Séries Chronologiques

Université d'Angers – M2 Data Science

Contrôle continu (2h)

Dans tout le sujet, les notations du cours sont utilisées. Sauf mention contraire les processus sont étudiés sur $\mathbb{Z}$ et (ε_t) est un bruit blanc de variance $\sigma^2 > 0$.

Exercice 1. *(5 points)* Soit une tendance quadratique $m_t = a_0 + a_1\,t + a_2\,t^2$ avec $a_2 \neq 0$. On considère le filtre linéaire

$$F(B) = \sum_{k\,\in\,\mathbb{Z}} c_k\,B^k.$$

On note aussi $F_\ell(B) = c_{-\ell}\,B^{-\ell} + \ldots + c_{-1}\,B^{-1} + c_0\,I + c_1\,B + \ldots + c_\ell\,B^\ell$ les filtres de même forme que $F(B)$ tronqués à ℓ décalages futurs et passés. On cherche un filtre de même forme que $F(B)$ qui laisse invariantes les tendances quadratiques, c'est-à-dire tel que $F(B)\,m_t = m_t$.

1) Montrer qu'un tel filtre doit satisfaire

$$\sum_{k\,\in\,\mathbb{Z}} c_k = 1, \qquad \sum_{k\,\in\,\mathbb{Z}} k\,c_k = 0 \qquad \text{et} \qquad \sum_{k\,\in\,\mathbb{Z}} k^2\,c_k = 0.$$

2) Montrer que le seul filtre $F_1(B)$ qui laisse invariante m_t est le filtre $F_1(B) = I$.
3) Proposer un filtre $F_2(B) \neq I$ qui laisse invariante m_t.
4) Construire un filtre linéaire $H(B) \neq 0$ qui annule m_t, c'est-à-dire tel que $H(B)\,m_t = 0$.

Exercice 2. *(5 points)* Soit (X_t) un processus AR(1) centré de paramètre $0 < |\phi| < 1$ dont on appelle γ la fonction d'autocovariance.

1) Justifer que (X_t) est causal. En déduire que $\gamma(h) = \phi\,\gamma(h-1)$ pour tout $h \geqslant 1$.
2) Donner l'autocorrélation partielle α de (X_t).
3) Soit (Y_t) un processus stationnaire et centré dont la fonction d'autocovariance est aussi γ. Montrer rigoureusement que (Y_t) admet une écriture AR(1).
   Indication : on pourra commencer par poser $Z_t = Y_t - \phi\,Y_{t-1}$...

Exercice 3. *(5 points)* Pour chacun des processus suivants, préciser s'il s'agit d'un ARMA stationnaire.

— Si la réponse est oui : donner les ordres (p, q) et indiquer si le processus admet une écriture AR(∞) et/ou MA(∞).

— Si la réponse est non : proposer un opérateur qui, appliqué au processus, permet de se ramener à une écriture ARMA stationnaire.

a) $X_t = \varepsilon_t$

b) $X_t = \dfrac{5}{6}\,X_{t-1} - \dfrac{1}{6}\,X_{t-2} + \varepsilon_t + \varepsilon_{t-1}$

c) $X_t = \dfrac{5}{4}\, X_{t-1} - \dfrac{1}{4}\, X_{t-2} + \varepsilon_t + 2\,\varepsilon_{t-1}$

d) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k}\, X_{t-k} = \varepsilon_t$

e) $X_t = -X_{t-2} + \varepsilon_t + \dfrac{1}{4}\,\varepsilon_{t-1}$

f) $24\, X_t = 26\, X_{t-1} - 9\, X_{t-2} + X_{t-3} + 24\,\varepsilon_t - 14\,\varepsilon_{t-1} + 2\,\varepsilon_{t-2}$

Exercice 4. *(5 points)* Soit la fonction définie par

$$\forall\, h \in \mathbb{Z}, \qquad \gamma(h) = \begin{cases} 1 & \text{si } h = 0 \\ \beta & \text{si } |h| = 1 \\ 0 & \text{si } |h| \geqslant 2. \end{cases}$$

On veut montrer que γ ne peut être une fonction d'autocovariance que si et seulement si $|\beta| \leqslant \frac{1}{2}$.

1) On suppose dans un premier temps que $|\beta| \leqslant \frac{1}{2}$ et donc que $1 - 4\,\beta^2 \geqslant 0$. Soit le processus engendré par la relation

$$X_t = (I + \theta\, B)\,\varepsilon_t$$

avec

$$\theta = \frac{1 + \sqrt{1 - 4\,\beta^2}}{2\,\beta} \qquad \text{et} \qquad \sigma^2 = \frac{1}{1 + \theta^2}.$$

Montrer qu'un tel processus admet γ comme fonction d'autocovariance.

2) Réciproquement, considérons les vecteurs de taille n donnés par

$$u = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & \ldots & (-1)^{n-1} \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad v = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \end{pmatrix}.$$

On peut établir par quelques calculs supplémentaires que

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} u_i\,\gamma(i-j)\,u_j = n - 2\,(n-1)\beta \qquad \text{et} \qquad \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} v_i\,\gamma(i-j)\,v_j = n + 2\,(n-1)\beta.$$

Montrer que si $\beta > \frac{1}{2}$ (à l'aide de la première égalité) ou si $\beta < -\frac{1}{2}$ (à l'aide de la seconde égalité), il existe un rang n à partir duquel γ ne peut plus être une fonction d'autocovariance.