Institut Universitaire de Technologie Lyon1
Site GRATTE-CIEL

Université Claude Bernard
LYON I

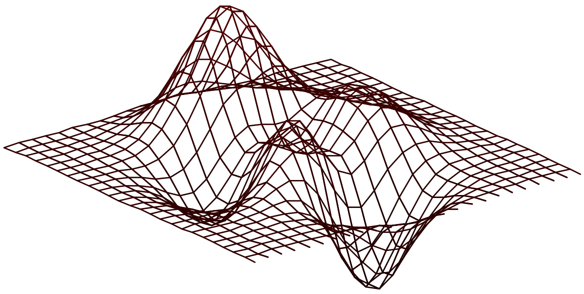
Département de Génie Electrique et Informatique Industrielle

2ème ANNEE

Travaux dirigés de Mathématiques appliquées

et

Traitement du signal



Christian CACHARD
Hervé LIEBGOTT
Bruno NEYRAN
David ROUSSEAU

2012-2013

I - Séries et Transformation de Fourier – représentation fréquentielle

Exercice 1(série Fourier, difficile)

1) Donner les différentes origines du temps et le décalage de niveau conduisant à une fonction paire ou impaire pour le signal triangulaire symétrique représenté figure 1.

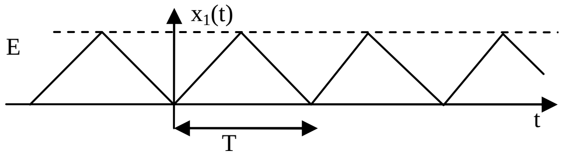


figure 1

2) En prenant l'origine des temps au niveau de la pointe minimale, calculer la décomposition en série de Fourier de $x_1(t)$.

3) Tracer sur un même graphique x_1 (t) et les trois premiers harmoniques de sa décomposition en SF. Porter sur ce graphique ce que représentent les coefficients c_n de la décomposition en SF.
4) **Par un changement d'origine** exprimer la décomposition en série de Fourier de $x_2(t)$, qui correspond au même signal triangulaire mais avec l'origine des temps au niveau de la pointe maximale.
5) Tracer le spectre d'amplitude de $x_1(t)$ et de $x_2(t)$.

Exercice 2 (série Fourier et peigne de Dirac)

Soit le signal dent de scie $x_1(t)$ représenté figure 2.

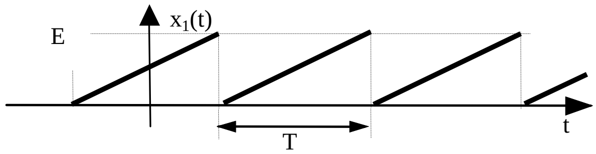


figure 2

1) Montrer que $x_1(t)$ peut s'écrire : $x_1(t) = x_2(t) + cte$ où $x_2(t)$ est un signal impair.
2) Effectuer la décomposition en série de Fourier de $x_2(t)$. En déduire la décomposition en série de Fourier de $x_1(t)$.
3) Tracer sur un même graphique $x_1(t)$ et les trois premiers harmoniques de sa décomposition en SF. Porter sur ce graphique ce que représentent les coefficients c_n de la décomposition en SF.
4) Tracer le spectre d'amplitude de $x_1(t)$ et de $x_2(t)$.
5) **Par un changement d'origine** exprimer la décomposition en série de Fourier de $x_3(t) = x_1(t\text{-}T/2)$ où l'origine est pris au niveau de la discontinuité.
6) Facultatif: Tracer sur un même graphique $x_3(t)$ et les trois premiers harmoniques de sa décomposition en SF. Porter sur ce graphique ce que représentent les coefficients c_n de la décomposition en SF.
7) Que peut-on dire des spectres d'amplitude de $x_1(t)$ et de $x_3(t)$.
8) Tracer, puis calculer la dérivée de $x_3(t)$ en utilisant l'impulsion de Dirac. Exprimer cette dérivée avec

$$Ш(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$$ la fonction peigne de Dirac.

9) En exprimant la dérivée de la série de Fourier de $x_3(t)$, déduire la décomposition en série de Fourier du peigne de Dirac

Exercice 3 (impulsion rectangulaire et théorème de Parseval)

On considère x(t) un signal impulsionnel d'amplitude E, de rapport cyclique $\eta = \tau/T = 0{,}1$ et de fréquence $\nu_0 = 1/T = 1{,}5$ MHz que l'on veut transmettre à travers une ligne.
1) Donner le contenu fréquentiel de ce signal en traçant le spectre d'amplitude de x(t).
2) Calculer la puissance moyenne de x(t).
3) Calculer la bande passante que doit posséder la ligne si on considère que le signal est correctement reçu en transmettant 90% de sa puissance moyenne. Pour cela on complétera le tableau suivant en utilisant un logiciel de calcul (Excel, Matlab, Sclab, …):

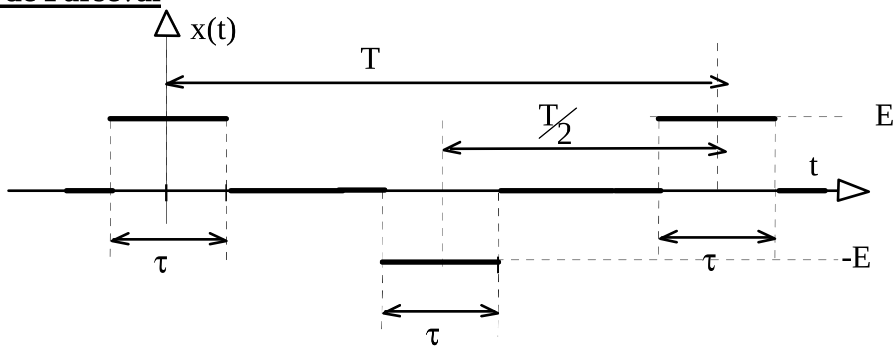
n	0	1	…	………		………	11
c_n							
$P(h_n)$							
$\sum_{i=0}^{n} P(h_i)$							
% de P_{tot}							

Où

- $P(h_n)$ représente la puissance moyenne de l'harmonique n,
- $\sum_{i=0}^{n} P(h_i)$ représente la puissance moyenne des n premiers harmoniques.
- % de P_{tot} donne le pourcentage de $\sum_{i=0}^{n} P(h_i)$ par rapport à la puissance moyenne du signal impulsionnel x(t).

<u>Exercice 4 : application de Parseval</u>

On considère le signal x(t), périodique, de période T. Sa décomposition en série de Fourier est :



$$x(t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos(n\frac{2\pi}{T}t)\right] ; \text{ avec } a_n = \frac{2E}{n\pi}\left(1+(-1)^{n+1}\right)\sin(n\pi\frac{\tau}{T}) ;\ \eta = \frac{\tau}{T}$$

AN : T=20 ms; τ=4ms, E=1V

1) Tracer le spectre d'amplitude du signal x(t), en graduant numériquement l'axe des fréquences. On pourra se limiter à la bande 0-400Hz.

2) Calculer la puissance moyenne de x(t).

3) On filtre x(t) par un filtre passe bas. Quelle doit être la bande passante de ce filtre pour avoir au minimum 80% de sa puissance moyenne de x(t). Ecrire alors l'équation du signal filtré.

4) On défini THD, le taux de distorsion harmonique d'un signal x(t) de décomposition en série de Fourier: $x(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[c_n \cos(n\frac{2\pi}{T}t + \varphi_n)\right]$; par THD = $\sqrt{\dfrac{\sum_{n=2}^{\infty}\frac{c_n^2}{2}}{\frac{c_1^2}{2}}}$ Calculer le taux de distorsion harmonique de x(t).

<u>Exercice 5 : série de Fourier complexe, décomposition en exponentielles (vecteurs tournants)</u>

1) Soit x(t) le signal : $x(t) = K + a_1 \cos(2\pi\nu_1 t)$

Tracer le signal x(t)

2) Calculer la décomposition en série de Fourier réelle (décomposition en cosinus/sinus) de x(t).

Tracer le spectre d'amplitude de x(t).

3) Ecrire x(t) sous la forme d'une série de Fourier complexe (décomposition en exponentielles, vecteurs tournant) : $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n e^{jn\frac{2\pi}{T}t}$

4) Tracé le module du spectre complexe de x(t)

Exercice 6 : relation série de Fourier, série de Fourier complexe et transformée de Fourier

1) Calculer TF[δ(t)]. On pourra utiliser la propriété : $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)x(t)dt = x(0)$,

2) Calculer TF^{-1}[$\delta(\nu)$], en déduire TF[1].
3) Tracer δ(t), TF[δ(t)], $\delta(\nu)$ et TF^{-1}[$\delta(\nu)$].
4) Revoir la démonstration de la propriété : $\mathrm{TF}\left[f(t)e^{j2\pi\nu_0 t}\right] = F(\nu - \nu_0)$
5) En déduire $\mathrm{TF}[y(t)]$ avec $y(t) = \cos(2\pi\nu_0 t)$. Tracer $|Y(\nu)|$
6) Tracer le spectre d'amplitude de y(t) : coefficient c_n
7) Ecrire y(t) sous la forme d'une série de Fourier complexe (voir exercice 5).
8) Tracé le module du spectre complexe de y(t) : coefficients X_n
9) Pour une fonction périodique, quelle relation existe-il entre les valeurs c_n, $|X_n|$.

Exercice 7 : relation série de Fourier, série de Fourier complexe et transformée de Fourier (lourd!)

Soit x(t) un signal impulsionnel périodique de période T d'amplitude E et de rapport cyclique $\eta=\tau/T$..

On rappelle $x(t) = E\eta + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2E}{n\pi} \sin(n\pi\eta) \cos(n \frac{2\pi}{T} t)$

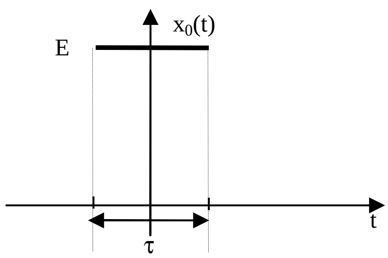
1) Exprimer x(t) sous la forme : $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n e^{jn\frac{2\pi}{T}t}$ et donner l'expression des X_n, les coefficients de la décomposition de x(t) en série de Fourier complexe.

2) Exprimer X(ν) la transformée de Fourier de x(t) sous la forme : $X(\nu) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n \delta(\nu - \frac{n}{T})$.

3) Tracer $|X(\nu)|$ et le spectre d'amplitude (les c_n) (AN η=1/3). Rappeler la relation entre a_n, b_n, c_n, $|X_n|$, les coefficients des différentes formes d'une série de Fourier.

4) Soit x_0(t) le signal composé d'une impulsion de largeur τ, d'amplitude E. Calculer $X_0(\nu) = \mathrm{TF}[x_0(t)]$ et tracer $|X_0(\nu)|$

Calculer la valeur de $X_0(\nu)$ pour les fréquences $\frac{n}{T}$ correspondant aux harmoniques de x(t).



Exercice 8 : vers la transformée de Fourier d'une sinusoïde (facultatif)

1) Soit x(t) le signal à support borné τ, défini par:

$x(t) = \cos(2\pi\nu_0 t)$ pour $t \in [-\tau/2; \tau/2]$ pour $\tau=4/\nu_0$.

x(t) = 0 ailleurs

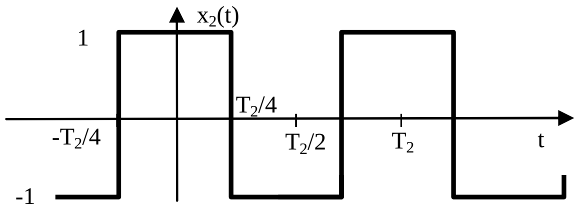
Tracer x(t), puis calculer sa transformée de Fourier X(ν).
2) Tracer l'allure de X(ν)
3) En faisant tendre τ vers l'infini, donner l'allure de la transformée de Fourier d'une sinusoïde définie sur tout R.

Exercice 9 : Changement de fréquence

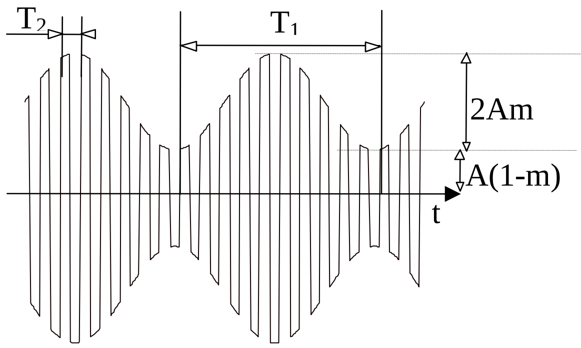
1) Soit x(t) le signal : $x(t) = K + a_1 \cos(2\pi\nu_1 t) + a_2 \cos(2\pi\nu_2 t)$ avec ν_1=100Hz et ν_2=300Hz
Tracer sur un même graphique les trois composantes du signal x(t) avec $a_1=2a_2=3K$
Tracer le spectre d'amplitude de x(t).
Tracer le module de sa transformée de Fourier $X(\nu)$.
Quelle est la bande passante de x(t).
2) On fait le produit de x(t) avec un signal sinusoïdal $p(t) = A\cos(2\pi\nu_3 t)$ avec ν_3=1kHz et on obtient le signal y(t) = x(t). p(t)
Tracer le spectre d'amplitude ou le module de la transformée de Fourier de y(t). Quelle est la bande passante de y(t).

Exercice 10 : Modulation d'amplitude

1) Soit $x_1(t) = A(1+m \cos(2\pi\nu_1 t))$, tracer $x_1(t)$ et son spectre d'amplitude (AN $\nu_1 = 1/T_1$ = 300Hz et 0<m<1 et A>0)
2) Soit $x_2(t)$ un signal carré symétrique d'amplitude ±1, de rapport cyclique 0,5 et de fréquence $\nu_2 = 1/T_2$ (AN ν_2 = 2,5 kHz).Tracer le spectre d'amplitude du signal $x_2(t)$. Sa décomposition en série de Fourier a déjà été calculé précédemment.



3) On considère le signal $x_3(t)$ de la figure suivante. Ecrire $x_3(t)$ en fonction de $x_1(t)$ et de $x_2(t)$



4) En déduire le tracé du spectre d'amplitude du signal $x_3(t)$ jusqu'à 13kHz.

