. Ces traitements peuvent être mis en oeuvre soit de manière analogique au moyen de l'électronique analogique, soit de manière numérique en utilisant un ordinateur. Il existe donc deux grandes familles de systèmes de traitement du signal : les systèmes analogiques et les systèmes numériques.

La théorie des systèmes analogiques fait appel pour la description mathématique des signaux aux fonctions et aux opérateurs classiques de dérivée, intégrale sur ces fonctions. Ces systèmes se prêtent très bien à tous les développements théoriques, même si la mise en oeuvre pratique des résultats n'est pas toujours facile.

Les systèmes numériques manipulent des suites de nombres, ce qui est plus difficile à formaliser que des fonctions. On cherche généralement à transposer dans le cas des signaux numériques, des méthodes connues dans le cas analogique.

Le numérique permet une très grande souplesse de mise en oeuvre de ces méthodes car leur modification se fait en changeant seulement quelques lignes de programme dans le logiciel effectuant le traitement numérique du signal. Ces méthodes, très connues par leur désignation anglaise DSP (Digital Signal Processing) sont et seront de plus en plus utilisées grâce aux cartes spécifiques utilisant des processeurs DSP (Digital Signal Processor) qui connaissent un développement important.

Un filtre numérique se présente comme une équation qui à chaque instant d'échantillonnage k permet de calculer la sortie $y(k)$ en fonction des entrées et sorties précédentes $x(k)$, $x(k-1)$, ..., $y(k-1)$, $y(k-2)$,

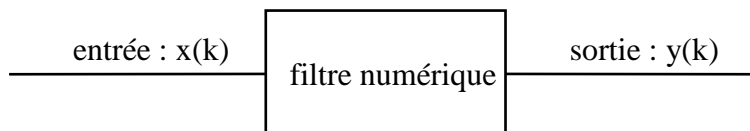


fig 4-1: filtre numérique

Cette équation linéaire s'appelle équation récurrente:

$$y(k) = a_1 y(k-1) + a_2 y(k-2) + \dots + b_0 x(k) + b_1 x(k-1) + \dots$$

avec $a_1, a_2, \dots, b_0, b_1, \dots$ coefficients de l'équation

Pour l'étude et la synthèse des filtres numériques, on utilise la **transformée en Z** qui correspond, pour les systèmes **échantillonnés**, à la transformée de Laplace pour les systèmes continus.

1.1 RAPPEL : Notations signaux continus - signaux discrets

On suppose par la suite, qu'on se place dans le cas monovarié et que cette variable est notée t , car les signaux dépendent généralement du temps. Un signal analogique est représenté par une fonction $x(t)$, forme temporelle du signal.

Un signal discret ou échantillonné est représenté par la suite des valeurs de la fonction $x(t)$ aux instants d'échantillonnage. Ces instants sont périodiques et se répètent avec un intervalle de temps T_e appelé **période d'échantillonnage**. On note cette suite de nombres $x(kT_e)$ ou encore $x(k)$

$x(t)$ est défini pour toutes les valeurs de t

$x(k)$ n'est défini que pour des valeurs **entières** de k et a pour valeur $x(kT_e)$ pour $t = kT_e$

Ambiguïté : la notation $x(k)$ est utilisé aussi bien pour désigné la **suite** des valeurs; mais aussi pour désigner **la** valeur de l'échantillon k .

Rigoureusement, la suite des valeurs $x(k)$ correspond en temps continu à la fonction $x(t)$, alors que la valeur $x(k_0)$ de l'échantillon k_0 , correspond à la valeur particulière $x(t_0)$

Exemple : soit la suite de nombres définie par $x(k) = a^k$. Elle correspond à l'échantillonnage de la fonction continue $x(t) = a^{\frac{t}{T_e}}$. On vérifie pour les valeurs échantillonnées $x(kT_e)$:

$$x(k\Delta T) = a^{\frac{kT_e}{T_e}} = a^k = x(k)$$

2 Définition de la transformée en Z

2.1 Relation entre transformée en z et transformée de Laplace

Comme on l'a vu au chapitre sur l'échantillonnage des signaux, l'échantillonnage correspond mathématiquement au produit du signal analogique causal $x(t)$ par un peigne de Dirac $\sqcup(t)$ de période T_e .

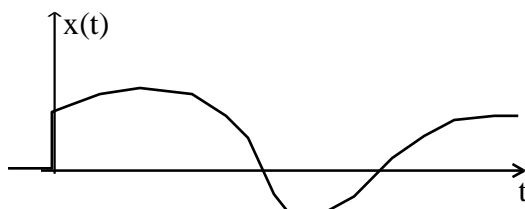


fig 4-2: fonction $x(t)$ causal en temps continu

$x(t)$ fonction causale

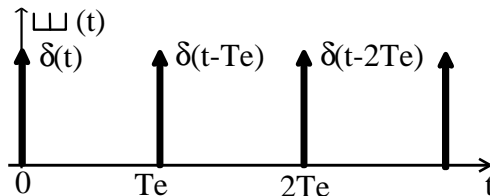
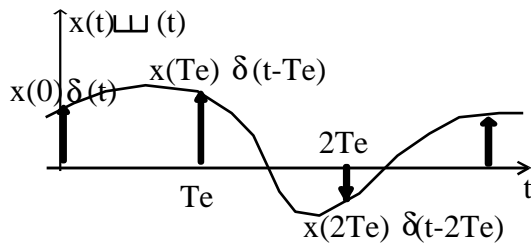


fig 4-3: peigne de Dirac causal (temps continu)

$$\sqcup_{T_e}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_e)$$



$$x_{ech}(t) = x(t) \sqcup_{Te}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kTe) \delta(t - kTe)$$

fig 4-4: fonction $x(t)$ échantillonnée par un peigne de Dirac

En prenant la transformée de Laplace de la fonction échantillonnée on obtient :

$$TL[x_{ech}(t)] = TL\left[\sum_{k=0}^{\infty} x(kTe) \delta(t - kTe)\right] = \sum_{k=0}^{\infty} x(kTe) TL[\delta(t - kTe)]$$

$$\text{or } TL[\delta(t - kTe)] = e^{-kpTe} TL[\delta(t)] = e^{-kpTe}$$

$$TL[x_{ech}(t)] = \sum_{k=0}^{\infty} x(kTe) e^{-kpTe} = \sum_{k=0}^{\infty} x(kTe) (e^{-pTe})^k$$

Soit le changement de variable : $z = e^{pTe}$

$$\text{on a : } TL[x_{ech}(t)] = \sum_{k=0}^{\infty} x(kTe) (z^{-1})^k = \sum_{k=0}^{\infty} x(kTe) z^{-k} = TZ[x_{ech}(t)] = TZ[x(t)]$$

On voit que la transformée en Z est en fait la **transformée de Laplace appliquée aux fonctions échantillonnées**. On peut donc écrire en résumé :

$$z^{-1} = e^{-pTe} \quad \text{correspond à un retard de un échantillon}$$

$$z = e^{pTe} \quad \text{correspond à une avance de un échantillon}$$

La relation $z = e^{pTe}$ est très importante:

- on voit que la variable p étant complexe, la variable z est, elle aussi, complexe
- en donnant à p la valeur particulière $p = j2\pi\nu$, on obtient $z = e^{j2\pi\nu Te}$. On pourra interpréter de manière harmonique les résultats de la transformée en Z.

2.2 Existence

La transformée en Z est définie comme une série et n'existe que si cette série converge. Comme pour la transformée de Laplace, on ne se préoccupera pas de cette convergence en la supposant réalisée lorsqu'on utilise la TZ. Par la suite, on ne considérera cette convergence que dans deux cas particuliers et simples.

2.3 Transformée en Z inverse

Si $X(z)$ est la transformée en Z de $x(t)$ ou $x(k)$, alors $x(t)$ ou $x(k)$ est la transformée en Z inverse de $X(z)$.

$$x(k) = TZ^{-1}[X(z)] \quad \text{original sous forme de suite de nombres}$$

$$x(t) = TZ^{-1}[X(z)] \quad \text{original sous forme de fonction continue du temps}$$

avec $x(k) = x(k Te)$

Pour trouver l'original de $X(z)$ on utilise les propriétés de la transformée en Z et une table de transformée.

3 Exemples de transformée en Z

3.1 Impulsion de Kroneker

On appelle impulsion de Kroneker $\delta(k)$ la suite de nombre défini par :

$$\delta(k) = 0 \text{ pour } k \neq 0$$

$$\delta(k) = 1 \text{ pour } k = 0$$

$\delta(k)$ correspond à l'échantillonnage de l'impulsion de Dirac $\delta(t)$

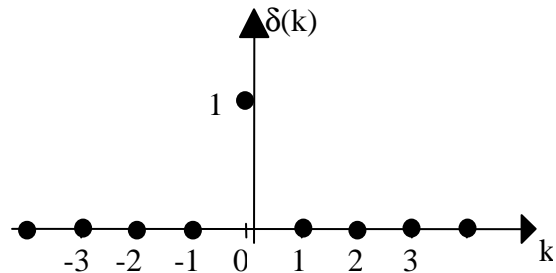


fig 4-5: impulsion de Dirac en temps discret

$$TZ[\delta(t)] = TZ[\delta(k)] = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(k) z^{-k} = \delta(0) z^{-0} = 1 \quad \boxed{TZ[\delta(t)] = 1}$$

3.2 Echelon unité

Soit $\mathbb{1}(k)$ l'échelon unité défini par :

$$\mathbb{1}(k) = 0 \text{ pour } k < 0$$

$$\mathbb{1}(k) = 1 \text{ pour } k \geq 0$$

$\mathbb{1}(k)$ correspond à l'échantillonnage de l'échelon unité ou de Heaviside $\mathbb{1}(t)$

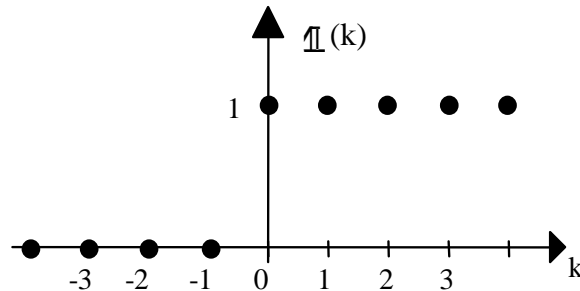


fig 4-6: échelon unité en temps discret

$$TZ[\mathbb{1}(t)] = TZ[\mathbb{1}(k)] = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{1}(k) z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} = 1 + z^{-1} + z^{-2} + \dots$$

On a une série géométrique de raison z^{-1} . La transformée en z de l'échelon n'existe que si cette série converge, c'est à dire si la raison est inférieure à 1, donc : $(|z^{-1}| < 1) \Rightarrow (|z| > 1)$

On voit, pour ce cas très simple que la transformée en Z de l'échelon n'est définie que pour les valeurs de z dans le plan complexe comprise strictement à l'extérieur d'un disque de rayon unité.

Comme pour la transformée de Laplace, l'existence de la transformée n'est d'aucune utilité pour les applications de la TZ.

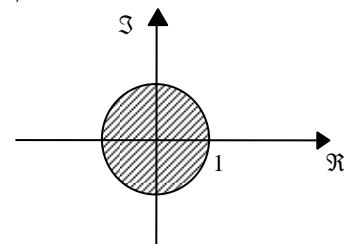


fig 4-7: zones du plan complexe où est définie la TZ de l'échelon unité

On a alors :

$$TZ[\mathbb{1}(t)] = \frac{1}{1 - \text{raison}} = \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z - 1}$$

$$\boxed{TZ[\mathbb{1}(t)] = \frac{z}{z - 1}}$$

3.3 Signal exponentiel

Soit le signal numérique $v(k)$ défini par :

$$v(k) = 0 \text{ pour } k < 0$$

$$v(k) = a^k \text{ pour } k \geq 0$$

$v(k)$ correspond à l'échantillonnage de

$$v(t) = a^{\frac{t}{T_e}} \quad \text{car } v(k) = v(kT_e) = a^{\frac{kT_e}{T_e}} = a^k$$

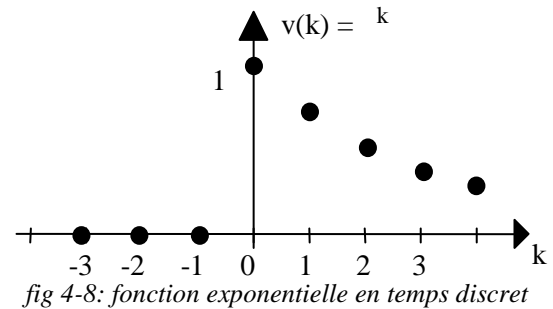


fig 4-8: fonction exponentielle en temps discret

$$TZ[v(t)] = TZ[v(k)] = \sum_{k=0}^{\infty} v(k) z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} a^k z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} (a z^{-1})^k = 1 + a z^{-1} + (a z^{-1})^2 + \dots$$

On a une série géométrique de raison $(a z^{-1})$. La transformée en z de l'échelon n'existe que si cette série converge, c'est à dire si la raison est inférieure à 1, donc : $|a z^{-1}| < 1 \Rightarrow (|z| > |a|)$

On voit encore que la transformée en Z du signal exponentiel n'est définie que pour les valeurs de z dans le plan complexe comprise strictement à l'extérieur d'un disque de rayon a .

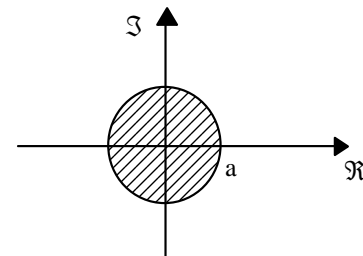


fig 4-9: zones du plan complexe où est définie la TZ de $v(k) = a^k$

On a alors :

$$TZ\left[a^{\frac{t}{T_e}}\right] = TZ[a^k] = \frac{1}{1 - \text{raison}} = \frac{1}{1 - a z^{-1}} = \frac{z}{z - a}$$

$$TZ\left[a^{\frac{t}{T_e}}(t)\right] = \frac{z}{z - a}$$

Exemple : $TZ\left[e^{\frac{t}{\tau}}\right] = TZ\left[e^{-\frac{kT_e}{\tau}}\right] = TZ\left[\left(e^{-\frac{T_e}{\tau}}\right)^k\right] = \frac{z}{z - e^{-\frac{T_e}{\tau}}}$

Même si on ne l'indique pas, on suppose que le signal dont on prend la TZ est causal.

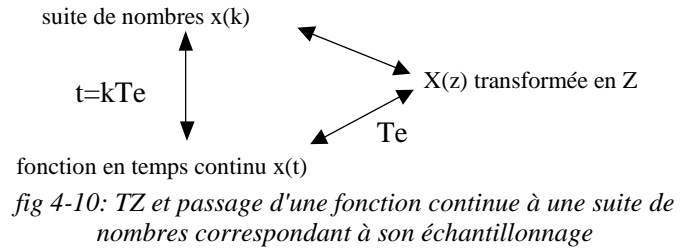
Remarque : on a vu que la transformée inverse de $X(z) = \frac{z}{z - a}$ peut s'écrire sous deux formes:

- sous forme d'une suite de nombres $x(k) = a^k$
- sous forme d'une fonction continue échantillonnée $v(t) = a^{\frac{t}{T_e}}$

La période d'échantillonnage T_e apparaît toujours si on considère l'original sous forme de fonction en temps continu échantillonnée.

