Exercice 1 SVD généralisée

Soit un triplet statistique (X, Q, D). On utilise la norme de Frobenius suivante $\|X\|_{Q,D} = \mathrm{tr}(X^T D X Q)$.

1. Justifier l'existence et la notation de $Q^{\pm 1/2}, D^{\pm 1/2}$.
2. On note $X = U\Sigma V^T$ la SVD généralisée de (X, Q, D). A partir de la SVD simple de $D^{1/2} X Q^{1/2} = U'\Sigma' V'^T$, montrer que $\Sigma = \Sigma'$, $V = Q^{-1/2} V'$ et $U = D^{-1/2} U'$.
3. On admettra alors que $X_k = \sum_{s=1}^{k} s_s u_s v_s^T$ est la matrice de rang k la plus proche de X pour cette norme.

1. $Q = P \Delta P^{-1}$ (car Q diagonalisable). d'où $Q^{\pm 1/2} = P \Delta^{\pm 1/2} P^{-1}$ car Δ mat. diag.

2. $X'^T X' = Q^{1/2} X^T D^{1/2} D^{1/2} X Q^{1/2} = Q^{1/2} X^T D X Q^{1/2}$

Soit Σ' la matrice de r valeurs propres $\lambda_1 \geq \dots \lambda_r > 0$ avec V' : vect. propres en colonnes

$Q^{1/2} X^T D X Q^{1/2} V' = V' \Sigma'^2$ (car $Av = \lambda v$)

Or on a $X^T D X Q V = V \Sigma^2$, Soit $Q^{1/2} . X^T D X Q^{1/2} Q^{1/2} V = Q^{1/2} V \Sigma^2$

On a donc $\Sigma' = \Sigma$ et les colonnes de $Q^{1/2} V$ et V' colinéaires

On a $V'^T V' = I_r$ vp.o.n.

et $V^T Q V = I_r$ vp. Q .on $V^T Q^{1/2} Q^{1/2} V = I_n$

Exercice 2 Lien entre SVD et Analyse factorielle

Soit un triplet statistique (X, Q, D), X est supposée centrée. On note X_i les lignes et X^j les colonnes.

L'analyse factorielle consiste à représenter le nuage par projection Q orthogonale dans un sous espace de dimension réduite en optimisant l'inertie projetée, revenant à décomposer le nuage suivant des axes factoriels Q orthogonaux.

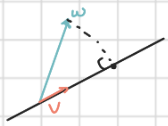
1. Exprimer DX et QX^T, en fonction des X_i. Montrer que l'inertie totale $I_T = \sum_{i=1}^{n} p_i d_Q^2(i, g_I) = \sum_{i=1}^{n} p_i X_i^T Q X_i = \mathrm{tr}(DXQX^T) = \mathrm{tr}(X^T D X Q)$.
2. En déduire la matrice X_k de rang $k \leq p$ la plus proche de X au sens de la norme $\|X\|_{Q,D} = \mathrm{tr}(X^T D X Q)$.
3. L'opérateur Q orthogonal sur un axe normé v est $vv^T Q$. Montrer que π_k l'opérateur de projection Q orthogonal sur $E_k = \mathrm{Vect}\{v_1, \dots, v_k\}$ est $\pi_k = \sum_{s=1}^{k} v_i v_i^T Q$.
4. En déduire en utilisant la SVD de X que la projection du nuage sur E_k est $X\pi^T = X_k$.
5. Montrer que le nuage ainsi obtenu a l'inertie maximale dans un sous espace de dimension k.
6. Conclure.

1. $I_T = \sum_{i=1}^{n} p_i d^2(g_I, i) \underset{\text{centré}}{=} \sum_{i=1}^{n} p_i X_i^T Q X_i = \mathrm{tr}(DXQX^T)$. $D = \mathrm{diag}(p_i)$ poids de l'individu i

$\vec{i}$, $g(0,0)$

2. Théorème d'Eckart - Young : SVD (X, Q, D) $X_k = \sum_{s=1}^{k} \sqrt{\lambda_s} u_s v_s^T$

X_k minimum $\|X - X_k\|_{Q,D}$



3. $\Pi_v = vv^T Q$ $\Pi_v \omega = v \underbrace{v^T Q \omega}_{\text{affixe}}$

$\{v_1, \dots, v_k\}$ est une famille Q orthonormé, donc $\Pi_k = \sum_{s=1}^{k} v_s v_s^T Q$