5) On filtre $x_3(t)$ par un filtre passe bas idéal coupant à $2\nu_2$ = 5kHz pour obtenir le signal $x_4(t)$. Tracer le spectre d'amplitude de $x_4(t)$. Ecrire l'expression de $x_4(t)$.
6) Exprimer $x_4(t)$ sous la forme $x_4(t) = x_1(t). p(t)$ en donnant la valeur de p(t).
7) Tracer l'allure de $x_4(t)$ puis la comparer à celle de $x_3(t)$.
8) Quelle opération électronique est réalisée entre $x_1(t)$ et $x_4(t)$.
9) Comment sont modifiés les spectres si $x_1(t) = Am \cos(2\pi\nu_1 t)$,

Exercice 11 : Modulation de la couleur en norme PAL

Le signal vidéo couleur à transmettre est constitué de trois signaux:

- le signal y(t) de luminosité qui occupe la bande de fréquence [0; 3,8 MHz]
- deux signaux $c_1(t)$ et $c_2(t)$ (formant ce que l'on appelle la Croma). Ils ont chacun une largeur de bande de [0 ; 0,6 MHz]. Cette bande passante réduite utilise le fait que l'oeil localise précisément les changement de luminosité mais reste imprécis pour localiser les changements de couleur.

1) Donner une représentation symbolique du spectre d'amplitude de chacun de ces signaux.

Afin de transmettre **simultanément** ces trois signaux, on choisit de faire un multiplexage fréquentiel. Mais, on ne dispose que d'une largeur de bande de fréquence comprise entre 0 et 5 MHz.
2) En norme PAL, on choisit de faire une modulation d'amplitude sans porteuse des signaux $c_1(t)$ et $c_2(t)$. Soit $p_1(t) = A\cos(2\pi\nu_p t)$ la porteuse qui sert à moduler $c_1(t)$ et soit $m_1(t) = c_1(t)\, p_1(t)$ le signal modulé.

Tracer le spectre d'amplitude de $m_1(t)$. Expliquer comment on peut, sans problèmes, transmettre y(t) avec ($c_1(t)$ OU $c_2(t)$). Donner la fréquence de la porteuse.

3) On réalise la modulation de $c_2(t)$ par la porteuse $p_2(t) = A\cos(2\pi\nu_p t + \pi/2)$. Donner la bande de fréquence occupée par le signal modulé $m_2(t) = c_2(t)\, p_2(t)$

Représenter l'allure du spectre d'amplitude du signal émis $e_m(t) = y(t) + m_1(t) + m_2(t)$.

4) A la réception, quelle opération faut-il réaliser pour obtenir le signal luminance y(t)

5) On fait ensuite séparément le produit du signal $r(t) = m_1(t)+m_2(t)$ par $p_1(t)$ d'une part et $p_2(t)$ d'autre part. Quelle est l'équation le signal obtenu après chacun de ces produits ? Représenter l'allure du spectre de chacun de ces signaux.

6) Que faut-il encore faire pour retrouver les signaux $c_1(t)$ et $c_2(t)$.

7) Faire un synoptique du dispositif (facultatif).

<u>Exercice 12 : Filtre moyenneur</u>

Soit un filtre moyenneur sur un intervalle de temps τ, qui avec un signal d'entrée x(t) donne en sortie

$$y(t) = \frac{1}{\tau}\int_{t-\tau/2}^{t+\tau/2} x(u)du$$

1) Trouver la réponse impulsionnelle de ce filtre

2) En déduire sa réponse fréquentielle. Tracer le module de cette réponse avec des axes linéaires puis logarithmiques comme dans un diagramme de Bode.

<u>Remarque</u>: la réponse fréquentielle d'un filtre **n'est pas un spectre**, mais le **rapport** de 2 transformée de Fourier ou de 2 spectres d'amplitude:

$$H(\nu) = \frac{Y(\nu)}{X(\nu)} = \frac{2Y(\nu)}{2X(\nu)}\,;\ |H(\nu)| = \frac{2|Y(\nu)|}{2|X(\nu)|}$$

On trace donc $|H(\nu)|$ et $\arg(H(\nu))$ mais jamais $2|H(\nu)|$

3) Calculer sa fréquence de coupure à -3dB. On posera AN: τ = 10ms

<u>Exercice 13 : Fenêtrage (facultatif, variante de l'exercice 8)</u>

On considère x(t) un signal sinusoïdal, $x(t) = A\cos(\frac{2\pi}{T}t)$ et le signal y(t) défini par:

y(t) = x(t) pour $t \in [-\tau/2 ; \tau/2]$

y(t) = 0 ailleurs

1) Tracer x(t) et y(t) en prenant τ=4T comme dans l'exercice 8)

2) Calculer la transformée de Fourier de x(t) et tracer le module de sa transformée de Fourier (voir exercice 6-5))

3) Tracer la fonction porte $\Pi_\tau(t)$ qui permet d'écrire : $y(t) = x(t).\Pi_\tau(t)$. Donner la transformée de Fourier et tracer le module de sa transformée de Fourier de $\Pi_\tau(t)$ (voir exercice 7).

4) En déduire la transformée de Fourier de y(t). On utilisera la propriété suivante :
$y(t) * \delta(t-t_0) = y(t-t_0)$ où * est le produit de convolution et $\delta(t-t_0)$ l'impulsion de Dirac en $t=t_0$.

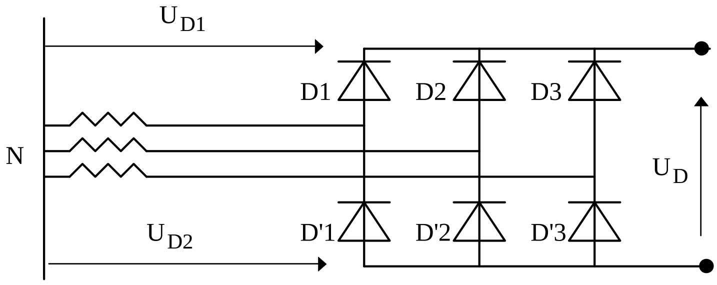
5) Tracer le module de la transformée de Fourier de y(t) en prenant τ=4T comme dans l'exercice 8)

6) En déduire le spectre de y(t) en prenant τ=4T.

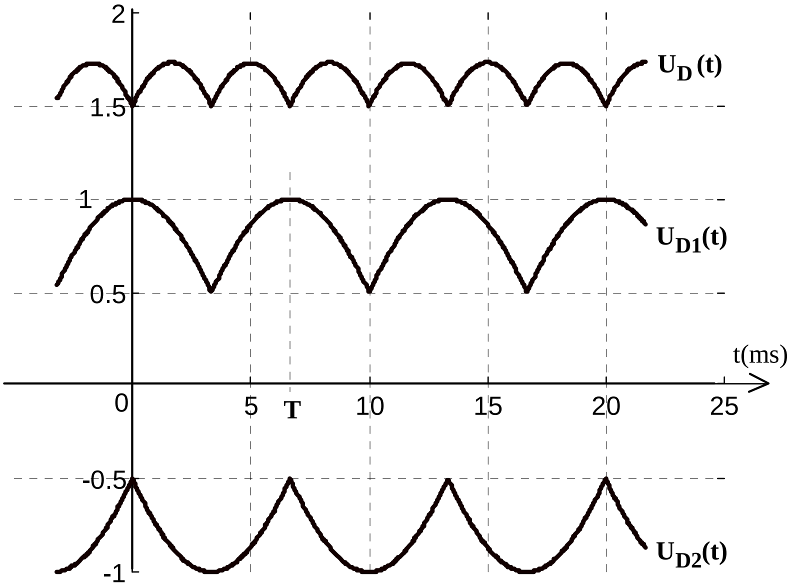
Problèmes pour s'amuser . . .

<u>Problème 1</u>

On considère un pont PD3 à 6 diodes, branché sur un réseau **triphasé** équilibré de fréquence **50Hz**



Sur la figure ci-dessous sont représentés les signaux $U_{D1}(t)$, $U_{D2}(t)$ et $U_D(t)$



On donne la décomposition en série de Fourier du signal $U_{D1}(t)$:

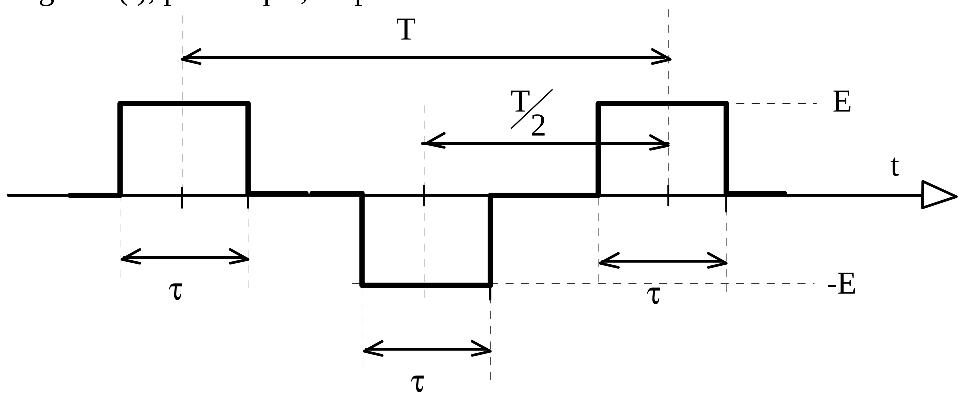
$$U_{D1}(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[c_n \cos(n\frac{2\pi}{T}t)\right];\ \text{avec}\ c_0 = \frac{3}{\pi}\sin(\frac{\pi}{3})\ \text{ et }\ c_n = \frac{3}{\pi}\left[\frac{\sin\left(n\pi - \frac{\pi}{3}\right)}{3n-1} + \frac{\sin\left(n\pi + \frac{\pi}{3}\right)}{3n+1}\right]$$

où T représente la **période du signal $U_{D1}(t)$.**

1) Tracer le spectre d'amplitude du signal $U_{D1}(t)$, en graduant numériquement l'axe des fréquences jusqu'à 600Hz.
2) Ecrire l'expression du signal $U_{D2}(t)$ en fonction du signal $U_{D1}(t)$.
3) En déduire la décomposition en série de Fourier du signal $U_{D2}(t)$.
4) Tracer son spectre d'amplitude.
5) Ecrire l'expression du signal $U_D(t)$ en fonction des signaux $U_{D1}(t)$ et $U_{D2}(t)$.
6) En déduire la décomposition en série de Fourier du signal $U_D(t)$. On pourra vérifier la fréquence du signal $U_D(t)$.
7) Tracer son spectre d'amplitude jusqu'à 600Hz.

<u>Problème 2</u>

On considère le signal x(t), périodique, de période T.



1) Calculer la décomposition en série de Fourier du signal x(t) (origine des temps à votre choix).

2) Tracer son spectre d'amplitude.

<u>Problème 3</u>

On considère un signal x(t) impulsionnel d'amplitude unité, de rapport cyclique η=0,2 et de fréquence ν_0=2kHz.

1) Représenter x(t) en indiquant les différents paramètres.

2) Calculer la décomposition en série de Fourier du signal x(t).

3) Calculer la puissance moyenne de x(t).

4) On défini THD, le taux de distorsion harmonique d'un signal x(t) de décomposition en série de Fourier:

$$x(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[c_n \cos(n\frac{2\pi}{T}t + \varphi_n)\right] \quad ; \qquad \text{par } THD = \sqrt{\frac{\sum_{n=2}^{\infty}\frac{c_n^{\ 2}}{2}}{\frac{c_1^{\ 2}}{2}}}$$

Calculer le taux de distorsion harmonique de x(t).

<u>Problème 4</u>

les questions 2) et 3) peuvent être traitées même après une réponse erronée de la question 1)

On considère un signal x(t) occupant la bande de fréquence [ν_{min}; ν_{max}].

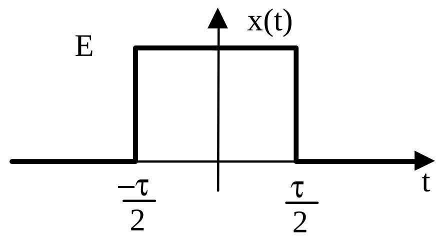
1) Tracer de manière conventionnelle le spectre de x(t)

2) On considère le signal m(t) défini par : m(t) = p(t)(1 + x(t)) avec p(t) = A cos($2\pi\nu_p$t). Tracer le spectre d'amplitude de m(t) avec la manière conventionnelle que vous avez utilisé au 1) (on prendra $\nu_p > \nu_{max}$)

3) En supposant que $|x(t)| < 1$ ($\forall t$), on veut connaître le spectre du signal $d(t) = |m(t)|$. Pour cela on considérera que $d(t) = \sqrt{m(t)^2}$ et on prendra l'approximation $\sqrt{1 + y(t)} \approx 1 + \frac{y(t)}{2}$

<u>Problème 5</u>

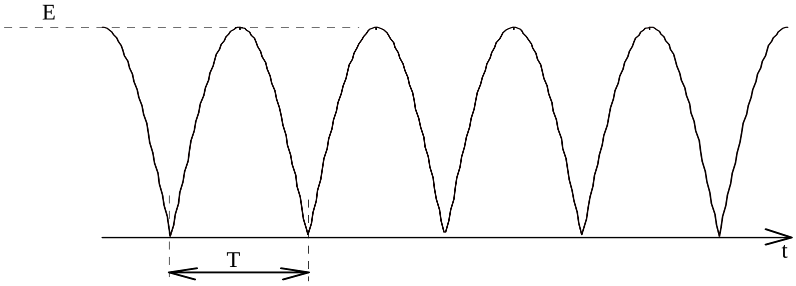
1) Calculer la **transformée de Fourier** X(ν) du signal impulsion rectangulaire x(t) de largeur τ et d'amplitude E.