Si on considère une suite de nombres $x(k)$, on n'a aucune indication sur l'échantillonnage qui a permis de les obtenir (est-ce une tension acquise toutes les ms, une température mesurée toutes les heures, une population mesurée tous les 10 ans?). La transformée en Z est la même. Par contre la fonction continue dont l'échantillonnage donne ces valeurs n'a bien sûr pas la même échelle des temps.

C'est pourquoi la période d'échantillonnage T_e apparaît toujours dans la fonction en temps continu. Cela peut se résumer par le schéma suivant:



4 Propriétés de la transformée en Z

4.1 Linéarité

$$TZ[\lambda x(t) + \mu y(t)] = \lambda TZ[x(t)] + \mu TZ[y(t)]; (\forall x(t), y(t) \text{ causales}; \forall \lambda, \mu \in \mathbb{C})$$

4.2 Autres propriétés

4.2.1 Produit par l'exponentiel

$$TZ[e^{-at} x(t)] = X\left(\frac{z}{e^{aT_e}}\right) \quad \text{avec } X(z) = TZ[x(t)]$$

4.2.2 Produit par t

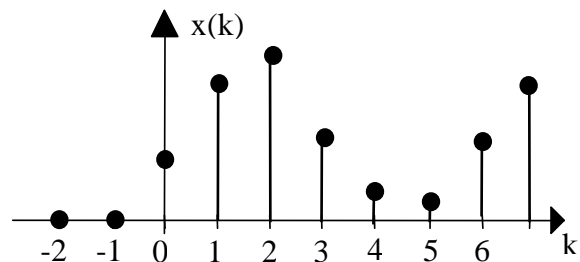
$$TZ[t x(t)] = -z T_e \frac{dX(z)}{dz}$$

Utilisation :

$$TZ[t \mathbb{1}(t)] = -z T_e \frac{d(TZ[\mathbb{1}(t)])}{dz} = -z T_e \frac{d\left(\frac{z}{z-1}\right)}{dz} = -z T_e \frac{(z-1) - z}{(z-1)^2} = \frac{z T_e}{(z-1)^2}$$

4.3 Transformée en Z d'un signal retardé

Soit $TZ[x(t)] = TZ[x(k)] = X(z)$



Considérons $y(t)$ (ou $y(k)$) le signal $x(t)$ (ou $x(k)$) retardé de une période d'échantillonnage (ou un échantillon) :

$$y(t) = x(t - T_e) \quad (\forall t)$$

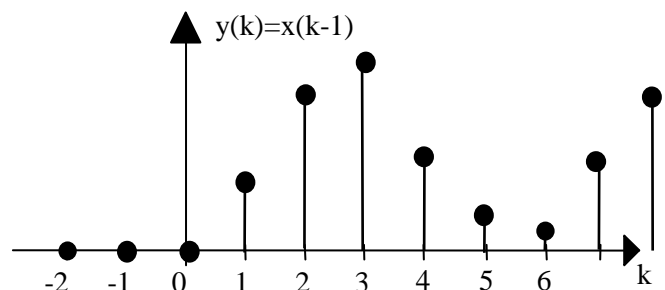
$$y(k) = x(k - 1) \quad (\forall k)$$


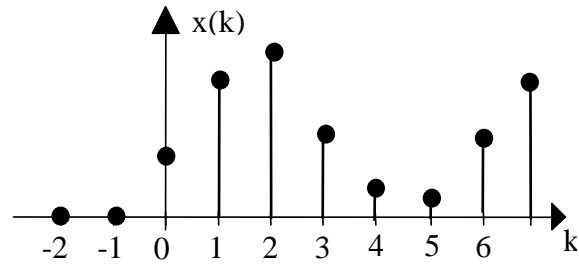
fig 4-11: retard de 1 échantillon d'une suite de nombre causale

$$TZ[x(t - T_e) \mathbb{1}(t - T_e)] = TZ[x(k - 1)] = z^{-1} X(z)$$

$$TZ[\text{signal retardé de un échantillon}] = z^{-1} TZ[\text{signal non retardé}]$$

4.4 Transformée en Z d'un signal avancé

Soit $TZ[x(t)] = TZ[x(k)] = X(z)$



Considérons $y(t)$ (ou $y(k)$) le signal $x(t)$ (ou $x(k)$) avancé de une période d'échantillonnage (ou un échantillon) :
 $y(t) = x(t + T_e) (\forall t)$
 $y(k) = x(k + 1) (\forall k)$

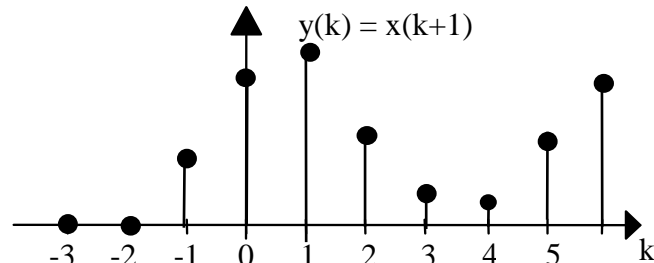


fig 4-12: avance de 1 échantillon d'une suite de nombre causale

mais $y(k)$ ainsi défini n'est pas une fonction causale car : $y(-1) = x(0) \neq 0$

pour retrouver un signal causal $y(t)\mathbb{1}(t)$ (ou $y(k)\mathbb{1}(k)$) il convient d'enlever ce terme :

$$\boxed{TZ[x(t + T_e)u(t)] = TZ[x(k + 1)] = zX(z) - zx(0)}$$

$TZ[\text{signal causal avancé de un échantillon}] = z \cdot TZ[\text{signal non retardé}] - z \text{ condition initiale}$

Remarque : dans le cas d'un signal non causal et de la transformée en z bilatérale, on a pas à prendre de condition initiale et on a : $TZ[x(k + 1)] = zX(z)$

4.5 Théorème de la valeur finale

Si elle existe, c'est à dire si elle a une valeur **différente de l'infini**, alors:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x(k) = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1})X(z)$$

Dans le cas contraire, si $\lim_{k \rightarrow \infty} x(k) = \infty$; $\lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1})X(z)$ peut quand même avoir une valeur finie.

4.6 Théorème de la valeur initiale

$$x(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z)$$

$$\text{car } X(z) = x(0) + x(1)z^{-1} + \dots + x(k)z^{-k} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} x(k)z^{-k}$$

quand $(z \rightarrow \infty)$ on a $(z^{-k} \rightarrow 0)$ pour $k \geq 1$

5 Calcul de l'inverse de la transformée en Z

5.1 Décomposition en éléments simples

On cherche ici la forme *analytique* de $x(t)$, c'est à dire l'originale de $X(z)$.

Sur la table de TZ on peut remarquer qu'on peut mettre z en facteur du numérateur de toutes les transformées car elles sont de la forme $z[\text{fraction rationnelle}]$.

Afin de décomposer $X(z)$ en une somme de termes dont l'original est dans la table, on décompose en éléments simples non pas $X(z)$ mais $\frac{X(z)}{z}$. Ainsi:

$$\frac{X(z)}{z} = \text{élément} + \text{élément} \dots$$

$$X(z) = \underbrace{z (\text{élément})}_{\text{original dans la table}} + \underbrace{z (\text{élément})}_{\text{original dans la table}} \dots$$

5.2 Calcul des valeurs de l'original par division euclidienne

D'après la définition : $X(z) = x(0) + x(1)z^{-1} + \dots + x(k)z^{-k} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} x(k)z^{-k}$

Or $X(z)$ est une fraction rationnelle et donc le rapport de deux polynômes en z , $N(z)$ et $D(z)$:

$$X(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \text{rapport de deux polynômes en } z$$

En effectuant la division de $N(z)$ par $D(z)$ suivant les puissances décroissantes en z , ou croissantes en z^{-1} , on obtient la forme développée de $X(z)$ ou apparaît directement les valeurs $x(k)$.

Conclusion : cette méthode est longue et lourde à mettre en oeuvre. Son utilisation est à éviter. Pour le calcul des valeurs de l'original $x(k)$, on lui préfère la méthode présentée au chapitre suivant, utilisant l'équation récurrente.

Utilisation de la transformée en Z

1 Système et fonction de transfert échantillonnée

En traitement du signal, on distingue les systèmes en temps continu (analogique) des systèmes échantillonnés ou en temps discret (numérique).

- ❑ **En temps continu (signal analogique):** un système linéaire d'entrée $x(t)$ et de sortie $y(t)$ est caractérisé par une équation différentielle linéaire à coefficients constants

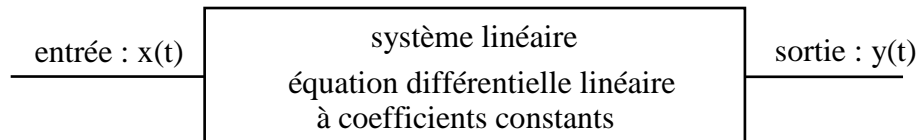


fig 5-1: système linéaire en temps continu (forme temporelle)

outil : on utilise la transformée de Laplace (ou de Fourier) pour l'étude des systèmes linéaires continus

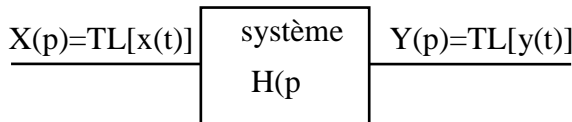


fig 5-2: fonction de transfert $H(p)$ d'un système linéaire exprimée avec la TL

$$H(p) = \left. \frac{Y(p)}{X(p)} \right|_{\text{Conditions initiales}=0}$$

est la fonction de transfert du système

- ❑ **En temps discret (signal numérique):** un système linéaire numérique fait correspondre une entrée qui est une suite de nombres $x(k)$ et une sortie qui est une suite de nombres $y(k)$. Il est caractérisé par une **équation aux différences, ou récurrente**, linéaire à coefficients constants

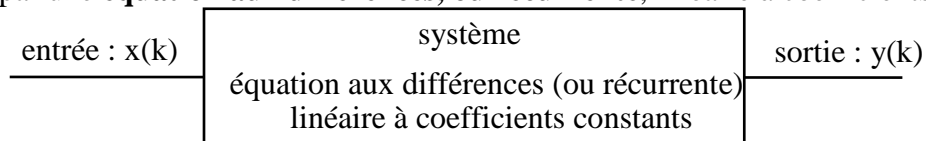


fig 5-3: système numérique linéaire (forme temporelle)

La forme de la relation temporelle entrée-sortie est beaucoup plus simple en numérique qu'en temps continu. Elle prend la forme d'une équation récurrente (ou aux différences) linéaire à coefficients constants (*linear constant coefficient difference (LCCD) equation*):

$$y(k) = a_1 y(k-1) + a_2 y(k-2) + \dots + b_0 x(k) + b_1 x(k-1) + \dots$$

avec $a_1, a_2, \dots, b_0, b_1, \dots$ coefficients de l'équation

outil : on utilise la transformée en Z pour l'étude des systèmes linéaires échantillonnés

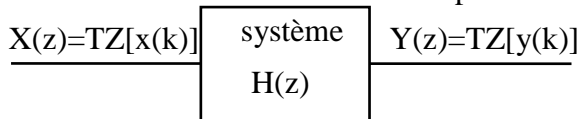


fig 5-4: fonction de transfert $H(z)$ d'un système numérique linéaire exprimée avec la TZ

$$H(z) = \left. \frac{Y(z)}{X(z)} \right|_{\text{Conditions initiales}=0}$$

est la fonction de transfert du système

2 Relation entre la fonction de transfert et l'équation récurrente

La fonction de transfert étant défini comme le rapport de deux transformées en Z, sa forme générale est :

$$H(z) = \frac{c_0 + c_1 z + \dots + c_p z^p}{d_0 + d_1 z + \dots + d_q z^q}$$

On préfère la mettre sous la forme dite **normalisée** en divisant par le terme de plus haut degrés du dénominateur $d_q z^q$:

$$H(z) = \frac{\frac{c_p}{d_q} z^{-(q-p)} + \dots + \frac{c_0}{d_q} z^{-q}}{1 + \dots + \frac{d_0}{d_q} z^{-q}} \quad (1)$$

Qu'on écrit de manière générale sous la forme :

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_m z^{-m}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n}}$$

2.1 Passage entre Fonction de transfert et équation récurrente

Soit un filtre numérique causal de fonction de transfert:

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_m z^{-m}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n}}$$

En pratique, il est très important de savoir facilement **passer de la fonction de transfert à l'équation récurrente** du filtre.

La fonction de transfert est généralement le résultat des méthodes de synthèse de filtre qui seront vu au paragraphe 5. Le calcul de cette fonction de transfert est, en pratique, souvent réalisé à l'aide d'un logiciel. Pour la mise en oeuvre de ce filtre, on utilise l'équation récurrente qui donne à chaque instant d'échantillonnage la nouvelle sortie du filtre en fonction des échantillons de l'entrée et de la sortie précédente. Pour cela on écrit

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_m z^{-m}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n}} = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

$$Y(z)(1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n}) = (b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_m z^{-m})X(z)$$

$$Y(z) + a_1 z^{-1} Y(z) + \dots + a_n z^{-n} Y(z) = b_0 X(z) + b_1 z^{-1} X(z) + \dots + b_m z^{-m} X(z)$$

Si $Y(z)$ correspond à la transformée en Z de la suite $y(k)$, $z^{-1}Y(z)$ correspond à la transformée en Z de cette même suite, mais retardé de 1 échantillon, soit $y(k-1)$. De même $z^{-n}Y(z)$ correspond à la suite $y(k-n)$, $z^{-1}X(z)$ à la suite $x(k-1)$ et $z^{-m}X(z)$ à la suite $x(k-m)$.

On rappelle que la propriété de la transformée d'un signal retardé causal TZ $[f(k+1)] = zF(z) - zf(0)$ devient TZ $[f(k+1)] = zF(z)$ dans le cas qui nous intéresse ici, où les conditions initiales sont nulles.

Ainsi, en prenant l'original de chacun des termes on obtient:

$$y(k) = b_0 x(k) + b_1 x(k-1) + \dots + b_m x(k-m) - a_1 y(k-1) - \dots - a_n y(k-n)$$

Le passage équation récurrente/fonction de transfert a déjà été décrit lors de la résolution d'une équation récurrente. Il peut être repris, mais de manière plus simple, puisque maintenant les conditions initiales sont nulles. La transformée en Z de l'équation récurrente donne:

$$Y(z) = b_0 X(z) + b_1 z^{-1} X(z) + \dots + b_m z^{-m} X(z) - a_1 z^{-1} Y(z) - \dots - a_n z^{-n} Y(z)$$

et ainsi

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_m z^{-m}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n}}$$

3 Utilisation de l'équation récurrente pour calculer les valeurs de l'original de F(z)

Soit un **signal** dont la transformée en z vaut: $F(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_m z^{-m}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n}}$

On veut calculer les valeurs de $f(k)$ ou $f(t)$, l'original de $F(z)$. Pour cela on peut considérer $F(z)$ comme la fonction de transfert d'un système:

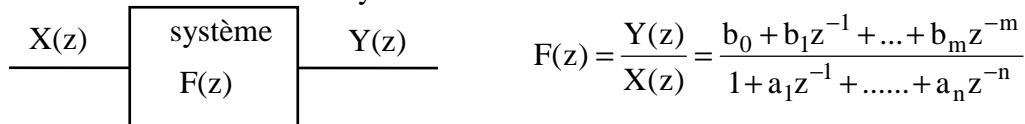


fig 5-5: système numérique de fonction de transfert $F(z)$

En prenant comme entrée un signal impulsionnel de transformée $X(z) = 1$; on a en sortie $Y(z) = F(z)$.

