Séries Chronologiques

Université d'Angers – M2 Data Science

Contrôle Continu (1 heure 30)

Barème donné à titre indicatif, rédaction soignée.

Exercice 1. *(7 points)* Soit un processus autorégressif d'ordre 1 qui n'est pas, à proprement parler, un AR(1) en raison d'un aléa ajouté dans le coefficient [1]. En résumé,

$$\forall\, t \geqslant 1, \qquad X_t = \theta_t\, X_{t-1} + \varepsilon_t$$

où (ε_t) est uns bruit blanc de variance $\sigma^2 > 0$ et (θ_t) est une suite i.i.d. décorrélée de (ε_t), d'espérance θ et de variance $\tau^2 > 0$. On suppose pour simplifier que $X_0 = 0$.

1) Montrer que $\mathbb{E}[X_t] = 0$.

2) Posons

$$\forall\, k \geqslant 0, \qquad P_{t,\,k} = \prod_{\ell=0}^{k-1} \theta_{t-\ell} = \theta_t\, \ldots\, \theta_{t-k+1}$$

le produit des k termes précédant t dans le coefficient. Montrer que

$$\forall\, h \geqslant 0, \qquad \mathbb{E}[P_{t,\,k}\, P_{t,\,k+h}] = (\tau^2 + \theta^2)^k\, \theta^h.$$

3) Proposer une condition sur l'espérance et la variance des coefficients aléatoires pour que

$$\forall\, h \geqslant 0, \qquad \lim_{t \,\to\, +\infty} \mathbb{C}\mathrm{ov}(X_t, X_{t+h})$$

existe et identifier la limite $\gamma(h)$.

Exercice 2. *(8 points)* Soit le processus défini par

$$\forall\, t \in \mathbb{Z}, \qquad X_t = X_{t-1} - \frac{X_{t-2}}{4} + \varepsilon_t$$

avec (ε_t) un bruit blanc de variance $\sigma^2 > 0$.

1) Justifier qu'il s'agit d'une écriture causale et déterminer les coefficients (ψ_k) de l'écriture MA(∞).

2) En déduire la variance $\gamma(0)$ du processus. On rappelle que, pour tout $0 \leqslant p < 1$,

$$\sum_{k\,\geqslant\,0} k\, p^k = \frac{p}{(1-p)^2} \qquad \text{et que} \qquad \sum_{k\,\geqslant\,0} k^2\, p^k = \frac{2\,p}{(1-p)^3} - \frac{p}{(1-p)^2}.$$

3) Calculer son autocovariance $\gamma(1)$. *Indication :* par une approche Yule-Walker, on peut exprimer directement $\gamma(1)$ en fonction de $\gamma(0)$... et donc s'épargner beaucoup de calculs.

4) Déterminer la PACF du processus.

1. On parle ici d'un RCAR(1) pour *Random Coefficient AR(1).*

Exercice 3. *(5 points)* Soit le processus additif défini par la relation

$$\forall\, t \in \mathbb{Z}, \qquad X_t = a_0 + a_1\, t + S_t + \varepsilon_t$$

où (ε_t) est un bruit blanc de variance $\sigma^2 > 0$ et S_t est une tendance s-périodique.

1) Proposer un opérateur linéaire $F(B)$ tel que $(F(B)\, X_t)$ forme un processus stationnaire de moyenne m à identifier.
2) Calculer l'ACF du processus $(F(B)\, X_t)$.