2) Tracer le module de X(ν)

<u>Problème 6</u>

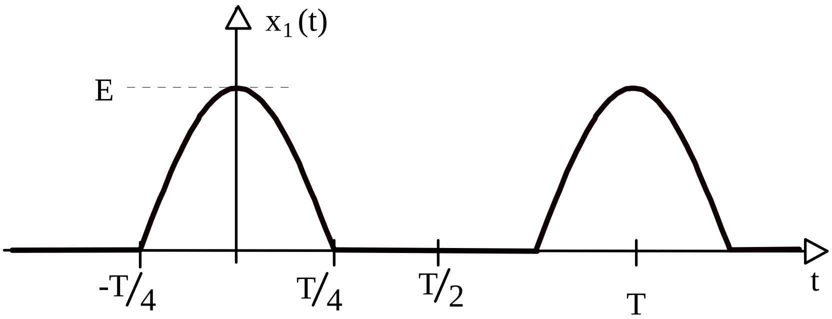
les questions 4) et 5) peuvent être traitées indépendamment
On considère le signal x(t) issu d'un redressement double alternance 50Hz



1) Choisir l'origine des temps . Ecrire ce que vaut x(t) sur une période astucieusement choisie.
2) Calculer la décomposition en série de Fourier de x(t)
3) Tracer le spectre d'amplitude de x(t)
4) Calculer P_T la puissance moyenne de x(t)
5) Calculer P_{HF} la puissance moyenne des composantes de x(t) dont la fréquence est supérieure à 150Hz (si on a pas répondu à la question 4, on peut supposer connu P_T).

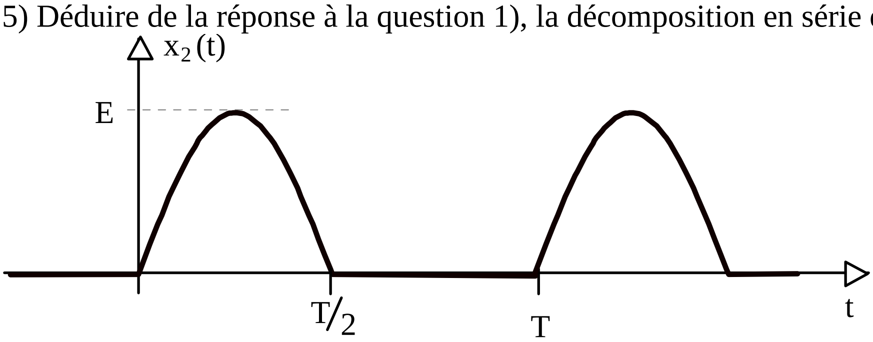
Problème 7

On considère le signal périodique $x_1(t)$ de période T de 20ms, correspondant à un redressement mono alternance.



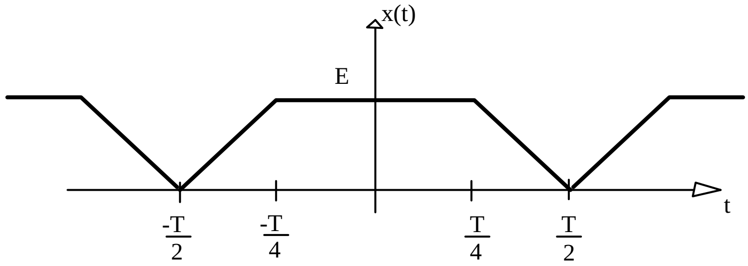
1) Calculer la décomposition en série de Fourier de $x_1(t)$.On détaillera le calcul de la valeur de l'amplitude du fondamental.
2) Pour la suite de l'Problème on suppose que la décomposition en série de Fourier s'écrit:

$x_1(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[c_n \cos(n\frac{2\pi}{T}t + \varphi_n)\right]$. Pour les tracés, les valeurs numériques des coefficients c_0 et c_n peuvent être librement choisies.
Tracer le spectre d'amplitude de $x_1(t)$.
Quelle forme de décroissance ce spectre doit-il présenter quand la fréquence tend vers l'infinie.
3) Tracer le module de $X_1(\nu)$ la transformée de Fourier de $x_1(t)$.
4) Quelle est le pourcentage de puissance de $x_1(t)$ présent dans les fréquences inférieures à 75 Hz. On rappelle que la valeur efficace d'un signal mono alternance est $\frac{E}{2}$.
Application numérique si vous avez fait la question 1.
5) Déduire de la réponse à la question 1), la décomposition en série de Fourier du signal $x_2(t)$

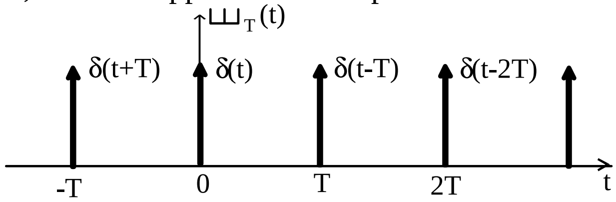


Problème 8

On considère le signal périodique x(t) de période T suivant :

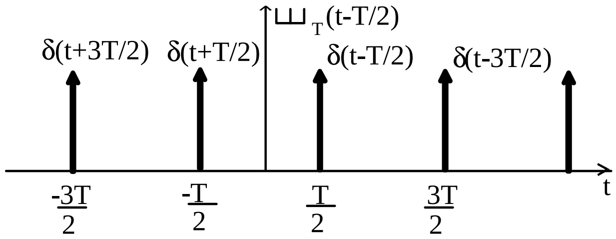


1) Tracer $\frac{dx(t)}{dt}$ et $\frac{d^2x(t)}{dt^2}$ les dérivées successives de x(t)2) Soit $Ш_T(t)$ le peigne de Dirac de période T, dont on rappelle la décomposition en série de Fourier:



$$Ш_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT) = \frac{1}{T} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{T} \cos(n \frac{2\pi}{T} t)$$

On note $Ш_T(t\text{-}T/2)$ le peigne de Dirac de période T et décalé de une demi-période.



$$Ш_T(t\text{-}T/2) = \frac{1}{T} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n.2}{T} \cos(n \frac{2\pi}{T} t)$$

Exprimer $\frac{d^2x(t)}{dt^2}$ à partir de un ou plusieurs peignes de Dirac éventuellement décalés3) En déduire la décomposition en série de Fourier de $\frac{d^2x(t)}{dt^2}$, puis celle de x(t)

<u>Problème 9</u>

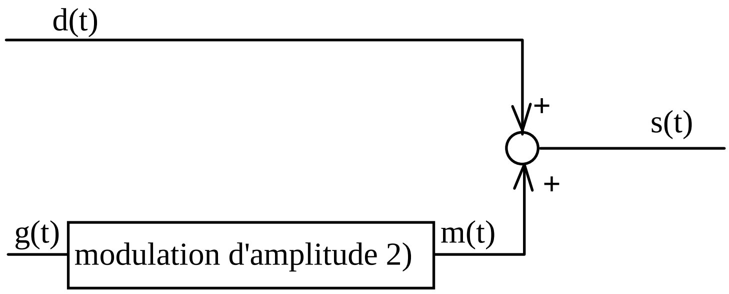
On considère un signal audio g(t) occupant la bande de fréquence [ν_{min}; ν_{max}] avec ν_{min}=20Hz et ν_{max}=15 kHz.

1) Tracer de manière conventionnelle le spectre de g(t)

2) On effectue la modulation de g(t) par une porteuse p(t) de fréquence ν_p : p(t) = A cos($2\pi\nu_p$t). Ecrire ce que vaut m(t) le signal modulé pour une modulation sans porteuse.

Tracer le spectre d'amplitude de m(t) (on prendra .$\nu_p > \nu_{max}$)

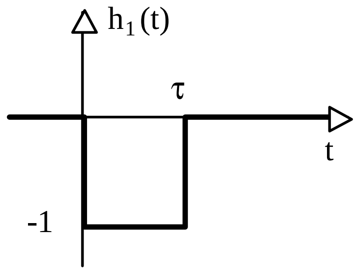
3) On considère deux signaux audio g(t) et d(t) occupant chacun la bande de fréquence donnée précédemment. Afin de réaliser **un** signal stéréophonique s(t) on fait s(t) = d(t) + m(t) où m(t) est le signal g(t) modulé en amplitude de la question 2).



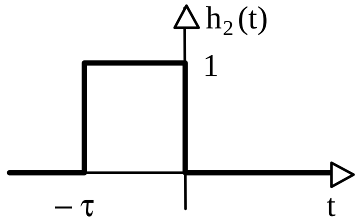
Quelle doit être la fréquence ν_p de la porteuse si on veut un intervalle ΔB = 8kHz entre le spectre de d(t) et le spectre de m(t). Tracer le spectre de s(t).

Problème 10

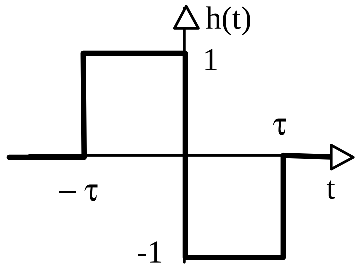
1) Soit le signal $h_1(t)$. Calculer $H_1(\nu)$ la transformée de Fourier de $h_1(t)$



2) Soit le signal $h_2(t)$. Calculer $H_2(\nu)$ la transformée de Fourier de $h_2(t)$



3) Soit le signal h(t). Calculer H(ν) la transformée de Fourier de h(t)



4) En approximant $\cos(x) \approx 1 - \frac{x^2}{2}$, calculer une approximation simple de H(ν). Tracer le module et l'argument de cette approximation.5) Si h(t) est la réponse impulsionnelle d'un filtre, à partir de la réponse à la question 4), expliquer l'opération réalisée, à une constante près, par ce filtre.

Problème 11

On considère le signal y(t) dont la transformée de Fourier vaut Y(ν) :

$$Y(\nu) = TF\left[y(t)\right] = \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{(-1)^{-n+1}E}{\nu}\delta(\nu - \frac{n}{T}) + 2E\delta(\nu) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}E}{\nu}\delta(\nu - \frac{n}{T})$$

1) Tracer $|Y(\nu)|$.

2) Le signal y(t) est-il périodique ou non périodique.

3) Tracer le spectre d'amplitude de y(t).

Problème 12

On considère le système de la figure 2

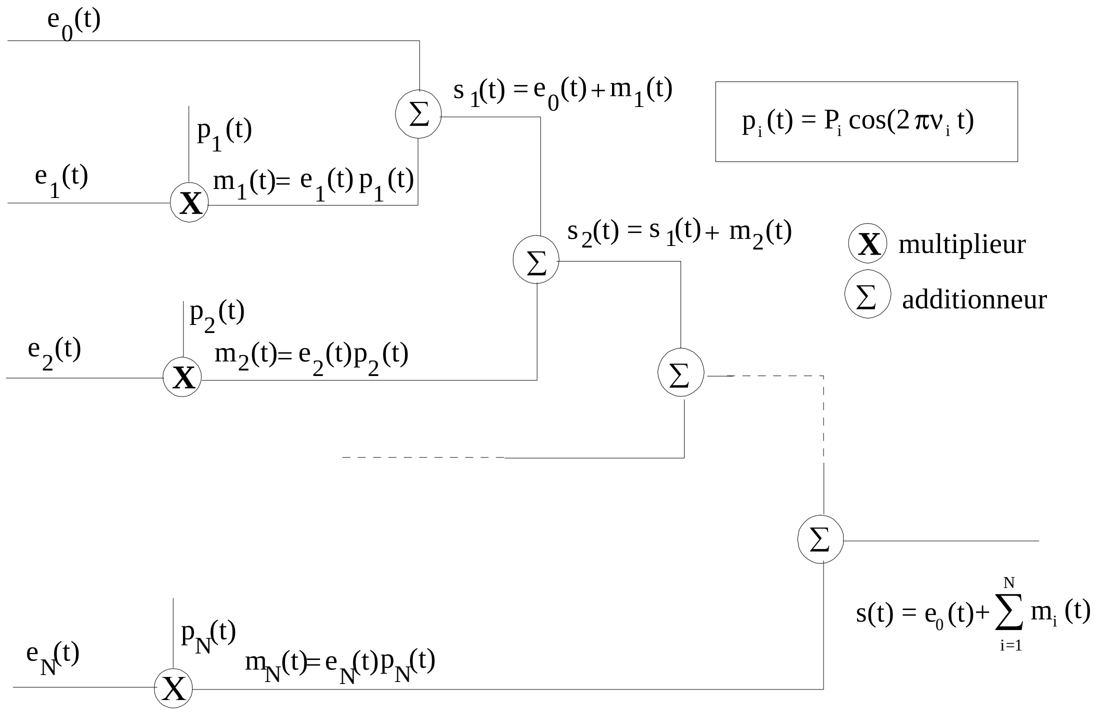


figure 2

Tous les signaux $e_i(t)$ sont différents, mais possèdent la même étendue spectrale comprise entre ν_{min} et ν_{max}.

La figure 3 représente de manière schématique le spectre d'un signal $e_i(t)$: l'étendue spectrale est représentée par un triangle dont la partie haute se trouve pour la valeur ν_{max} du spectre de e_i, et dont la hauteur A_i représente l'amplitude du signal.
Avec : ν_{min} = 400Hz; ν_{max} = 4kHz.
Les signaux $p_i(t)$ sont sinusoïdaux de fréquence ν_i :
$p_i(t) = P_i \cos(2\pi\nu_i t)$

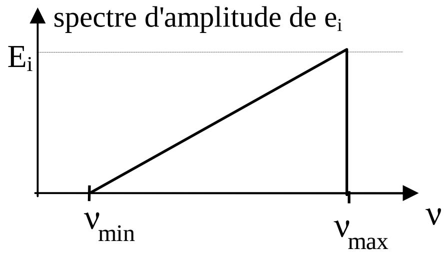
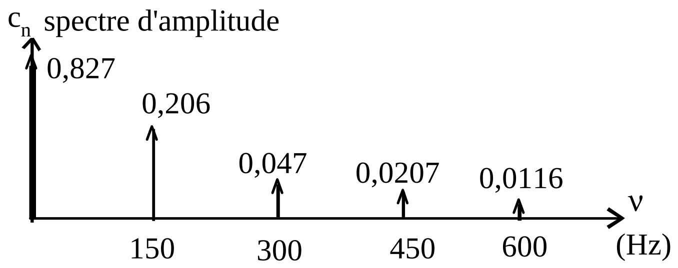


figure 3

1) Tracer l'allure du spectre d'amplitude de p_1 (t).
2) Tracer le spectre d'amplitude de $m_1(t) = e_1(t) .p_1(t)$. On utilisera pour représenter ce spectre la même convention que pour le tracé ci-dessus : l'étendue spectrale est représentée par un triangle dont la partie haute se trouve pour la valeur **ν_{max} du spectre de e_1**, et dont la hauteur représente l'amplitude du signal.
3) Pour quelle fréquence ν_1 de $p_1(t)$ le spectre de $s_1(t) = e_0(t) + m_1(t)$ ne présente-t-il pas de recouvrement spectral.
Tracer le spectre de s_1 en prenant cette valeur de ν_1.
4) Tracer le spectre d'amplitude de $s_2(t) = s_1(t) + m_2(t)$ en prenant pour ν_2 une valeur n'entraînant aucun recouvrement spectral. Préciser la valeur que vous choisissez pour ν_2.
5) On dispose pour transmettre le signal $s(t) = e_0(t) + \sum_{i=1}^{N} m_i(t)$ d'une bande passante de 204kHz.
Combien de signaux $e_i(t)$ peut on transmettre en même temps? Justifier précisément votre réponse.
6) Quel traitement doit-on appliquer au signal s(t) pour retrouver :
- le signal e_0 (t)
- le signal $e_1(t)$