Sous forme temporelle, si dans l'équation récurrente on met en entrée $x(k) = \delta(k)$ alors la sortie $y(k)$ est égale aux valeurs $f(k)$ de l'original de $F(z)$.

Exemple : soit $F(z) = \frac{z}{z^2 - 0,6z + 0,05}$ on écrit que $F(z)$ correspond à une fonction de transfert:

$$F(z) = \frac{z}{z^2 - 0,6z + 0,05} \Rightarrow F(z) = \frac{z^{-1}}{1 - 0,6z^{-1} + 0,05z^{-2}}$$

Pour trouver l'équation récurrente de ce filtre on écrit:

$$\begin{aligned} \frac{Y(z)}{X(z)} &= \frac{z^{-1}}{1 - 0,6z^{-1} + 0,05z^{-2}} \\ Y(z)[1 - 0,6z^{-1} + 0,05z^{-2}] &= z^{-1}X(z) \\ Y(z) - 0,6z^{-1}Y(z) + 0,05z^{-2}Y(z) &= z^{-1}X(z) \end{aligned}$$

En prenant l'original de cette transformée en Z on obtient l'équation récurrente:

$$\begin{aligned} y(k) - 0,6y(k-1) - 0,05y(k-2) &= x(k-1) \\ \text{soit : } y(k) &= 0,6y(k-1) - 0,05y(k-2) + x(k-1) \end{aligned}$$

En prenant $x(k) = \delta(k)$, la sortie $y(k)$ est égale à la réponse impulsionnelle $h(k)$. On peut alors calculer les valeurs des échantillons de l'original de $F(z)$:

$$\begin{aligned} f(k) &= 0,6f(k-1) - 0,05f(k-2) + \delta(k-1) \\ k=0 &\Rightarrow f(0) = 0,6f(-1) - 0,05f(-2) + \delta(-1) = 0 \\ &\quad (\text{en utilisant l'hypothèse que } f(k) \text{ est causale}) \\ k=1 &\Rightarrow f(1) = 0,6f(0) - 0,05f(-1) + \delta(0) = 1 \\ k=2 &\Rightarrow f(2) = 0,6f(1) - 0,05f(0) + \delta(1) = 0,6 \\ k=3 &\Rightarrow f(3) = 0,6f(2) - 0,05f(1) + \delta(2) = 0,6 \times 0,6 - 0,05 = 0,31 \end{aligned}$$

Cette méthode, très simple à programmer, est la bonne méthode pour trouver les valeurs $f(k)$ de l'original d'une transformée.

4 Stabilité d'un système échantillonné

4.1 Stabilité des systèmes échantillonnés à partir de celle des systèmes en temps continu

On a vu dans le chapitre sur la transformée de Laplace, qu'une fonction de transfert $H(p)$ correspond à un système stable **si tous les pôles de $H(p)$ sont à partie réelle strictement négative**.

Soit p_1 un pôle de $H(p)$. En utilisant le changement de variable $z = e^{pT_e}$ il correspond à un pôle $z_1 = e^{p_1 T_e}$ du système échantillonné de fonction de transfert $H(z)$:

$$\text{soit } z_1 = e^{p_1 T_e} = e^{(\Re(p_1) + j\Im(p_1))T_e}$$

$$z_1 = \underbrace{e^{\Re(p_1)Te}}_{\text{module}} \underbrace{e^{j\Im(p_1)Te}}_{\text{argument}}$$

La condition de stabilité $\Re(p_1) < 0$ se traduit par $e^{\Re(p_1)Te} < 1$

Théorème : Un système échantillonné est stable si et seulement si **tous les pôles** de sa fonction de transfert en Z sont de **module strictement inférieur à l'unité**.

Cela peut se résumer par la figure suivante:

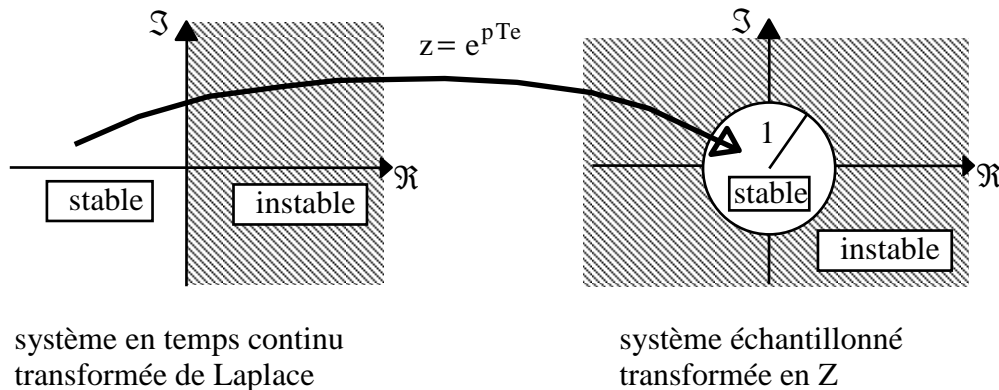


fig 5-6: relation entre la position des pôles des systèmes en temps continu (TL) et des systèmes en temps discret (TZ)

5 Les filtres numériques

5.1 Différents types de filtres numériques

Il existe deux grands types de filtres numériques:

- ♦ ceux à réponse impulsionnelle finie (RIF) ou (*FIR : finite impulse response*) de la forme
- ♦ ceux à réponse impulsionnelle infinie (RII) ou (*IIR : infinite impulse response*) de la forme

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_m z^{-m}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n}}$$

5.2 Tracer de la réponse fréquentielle d'un filtre numérique

Pour trouver la réponse harmonique ou forme fréquentielle du filtre numérique $H(z)$, on remplace z^{-1} par sa définition:

$$z^{-1} = e^{-pTe} = e^{-j2\pi v Te} = e^{-j2\pi \frac{v}{v_{ech}}}$$

et la valeur complexe $H\left(\frac{v}{v_{ech}}\right)$ donne le module et l'argument du filtre numérique pour les fréquences

v accessibles au système numérique, c'est à dire entre 0 et $v_{Nyquist} = \frac{v_{ech}}{2}$.

Remarque : La valeur du gain statique du filtre est obtenue quand la fréquence tend vers zéro, et

d'après la relation : $z^{-1} = e^{-j2\pi \frac{v}{v_{ech}}}$, quand z tend vers 1.

$$\boxed{\lim_{v \rightarrow 0} H(v) = \lim_{z \rightarrow 1} H(z)}$$

On peut remarquer que le gain statique correspond aussi à la valeur finale de la réponse indicielle (si elle existe):

Réponse indicielle :

$$Y(z) = H(z) \cdot TZ[\mathbb{1}(t)] = H(z) \cdot \frac{z}{z-1}$$

Valeur finale de la réponse indicielle (si elle existe):

$$\lim_{k \rightarrow \infty} y(k) = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) Y(z) = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) \frac{z}{z-1} H(z) = \lim_{z \rightarrow 1} H(z)$$

REMARQUE TRES IMPORTANTE :

Un filtre numérique ne peut modifier que le spectre du signal échantillonné. C'est-à-dire qu'il ne peut travailler que dans l'intervalle des fréquences $[0, v_{\text{Nyquist}}]$. Si la condition de Shannon n'a pas été respectée lors de l'échantillonnage, c'est-à-dire si des fréquences supérieures à v_{Nyquist} ont donné lieu à des recouvrements spectraux, un filtre numérique *ne peut en aucun cas remédier* à ces problèmes. Seul un filtre analogique anti-repliement avant échantillonnage peut permettre d'éviter les recouvrements spectraux.

5.3 Etude des filtres de base : intégrateur et dérivateur

5.3.1 Intégrateur numérique

Soit $x(t)$ une fonction continue et $x(k)$ l'échantillonnage de cette fonction. On veut réaliser un filtre numérique de fonction de transfert $H(z)$, d'entrée $x(k)$ et dont les valeurs de sortie correspondent à l'échantillonnage de l'intégrale de

$$x(t) : y(t) = \int_0^t x(t') dt'$$

$$\text{soit : } y(k) = y(kTe) = \int_0^{kTe} x(t) dt$$

En supposant qu'à l'instant k le filtre ait donné comme sortie $y(k)$, cherchons ce que vaut la sortie suivante $y(k+1)$

$$y(k+1) = y((k+1)Te) = \int_0^{(k+1)Te} x(t) dt$$

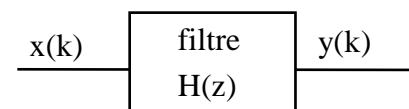


fig 5-7: système numérique de fonction de transfert $F(z)$ d'entrée $x(k)$ de sortie $y(k)$

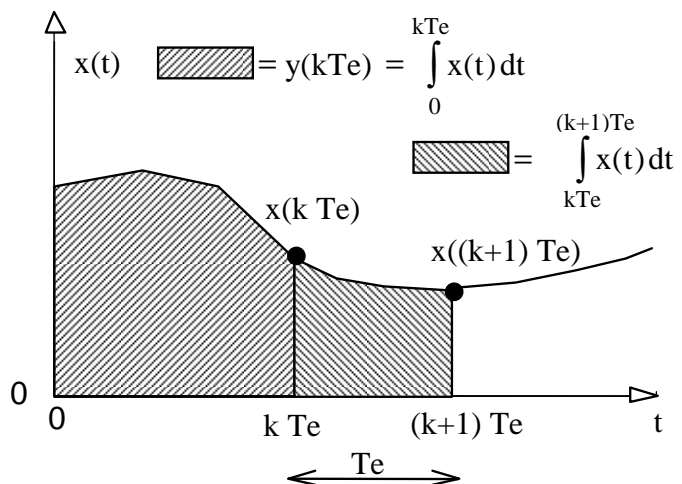


fig 5-8: calcul de $y(k)$ l'intégrale d'une fonction échantillonnée $x(k)$

$$y(k+1) = \int_0^{kTe} x(t) dt + \int_{kTe}^{(k+1)Te} x(t) dt = y(k) + \int_{kTe}^{(k+1)Te} x(t) dt$$

$$y(k+1) = \text{[shaded area from 0 to kTe]} + \text{[shaded area from kTe to (k+1)Te]} = y(k) + \text{[shaded area from kTe to (k+1)Te]}$$

Il existe différentes manières de calculer [shaded area from kTe to (k+1)Te].

5.3.1.1 Intégrateur par la méthode des rectangles inférieurs

On écrit que $\int_{kTe}^{(k+1)Te} x(t)dt \approx x(k)Te$

ce qui donne :

$$y(k+1) = y(k) + x(k) Te$$

En prenant la transformée en Z on obtient pour H(z)

$$z Y(z) = Y(z) + X(z) Te$$

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = H(z) = \frac{Te}{z-1} = \frac{Te z^{-1}}{1-z^{-1}}$$

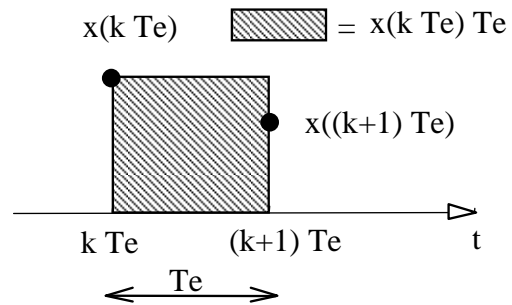


fig 5-9: calcul de l'intégrale par les rectangles inférieurs

5.3.1.2 Intégrateur par la méthode des rectangles supérieurs

On écrit que $\int_{kTe}^{(k+1)Te} x(t)dt \approx x(k+1)Te$

ce qui donne :

$$y(k+1) = y(k) + x(k+1) Te$$

En prenant la transformée en Z on obtient pour H(z)

$$z Y(z) = Y(z) + z X(z) Te$$

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = H(z) = \frac{Te z}{z-1} = \frac{Te}{1-z^{-1}}$$

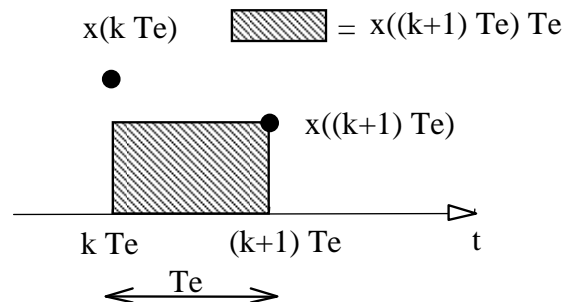


fig 5-10: calcul de l'intégrale par les rectangles supérieurs

Remarque : le terme *supérieur* signifie qu'on prend la valeur pour les temps supérieurs

5.3.1.3 Intégrateur par la méthode des trapèzes

On écrit que $\int_{kTe}^{(k+1)Te} x(t)dt \approx \frac{1}{2} (x(k) + x(k+1))Te$

ce qui donne :

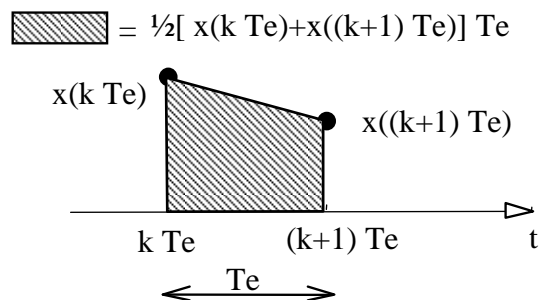


fig 5-11: calcul de l'intégrale par les trapèzes

$$y(k+1) = y(k) + \frac{1}{2}(x(k) + x(k+1))Te$$

En prenant la transformée en Z on obtient pour H(z)

$$z Y(z) = Y(z) + \frac{1}{2}(X(z) + z X(z))Te$$

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = H(z) = \frac{\frac{1}{2}(1+z)Te}{z-1} = \frac{\frac{1}{2}(1+z^{-1})Te}{1-z^{-1}}$$

Cette méthode est précise et rapide; c'est généralement celle que l'on utilise.

Remarque : Pour la résolution numérique des équations différentielles, les logiciels utilisent souvent la méthode de Simpson qui pour une complexité presque identique, est un peu plus précise. Elle fait le calcul de l'intégrale en utilisant trois points successifs et en faisant passer une parabole par ces trois points. L'équation récurrente est la suivante :

$$y(k) = y(k-2) + \frac{Te}{3}(x(k) + 4x(k-1) + x(k-2))$$

Le calcul est effectué seulement un échantillon sur deux, et le résultat n'est fourni qu'un échantillon sur deux. Si le calcul n'est pas effectué en temps réel, cette méthode est aussi plus rapide.

5.3.2 Dérivateur numérique

Soit $x(t)$ une fonction continue et $x(k)$ l'échantillonnage de cette fonction. On veut réaliser un filtre numérique de fonction de transfert $H(z)$, d'entrée $x(k)$ et dont les valeurs de sortie $y(k)$ correspondent à l'échantillonnage de la dérivée de $x(t)$:

$$y(t) = x'(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$

La dérivée est égale au coefficient directeur de la tangente à la courbe au temps $t = kTe$

Il existe plusieurs façons de calculer cette tangente. Dans notre cas, la réalisation d'un filtre causal impose que $y(k)$ ne dépende que des $x(k)$ précédent.