$\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} = \langle \vec{OM}, \vec{i} \rangle \vec{i} + \langle \vec{OM}, \vec{j} \rangle \vec{j}$

4- Projection du nuage X sur E_k

On a le nuage : $X\Pi_k^T = \left(\sum_{s=1}^{r} \sqrt{\lambda_s} u_s v_s^T\right)\left(\sum_{p=1}^{k} Q v_p v_p^T\right)$

$$\begin{pmatrix} < & x_1^T & > \\ & \vdots & \\ < & x_n^T & > \end{pmatrix} \Pi_k^T = \begin{pmatrix} < & (\Pi_k x_1)^T & > \\ & \vdots & \\ < & (\Pi_k x_n)^T & > \end{pmatrix}$$

On a $u_s^T Q v_p = \delta_{sp}$
$= \sum_{p=1}^{k} \sqrt{\lambda_p}\, u_p v_p^T = X_k$

X_k est la projection de X sur E_k

5. Théorème de Pythagore $X = \underbrace{X\Pi_k^T + X(I_p - \Pi_k^T)}_{\text{sous-espace } Q \perp}$

$\|X\|^2_{Q,D} = \|X_k\|^2_{Q,D} + \|X - X_k\|^2_{Q,D}$ X_k minimise $\|X - X_k\|^2_{Q,D}$ donc maximise $\|X_k\|^2$ égale à l'inertie du nuage projeté sur E_k

6. Donc le sous-espace de dim k suivant lequel l'inertie projetée est maximale est Vect $\{v_1, \dots, v_k\}$ avec v_i les vecteurs de la DVS de (X, Q, D)

$\rightarrow$ Composants principales : $F_L = \underbrace{XQV}_{\text{affixe des projections des points.}}$

Exercice 3 Application à l'ACP

On considère ici le triplet $(X, I_q, \frac{1}{n}I_n)$ avec X un tableau numérique centré. Chaque ligne est associée à un individu x_i et chaque colonne à une variable X^j.

1. A quoi correspond $X^T DXQ$?
2. Déterminer les axes factoriels et les composantes principales des individus et des variables.
3. Quelle est l'inertie projetée suivant un axe factoriel ? un plan factoriel ?
4. Retrouver les résultats obtenus en S1 statistique.
5. Que se passe-il si X est réduite ?
6. Retrouver les formules de transition.
7. Application numérique : réaliser l'analyse en composantes principales de

$$X = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

1. DVS $(X, I_p, \frac{1}{n} I_n)$ $X^T DXQ = \frac{1}{n} X^T X = [Cov(X^i, X^j)]$ est la matrice de
X centré variance-covariance

2. Les axes factoriels sont définis par les vecteurs propres de $\frac{1}{n} X^T X$; v_s

3. Compo. principales lignes : $F_L = XQV = XV$ $F_1 = Xv_1$
colonnes : $F^L = V\Sigma$ $F^1 = \sqrt{\lambda_1}\, v_1$

4. Théorème d'Eckart-Young : $\|X - X_k\|^2_{Q,D} = \sum_{q=k+1}^{r} \lambda_q$

Donc $\|X_k\|^2_{Q,D} \underset{\text{pythagore}}{=} \|X\|^2_{Q,D} - \|X - X_k\|^2_{Q,D} = \sum_{q=1}^{k} \lambda_q$

$I_{v_s} = \lambda_s = Var(F_s)$ $I_{v_s, v_s'} = \lambda_s + \lambda_s'$

5- Si X réduite, $Var(X^j) = 1$

Donc $Cor(X^j, X^{j'}) = \frac{cov(X^j, X^{j'})}{\sqrt{Var(X^j) Var(X^{j'})}} = cov(X^j, X^{j'})$

Donc $\frac{1}{n} X^T X = \left[cov(X^j, X^{j'})\right]$ et matrice des corrélations

$I_T = tr\left(\frac{1}{n} X^T X\right) = 1 + \dots + 1 = p.$