Réponse problème 1

1) $U_{D1}(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos(n\frac{2\pi}{T}t)\right]$;$a_0$=0,827;$a_1$=0,2067;$a_2$=-0,0473;$a_3$=0,0207;$a_4$=-0,0116



2) $U_{D2}(t)=-U_{D1}(t-T/2)$

3)

$$U_{D2}(t) = -a_0 - \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos(n\frac{2\pi}{T}(t - T/2))\right] = -a_0 - \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos(n\frac{2\pi}{T}t - n\pi))\right]$$

$$= -a_0 - \sum_{n=1}^{\infty}\left[(-1)^n\ a_n \cos(n\frac{2\pi}{T}t)\right]$$

Les a_n pairs sont de signe opposé, les impairs les mêmes que pour $U_{D1}(t)$

4) Le spectre d'amplitude est le même que celui de $U_{D1}(t)$

5) $U_D(t) = U_{D1}(t) - U_{D2}(t)$;

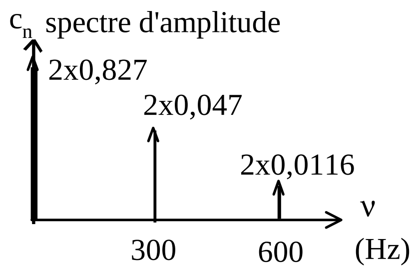
6) $U_D(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\frac{2\pi}{T}t) + a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[(-1)^n\ a_n \cos(n\frac{2\pi}{T}t)\right]$;

$$U_D(t) = 2a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n (1 + (-1)^n) \cos(n\frac{2\pi}{T}t)$$

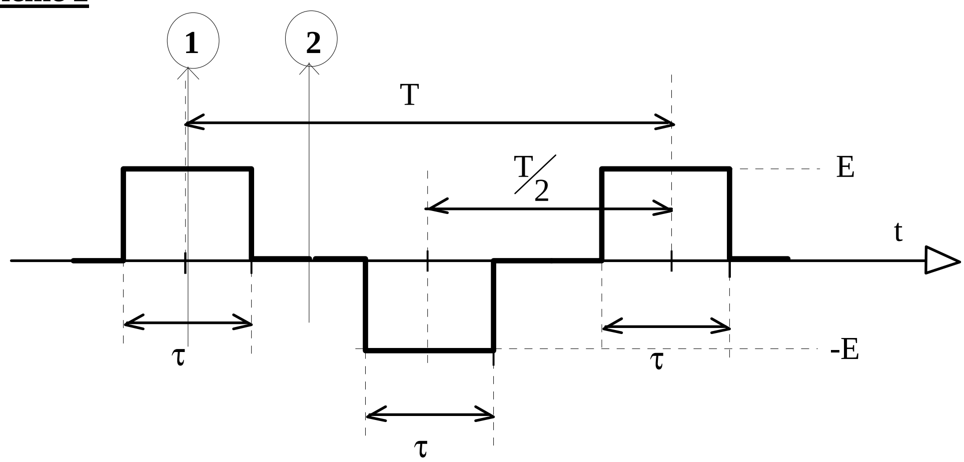
$$= 2a_0 + \sum_{m=1}^{\infty} 2a_{2m} \cos(2m\frac{2\pi}{T}t)$$; impairs nulle, pairs double

Fondamental de période T/2

7)



Réponse problème 2



Origine 1: signal pair b_n =0; a_0=0;

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{T/2}^{T/2} x(t)\cos(n\frac{2\pi}{T}t)\,dt = \frac{4}{T}\left[\int_0^{\tau/2} E\cos(n\frac{2\pi}{T}t)\,dt + \int_{T/2-\tau/2}^{T/2} -E\cos(n\frac{2\pi}{T}t)\,dt\right];$$

$$a_n = \frac{4E}{T}\left[\frac{T}{n2\pi}\sin(n\frac{2\pi}{T}\frac{\tau}{2}) - \frac{T}{n2\pi}\left(\sin(n\frac{2\pi}{T}\frac{T}{2}) - \sin(n\frac{2\pi}{T}(\frac{T}{2}-\frac{\tau}{2}))\right)\right] = \frac{2E}{n\pi}\left[\sin(n\pi\frac{\tau}{T}) + \sin(-n\pi\frac{\tau}{T}+n\pi)\right];$$

$a_n = \frac{2E}{n\pi}\sin(n\pi\frac{\tau}{T})\left(1+(-1)^{n+1}\right)$; a_n=0 si n est pair; $a_n = 4E\eta\frac{\sin(n\pi\eta)}{n\pi\eta}$ si n est impair($\eta = \frac{\tau}{T}$)

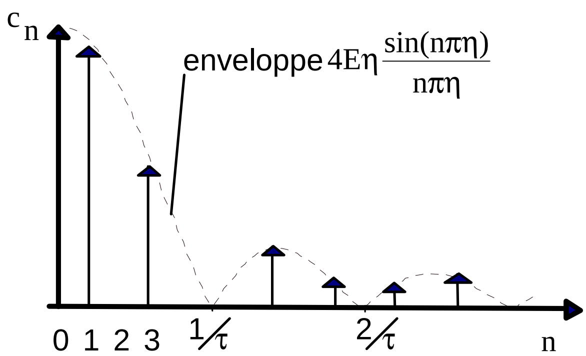
<u>Origine 2</u>: signal impair a_n =0; a_0=0; $b_n = \frac{2}{T}\int_{T/2}^{T/2} x(t)\sin(n\frac{2\pi}{T}t)\,dt = \frac{4}{T}\int_{T/4-\tau/2}^{T/4+\tau/2} -E\sin(n\frac{2\pi}{T}t)\,dt$

$$b_n = \frac{4E}{T}\frac{T}{n2\pi}\left(\cos(n\frac{2\pi}{T}(\frac{T}{4}+\frac{\tau}{2})) - \cos(n\frac{2\pi}{T}(\frac{T}{4}-\frac{\tau}{2}))\right) = \frac{2E}{n\pi}\left[\cos(n\pi\frac{\tau}{T}+n\frac{\pi}{2}) - \cos(-n\pi\frac{\tau}{T}+n\frac{\pi}{2})\right]$$

n pair (n=2p): $b_n = \frac{2E}{n\pi}\left[(-1)^p\cos(n\pi\frac{\tau}{T}) - (-1)^p\cos(n\pi\frac{\tau}{T})\right] = 0$

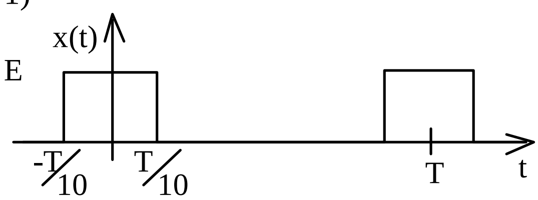
n impair : $b_n = -4E\eta\frac{\sin(n\pi\eta)}{n\pi\eta}$ avec $\eta = \frac{\tau}{T}$

2)



<u>Réponse problème 3</u>

1)



2) $x(t) = 0{,}2E + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2E}{n\pi}\sin(n\frac{\pi}{5})\cos(n\frac{2\pi}{T}t)$

3) $P_{moy} = \frac{1}{T}\int_{\theta}^{\theta+T} x^2(t)\,dt = \frac{1}{T}\int_{-T/10}^{T/10} E^2 dt = 0{,}2E^2$

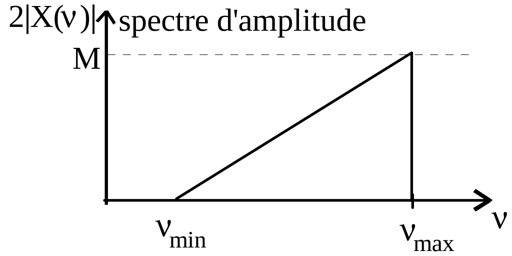
4) $P_{moy} = c_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_n^2}{2} = 0{,}2E^2$;

$$THD = \sqrt{\frac{\sum_{n=2}^{\infty}\frac{c_n^2}{2}}{\frac{c_1^2}{2}}} = \sqrt{\frac{P_{moy} - c_0^2 - \frac{c_1^2}{2}}{\frac{c_1^2}{2}}} = \sqrt{\frac{0{,}2E^2 - 0{,}04E^2 - \frac{\left(\frac{2E}{\pi}\sin(\frac{\pi}{5})\right)^2}{2}}{\frac{\left(\frac{2E}{\pi}\sin(\frac{\pi}{5})\right)^2}{2}}} = \sqrt{\frac{0{,}2 - 0{,}04 - \frac{\left(\frac{2}{\pi}\sin(\frac{\pi}{5})\right)^2}{2}}{\frac{\left(\frac{2}{\pi}\sin(\frac{\pi}{5})\right)^2}{2}}}$$

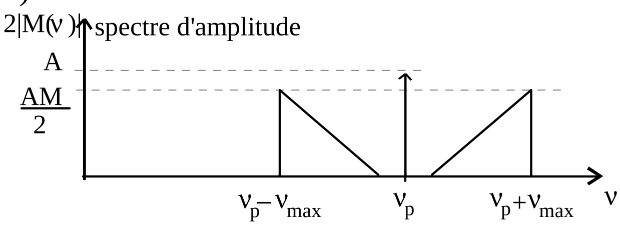
THD =1,13

Réponse problème 4

1)

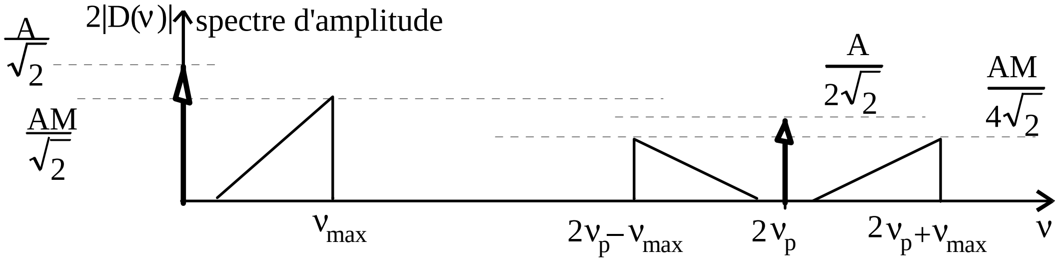


2)



3) $d(t)=\sqrt{m(t)^2}=(1+x(t))A\sqrt{\cos^2(2\pi\nu_p t)}=\frac{(1+x(t))A}{\sqrt{2}}\sqrt{1+\cos(2\pi 2\nu_p t)}\approx\frac{(1+x(t))A}{\sqrt{2}}\left(1+\frac{1}{2}\cos(2\pi 2\nu_p t)\right)$

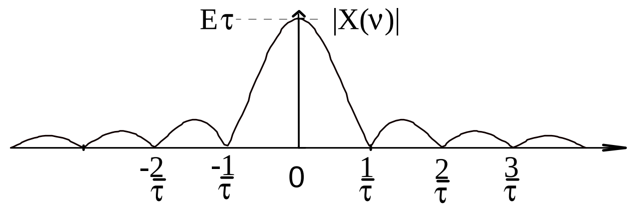
$$d(t)\approx\frac{A}{\sqrt{2}}\left(1+x(t)+\frac{1}{2}\cos(2\pi 2\nu_p t)+\frac{1}{2}x(t)\cos(2\pi 2\nu_p t)\right)$$



Réponse problème 5

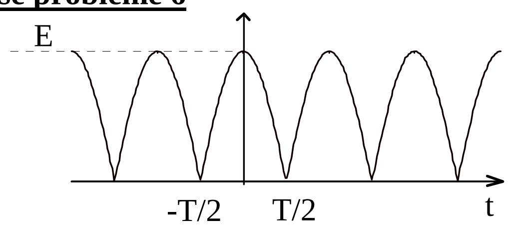
1) $X(\nu)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-j2\pi\nu t}dt=\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}}E\,e^{-j2\pi\nu t}dt=E\left[\frac{e^{-j2\pi\nu t}}{-j2\pi\nu}\right]_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}}=\frac{E}{\pi\nu}\left(\frac{e^{-j\pi\nu\tau}-e^{j\pi\nu\tau}}{-2j}\right)=\frac{E}{\pi\nu}\sin(\pi\nu\tau)$

2)



Réponse problème 6

1)



$x(t) = E\cos(2\pi\frac{1}{2T}t)$ sur [-T/2 ; T/2]

2) $a_0=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}E\cos(\frac{\pi}{T}t)\,dt=\frac{2E}{T}\int_{0}^{T/2}\cos(\frac{\pi}{T}t)\,dt=\frac{2E}{\pi}\left[\sin(\frac{\pi}{T}t)\right]_0^{T/2}=\frac{2E}{\pi}$

$$a_n=\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2}E\cos(\frac{\pi}{T}t)\cos(n\frac{2\pi}{T}t)dt=\frac{2E}{T}\int_0^{T/2}\left(\cos(\frac{\pi}{T}t+n\frac{2\pi}{T}t)+\cos(\frac{\pi}{T}t-n\frac{2\pi}{T}t)\right)dt$$

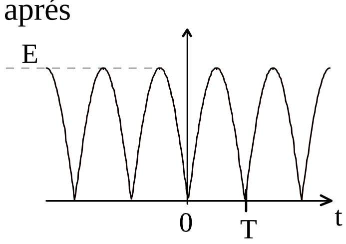
$$a_n=\frac{2E}{T}\left[\int_0^{T/2}\left(\cos(\frac{\pi(1+2n)}{T}t)+\cos(\frac{\pi(1-2n)}{T}t)\right)dt\right]$$

$$a_n=\frac{2E}{T}\left[\frac{T}{\pi(1+2n)}\sin(\frac{\pi}{T}(1+2n)t)+\frac{T}{\pi(1-2n)}\sin(\frac{\pi}{T}(1-2n)t)\right]_0^{\frac{T}{2}}=\frac{2E}{\pi}\left[\frac{\sin(\frac{\pi}{2}+n\pi)}{(1+2n)}+\frac{\sin(\frac{\pi}{2}-n\pi)}{(1-2n)}\right]$$

$$a_n = \frac{2E}{\pi}\left[\frac{(-1)^n}{(1+2n)} + \frac{(-1)^n}{(1-2n)}\right] = (-1)^{n+1}\frac{4E}{\pi(4n^2-1)}$$