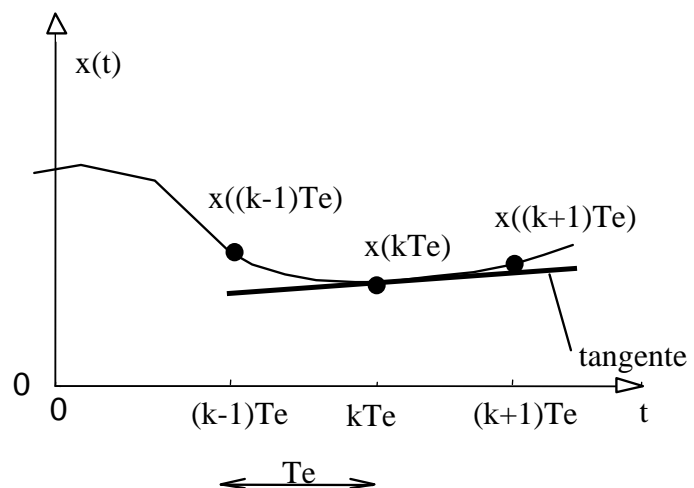


fig 5-12: calcul de la dérivée d'un signal numérique

5.3.2.1 Dérivateur sur deux points

On approche la dérivée à l'instant kTe à partir des deux derniers points disponibles $x((k-1)Te)$ et $x(kTe)$. On écrit que

$$y(k) = \frac{\Delta x(t)}{Te} = \frac{x(kTe) - x((k-1)Te)}{Te}$$

ce qui donne :

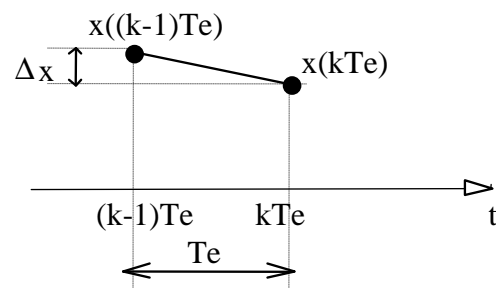


fig 5-13: dérivée avec les deux points précédents

$$y(k) = \frac{1}{T_e} (x(k) - x(k-1))$$

En prenant la transformée en Z on obtient pour H(z)

$$Y(z) = \frac{1}{T_e} (X(z) - z^{-1}X(z))$$

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = H(z) = \frac{1}{T_e} (1 - z^{-1})$$

Remarque : un dérivateur est un filtre passe-haut, donc extrêmement sensible aux bruits. De plus l'approximation sur deux points accentue encore cette sensibilité. C'est pourquoi il est souvent préférable de prendre en compte davantage de points pour le calcul de la dérivée numérique.

5.3.2.2 Dérivateur sur trois points symétriques

Dans le cas où le dérivateur n'a pas la nécessité d'être causal et de dépendre seulement que des échantillons passés, on considère trois échantillons **symétriques par rapport à l'instant k**:

On prend comme approximation de la dérivée au temps kT_e , la valeur de la pente de la droite passant par le point précédent et le point suivant :

$$y(k) = \frac{1}{2T_e} (x(k+1) - x(k-1))$$

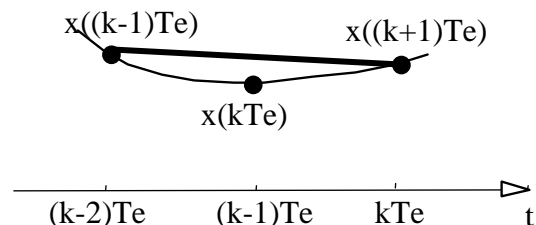


fig 5-14: dérivée avec trois points symétriques

5.3.2.3 Dérivateur sur n points

On peut calculer la dérivée au point k en utilisant un nombre n de points précédents. A l'aide d'un développement limité à l'ordre n, on calcule l'équation de la courbe passant par les n derniers points, et on exprime la tangente à cette courbe au point k. On obtient comme fonction de transfert du filtre dérivateur utilisant n points:

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = H(z) = \frac{1}{T_e} (b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_{n-1} z^{-(n-1)})$$

où les coefficients a_i du filtre sont donnés par le tableau suivant:

n	2	3	4	5	6
b_0	1	3/2	11/6	25/12	137/60
b_1	-1	-2	-3	-4	-5
b_2		1/2	3/2	3	5
b_3			-1/3	-4/3	-10/3
b_4				1/4	5/4
b_5					-1/5

fig 5-15: valeurs des coefficients d'un filtre dérivateur causal sur n points

Avec une précision de calcul de l'ordre de 10^{-7} (codage des réels sur 4 octets), le fait de prendre un nombre de point supérieur à 6, introduit davantage d'erreurs sur le calcul de la dérivée.

5.4 Les filtres à réponse impulsionnelle finie (RIF)

Ils sont de la forme : $H(z) = b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_m z^{-m}$

En écrivant que $H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$ ou $X(z)$ et $Y(z)$ sont respectivement les transformées en Z de l'entrée

$x(k)$ et la sortie $y(k)$ du filtre, on obtient l'équation récurrente :

$$Y(z) = X(z)(b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_m z^{-m}) = b_0 X(z) + b_1 z^{-1} X(z) + \dots + b_m z^{-m} X(z)$$

$$y(k) = b_0 x(k) + b_1 x(k-1) + \dots + b_m x(k-m)$$

La sortie ne dépend que des **seules entrées** précédentes.

Calculons la réponse impulsionnelle de ce filtre :

$$x(k) = \delta(k) \Rightarrow X(z) = 1 \text{ et } Y(z) = X(z) H(z) = H(z) \Rightarrow y(k) = h(k)$$

$$h(k) = b_0 \delta(k) + b_1 \delta(k-1) + \dots + b_m \delta(k-m)$$

$$h(0) = b_0 \delta(0) + b_1 \delta(-1) + \dots + b_m \delta(-m) = b_0$$

$$h(1) = b_0 \delta(1) + b_1 \delta(0) + b_2 \delta(-1) + \dots + b_m \delta(1-m) = b_1$$

...

$$h(m) = b_0 \delta(m) + b_1 \delta(m-1) + \dots + b_m \delta(0) = b_m$$

On remarque que les coefficients b_i du filtre sont les valeurs de sa réponse impulsionnelle. Comme ils sont en nombre fini, on appelle ce type de filtre à "Réponse Impulsionnelle Finie" (RIF ou FIR en anglais). Cette particularité permet d'effectuer la synthèse (le calcul des coefficients b_i) de ce type de filtre de manière simple comme cela est vu au paragraphe 5.4.4.

Un filtre FIR peut donc être donné sous trois formes différentes :

- Sa fonction de transfert
- Son équation récurrente
- Sa réponse impulsionnelle

Les trois formes fournissent les coefficients b_i qui définissent le filtre.

5.4.1 Filtres FIR et convolution discrète

En remplaçant dans l'équation récurrente les coefficients du filtre par les valeurs de la réponse impulsionnelle on obtient:

$$y(k) = h(0)x(k) + h(1)x(k-1) + \dots + h(m)x(k-m)$$

$$y(k) = \sum_{i=0}^m h(i)x(k-i) = \sum_{i=0}^{\infty} h(i)x(k-i)$$

car les valeurs de la réponse impulsionnelle sont nulles après $h(m)$.

$$y(k) = \sum_{i=0}^{\infty} h(i)x(k-i)$$

, n'est autre que l'équation de la convolution discrète du signal d'entrée $x(k)$ et de la réponse impulsionnelle $h(k)$ du filtre.

5.4.2 Stabilité des filtres FIR

Ils sont **toujours stables**: car au bout des m valeurs b_m du filtre, la réponse impulsionnelle est nulle. Ou encore, n'ayant pas de dénominateur ils n'ont pas de pôle instable.

5.4.3 Filtre causal

La condition de **causalité** d'un filtre se traduit par le fait que la sortie présente $y(k)$ ne peut dépendre que des échantillons **d'entrée actuel ou qui précèdent**. Toutes les équations de la physique reposent

sur ce principe : le présent ne dépend que du présent et du passé, **pas du futur**. L'univers n'a pas de but et le présent n'est que la conséquence du passé.

Mais, un filtrage numérique peut très bien être réalisé en temps différé en disposant de l'ensemble des données à filtrer. La condition de causalité n'est donc pas nécessaire pour un filtre numérique. Ainsi, dans l'équation récurrente du filtre FIR, il est tout à fait possible que la sortie dépende des échantillons futurs de l'entrée:

$$y(k) = b_{-2}x(k+2) + b_{-1}x(k+1) + b_0x(k) + b_1x(k-1) + \dots + b_mx(k-m)$$

on a alors obtenu une fonction de transfert de la forme :

$$H(z) = b_{-2}z^2 + b_{-1}z^1 + b_0 + b_1z^{-1} + \dots + b_mz^{-m}$$

Cela se traduit sur la réponse impulsionnelle par des valeurs de la sorties pour le temps négatif ($k < 0$)

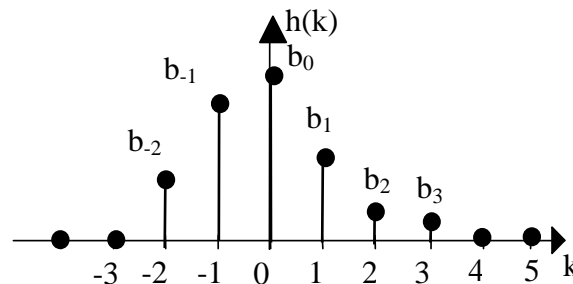


fig 5-16: réponse impulsionnelle d'un filtre non causal

Pour un filtre causal :

- le numérateur de la fonction de transfert ne peut pas comporter de puissance de z positive.
- la sortie ne peut dépendre des échantillons futurs de l'entrée
- la réponse impulsionnelle est nulle pour $k < 0$

Un filtre **causal** est réalisable en **temps réel** alors qu'un filtre **non causal** ne peut être mis en oeuvre qu'en **temps différé** en connaissant l'ensemble des valeurs, passées et **futures**, de l'entrée.

exemple : le filtre d'équation récurrente $y(k) = 0,5(x(k+1) + x(k))$, de fonction de transfert $H(z) = 0,5(z+1)$, qui calcule la valeur moyenne des échantillons actuel et **suivant** n'est **pas causal**. Il peut être mis en oeuvre à condition de connaître l'ensemble des valeurs, passées et **futures**, de l'entrée et donc en **temps différé**. Ce filtre, retardé de un échantillon, a alors pour équation récurrente $y(k) = 0,5(x(k) + x(k-1))$ et pour fonction de transfert $H(z) = 0,5(1+z^{-1})$, il calcule la valeur moyenne des échantillons actuel et précédent. Il est causal et peut être mis en oeuvre en temps réel.

5.4.4 Synthèse de filtre à réponse impulsionnelle finie (RIF) ou (FIR)

On donne ici le principe du calcul des coefficients d'un filtre FIR. Des méthodes encore plus complexes sont généralement utilisées dans les logiciels.

On définit d'abord, dans la plage $[0; v_{\text{Nyquist}}]$, la réponse en fréquence du filtre à réaliser.

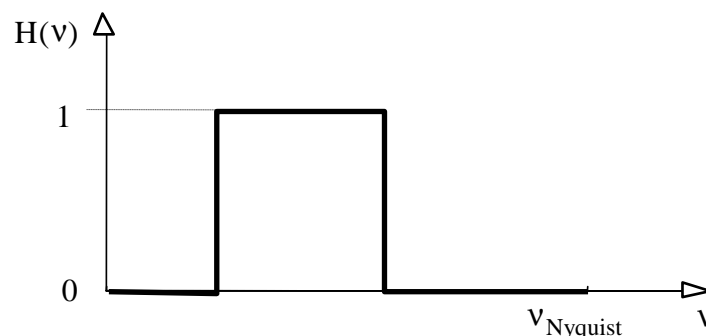


fig 5-17: module de la réponse fréquentielle désirée sur l'intervalle $[0; v_{\text{Nyquist}}]$

Pour un signal échantillonné, elle est bien sur défini **seulement** sur l'intervalle $[0; v_{\text{Nyquist}}]$.

A partir de cette réponse fréquentielle du filtre, on calcule par transformée de Fourier inverse la réponse impulsionnelle $h(t)$. L'échantillonnage de $h(t)$ donne la réponse impulsionnelle numérique $h(k)$. Les valeurs de $h(k)$ correspondent aux coefficients b_k du filtre FIR recherché.

Des problèmes de troncature et de causalité ($h(k) \neq 0$ pour $k < 0$) sont résolus par un fenêtrage et par l'introduction de retard dans la mise en œuvre en temps réel.

5.4.5 Propriétés des filtres FIR: filtres à phase linéaire

On montre que le déphasage de ces filtres varie linéairement avec la fréquence. On dit qu'il est à **phase linéaire**, comme un retard pur. Ainsi un signal se trouvant dans la bande passante est reproduit exactement en sortie, **sans déformation**.

5.5 Les filtres à réponse impulsionnelle infinie (RII)

Ils sont de la forme :

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_m z^{-m}}{1 + \underbrace{a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n}}_{\neq 0}}$$

En écrivant que $H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$ ou $X(z)$ et $Y(z)$ sont respectivement les transformées en Z de l'entrée

$x(k)$ et la sortie $y(k)$ du filtre, on obtient l'équation récurrente :

$$Y(z)(1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n}) = X(z)(b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_m z^{-m})$$

$$Y(z) + a_1 z^{-1} Y(z) + \dots + a_n z^{-n} Y(z) = b_0 X(z) + b_1 z^{-1} X(z) + \dots + b_m z^{-m} X(z)$$

$$y(k) + a_1 y(k-1) + \dots + a_n y(k-n) = b_0 x(k) + b_1 x(k-1) + \dots + b_m x(k-m)$$

$$\boxed{y(k) = -a_1 y(k-1) - \dots - a_n y(k-n) + b_0 x(k) + \dots + b_m x(k-m)}$$

On remarque que la sortie dépend des entrées et sorties précédentes.

La réponse impulsionnelle de ce type de filtre, contient une infinité de valeurs comme cela est illustré dans l'exemple suivant.