$b_n = 0$

avec origine des temps T/2 aprés



$$x(t) = E\sin(2\pi\frac{1}{2T}t) \text{ sur } [0\ ;\ T];\ b_n = 0\ ;\ a_0 = \frac{2E}{\pi}$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T E\sin(\frac{\pi}{T}t)\cos(n\frac{2\pi}{T}t)dt = \frac{2E}{T}\int_0^T \cos(\frac{\pi}{T}t - \frac{\pi}{2})\cos(n\frac{2\pi}{T}t)dt$$

$$a_n = \frac{2E}{T}\int_0^T \frac{1}{2}\left[\cos\left((\frac{\pi}{T} + n\frac{2\pi}{T})t - \frac{\pi}{2}\right) + \cos\left((\frac{\pi}{T} - n\frac{2\pi}{T})t - \frac{\pi}{2}\right)\right]dt$$

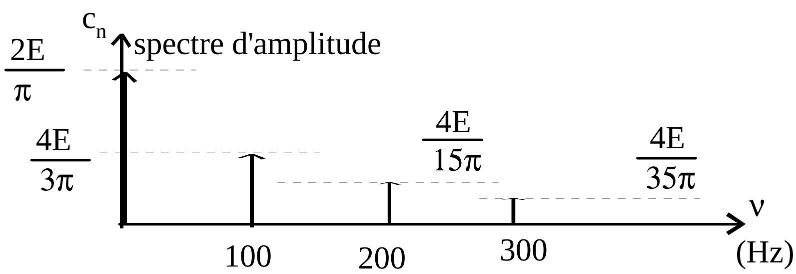
$$a_n = \frac{E}{T}\int_0^T \sin\left(\frac{\pi}{T}(1+2n)t\right) + \sin\left(\frac{\pi}{T}(1-2n)t\right)dt = \frac{E}{T}\left[\frac{-T}{\pi(1+2n)}\cos(\frac{\pi}{T}(1+2n)t) + \frac{-T}{\pi(1-2n)}\cos(\frac{\pi}{T}(1-2n)t)\right]_0^{\frac{T}{2}}$$

$$a_n = \frac{E}{\pi}\left[\frac{-1}{(1+2n)}(\cos(\pi+2n\pi)-1) + \frac{-1}{(1-2n)}(\cos(\pi-2n\pi)-1)\right] = \frac{E}{\pi}\left[\frac{2}{1+2n} + \frac{2}{1-2n}\right] = \frac{-4E}{\pi(4n^2-1)}$$

3)

$a_1 = \frac{4E}{3\pi}$; $a_2 = \frac{-4E}{15\pi}$;

$a_3 = \frac{4E}{35\pi}$;



$c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = |a_n|$

4) $P_T = \frac{E^2}{2}$

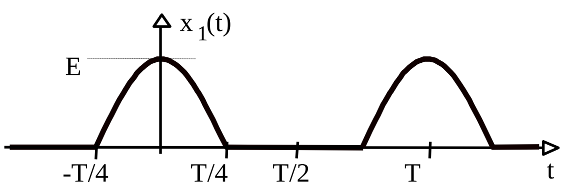
5) $P_{HF} = P_T$ - Puisssance des composantes de fréquence inférieure à 150Hz (harmonique 0 et 1)

$$P_{HF} = P_T - (a_0^2 + \frac{a_1^2}{2}) = \frac{E^2}{2} - (a_0^2 + \frac{a_1^2}{2})\ ;$$

AN : $P_{HF} = \frac{E^2}{2} - (\frac{4E^2}{\pi^2} + \frac{1}{2}\frac{16E^2}{9\pi^2}) = \frac{E^2}{2}\left(1-2(\frac{4}{\pi^2} + \frac{8}{9\pi^2})\right) = \frac{E^2}{2}(0{,}0093)$; moins de 1% de P_T

Réponse problème 7

1)



$x(t) = E\cos(2\pi\frac{1}{T}t)$ sur [-T/4 ; T/4]zéro ailleurs

Signal pair : $b_n = 0$

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{-T/4}^{T/4} E\cos(\frac{2\pi}{T}t)\,dt = \frac{2E}{T}\int_0^{T/4}\cos(\frac{2\pi}{T}t)\,dt = \frac{E}{\pi}\left[\sin(\frac{\pi}{T}t)\right]_0^{T/4} = \frac{E}{\pi}$$

$$a_n = \frac{2E}{T}\left[\int_0^{T/4}\left(\cos(\frac{2\pi(n+1)}{T}t) + \cos(\frac{2\pi(n-1)}{T}t)\right)dt\right]$$

$$a_n = \frac{2E}{T}\left[\frac{T}{2\pi(n+1)}\sin(\frac{2\pi}{T}(n+1)t)+\frac{T}{2\pi(n-1)}\sin(\frac{2\pi}{T}(n-1)t)\right]_0^{\frac{T}{4}} = \frac{E}{\pi}\left[\frac{\sin(\frac{\pi}{2}(n+1))}{(n+1)}+\frac{\sin(\frac{\pi}{2}(n-1))}{(n-1)}\right]$$

Fondamental (n=1) : $a_1 = \frac{E}{\pi}\left[0+\frac{\pi}{2}\left(\lim_{n\to 1}\frac{\sin((n-1)\frac{\pi}{2})}{(n-1)\frac{\pi}{2}}\right)\right] = \frac{E}{\pi}\frac{\pi}{2} = \frac{E}{2}$ n impair $(n = 2p+1 \neq 1)$: $a_n = 0$ car $\sin(\pi(p+1)) = 0$ et $\sin(\pi(p)) = 0$

n pair (n=2p) : $a_n = \frac{E}{\pi}\left[\frac{(-1)^p}{(n+1)}+\frac{(-1)^{p+1}}{(n-1)}\right] = (-1)^{p+1}\frac{2E}{\pi(n^2-1)}$

car $\sin(\frac{\pi}{2}(2p+1)) = (-1)^p$ et $\sin(\frac{\pi}{2}(2p-1)) = (-1)^{p+1}$

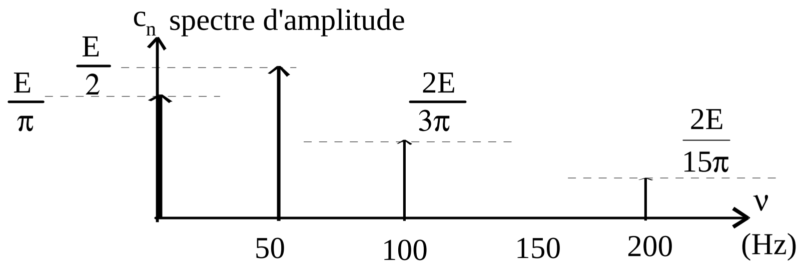
2)

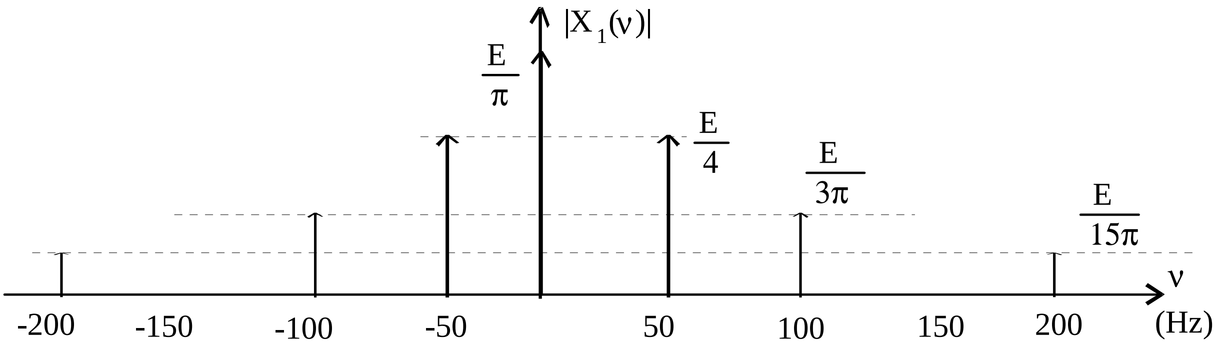
$a_0 = \frac{E}{\pi}; a_1 = \frac{E}{2};\ a_2 = \frac{2E}{3\pi};\ a_3 = 0;$

$a_4 = \frac{-2E}{15\pi}$

$c_n = \sqrt{a_n^2+b_n^2} = |a_n|$

Signal continu donc décroissance au moins en $\frac{1}{n^2}$





3) 4)

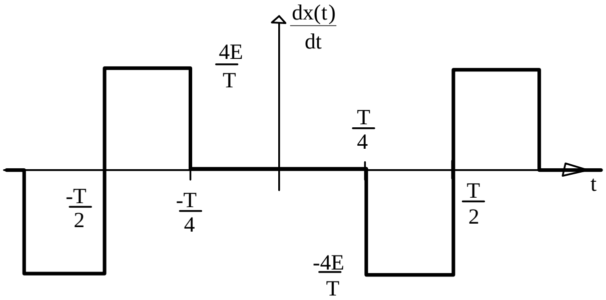
$P_T = \left(\frac{E}{2}\right)^2 = \frac{E^2}{4}$; puissance des harmoniques inférieurs à 75 Hz : $P_{BF} = c_0{}^2 + \frac{c_1{}^2}{2} = \frac{E^2}{\pi^2}+\frac{E^2}{2x4} = E^2\left(\frac{1}{\pi^2}+\frac{1}{8}\right)$; $\frac{P_{BF}}{P_T} = 4\left(\frac{1}{\pi^2}+\frac{1}{8}\right) = 90{,}5\%$

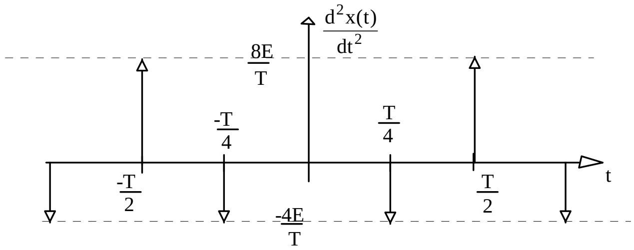
5) $x_2(t) = x_1(t-\frac{T}{4}) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[c_n\cos(n\frac{2\pi}{T}(t-\frac{T}{4})+\varphi_n)\right] = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[c_n\cos(n\frac{2\pi}{T}t+\varphi_n - n\frac{\pi}{2})\right]$

c_n inchangé; les φ_n de $x_2(t)$ sont égaux aux φ_n de $x_1(t) - n\frac{\pi}{2}$

Réponse problème 8

1)





2) $\dfrac{d^2x(t)}{dt^2} = \dfrac{8E}{T} \text{Ш}_T(t-T/2) - \dfrac{4E}{T} \text{Ш}_{T/2}(t-T/4)$

3) $\dfrac{d^2x(t)}{dt^2} = \dfrac{8E}{T}\left[\dfrac{1}{T} + \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n.2}{T} \cos(n\dfrac{2\pi}{T}t)\right] - \dfrac{4E}{T}\left[\dfrac{1}{T/2} + \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n.2}{T/2} \cos(n\dfrac{2\pi}{T/2}t)\right]$

$\dfrac{dx^2(t)}{dt^2} = \dfrac{16E}{T^2}\left[\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \cos(n\dfrac{2\pi}{T}t) - \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \cos(n\dfrac{2\pi}{T/2}t)\right]$

On intègre avec cte=0: $\dfrac{dx(t)}{dt} = \dfrac{16E}{T}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2\pi n} \sin(n\dfrac{2\pi}{T}t) - \sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{4\pi n} \sin(n\dfrac{2\pi}{T/2}t)\right]$

On intègre avec cte=3E/4: $x(t) = \dfrac{3E}{4} + 4E\left[\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{(\pi n)^2} \cos(n\dfrac{2\pi}{T}t) - \sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{4(\pi n)^2} \cos(n\dfrac{2\pi}{T/2}t)\right]$

Réponse problème 10

1) $H_1(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} h_1(t)e^{-j2\pi\nu t}dt = \int_0^{\tau} - e^{-j2\pi\nu t}dt = \left[\dfrac{e^{-j2\pi\nu t}}{j2\pi\nu}\right]_0^{\tau} = \dfrac{1}{j2\pi\nu}\left(e^{-j2\pi\nu\tau} - 1\right)$

2) $H_2(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} h_2(t)e^{-j2\pi\nu t}dt = \int_{-\tau}^{0} e^{-j2\pi\nu t}dt = \left[\dfrac{e^{-j2\pi\nu t}}{-j2\pi\nu}\right]_{-\tau}^{0} = \dfrac{1}{j2\pi\nu}\left(e^{j2\pi\nu\tau} - 1\right)$

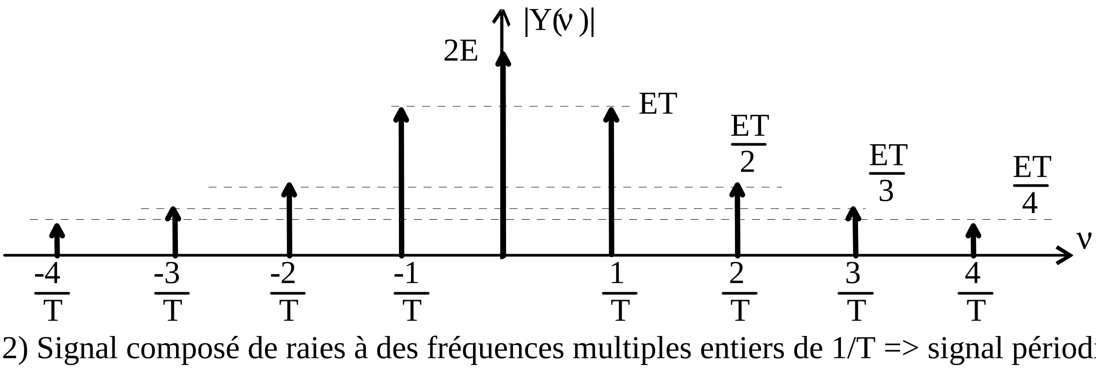
3) $H(\nu) = H_1(\nu) + H_2(\nu) = \dfrac{1}{j2\pi\nu}\left(e^{j2\pi\nu\tau} - 1 + e^{-j2\pi\nu\tau} - 1\right) = \dfrac{-2}{j2\pi\nu}\left(1 - \cos(2\pi\nu\tau)\right)$

4) $H(\nu) \approx \dfrac{-1}{j\pi\nu}\left(1 - (1 - \dfrac{(2\pi\nu\tau)^2}{2})\right) = \dfrac{-1}{j\pi\nu}\dfrac{(2\pi\nu\tau)^2}{2} = 2j\pi\nu\tau^2 = \tau^2(j2\pi\nu)$

5) A la constante τ^2 près, c'est un dérivateur $D(\nu) = j2\pi\nu$

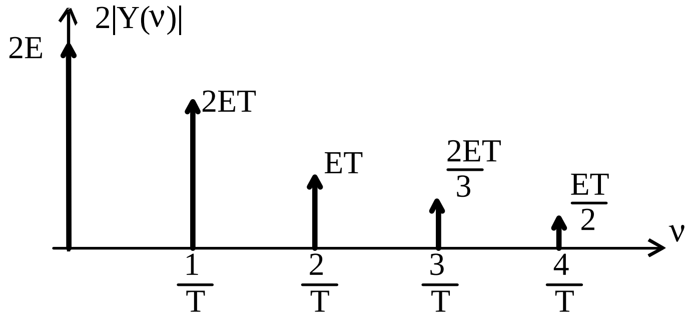
Réponse problème 11

1)



2) Signal composé de raies à des fréquences multiples entiers de 1/T => signal périodique de période T

3)



II - Echantillonnage – théorème de Shannon

Exercice 1 : échantilonnage d'une sinusoïde

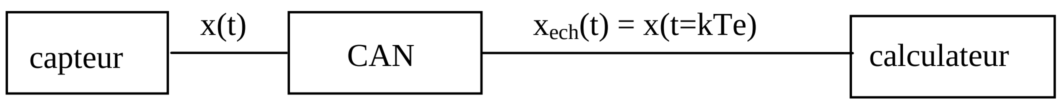
1) Tracer le spectre d'amplitude d'un signal $x_1(t)$ sinusoïdal de fréquence 1kHz et d'amplitude a.
2) Tracer le spectre d'amplitude de ce même signal échantillonné à une fréquence ν_{ech} = 10kHz.

Exercice 2 : échantillonnage d'un signal carré

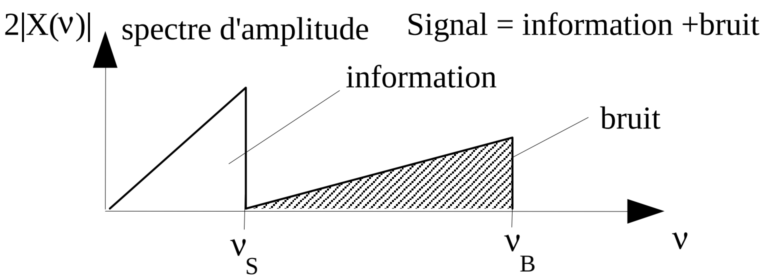
1) Tracer le spectre d'amplitude d'un signal x(t) carré unipolaire d'amplitude crête à crête 1V et de fréquence 800Hz.
2) Tracer le spectre d'amplitude de ce même signal échantillonné à une fréquence ν_{ech} = 10kHz.
3) Que faut-il faire si on désire n'avoir aucun repliement spectral tout en conservant la valeur de la fréquence d'échantillonnage. Tracer le spectre d'amplitude du signal échantillonné dans ce cas là. Ecrire l'expression du signal filtré avant échantillonnage dans ce cas.
4) Tracer le gabarit théorique du filtre puis le gabarit réel (ν_{pass}, A_{pass}, ν_{stop}, A_{stop}).
5) On considère qu'on échantillonne correctement le signal carré si on conserve 30 harmoniques pour le signal échantillonné.
5-1) Ecrire ce que devient le théorème de Shannon dans ce cas
5-2) Tracer le gabarit réel du filtre antirepliement (ν_{pass}, A_{pass}, ν_{stop}, A_{stop}).
5-3) Quelle doit être alors la fréquence d'échantillonnage

Exercice 3 : Bruit = partie du signal non désirable pour notre application

Dans le but de contrôler en continue l'épaisseur de la tôle en sortie d'un laminoir, on étudie le signal x(t) délivré par un capteur d'épaisseur au cours de son fonctionnement. Cette étude se fait en numérique sur un calculateur à partir du signal échantillonné à l'aide d'un convertisseur analogique numérique dont on peut régler la période d'échantillonnage Te



On suppose que le spectre d'amplitude du signal x(t) a la forme suivante :



L'information occupe la bande [0-ν_S] et le bruit la bande [ν_S-ν_B].
ν_S = 0,5 kHz; ν_B = 2,5 kHz

1) Tracer le spectre du signal échantillonné en choisissant la période d'échantillonnage pour qu'il n'y ait aucun recouvrement spectral lors de l'échantillonnage.
2) Comment choisir la période d'échantillonnage si on autorise seulement un recouvrement bruit sur bruit lors de l'échantillonnage ?
3) Lors de la mise en place du contrôle avec un microcontrôleur, on doit impérativement effectuer en temps réel, entre deux acquisitions, un calcul qui prend 0,5ms. Tracer le chronogramme du microcontrôleur. Peut-on mettre en oeuvre les conditions trouvées en 1) et 2). 3-1) Que faut-il faire pour réaliser ce contrôle ?
3-2) Tracer le gabarit réel du filtre antirepliement (ν_{pass}, A_{pass}, ν_{stop}, A_{stop}).

Problèmes pour s'amuser . . .

<u>Problème 1</u>

On considère le signal $f_1(t) = K + a_1\cos(2\pi\nu_1 t) + a_2\cos(2\pi\nu_2 t)$ avec ν_1=100Hz et ν_1=800Hz.

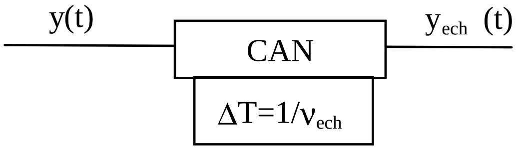
1) Tracer le spectre de ce signal non échantillonné
2) Tracer le spectre de ce signal échantillonné à une fréquence de 3kHz
3) Tracer le spectre de ce signal échantillonné à une fréquence de 1kHz
4) Interprétation des spectres obtenus en 2) et 3).

<u>Problème 2</u>

Soit un signal y(t) dont la décomposition en série de Fourier s'écrit:

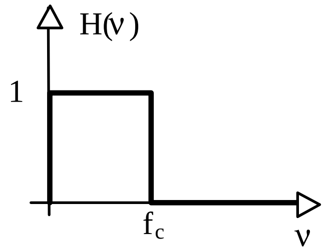
$y(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[c_n \cos(n\frac{2\pi}{T}t + \varphi_n)\right]$. Pour les tracés, les valeurs numériques des coefficients c_0 et c_n peuvent être librement choisies.

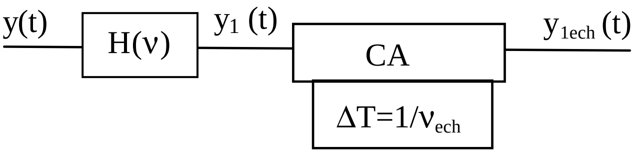
1) On considère le système d'acquisition numérique avec $\Delta T = \frac{T}{8,5}$.



Tracer le spectre d'amplitude de $y_{ech}(t)$, le signal y(t) échantillonné (le spectre sera gradué en fréquence).

2) On considère maintenant le système d'acquisition numérique avec $\Delta T = \frac{T}{8,5}$ et un filtre de fonction de transfert $H(\nu)$.





A quoi sert ce filtre. Comment faut-il régler sa fréquence de coupure f_C

3) On règle f_C à la valeur $\frac{\nu_{ech}}{3}$, tracer le spectre d'amplitude de y_1 (t) et de $y_{1\ ech}(t)$ (le spectre sera gradué en fréquence).

<u>Problème 3</u>

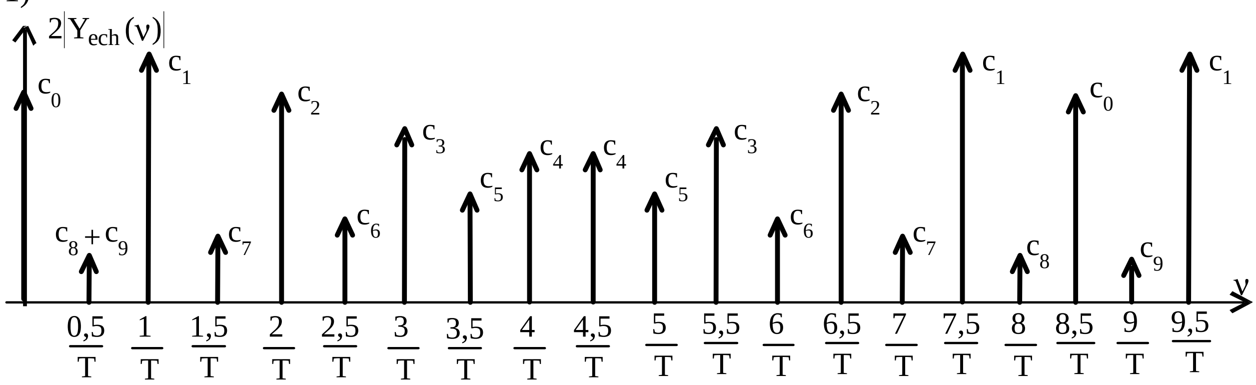
Soit x(t) un signal périodique de fréquence ν_0 = 1,5kHz. La décomposition en série de Fourier de ce signal est donnée par : $x(t) = 0,5 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin(n\,2\pi\nu_0 t)$

1) Tracer le spectre d'amplitude de x(t) gradué en fréquence jusqu'à 10kHz.
2) Tracer le spectre d'amplitude de x(t) échantillonné à la fréquence ν_{ech} = 10kHz, gradué en fréquence jusqu'à 10kHz.
3) Comment faire pour que le spectre du signal échantillonné soit égal au spectre du signal non échantillonné **dans une certaine plage que l'on précisera**.

Réponse aux problèmes

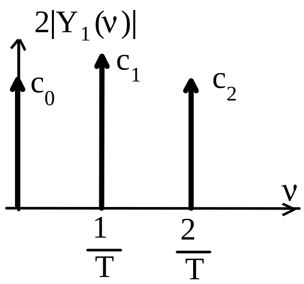
Réponse problème 2

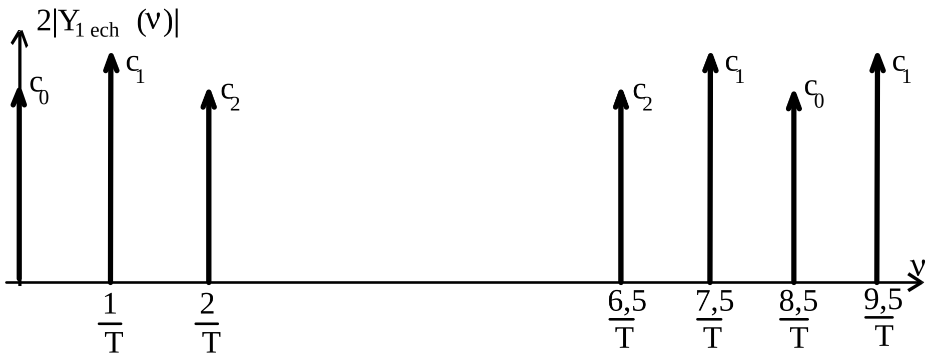
1)



2) Filtre anti repliement $f_c=\nu_{ech}/2$

3) $F_c = \frac{\nu_{ech}}{3} = \frac{1}{3\Delta T} = \frac{8,5}{3T} = \frac{2,83}{T}$





III - Transformation en Z

Exercice 1 : relation entre f(t) et f(k)

1) Donner la suite de nombre $f(k)$ correspondant à l'échantillonnage de $f(t) = e^{-bt}\,\mathbb{1}(t)$, avec $b \in \mathbb{R}^+$.
2) Représenter f(t) et f(k).
3) A partir de la table trouver la transformée en Z de la fonction f(t).

Exercice 2 : relation entre f(t) et f(k)

1) Représenter $f(k) = \cos\left(k\frac{\pi}{5}\right)\mathbb{1}(k)$
2) A partir de la table trouver la transformée en Z de la suite de nombres f(k).

Exercice 3 : valeur des échantillons et revenir à l'original

Soit $F(z) = \dfrac{z^{-1}}{1-1,7z^{-1}+0,6z^{-2}}$

Pour obtenir la valeur des échantillons de f(k), l'original de F(z), trois voies sont possibles:
1) Calculer les 4 premières valeurs de l'original f(k) par division euclidienne
2) A l'aide de la table, calculer la forme littérale de l'original f(k) (ou f(t)) de F(z). Vérifier la valeur de f(3) calculé précédemment.
3) Calculer les 4 premières valeurs de l'original f(k) en utilisant la méthode de l'équation récurrente
   3-1) Exprimer l'équation récurrente du système ayant F(z) pour fonction de transfert
   3-2) Donner l'entrée à appliquer pour avoir F(Z) comme transformée en z de la sortie
   3-3) Calculer les échantillons f(k) de cette sortie à l'aide de l'équation récurrente

Exercice 4 : revenir à l'original (avec astuce)

Soit $F(z) = \dfrac{1+3z^{-1}}{1-0,85z^{-1}}$, calculer la forme littérale de l'original f(k) (ou f(t))

Exercice 5 : étude d'un filtre numérique donné par sa fonction de transfert

Soit un système discret de fonction de transfert $H(z) = \dfrac{0,5-0,2z^{-1}}{1-1,3z^{-1}+0,8465z^{-2}}$

1) Ce système numérique est-il stable ?
2) Ecrire l'équation récurrente du système
3) Calculer les 3 premières valeurs de la réponse impulsionnelle h(k) du filtre
4) Calculer les 3 premières valeurs de la réponse indicielle y(k) du filtre
5) Calculer le gain statique du filtre
6) On soumet ce système à une entrée indicielle X(z). Exprimer Y(z) la transformée en z de la réponse indicielle.
7) D'après les propriétés de la TZ, calculer la limite quand k tend vers l'infinie de y(k), l'original de Y(z) (transformée en z de la réponse indicielle).