Exemple : on considère le filtre du premier ordre $H(z) = \frac{1-a}{1-a z^{-1}}$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $|a| < 1$

Son équation récurrente est : $y(k) = a y(k-1) + (1-a)x(k)$

Calculons sa réponse impulsionnelle :

$$h(0) = a h(-1) + (1-a)\delta(0) = 1-a$$

$$h(1) = a h(0) + (1-a)\delta(1) = a(1-a)$$

$$h(2) = a h(1) + (1-a)\delta(2) = a^2(1-a)$$

et par suite : $h(k) = a^k (1-a)$

Cette réponse impulsionnelle correspond bien à la transformée inverse de $H(z)$.

$$\mathcal{TZ}^{-1}[H(z)] = \mathcal{TZ}^{-1}\left[\frac{1-a}{1-a z^{-1}}\right] = \mathcal{TZ}^{-1}\left[\frac{(1-a)z}{z-a}\right] = (1-a)a^k$$

Le tracé de la réponse impulsionnelle est le suivant:

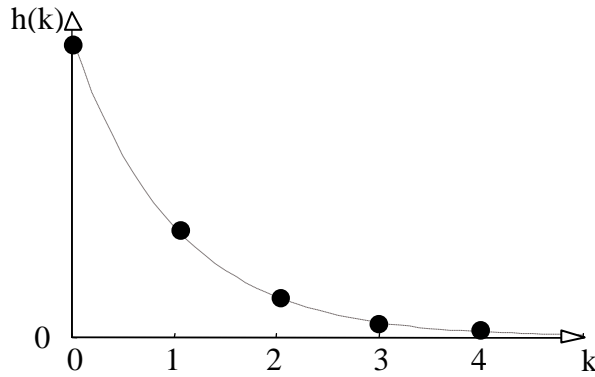


fig 5-18: Réponse impulsionnelle du filtre IIR du premier ordre

Calculons sa réponse indicielle :

$$y(0) = a y(-1) + (1-a)u(0) = 1-a$$

$$y(1) = a y(0) + (1-a)u(1) = a(1-a) + (1-a) = a - a^2 + 1 - a = 1 - a^2$$

$$y(2) = a y(1) + (1-a)u(2) = a(1-a^2) + (1-a) = a - a^3 + 1 - a = 1 - a^3$$

et par suite : $y(k) = 1 - a^{k+1}$

ce qui correspond bien à

$$\mathcal{TZ}^{-1}\left[H(z)\frac{z}{z-1}\right] = \mathcal{TZ}^{-1}\left[\frac{(1-a)z}{z-a} \times \frac{z}{z-1}\right] = \mathcal{TZ}^{-1}\left[\frac{z}{z-1} - \frac{az}{z-a}\right] = 1 - a^k = 1 - a^{k+1}$$

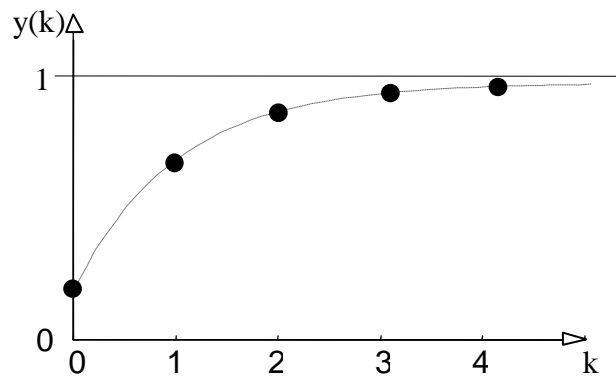


fig 5-19: Réponse indicielle du filtre IIR du premier ordre

Remarque : Ce filtre correspond à l'échantillonnage d'un filtre continu passe bas du premier

ordre de constante de temps τ : $H(p) = \frac{1}{1 + \tau p}$ avec $a = e^{-\frac{T_e}{\tau}}$ (voir TD)

Remarque : On vérifie que le pôle du système est $(1 - a z^{-1} = 0) \Rightarrow z = a$, or par hypothèse

$|a| < 1$ ce qui correspond à un système stable.

Les filtres à réponse impulsionnelle infinie ont l'avantage de comporter un nombre réduit de coefficients (de 2 à 10). Leur synthèse directe en numérique est assez délicate. Par contre, on obtient ce type de filtre quand on transforme un filtre continu (en p) en un filtre numérique comme cela sera décrit dans le paragraphe V-3.

5.6 Synthèse de filtre numérique à partir de filtre analogique

C'est la démarche de l'électronicien qui sait effectuer la synthèse de filtre analogique $H(p)$ par différentes méthodes : filtre de Chebychev, de Bessel, de Butterworth, ... pour les filtres les plus courants. On aimerait trouver $H(z)$ l'équivalent numérique de ce filtre continue $H(p)$. Il faut donc passer de la variable de Laplace p à la variable z . Pour cela il existe plusieurs façons :

⇒ la **relation exacte** : $z = e^{pT_e}$. Cette relation *n'est pas linéaire* ce qui veut dire que si $H(p)$ est une fraction rationnelle, $H(z)$ *n'est pas une fraction rationnelle*, et $H(z)$ ne pourra pas être interprétée comme une équation récurrente. Cette voie est donc généralement impraticable.

⇒ la **relation approchée par développement limité** au premier ordre : $z \approx 1 + pT_e$ soit $p \approx \frac{z-1}{T_e}$. Cette relation *est linéaire* ce qui veut dire que si $H(p)$ est une fraction rationnelle, $H(z)$ *est encore une fraction rationnelle*. Mais la validité de cette relation est limitée aux valeurs de $p\Delta T$ petites. Si on tolère dans le développement limité une erreur de 5%, cela correspond à un module de $p\Delta T$ inférieur à 0,1. En remplaçant p par $j2\pi\nu$ on obtient :

$$2\pi\nu T_e < 0,1 \Rightarrow \nu < \frac{0,1}{2\pi T_e} \Rightarrow \nu < 0,016\nu_{ech} \text{ soit } \nu_{ech} > 63 \nu$$

On ne peut transformer un filtre analogique en un filtre numérique, à l'aide de cette relation très approchée, que si les **fréquences de coupure du filtre** sont au moins 63 fois plus petites que la fréquence d'échantillonnage. On ne l'utilise donc pas dans le cas général des filtres numériques.

Mais cela correspond au cas des filtres à capacités commutées qui bien qu'étant considérés comme des composants analogiques, sont, en fait, numériques de par la conception de l'intégrateur.

On peut remarquer que cette relation correspond aussi à l'approximation de l'intégrateur dans Laplace: $H(p) = \frac{1}{p}$ à l'intégrateur numérique au sens des rectangles inférieur:

$$H(z) = \frac{T_e}{z-1}$$

⇒ la **relation approchée bilinéaire**

Pour trouver cette relation on identifie la fonction de transfert de l'intégrateur dans Laplace:

$H(p) = \frac{1}{p}$ et celle obtenue en numérique, avec la transformée en Z , par la méthode des trapèzes :

$$H(z) = \frac{\frac{1}{2}(1+z)T_e}{z-1} = \frac{\frac{1}{2}(1+z^{-1})T_e}{1-z^{-1}}$$

On obtient : $\frac{1}{p_a} = \frac{\frac{1}{2}(1+z^{-1})T_e}{1-z^{-1}}$; on note p_a la valeur **approchée** de p utilisée dans cette

relation. En inversant cette relation on a : $z = \frac{1 + \frac{T_e}{2}p_a}{1 - \frac{T_e}{2}p_a}$ et on l'utilise sous la forme :

$$p_a = \frac{2}{T_e} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$$

Cette relation approchée *est linéaire* en p_a et en z , c'est pour cela qu'elle s'appelle la relation **bilinéaire**. Là encore si $H(p)$ est une fraction rationnelle, $H(z)$ *est encore une fraction rationnelle*. Cette relation approchée conserve les critères de stabilité du filtre. Elle reste valable pour toutes les fréquences accessibles à un système numérique, c'est à dire entre 0 et $\nu_{Nyquist} = \frac{\nu_{ech}}{2}$. Elle présente seulement l'inconvénient de déplacer ou déformer légèrement la valeur des fréquences proches de $\nu_{Nyquist}$, comme on peut le voir dans le paragraphe suivant.

Déformation des fréquences dues à la relation bilinéaire

En remplaçant p_a par $j\omega_a$ dans la relation bilinéaire :

$$z = \frac{1 + j\frac{T_e}{2}\omega_a}{1 - j\frac{T_e}{2}\omega_a}$$

z est le rapport de deux complexes :

$$z = \frac{\rho e^{j\theta}}{\rho e^{-j\theta}} = e^{j2\theta}$$

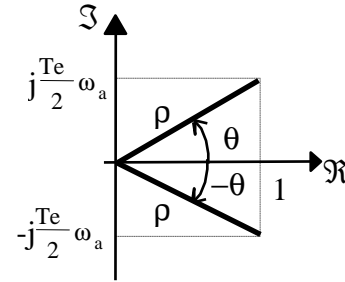


fig 5-20: position dans le plan complexe des termes de la relations bilinéaires

avec $\theta = \arctg\left(\frac{T_e}{2}\omega_a\right)$

Or la relation exacte est : $z = e^{pT_e} = e^{j\omega T_e}$; et la relation approchée : $z = e^{j2\arctg\left(\frac{T_e}{2}\omega_a\right)}$

En égalant les deux on obtient une relation entre ω_a la fréquence correspondant à l'utilisation de la formule bilinéaire et la "vraie" pulsation ω :

$$\omega = \frac{2}{\Delta T} \arctg\left(\frac{T_e}{2}\omega_a\right)$$

Ou encore en remplaçant par la fréquence: $v = \frac{1}{\pi T_e} \arctg(T_e \pi v_a) = \frac{v_{ech}}{\pi} \arctg\left(\pi \frac{v_a}{v_{ech}}\right)$

on utilise généralement la relation inverse : $v_a = \frac{v_{ech}}{\pi} \operatorname{tg}\left(\pi \frac{v}{v_{ech}}\right)$

On peut résumer ce qui se passe par le schéma suivant où on désire avoir un filtre numérique passe bas coupant à $v_c = 100\text{Hz}$:

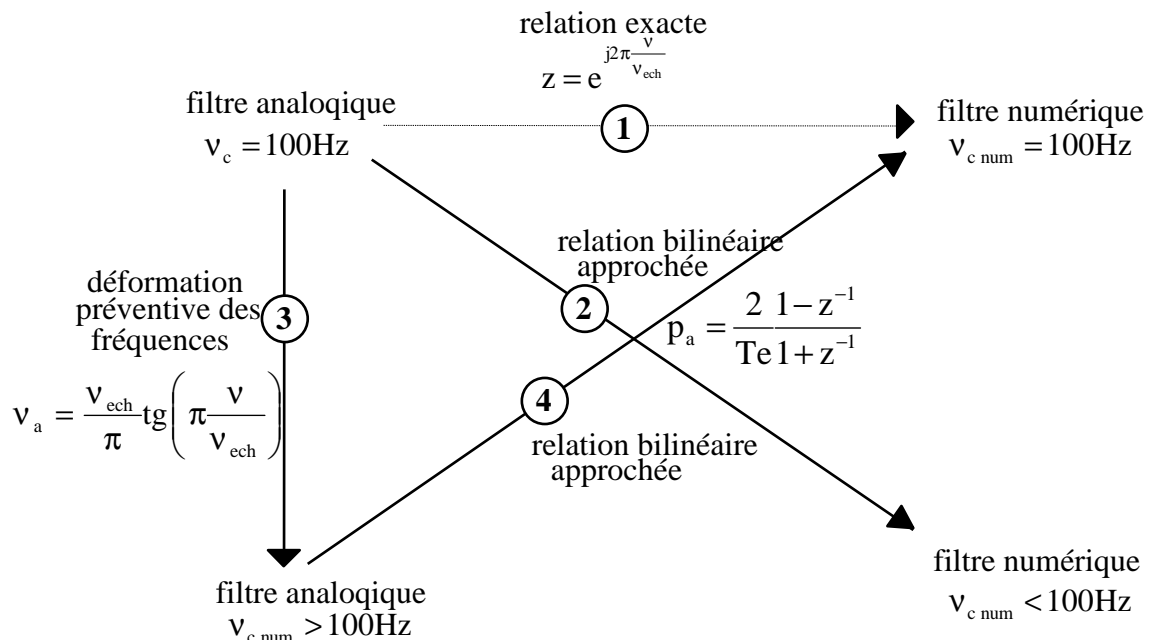


fig 5-21: résumé des différents passages entre une fonction de transfert en p et une fonction de transfert échantillonnée en z

Si on part d'un filtre analogique de fréquence $v_c = 100\text{Hz}$, la transformation exacte entre p et z ① est une voie généralement impossible. L'utilisation directe de la relation bilinéaire approchée ② déforme malheureusement les fréquences et aboutit à un filtre numérique de fréquence de coupure $v_{c\text{ num}}$ un peu différente de 100Hz. Afin d'obtenir un filtre numérique de fréquence de coupure $v_{c\text{ num}} = 100\text{Hz}$, la bonne démarche est donc la suivante :

③ déformation préventive des fréquences du filtre analogique de départ par la relation $v_a = \frac{v_{\text{ech}}}{\pi} \text{tg}\left(\pi \frac{v}{v_{\text{ech}}}\right)$, on trouve donc un filtre analogique $H(p)$ de fréquence de coupure $v_{c\text{ app}}$ un peu différente de 100Hz.

④ on remplace p en utilisant la relation bilinéaire $p_a = \frac{2}{T_e} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$ et on trouve $H(z)$ la fonction de transfert du filtre numérique passe bas coupant à $v_{c\text{ num}} = 100\text{Hz}$

C'est la démarche qui est utilisée dans les logiciels de synthèse de filtre numérique.

Exemple : sur un système numérique échantillonné à la fréquence $v_{\text{ech}} = 1\text{ kHz}$, on veut faire un filtre passe bas d'ordre 1 coupant à $v_c = 100\text{Hz}$. La forme du filtre analogique est :

$$H(p) = \frac{1}{1 + \frac{p}{\omega_c}} = \frac{1}{1 + \frac{p}{2\pi v_c}}$$

La déformation préliminaire des fréquences impose que le filtre analogique coupe à la fréquence

$$v_{c\text{ app}} : v_{c\text{ app}} = \frac{v_{\text{ech}}}{\pi} \text{tg}\left(\pi \frac{v_c}{v_{\text{ech}}}\right)$$

$$\text{AN : } v_{c\text{ app}} = \frac{1000}{\pi} \text{tg}\left(\pi \frac{100}{1000}\right) = 103,4\text{Hz}$$

En prenant pour la fréquence de coupure la fréquence déformée $v_{c\text{ app}}$, la fonction de transfert du filtre analogique s'écrit:

$$H(p) = \frac{1}{1 + \frac{p}{2\pi v_{c\text{ app}}}}$$

On remplace p en utilisant la relation bilinéaire: $p_a = \frac{2}{\Delta T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} = 2 v_{\text{ech}} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$

$$H(z) = \frac{1}{1 + \frac{2v_{\text{ech}} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}{2\pi v_{c\text{ app}}}}$$

en remplaçant $v_{c\text{ app}}$ par sa valeur :

$$H(z) = \frac{1}{1 + \frac{2v_{ech} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}{2\pi \frac{v_{ech}}{\pi} \operatorname{tg}\left(\pi \frac{v_c}{v_{ech}}\right)}}$$

$$H(z) = \frac{1}{1 + \frac{\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}{\operatorname{tg}\left(\pi \frac{v_c}{v_{ech}}\right)}}$$

en posant $R = \operatorname{tg}\left(\pi \frac{v_c}{v_{ech}}\right)$ on a : $H(z) = \frac{1}{1 + \frac{1+z^{-1}}{R}}$

$$H(z) = \frac{1+z^{-1}}{1+z^{-1} + \frac{1+z^{-1}}{R}}$$

$$H(z) = \frac{1+z^{-1}}{\left(1 + \frac{1}{R}\right) + z^{-1}\left(1 - \frac{1}{R}\right)} = \frac{R}{R+1} \frac{1+z^{-1}}{1 + \left(\frac{R-1}{R+1}\right)z^{-1}} = \frac{b(1+z^{-1})}{1+a_1z^{-1}}$$

Il faut garder **5 chiffres** significatifs pour les coefficients du dénominateur sous peine de déformation du filtre.

mise en oeuvre

$H(z)$ correspond à l'équation récurrente (ce que l'on programme pour la mise en oeuvre pratique):

$$y(z) = b(x(k) + x(k-1)) - a_1 y(k-1)$$

Remarque : Si dans le calcul du filtre on utilise la fréquence v_c sans déformation au lieu de la

fréquence pré-déformée $v_{c\text{ app}}$, on obtient le même filtre mais avec $R = \pi \frac{v_c}{v_{ech}}$ au lieu de

$$R = \operatorname{tg}\left(\pi \frac{v_c}{v_{ech}}\right) \text{ précédemment.}$$

Le filtre ainsi calculé présente une fréquence de coupure à 96,9Hz.