Exercice 6 : étude d'un filtre numérique donné par son équation récurrente (filtre FIR)

Soit H(z) un filtre moyenneur sur trois échantillons, qui pour un signal d'entrée x(k) donne en sortie

$$y(k) = \frac{1}{3}\left(x(k-1)+x(k)+x(k+1)\right)$$

1) Ce filtre est-il causal?
2) Ecrire l'équation récurrente et tracer la réponse impulsionnelle h(k) de ce système.
3) Calculer et tracer la réponse indicielle y(k) de ce système.
4) Trouver la fonction de transfert H(z) de ce filtre
5) Rappeler les trois formes sous laquelle peut être défini un filtre FIR

- équation récurrente
- réponse impulsionnelle
- fonction de transfert

et le lien entre ces formes

6) Déduire la réponse fréquentielle $H\left(\frac{\nu}{\nu_{ech}}\right)$ de ce filtre. Tracer le module de cette réponse. Dans quelle plage de fréquence ce tracé a-t-il un sens?

7) Calculer sa fréquence de coupure à -3dB. Comparer le résultat avec la fréquence de coupure $f_c = \frac{0,44}{\tau}$ d'un moyenneur analogique sur une durée τ étudié dans l'exercice 12 sur la TF.

8) Trouver la fonction de transfert $H_1(z)$, puis tracer le module de la réponse fréquentielle du filtre d'équation récurrente :

$$y_1(k) = \frac{1}{3}\left(x(k) + x(k-1) + x(k-2)\right)$$

9) Tracer la réponse impulsionnelle $h_1(k)$ et comparer avec celle de la question 2)

<u>Exercice 7 : fitre numérique de p à z (filtre RII)</u>

On se propose de trouver l'équivalent numérique d'un filtre analogique du premier ordre passe bas.

$H(p) = \frac{1}{1+\frac{p}{2\pi\nu_c}}$ échantillonné à la fréquence d'échantillonnage $\nu_{ech}= 10\ \nu_c$ par trois méthodes différentes.

I - Première méthode: échantillonnage de la réponse indicielle

1) Calculer y(t) la réponse indicielle du filtre analogique.

2) Exprimer y(k) la réponse indicielle échantillonnée à la fréquence ν_{ech}.

3) Calculer, dans ce cas, X(z) la transformée en Z de l'entrée $\mathbb{1}(t)$ échantillonnée et Y(z) la transformée en Z de la sortie échantillonnée.

4) En déduire la fonction de transfert $H_1(z)$ du filtre numérique équivalent à H(p).

5) Vérifier que la valeur du gain statique du filtre analogique H(p) est identique à celle du filtre numérique $H_1(z)$.

6) Ecrire l'équation récurrente de ce filtre.

7) Exprimer la réponse en fréquence de ce filtre numérique $H_1(z)$. Comparer $\left|H_1\left(\frac{\nu_{ech}}{10}\right)\right|$ avec le module du gain du filtre analogique H(p) pour la même fréquence.

II – Deuxième méthode: approximation linéaire de p

8) Dans H(p), remplacer p par son approximation au premier ordre pour trouver $H_2(z)$.

9) Ecrire l'équation récurrente de ce filtre.

10) Exprimer la réponse en fréquence de ce filtre numérique $H_2(z)$.

11) Comparer $\left|H_2\left(\frac{\nu_{ech}}{10}\right)\right|$ avec le module du gain du filtre analogique H(p) pour la même fréquence.

D'où vient l'écart entre les deux valeurs?

III – Troisième méthode: approximation bilinéaire de p

12) Dans H(p), remplacer p par son approximation bilinéaire pour trouver $H_3(z)$.

13) Ecrire l'équation récurrente de ce filtre.

14) Exprimer la réponse en fréquence de ce filtre numérique $H_3(z)$. Comparer $\left|H_3\left(\frac{\nu_{ech}}{10}\right)\right|$ avec le module du gain du filtre analogique H(p) pour la même fréquence.

IV – Conclusion

15) Laquelle de ces méthodes est assez générale et précise pour être utilisée dans les logiciels.

Problèmes pour s'amuser . . .

Problème 1

Soit un système discret de fonction de transfert $H(z) = \dfrac{1 - z^{-1}}{1 - 1{,}8z^{-1} + 0{,}8075z^{-2}}$

1) Ce système numérique est-il stable ?
2) On soumet ce système à une entrée indicielle X(z). Calculer Y(z) la transformée en z de la sortie.

Problème 2

On considère un signal dont la transformée en z vaut $F(z) = \dfrac{1}{1 - 1{,}8z^{-1} + 0{,}8075z^{-2}}$

1) Calculer la valeur des quatre premiers échantillons de l'original de F(z)
2) Trouver la forme analytique f(t) ou f(k) de l'original de F(z)

Problème 3

1) On considère un filtre Passe Haut continu $H(p) = \dfrac{\frac{p}{2\pi f_c}}{1 + \frac{p}{2\pi f_c}}$. Trouver H(z) l'équivalent discret de ce filtre pour un signal échantillonné à la fréquence d'échantillonnage $f_{ech} = 10\ f_c$.
2) Ecrire l'équation récurrente de ce filtre

Problème 4

Soit un système discret de fonction de transfert $H(z) = \dfrac{z^{-1}}{1 - 0{,}90484\ z^{-1} + 0{,}8187\ z^{-2}}$

1) Ce système numérique est-il stable ?
2) On soumet ce système à une entrée indicielle X(z). Calculer Y(z) la transformée en z de la sortie.

Problème 5

On considère le signal dont la transformée en z vaut $F(z) = \dfrac{z^{-1}}{1 - 0{,}90484\ z^{-1} + 0{,}8187\ z^{-2}}$

1) Calculer la valeur des quatre premiers échantillons de l'original de F(z)
2) Trouver la forme analytique f(t) ou f(k) de l'original de F(z)

Réponse problème 1

1) Les pôles sont $z_1=0{,}95$ et $z_2=0{,}85$. Le module des pôles est inférieur à 1, le système est donc stable.

2) $X(z) = \dfrac{z}{z-1}$ et $Y(z) = \dfrac{z}{z-1} \times \dfrac{z^2 - z}{z^2 - 1{,}8z + 0{,}8075} = \dfrac{z^2}{z^2 - 1{,}8z + 0{,}8075}$

Réponse problème 2

1) $F(z) = \dfrac{z^2}{z^2 - 1{,}8z + 0{,}8075} = \dfrac{1}{1 - 1{,}8\,z^{-1} + 0{,}8075\,z^{-2}} = \dfrac{y(k)}{x(k)}$

d'où on en déduit l'équation récurrente: $y(k) = x(k) + 1{,}8\ y(k-1) - 0{,}8075\ y(k-2)$

si y(k) = δ(k) on obtient les f(k) en sortie : $f(k) = \delta(k) + 1{,}8\, f(k-1) - 0{,}8075\, f(k-2)$

f(0) = 1 f(1) = 1,8 f(2) = 2,4325 f(3) = 2,925

2) Décomposition en éléments simples de F(z)/z:

$\dfrac{F(z)}{z} = \dfrac{9{,}5}{z - 0{,}95} - \dfrac{8{,}5}{z - 0{,}85}$ d'où $F(z) = \dfrac{9{,}5z}{z - 0{,}95} - \dfrac{8{,}5z}{z - 0{,}85}$

$$f(t) = \left[9{,}5 \times 0{,}95^{t/\Delta T} - 8{,}5 \times 0{,}85^{t/\Delta T}\right] 1\!\!1(t) \qquad \text{ou} \qquad f(k) = \left[9{,}5 \times 0{,}95^{k} - 8{,}5 \times 0{,}85^{k}\right] 1\!\!1(k)$$

Réponse problème 4

1) Les pôles sont z_1=0,4524+0,7836j = 0,9048$e^{j\pi/3}$ et z_2=0,4524-0,7836j = 0,9048$e^{-j\pi/3}$.
Le module des pôles est inférieur à 1, le système est donc stable.

2) $X(z) = \dfrac{z}{z-1}$ et $Y(z) = \dfrac{z}{z-1} \times \dfrac{z}{z^2 - 0{,}90484\, z + 0{,}8187}$

Réponse problème 5

1) $F(z) = \dfrac{z^{-1}}{1 - 0{,}90484\, z^{-1} + 0{,}8187\, z^{-2}} = \dfrac{y(k)}{x(k)}$

d'où on en déduit l'équation récurrente: $y(k) = x(k-1) + 0{,}90484\, y(k-1) - 0{,}8187\, y(k-2)$

si y(k) = δ(k) on obtient les f(k) en sortie : $f(k) = \delta(k-1) + 0{,}90484\, f(k-1) - 0{,}8187\, f(k-2)$

f(0) = 0 f(1) = 1 f(2) = 0,90484 f(3) = 0

2) $F(z) = 1{,}276 \dfrac{0{,}7837\, z}{z^2 - 0{,}90484\, z + 0{,}8187}$ de la forme $\dfrac{z\, e^{-\frac{\Delta T}{\tau}} \sin(\omega \Delta T)}{z^2 - 2\, z\, e^{-\frac{\Delta T}{\tau}} \cos(\omega \Delta T) + e^{-2\frac{\Delta T}{\tau}}}$

avec en identifiant $\omega\ \Delta T = \dfrac{\pi}{3}$ et $\tau = 10\ \Delta T$

$$f(t) = 1{,}276 e^{-t/10\Delta T} \sin\left(\frac{\pi}{3\Delta T} t\right) 1\!\!1(t) \qquad \text{ou} \qquad f(k) = 1{,}276 e^{-k/10} \sin\left(k \frac{\pi}{3}\right) 1\!\!1(k)$$

IV - STATISTIQUE

<u>Exercice 1 : paramètres descriptifs d'un ensemble de données</u>

On effectue cinq jours consécutivement la mesure de la tension du réseau EDF

Jour	lundi	mardi	mercredi	jeudi	vendredi
Tension efficace (V)	220	233	235	228	225

1) Donner la médiane des mesures
2) Calculer la moyenne des mesures
3) Calculer la variance et l'écart type des mesures

<u>Exercice 2 : régression linéaire (à faire avec Excel à la maison)</u>

On étudie pour 6 étudiants, le nombre d'heures de révision à un examen et la note obtenue à cet examen.
On possède les données suivantes :

heures	5	4	8	3	2	0
note	13	12	19	15	10	2

1) Déterminer la variable explicative (X) et la variable à expliquer (Y).
2) Déterminer la droite de régression linéaire au sens des moindres carrés de Y pour X fixé.
3) Calculer le coefficient de corrélation. Quelle est la validité de la régression linéaire ?
4) Quelle devrait être la note d'un candidat qui révise 2,5 heures ?

<u>Exercice 3 : régression linéaire (à faire avec Excel à la maison)</u>

On mesure la tension V(t) aux bornes d'un condensateur C au cours du temps

t(ms)	0	5	10	15	20	25
V(t)(Volt)	0	2,1	3	4	4,2	4,7

1) Tracer l'allure de V(t)
2) Le condensateur est-il chargé à tension ou courant constant? Donner l'équation théorique suivie par V(t).
3) On suppose que l'ensemble RC est alimenté sous une tension E=5V. Après un changement de variable exprimer cette variable Y(t) de manière linéaire en fonction du temps.
4) Déterminer la droite de régression de Y par rapport au temps. En déduire la valeur de RC.
5) Calculer le coefficient de corrélation entre Y et t.

<u>Exercice 4 : probabilité</u>

Votre entreprise achète le même type de pièce auprès de 2 fournisseurs F1 et F2. Les quantités habituelles commandées auprès de F1 représentent 85% des quantités totales et celles commandées auprès de F2 15% des quantités totales. Les contrôles de qualité font apparaître les résultats suivants :

	% de pièces bonnes	% de pièces défectueuses
F1	98	2
F2	90	10

1) Tracer l'arbre de tous les cas possibles avec leur probabilité.
2) Quelle est la probabilité qu'une pièce tirée au hasard parmi toutes celles qui sont achetées soit défectueuse?
3) Quelle est la probabilité pour qu'une pièce qui est défectueuse provienne de F1?

<u>Exercice 5 : dénombrement</u>

Donner la *formule utilisée* puis la valeur numérique obtenue

1) Une classe de 20 élèves doit désigner en son sein un bureau comprenant un président, un trésorier et un secrétaire, nul ne pouvant cumuler deux postes.
De combien de manières la classe peut-elle répartir les postes ?

2) La classe doit désigner trois représentants (non distinguables) au conseil de l'IUT. De combien de manières la classe peut-elle choisir ses représentants?
3) Les trois représentants au conseil de l'IUT ne peuvent être membre du bureau. De combien de manières la classe peut-elle choisir son bureau et ses représentants?

Exercice 6 : probabilité

On jette un dé numéroté de 1 à 6. On mise 10 € qui sont perdus si le résultat est 1, 2, 3 ou 4. Si le 5 sort, on restitue la mise. Si le 6 tombe, le gain est de 45 € (dont les 10€ de la mise).
1) On considère la v.a. X= "gain net de un tirage avec mise de 10 euros"
2) Quelle est la nature de X?
3) Donner les différentes valeurs de X ainsi que leur probabilité. Tracer la loi de probabilité.
4) On veut connaître le gain moyen sur un jeu, quel paramètre doit-on considérer?
5) Calculer la variance du gain sur un jeu
6) On joue une mise 10 fois plus grande, on considère alors la loi Y= "gain net de un tirage avec mise de 100 euros". Exprimer la variable Y en fonction de la variable X. Quelle somme en moyenne va-t-on perdre ou gagner? Quelle est alors la variance et l'écart type du gain? Quelles propriétés utilise-t-on pour ces calculs?
7) On joue 10 fois de suite à ce jeu, on considère alors la loi Z= "gain net de 10 tirage avec mise de 10 euros". Exprimer la variable Z en fonction de la variable X. Quelle somme en moyenne va-t-on perdre ou gagner? Quelle est alors la variance et l'écart type du gain? Quelles propriétés utilise-t-on pour ces calculs?