La pré-déformation est d'autant plus nécessaire que l'on travaille avec des fréquences de coupure **proches de la fréquence de Nyquist** $v_{\text{Nyquist}} = v_{ech}/2$.

Tracer de la réponse fréquentielle : On remplace z^{-1} par sa définition:

$$z^{-1} = e^{-p\Delta T} = e^{-j2\pi v \Delta T} = e^{-j2\pi \frac{v}{v_{ech}}}$$

Le tracé du module et de l'argument de $H(z)$ donne le diagramme de Bode suivant

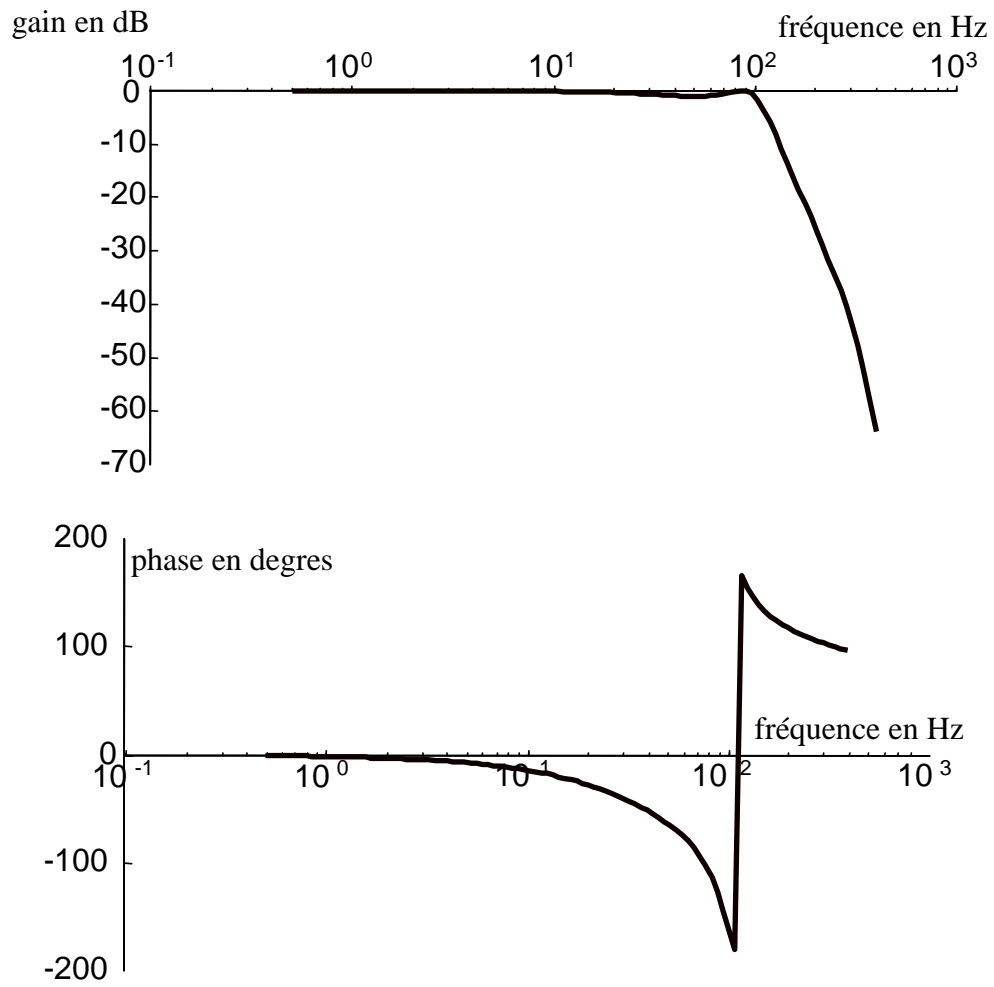


fig 5-22: diagramme de Bode (gain en dB et phase) du filtre numérique

On vérifie que le tracé n'est effectué que jusqu'à la fréquence de $500\text{Hz} = v_{\text{Nyquist}} = v_{\text{ech}}/2$

6 Annexe 1 : un peu d'histoire



Fourier, Joseph, french, 1768-1830

French mathematician who discovered that any periodic motion can be written as a superposition of sinusoidal and cosinusoidal vibrations. He developed a mathematical theory of Heat in "Théorie Analytique de la Chaleur (Analytic Theory of Heat)" (1822), discussing it in terms of differential equations. Fourier was a friend and advisor of Napoleon. Fourier believed that his health would be improved by wrapping himself up in blankets, and in this state he tripped down the stairs in his house and killed himself. The paper of Galois which he had taken home to read shortly before his death was never recovered.

PARSEVAL Marc Antoine, français, 1755-1836

Plus précisément Marc-Antoine de Parseval des Chênes. Savant, géomètre, Membre de l'Institut, il inventa un instrument qui fut longtemps employé dans la Marine pour les travaux hydrographiques. En mathématiques, il se distingua dans l'étude des séries de Fourier (son contemporain) et des harmoniques associées. On le connaît pour sa célèbre égalité, cas particulier de l'inégalité de Bessel.

EULER Leonhard, suisse, 1707-1783



Sans doute un des plus grands mathématiciens de tous les temps. Il s'installa à Saint-Petersbourg auprès de Pierre Ier le Grand (en remplacement de Daniel Bernoulli) puis à Berlin (1741) (c'est Lagrange qui lui succéda).

Son oeuvre est considérable. Euler intervint dans les trois domaines fondamentaux de la science de son époque : l'astronomie (orbites planétaires, trajectoires des comètes), les sciences physiques (champs magnétiques, hydrodynamique, optique, nature ondulatoire de la lumière,...), et les mathématiques, dans toutes ses branches, de l'arithmétique à la *géométrie différentielle* en passant par l'analyse numérique et fonctionnelle, le calcul des variations, les courbes et les surfaces algébriques, le calcul des probabilités et les premiers aspects de la théorie des graphes et de la topologie.

En 1770, Euler publia en allemand une *Introduction complète à l'algèbre* où l'on peut considérer que tout sera dit quant aux nombres négatifs et à leur statut définitif de véritable nombre. De même, les nombres complexes (encore appelés *imaginaires*, le qualificatif *complexe* est de Gauss avec la forme $a + bi$), sont définis et leurs propriétés étudiées.

DIRAC Paul Adrien Maurice, anglais, 1902-1984



Éminent physicien qui étudia les implications de la relativité restreinte à la théorie quantique de l'électron : "Théorie des électrons et des protons" (1929). Sa théorie entraînait l'existence d'antiparticules (on parle d'antimatière) comme l'électron positif e^+ dit positon, chargé positivement. L'existence de ce dernier fut mis en évidence en 1933 suite aux premières découvertes de la radioactivité. Prix Nobel de physique 1933, Dirac fut professeur à l'université de Cambridge puis aux Etats-Unis.

Distribution de Dirac: une fonction nulle sauf en un point ne peut avoir une intégrale non nulle. Cette "fonction" de Dirac (impulsion unité) est une distribution. Elle étend le concept usuel de fonction. Dirac apparaît ainsi comme est précurseur de la théorie des distributions de Laurent Schwartz et des russes I. Guelfand et S. Sobolev.

source : *mathworld*

<http://mathworld.wolfram.com/>

voir aussi: *The MacTutor History of Mathematics archive (toute l'histoire en anglais)*

<http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/index.html>

voir aussi: *PETITE CHRONOLOGIE DES MATHEMATIQUES (en français)*

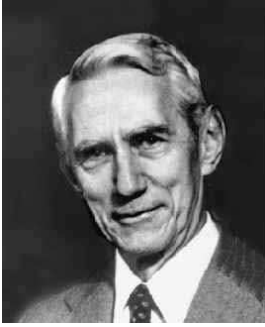
<http://www.chronomath.com/>

Serveurs illustrant la convolution et le développement en séries de Fourier

<http://www.jhu.edu/~signals/>

et plein de choses intéressantes sur les maths et la physique

<http://www.univ-lemans.fr/enseignements/physique/02/index.html>



Claude Elwood Shannon (1916-2001)

Claude Shannon was a graduate of Michigan and went to MIT where he wrote a thesis on the use of Boole's algebra to analyse and optimise relay switching circuits. He joined Bell Telephones in 1941 as a research mathematician and remained there until 1972.

He published *A Mathematical Theory of Communication* in the Bell System Technical Journal (1948). His work founded the subject of information theory and he proposed a linear schematic model of a communications system. He gave a method of analysing a sequence of error terms in a signal to find their inherent variety, matching them to the designed variety of the control system.

In 1952 he devised an experiment illustrating the capabilities of telephone relays.

Shannon was awarded the National Medal of Science in 1966.

source : <http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/index.html>



Harry Nyquist (1889-1976)

Harry Nyquist was born in Nilsby, Sweden. He attended the University of North Dakota and received the B.S. and M.S. degrees in electrical engineering in 1914 and 1915, respectively. He attended Yale University, New Haven, Conn., from 1915 to 1917, and was awarded the Ph.D. degree in 1917.

From 1917 to 1934 Nyquist was employed by the American Telephone and Telegraph Company in the Department of Development and Research Transmission, where he was concerned with studies on telegraph picture and voice transmission. From 1934 to 1954 he was with the Bell Telephone Laboratories, Inc., where he continued in the work of communications engineering, especially in transmission engineering and systems engineering. At the time of his retirement from Bell Telephone Laboratories in 1954, Nyquist was Assistant Director of Systems Studies

During his 37 years of service with the Bell System, he received 138 U.S. patents and published twelve technical articles. His many important contributions to the radio art include the first quantitative explanation of **thermal noise**, signal transmission studies which laid the foundation for modern **information theory and data transmission**, the invention of the vestigial sideband transmission system now widely-used in television broadcasting, and the well-known Nyquist diagram for determining the stability of feedback systems.

He wrote a landmark paper (Nyquist, Harry, "Certain topics in Telegraph Transmission Theory," published in 1928) describing the criteria for what we know today as sampled data systems. Nyquist taught us that for periodic functions, if you sampled at a rate that was at least twice as fast as the signal of interest, then no information (data) would be lost upon reconstruction. And since Fourier had already shown that all alternating signals are made up of nothing more than a sum of harmonically related sine and cosine waves, then audio signals are periodic functions and can be sampled without loss of information following Nyquist's instructions. This became known as the Nyquist frequency, which is the highest frequency that may be accurately sampled, and is one-half of the sampling frequency.

source : http://www.ieee.org/organizations/history_center/legacies/nyquist.html

CHEBYSHEV Pafnuty Lvovich, russe, 1821-1894

The department of physics and mathematics in which Chebyshev studied announced a prize competition for the year 1840-41. Chebyshev submitted a paper on The calculation of roots of equations in which he solved the equation $y = f(x)$ by using a series expansion for the inverse function of f . The paper was not published at the time (although it was published in the 1950s) and it was awarded only second prize in the competition rather than the Gold Medal it almost certainly deserved. His thesis was on the theory of probability, and in it he developed the main results of the theory in a rigorous but elementary way. In particular the paper he published from his thesis examined Poisson's weak law of large numbers.

He develop a general theory of orthogonal polynomials. Chebyshev was probably the first mathematician to recognise the general concept of orthogonal polynomials. A few particular orthogonal polynomials were known before his work. Legendre and Laplace had encountered the Legendre polynomials in their work on celestial mechanics in the late eighteenth century. Laplace had found and studied the Hermite polynomials in the course of his discoveries in probability theory during the early nineteenth century. It was Chebyshev who saw the possibility of a general theory and its applications. His work arose out of the theory of least squares approximation and probability; he applied his results to interpolation, approximate quadrature and other areas.

Chebyshev was a wonderful lecturer. His courses were very short. As soon as the bell sounded, he immediately dropped the chalk, and, limping, left the auditorium. On the other hand he was always punctual and not late for classes. As to Chebyshev's personal life, he never married and lived alone in a large house with ten rooms. He was rich, spending little on everyday comforts but he had one great love, namely that of buying property. It was on this that he spent most of his money but he did financially support a daughter whom he refused to officially acknowledge.

SIMPSON Thomas, anglais, 1710 –1761



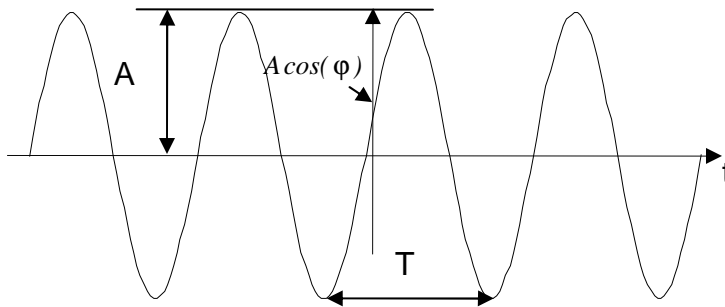
Disciple de [Newton](#), Simpson enseigna les mathématiques à l'académie de Woolwich. Il s'initia au calcul infinitésimal en étudiant les écrits de [L'Hospital](#) et publia un important traité *Nouveau traité des fluxions* (1737), autrement dit sur les *dérivées* selon [Newton](#) (par opposition à celles de [Leibniz](#)).

Méthode d'intégration approchée de Simpson: dans le calcul d'une quadrature (aire sous une courbe) elle consiste à remplacer trois points consécutifs d'un arc de courbe par un arc de parabole. Cette méthode très efficace est souvent utilisée sur les calculatrices "de poche" actuelles.

7 Annexe 2 - Rappel sur les fonctions sinusoïdales est les complexes

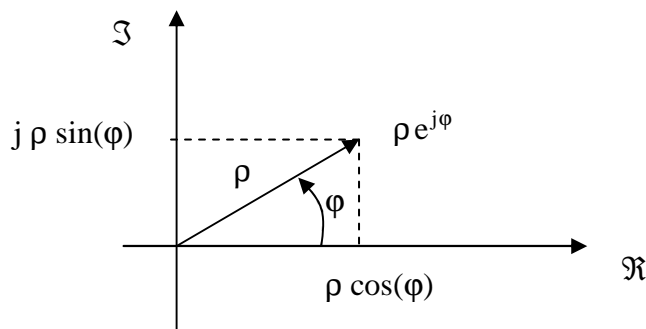
- Signal sinusoïdal

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi) = A \cos(2\pi f_0 t + \varphi) = A \cos\left(\frac{2\pi}{T} t + \varphi\right); \quad x(0) = A \cos(\varphi)$$

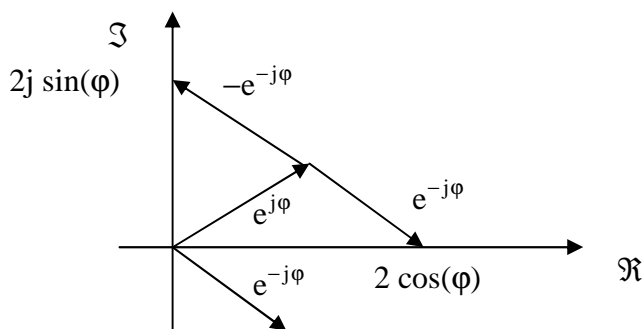


A : amplitude; φ : phase à l'origine $(\omega_0 t + \varphi)$: phase (fonction de t)
 ω_0 : pulsation (rd/s); f_0 : fréquence (Hz ou 1/s); T : période

- Les complexes



Notation exponentielle: $\rho e^{j\varphi} = \rho \cos(\varphi) + j \rho \sin(\varphi)$

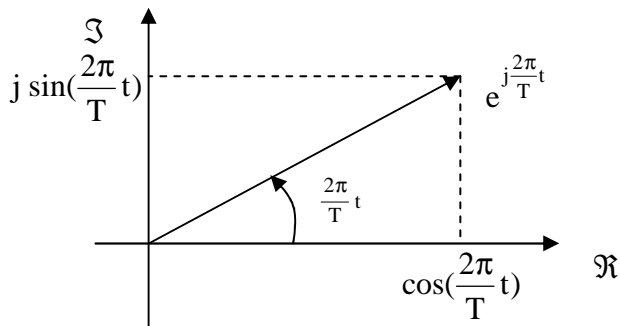


Relation d'Euler: $\cos(\varphi) = \frac{e^{j\varphi} + e^{-j\varphi}}{2}; \quad \sin(\varphi) = \frac{e^{j\varphi} - e^{-j\varphi}}{2j}$

- Fonctions sinusoïdales en complexe: vecteurs tournants

$$e^{j\frac{2\pi}{T}t} = \cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right) + j \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right);$$

$e^{j\frac{2\pi}{T}t}$ est un vecteur **tournant** dans le plan complexe. Il tourne à la vitesse (pulsation) de $\frac{2\pi}{T}$ rd/s. Il fait un tour (2π rd) en un temps T .



Les parties réelle et imaginaire sont deux fonctions sinusoïdales.

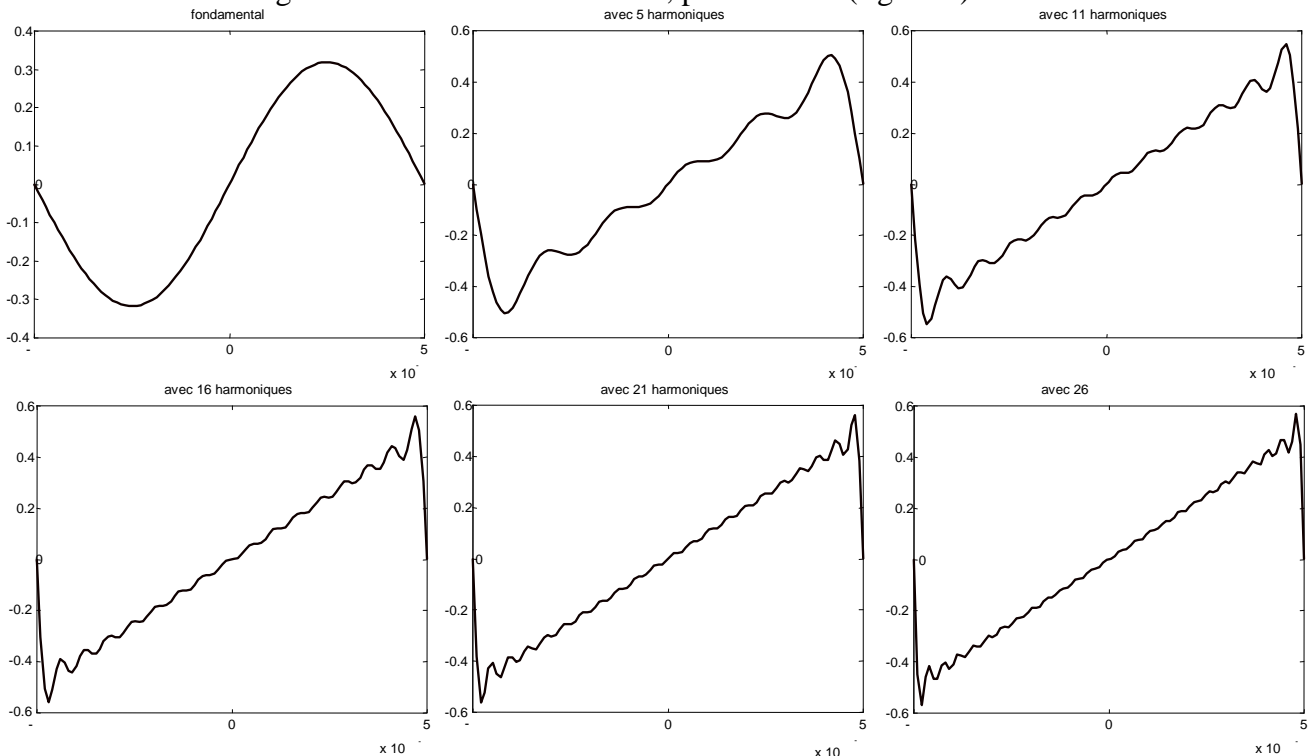
La relation d'Euler donne:

$$\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right) = \frac{e^{j\frac{2\pi}{T}t} + e^{-j\frac{2\pi}{T}t}}{2} ; \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right) = \frac{e^{j\frac{2\pi}{T}t} - e^{-j\frac{2\pi}{T}t}}{2j}$$

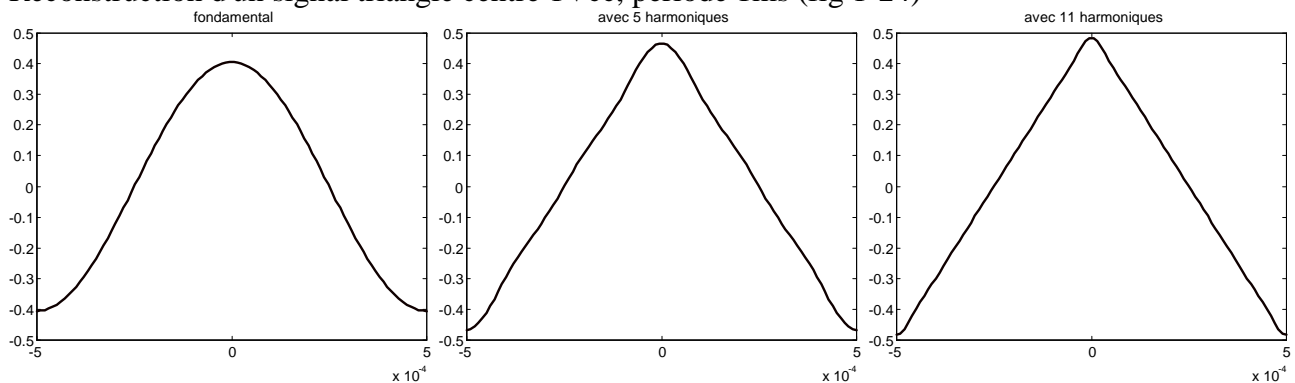
Une fonction sinusoïdale se décompose donc en la somme de deux vecteurs tournant, un dans le sens positif, un dans le sens négatif.

8 Annexe 3 - décomposition en série de Fourier

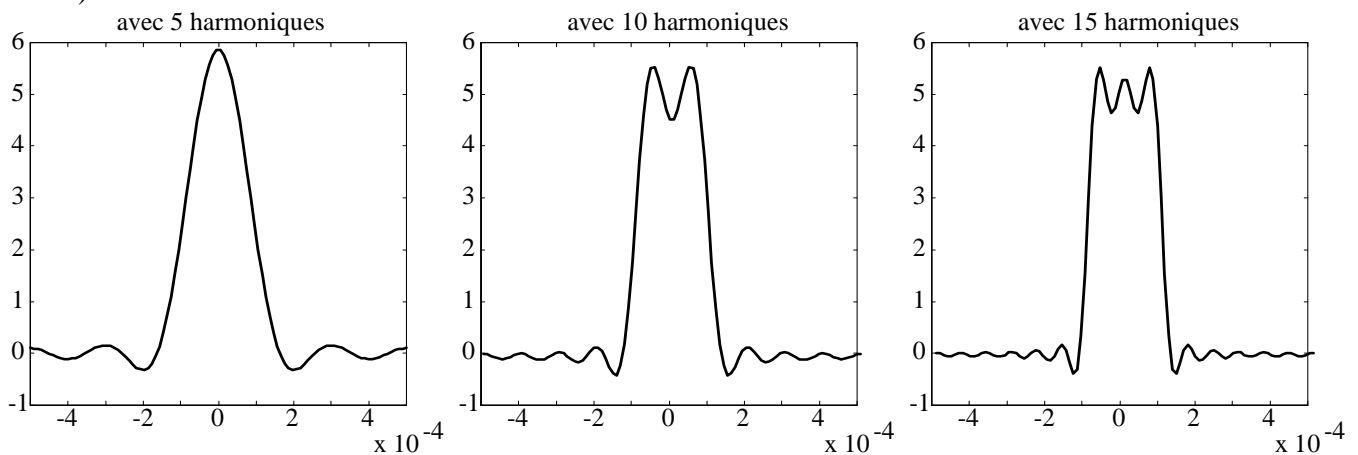
Reconstruction d'un signal dent de scie centrée $1V_{cc}$, période 1ms (fig 1-23)

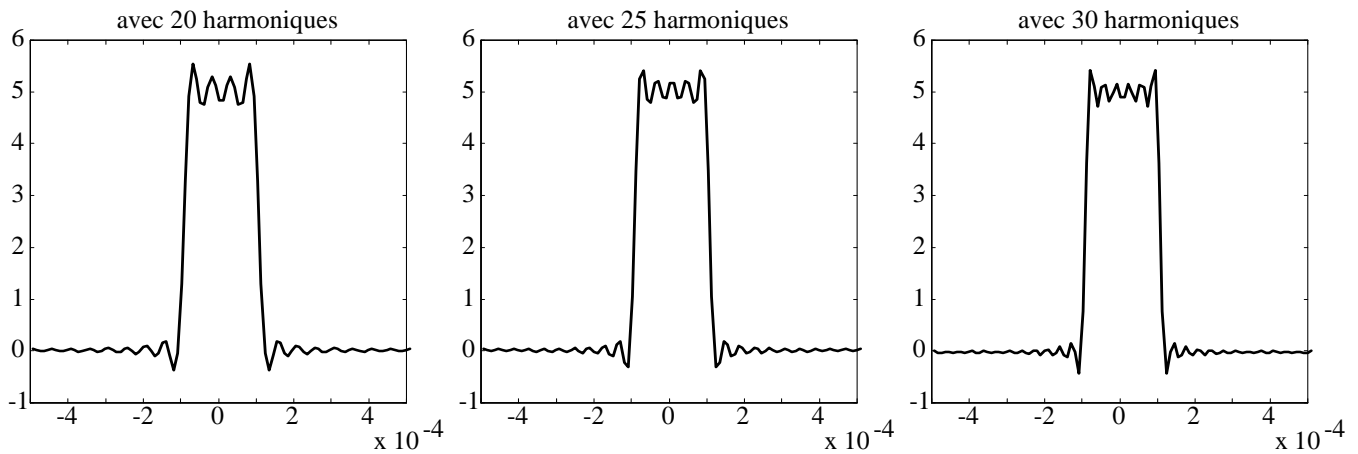


Reconstruction d'un signal triangle centré $1V_{cc}$, période 1ms (fig 1-24)



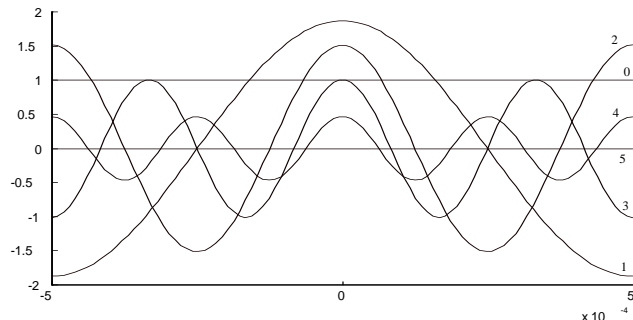
Reconstruction d'un signal impulsionnel unipolaire de rapport cyclique 0,2 et de 5V crête à crête (fig 1-25)





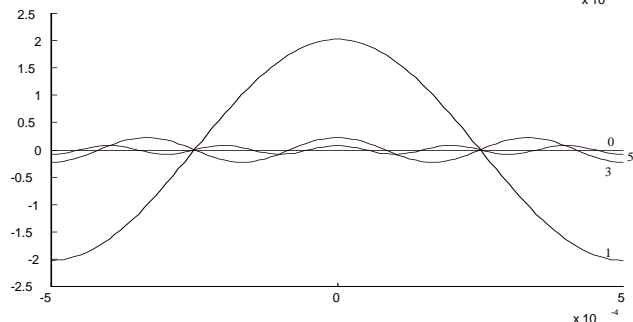
Décomposition en série de Fourier d'un signal impulsionnel de fréquence 1kHz, d'amplitude 5V et de rapport cyclique $\eta=0,2$. (les chiffres indiquent le numéro n de l'harmonique) (fig 1-26).

$$V(t) = E\eta + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2E}{n\pi} \sin(n\pi\eta) \cos\left(n \frac{2\pi}{T} t\right)$$



Décomposition en série de Fourier d'un signal triangulaire symétrique de fréquence 1kHz, d'amplitude crête à crête 5V (les chiffres indiquent le numéro n de l'harmonique) (fig 1-27).

$$V(t) = \sum_{q=0}^{\infty} \frac{4E}{(2q+1)^2 \pi^2} \cos\left((2q+1) \frac{2\pi}{T} t\right)$$



Simulation des la décomposition et de la sommation de la SF

Le texte et les programmes d'un TP de mathématiques illustrant le contenu du module Ma31 est disponible sur le serveur étudiant du département GEii.

"V:\Module_MA3x_TP_Math_S3\Scilab "

Ce TP peut être fait en « libre service ». Il utilise le logiciel "Scilab" installé sur toute les machine du département. Scilab est un logiciel gratuit développé par l'INRIA (Institut National de Recherche en Informatique et Automatique). La syntaxe et les possibilités offertes par Scilab sont proches de celles de Matlab.

On peut ainsi visualiser pour différentes formes de signaux :

- Le tracé des harmoniques et de la somme tronquée de la SF
- Le tracé des spectres : amplitude, puissance, théorème de Parseval

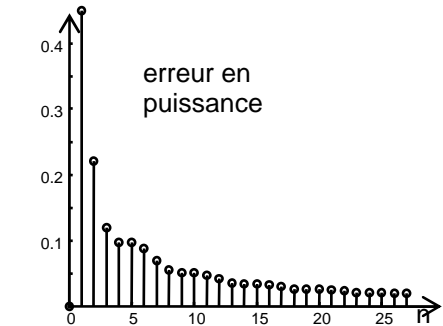
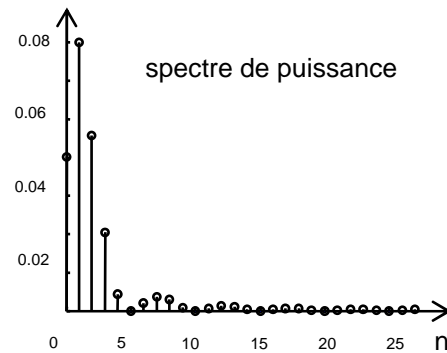
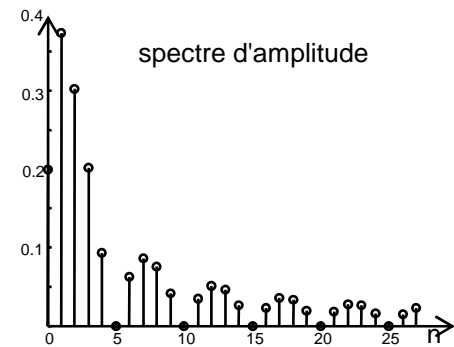
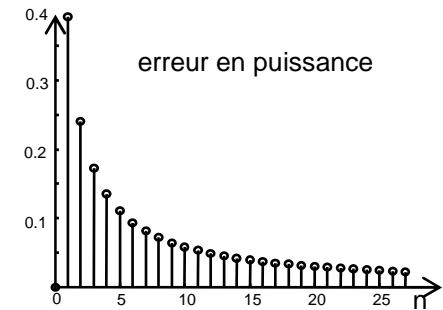
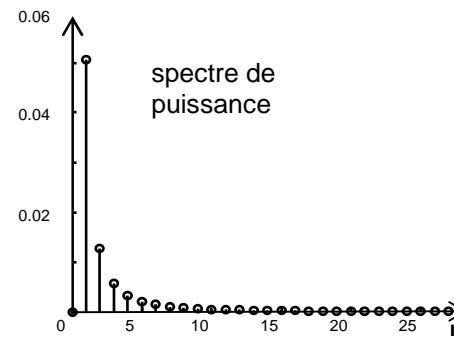
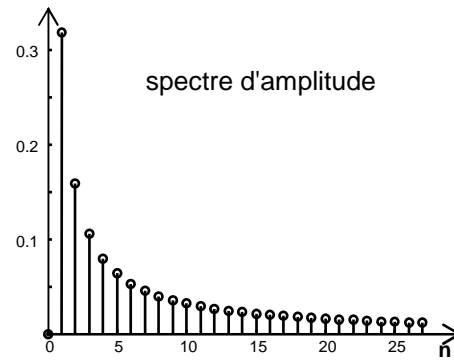
Le répertoire contient le texte du TP en version pdf ainsi qu'un sous répertoire \Lib_TS_BN contenant toutes les fonctions Scilab nécessaires pour le TP. Suivre les directives du texte pour visualiser les tracés.

Signal dent de scie centré de 1V
crête à crête (fig 1-28)

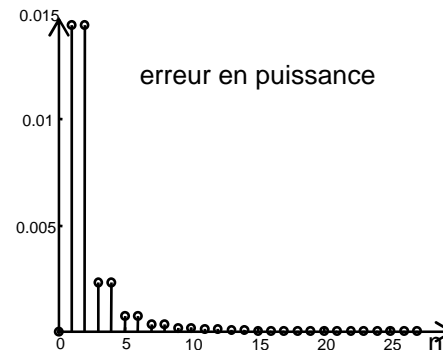
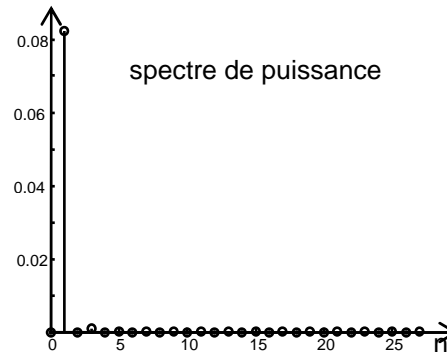
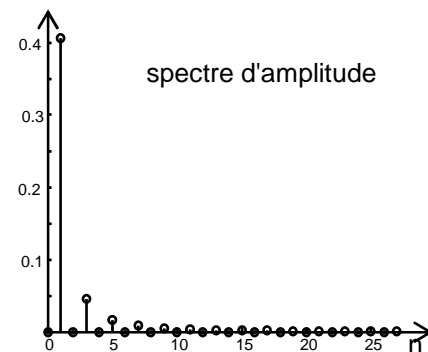
spectre d'amplitude: c_n
spectre de puissance: $1/2(c_n)^2$
erreur en puissance:

$$1 - \frac{P_{\text{SérieFourier}}(1 \text{ jusqu'à } n)}{P_{\text{totale}}(\text{signal centré})}$$

Signal impulsionnel unipolaire de
rapport cyclique 0,2 et de 1V crête à
crête (fig 1-29)



Signal triangulaire centré de 1V
crête à crête (fig 1-30)



I - Transformée de Laplace

Définition : $TL[f(t)] = TL[f(t)\mathbb{1}(t)] = F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt$

avec $\mathbb{1}(t)$ l'échelon unité: $\mathbb{1}(t) = 0$ pour $t < 0$; $\mathbb{1}(t) = 1$ pour $t > 0$

Théorèmes importants

Linéarité : $TL[\lambda f(t) + \mu g(t)] = \lambda TL[f(t)] + \mu TL[g(t)]$

Changement d'échelle des temps : $TL[f(at)\mathbb{1}(t)] = \frac{1}{a} F\left(\frac{p}{a}\right); a \in \mathbb{R}^{*+}$

Changement d'origine des temps : $TL[f(t - t_0)\mathbb{1}(t - t_0)] = e^{-t_0 p} F(p)$ avec $F(p) = TL[f(t)\mathbb{1}(t)]$

Changement d'origine en p : $F(p + a) = TL[e^{-at} f(t)\mathbb{1}(t)]$ avec $TL[f(t)\mathbb{1}(t)] = F(p)$

Produit par t : $TL[t f(t)\mathbb{1}(t)] = -\frac{dF(p)}{dp}$

Division par t : $TL\left[\frac{f(t)}{t}\mathbb{1}(t)\right] = \int_p^{\infty} F(u) du$

Valeur initiale

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{p \rightarrow +\infty} pF(p)$$

Valeur finale

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{p \rightarrow 0^+} pF(p)$$

Transformée des dérivées : $TL[f'(t)] = pF(p) - f(0^+)$

$$TL[f''(t)] = p^2 F(p) - pf(0^+) - f'(0^+)$$

Transformée d'une primitive : $TL\left[\left(\int_0^t f(x) dx\right)\mathbb{1}(t)\right] = \frac{F(p)}{p}$

Transformée d'une fonction périodique (période T): $TL[f(t)\mathbb{1}(t)] = \frac{F_0(p)}{1 - e^{-pT}}$

avec $f_0(t)$ = motif (durée T : nulle sur $]T, +\infty[$) ; $TL[f_0(t)] = F_0(p)$

Produit de convolution : $TL^{-1}[F(p)G(p)] = f(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-u)g(u) du = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)g(t-u) du$

si $f(t)$ et $g(t)$ sont deux fonctions causales : $f(t) * g(t) = \int_0^t f(u)g(t-u) du = \int_0^t f(t-u)g(u) du$

Transformée de Laplace --> étude harmonique (transformée de Fourier): $p = j\omega$

Dictionnaire usuel

$$TL[\mathbb{1}(t)] = \frac{1}{p} ; TL[\delta(t)] = 1 ; TL[t^n \mathbb{1}(t)] = \frac{n!}{p^{n+1}} ; TL[e^{-at}\mathbb{1}(t)] = \frac{1}{p+a} (a \in \mathbb{C})$$

$$TL[\sin(\omega_0 t)\mathbb{1}(t)] = \frac{\omega_0}{p^2 + \omega_0^2} ; TL[\cos(\omega_0 t)\mathbb{1}(t)] = \frac{p}{p^2 + \omega_0^2} ;$$

$$TL[e^{-at}\sin(\omega_0 t)\mathbb{1}(t)] = \frac{\omega_0}{(p+a)^2 + \omega_0^2} ; TL[e^{-at}\cos(\omega_0 t)\mathbb{1}(t)] = \frac{(p+a)}{(p+a)^2 + \omega_0^2}$$

II - Transformée de Fourier

Définitions

Développement en série de Fourier de $x(t)$ de période T :

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos(n \frac{2\pi}{T} t) + b_n \sin(n \frac{2\pi}{T} t) \right] = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[c_n \cos(n \frac{2\pi}{T} t + \varphi_n) \right] = \sum_{n=1}^{\infty} X_n e^{jn \frac{2\pi}{T} t} \text{ avec :}$$

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{t'}^{t'+T} x(t) dt; a_n = \frac{2}{T} \int_{t'}^{t'+T} x(t) \cos(n \frac{2\pi}{T} t) dt; b_n = \frac{2}{T} \int_{t'}^{t'+T} x(t) \sin(n \frac{2\pi}{T} t) dt; (t' \text{ quelconque})$$

$$X_0=c_0=a_0; c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} ; \varphi_n = \arctg(-b_n/a_n); \text{ soit } c_n e^{j\varphi_n} = a_n - j b_n ; X_n = \frac{c_n}{2} e^{j\varphi_n} ; X_{-n} = X_n^* = \frac{c_n}{2} e^{-j\varphi_n}$$

$$\text{Transformée de Fourier : } X(v) = \text{TF}[x(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi vt} dt$$

$$\text{Transformée de Fourier inverse : } x(t) = \text{TF}^{-1}[X(v)] = \int_{-\infty}^{\infty} X(v) e^{j2\pi v t} dv$$

Théorèmes importants

Linéarité : $\text{TF} [\lambda x(t) + \mu y(t)] = \lambda \text{TF} [x(t)] + \mu \text{TF} [y(t)]$

Changement d'échelle des temps : $\text{TF}[\mathbf{x}(\mathbf{a}t)] = \frac{1}{|\mathbf{a}|} \mathbf{X}\left(\frac{\mathbf{v}}{\mathbf{a}}\right); \mathbf{a} \in \mathfrak{R}^*$

Changement d'origine des temps : $\text{TF}[x(t-t_0)] = e^{-j2\pi\nu t_0} X(\nu)$ avec $X(\nu) = \text{TF}[x(t)]$

Changement d'origine en v : $X(v - v_0) = \text{TF}[e^{j2\pi v_0 t} x(t)]$ avec $x(t) = \text{TF}^{-1}[X(v)]$

$$\text{Transformée des dérivées : } \text{TF} \left[\frac{d^n x(t)}{dt^n} \right] = (j2\pi v)^n X(v); \text{TF} [(-j2\pi v)^n x(t)] = \frac{d^n X(v)}{dv^n}$$

$$\text{Produit : TF}[x(t)y(t)] = X(v) * Y(v) \text{ avec } X(v) * Y(v) = \int_{-\infty}^{\infty} X(v-u) Y(u) du = \int_{-\infty}^{\infty} X(v') Y(v-v') dv'$$


Produit de convolution: $\text{TF}[x(t) * y(t)] = X(v) Y(v)$ avec $x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-u) y(u) du = \int_{-\infty}^{\infty} x(t') y(t-t') dt'$

$$\text{Transformée de Fourier de fonction réelle: } x(t) \in \Re \Rightarrow X(-v) = X(v)^* \quad \begin{cases} |X(-v)| = |X(v)| \\ \arg(X(-v)) = -\arg(X(v)) \end{cases}$$

Dictionnaire usuel

$$\overline{\text{TF}[\delta(t)] = 1} ; \quad \text{TF}[1] = \delta(v) ; \quad \text{TF}[e^{j2\pi v_0 t}] = \delta(v - v_0)$$

$$\text{TF}[\cos(2\pi v_0 t)] = \frac{1}{2}(\delta(v + v_0) + \delta(v - v_0)) \quad ; \quad \text{TF}[\sin(2\pi v_0 t)] = \frac{j}{2}(\delta(v + v_0) - \delta(v - v_0))$$

$\Pi_\tau(t)$ porte unitaire centrée de largeur τ

 $: \text{TF}[\Pi_\tau(t)] = \frac{\sin(\pi\nu\tau)}{\pi\nu} = \tau \text{sinc}(\pi\nu\tau)$

Gaussienne: $\text{TF}\left[e^{-a t^2}\right]=\sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\pi^2 v^2}{a}}$ avec $a \in \mathbb{R}^{+}$

$$\text{Peigne de Dirac de période T: } \sqcup_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT); \text{TF} \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT) \right] = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(v - \frac{n}{T}) = \frac{1}{T} \sqcup_{1/T}(v)$$

III - Transformée en Z

Définition (signal causal)

$$TZ [f(t)] = TZ [f(k)] = F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(k) z^{-k} \quad \text{avec } f(k) = f(t=k Te)$$

$$\left. \begin{array}{l} f(t) : \text{fonction du temps} \\ f(k) : \text{suite de nombres} \end{array} \right\} f(k) = f(k Te) ; Te : \text{période d'échantillonnage} = \frac{1}{v_{ech}}$$

Transformée en Z ---> Transformée de Laplace : Relation exacte : $z = e^{pTe}$

$$\text{Relation approchée : } p \approx \frac{2}{Te} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} = 2v_{ech} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \text{ à utiliser avec le pré-décalage des fréquences}$$

$$v_{capp} = \frac{1}{\pi Te} \operatorname{tg}(\pi Te v_c) ;$$

Théorèmes importants

$$\text{Linéarité : } TZ [\lambda f(t) + \mu g(t)] = \lambda TZ [f(t)] + \mu TZ [g(t)]$$

$$\begin{aligned} \text{Décalage temporel : } TZ [f(t - Te) \mathbb{1}(t - Te)] &= TZ [f(k - 1) \mathbb{1}(k - 1)] = z^{-1} F(z) \\ (\text{signal causal}) \rightarrow TZ [f(t + Te) \mathbb{1}(t)] &= TZ [f(k + 1) \mathbb{1}(k)] = z F(z) - z f(0) \end{aligned}$$

Valeur finale (si elle existe)

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(k) = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) F(z)$$

$$TZ [e^{-at} f(t)] = F\left(\frac{z}{e^{-aTe}}\right)$$

Valeur initiale

$$f(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} F(z)$$

$$TZ [t f(t)] = -z Te \frac{dF(z)}{dz}$$

Dictionnaire usuel

$$TZ [\delta(t)] = 1 \quad ; \quad TZ [\mathbb{1}(t)] = \frac{z}{z-1} \quad ; \quad TZ [t \mathbb{1}(t)] = \frac{z Te}{(z-1)^2}$$

$$TZ [a^{\frac{t}{Te}} \mathbb{1}(t)] = \frac{z}{z-a} \quad ; \quad TZ [e^{-at} \mathbb{1}(t)] = \frac{z}{z - e^{-aTe}} \quad ; \quad TZ [t e^{-at} \mathbb{1}(t)] = \frac{z Te e^{-aTe}}{(z - e^{-aTe})^2}$$

$$TZ [\sin(\omega t) \mathbb{1}(t)] = \frac{z \sin(\omega Te)}{z^2 - 2z \cos(\omega Te) + 1} \quad ; \quad TZ [\cos(\omega t)] = \frac{z(z - \cos(\omega Te))}{z^2 - 2z \cos(\omega Te) + 1}$$

$$TZ [e^{\frac{t}{\tau} \sin(\omega t)} \mathbb{1}(t)] = \frac{z e^{\frac{Te}{\tau} \sin(\omega Te)}}{z^2 - 2z e^{\frac{Te}{\tau} \cos(\omega Te)} + e^{-2\frac{Te}{\tau}}}$$

$$TZ [e^{\frac{t}{\tau} \cos(\omega t)} \mathbb{1}(t)] = \frac{z(z - e^{\frac{Te}{\tau} \cos(\omega Te)})}{z^2 - 2z e^{\frac{Te}{\tau} \cos(\omega Te)} + e^{-2\frac{Te}{\tau}}}$$

Formulaire de trigonométrie

$$\sin(a \pm b) = \sin(a) \cos(b) \pm \cos(a) \sin(b) ; \cos(a \pm b) = \cos(a) \cos(b) \mp \sin(a) \sin(b) ;$$

$$\sin(a) \cos(b) = \frac{1}{2} (\sin(a-b) + \sin(a+b)) ;$$