Exercice 7 : probabilité, loi discrète 1

Un appareil comporte 3 cartes électroniques identiques ayant chacune une probabilité de panne p de 10%. On appelle X = "nombre de cartes en panne". Les possibilités de panne des cartes sont indépendantes.
1) Identifier la loi et ses paramètres.
2) Calculer les probabilités de cette loi discrète.
3) Calculer l'espérance et la variance de cette loi discrète.

Exercice 8 : probabilité, loi discrète 2

Le nombre moyen de pannes d'une machine est de 3 par mois de fonctionnement (environ 4 semaines x 6 jours x 18 heures = 432 heures). Ce nombre moyen de pannes est supposé constant et indépendant du vieillissement de la machine qui est considérée comme neuve après chaque réparation (hypothèse non valide dans le cas réel).
1) Identifier la variable aléatoire, sa loi et les paramètres (espérance, variance) de la loi.

Un atelier fonctionne avec 12 machines indépendantes de ce type.
2) Calculer la probabilité pour qu'il y ait 2 pannes durant les deux prochains jours.
3) Calculer la probabilité pour qu'il y ait plus de 12 pannes pendant la prochaine semaine.
4) Calculer la probabilité pour qu'il y ait plus de 50 pannes pendant le prochain mois.

Exercice 9 : probabilité, comment lire la table de la loi normale

Le temps moyen nécessaire à l'assemblage d'un PC est de 15 minutes avec une variance de 4. En supposant que cette variable suive une loi normale
1) Quelle est la probabilité qu'un employé assemble un PC en moins de 13 minutes ?
2) Dans 90 % des cas, l'assemblage se fera en moins de combien de temps ?
3) 50 % des PC sont assemblés en moins de combien de temps ? (réponse souhaitée en moins de 10 secondes)

Exercice 10 : probabilité, valeur remarquable de la loi normale (fait en cours)

1) Quelle est la probabilité pour qu'une variable suivant une loi de Gauss se trouve dans l'intervalle $m \pm \sigma$?
2) Quelle est la probabilité pour qu'une variable suivant une loi de Gauss se trouve dans l'intervalle $m \pm 2\sigma$?

Exercice 11 : probabilité, loi gaussienne (ne pas faire)

Le service de l'éclairage urbain d'une ville gère un parc de 1 000 lampadaires. La voirie est éclairée 3 500h par an. Les ampoules ont une durée de vie caractérisée par une loi Normale de moyenne 2 500 h et d'écart type 200 h.
Ces lampes sont achetées 15 €. Actuellement, le service technique procède à un remplacement systématique des ampoules toutes les 2 200 h, ce qui coûte, outre le prix de la lampe, 10 000 € pour l'utilisation du matériel et du personnel sur l'ensemble de la tournée.
Par ailleurs, chaque fois qu'une lampe est signalée comme étant hors d'usage, une équipe est envoyée pour procéder au changement ; le coût standard de cette opération est estimé à 30 € (non compris le coût de la lampe). Lors du remplacement systématique, toutes les lampes sont remplacées par des neuves, même si elles n'ont que quelques heures d'utilisation.
1) Déterminer le nombre moyen d'ampoules défaillantes remplacées avant une campagne de remplacement systématique.
2) Quelle est la probabilité que plus de 80 ampoules tombent en panne avant les 2 200h de leur remplacement systématique
3) Déduisez le coût moyen de remplacement des ampoules sur des séquences de 2 200 h.
4) Déterminer le coût moyen annuel de remplacement des ampoules.

Exercice 12 : addition de lois normales

Une cabine d'ascenseur est conçue pour une charge totale limite de 240 kg. La capacité est limitée à 3 personnes. On suppose que le poids X d'une personne suit une loi normale de moyenne 70 kg et d'écart type 10 kg
1) Quelle est la loi de probabilité suivie par la variable X3="poids de 3 personnes"
2) Quelle est la probabilité que le poids de 3 personnes choisies au hasard soit plus élevé que la limite permise?
3) Quelle doit être la charge maximale si on veut que le risque que le poids de 3 personnes choisies au hasard soit plus élevé que ce maximum soit de 0,01%?

Exercice 13 : estimation

Le temps de déclenchement, avant le début de l'incendie, d'un certain type de détecteurs de fumée suit une loi normale de variance égale à 4 et un échantillon de 16 appareils a une moyenne arithmétique de 2.3 secondes.
1) Trouver l'intervalle de confiance à 95% pour la moyenne inconnue de l'ensemble des appareils.
2) Quelle devrait être la taille de l'échantillon pour pouvoir estimer la moyenne à 10% près avec un coefficient de confiance égal à 0.95 ?

Exercice 14 : estimation

Le courant d'offset d'un amplificateur opérationnel a été mesuré sur N=20 circuits intégrés sortant de la chaîne de fabrication. Les mesures ont pour valeur moyenne 10nA avec un écart type de 4nA.
1) Sous l'hypothèse de normalité de la variable X="courant d'offset", quelle est l'intervalle de confiance à 95% de la moyenne du courant d'offset.
2) Si on considère l'estimation de la moyenne et de l'écart type comme constante, combien de mesures dois-je effectuer pour que ce même intervalle de confiance soit à 99%. L'hypothèse de normalité est-elle nécessaire dans ce cas?

Exercice 15 : estimation fréquence

En testant de manière systématique 3000 CI en sortie de production, on détecte 15 CI défectueux.

1) Donner un intervalle de confiance à 95% de la proportion de CI défectueux.
2) Combien de CI doit-on tester pour que cet intervalle de confiance soit à 98%

Exercice 16 : test d'hypothèse

Un même condensateur de valeur nominale 47µF est fabriqué sur deux chaînes de fabrications A et B. On a mesuré 3000 composants en sortie de la chaîne A, on a trouvé une moyenne de 49µF avec un écart type de 6,35µF. On a remarqué que la distribution se répartie normalement.
Sur une échantillon de 20 composants prélevés parmi les 3000 on a trouvé une moyenne de 52µF. Peut-on considérer que cette échantillon est conforme au résultat obtenu sur l'ensemble des mesures au risque d'erreur de 5%?

Exercice 17 : test d'hypothèse

Pour une fabrication correcte, la valeur de la résistance R_{on} d'une porte analogique suit une loi normale de moyenne 0,3Ω. On mesure en sortie d'une chaîne de fabrication, la résistance R_{on} d'un échantillon de 40 portes. On obtient sur cet échantillon une moyenne de 0,45Ω avec une variance de $0{,}4\Omega^2$.

1) Donner l'intervalle de confiance à 95% de la moyenne des résistances R_{on} de l'échantillon.
2) Au risque de 5%, peut-on dire que la chaîne de fabrication où a été effectué le prélèvement a un fonctionnement correct.
3) En conservant la même valeur de la moyenne et de la variance, quelle devrait être la taille de l'échantillon mesuré pour conclure sur un fonctionnement incorrect de la chaîne de fabrication.

Exercice 18 : test d'hypothèse

On veut comparer l'efficacité pédagogique de deux professeurs officiant chacun sur une moitié de la promotion. On compare les notes obtenues à une même évaluation par chacun des groupes:

Professeur	Effectif	Moyenne	Ecart type
A	64	11,6	2,0
B	68	12,4	2,2

Peut-on dire que les deux groupes ont obtenu sensiblement le même résultat au contrôle au seuil de 2,5%?
PS: pour comparer l'efficacité pédagogique de deux professeurs on suppose que, au départ, le niveau et les capacités des deux groupes sont identiques!!

Exercice 19 : test d'hypothèse

On a mesuré la capacité VO^2max de 12 individus, avant et après un stage d'entraînement en altitude:

	Moyenne	Ecart type
Avant	2,55	0,0957
Après	2,733	0,1312

Peut-on en conclure au seuil de 2%, que la capacité VO^2max des athlètes a progressée suite au stage?

Exercice 20 : test d'hypothèse

On a mesuré la capacité VO^2max de 5 individus, avant et après un stage d'entraînement en altitude:

N° sportif	1	2	3	4	5
avant d'entraînement	2,2	2,8	2,7	2,4	2,5
après d'entraînement	2,2	3	3	2,6	2,7

Peut-on en conclure au seuil de 5%, que la capacité VO^2max des athlètes a progressée suite au stage?

Problèmes pour s'amuser . . .

Problème 1: régression linéaire(1iere annee Pharmacie 2004)

Pour effectuer le contrôle qualité d'un soluté médicamenteux, le principe actif est dosé par une méthode chimio-luminescente. Afin de valider les résultats, une gamme étalon est réalisée et les résultats correspondants à cette gamme sont présentés dans le tableau suivant:

x concentration (mg/l)	0	3	6	9	12	15
y Luminescence (unité arbitraire)	0,7	7,9	11,8	19,9	25,1	30,9

On donne: $\sum x_i = 45 ; \sum y_i = 96{,}3 ; \sum x_i y_i = 1038{,}3 ; \sum x_i{}^2 = 495$

1) Représenter les points sur un graphique.

2) Calculer par la méthode des moindres carrés l'équation de la droite d'ajustement de ces données. présenter les points sur un graphique.

Problème 2: régression linéaire

On étudie la transmission de la lumière dans une fibre optique. Voici l'atténuation en dB mesurée dans trois fibres de longueur d.

d(m)	10	30	40
A(dB)	22	15	6

1) Donner l'équation de la droite de régression de d en fonction de A en donnant le détail de la méthode de calcul.

2) Calculer le coefficient de corrélation. Discuter sa signification.

3) Quelle devrait être l'atténuation mesurée sur une fibre de longueur 20 m

Problème 3: théorème de Bayes (1iere annee Pharmacie 2004)

On dispose d'un test X utilisable pour le diagnostique du cancer de la peau qui atteint 10% de la population étudiée. Le résultat du test peut être positif ou négatif. L'évaluation sur un échantillon représentatif des performances diagnostiques de ce test a donné les résultats suivant:

- Probabilité que le test soit positif chez un malade: 0,990
- Probabilité que le test soit négatif chez un non malade: 0,995

1) Calculer les probabilités suivantes (arrondies à 4 chiffres significatifs):

- probabilité d'être malade quand le test est positif
- probabilité d'être malade quand le test est négatif

2) On dispose d'un deuxième test Y dont la probabilité d'être malade quand le test est positif et la probabilité d'être malade quand le test est négatif sont respectivement égales à 0,6786 et 0,0058. Peut-on conclure qu'un test est meilleur que l'autre? Si oui, lequel (justifer).

Problème 4 : probabilité (1iere annee Pharmacie 2004)

Un anticorps dirigé contre une protéine cellulaire appelée Nox reconnaît trois formes de la protéine appelées Nox1, Nox2 et Nox3. Nox1 a cinq fois plus de chance d'être reconnue par l'anti-corps que Nox2, et Nox3 a deux fois plus de chance d'être reconnue que Nox2. Calculer pour chaque forme la probabilité d'être reconnue par l'anti-corps sur un lot de cellules exprimant la même quantité de chaque forme.

Problème 5: loi discrète

Le magasin d'électronique a toujours au moins 5 circuits CNA Delta-Sigma en stock. On lui en demande en moyenne un tous les 2 jours.

1) Quelle est la loi suivi par la variable aléatoire X="nombre de CNA qu'on lui demandera sur 6 jours"

2) Sachant qu'il faut 6 jours pour être réapprovisionné, en utilisant la variable aléatoire X, exprimer la probabilité qu'il soit en rupture de stock.
3) Compte tenu des documents qui sont à votre disposition, exprimer comment effectuer le plus simplement le calcul de la réponse à la question 2) .
4) Si vous avez le temps, calculer numériquement la réponse à la question 2)

Problème 6 : loi discrete

Un avion comporte 80 sièges. La compagnie aérienne pratique le "surbooking" en effectuant systématiquement 82 réservations car elle a constaté qu'une place réservée n'est occupée que dans 90% des cas.
1) Déterminer la loi de X = "nombre de passagers présents sur les 82 qui ont réservé". Justifier votre réponse
2) Calculer la probabilité pour que plus (strictement) de 80 passagers ayant réservé soient présents.
3) Combien de sièges sont occupés en moyenne et avec quel écart type?

Problème 7: loi normale

La consommation journalière de cigarettes d'un étudiant suit une loi X_1 de moyenne 9,5 et de variance 16.
1) On suppose que X_1 suit une loi Gaussienne. Quelle est la probabilité que la consommation d'un étudiant soit inférieure à 8 cigarettes (on prendra dans la table la valeur la plus proche) ?
2) De combien de cigarettes doit-on disposer pour être sûr à 90% que l'on a suffisamment de cigarettes pour la consommation journalière de un étudiant.
3) En supposant que la consommation des étudiants est indépendante, quelle est la moyenne $E(X_{20})$ et l'écart type σ_{X20} de la loi X_{20}="consommation de un groupe de 20 étudiants "
4) De combien de cigarettes doit-on disposer pour être sûr à 95% que l'on a suffisamment de cigarettes pour la consommation journalière de un groupe de 20 étudiants.

Problème 8: loi normale et théorème central limite

Une alternateur de secours alimentant un groupe de 40 habitations, peut fournir au maximum 130 KW. La puissance consommée par une habitation est supposée suivre une loi de moyenne 2,3 KW et de variance 9 KW^2.
1) Quelle est la loi de probabilité suivie par la variable X_{40}="consommation de 40 habitations "
2) Quelle est la probabilité que la consommation de 40 habitations soit plus élevée que le maximum que peut fournir l'alternateur? (on prendra dans la table la valeur la plus proche)
3) Quelle doit être la puissance maximum de l'alternateur si on veut que le risque que la consommation des 40 habitations soit plus élevée que ce maximum soit de 5%

Problème 9: loi normale et théorème central limite

On considère la variable X="note d'un étudiant au DS de math". On suppose qu'elle suit une loi normale de moyenne m=9 et l'écart type σ =4.
1) Calculer un intervalle qui a 95% de chance de contenir une note tirée au hasard
2) Soit Y_1 la variable "moyenne d'un groupe de 20 étudiants". Quelle est la loi de probabilité suivie par la variable Y_1.
3) Calculer un intervalle de confiance à 95% de la variable Y_1.
4) Soit Y_2 la variable "moyenne d'une option de 40 étudiants". Quelle est la loi de probabilité suivie par la variable Y_2.
5) Calculer un intervalle de confiance à 98% de la variable Y_2.
6) Pouvait-on faire les calculs des questions 3) et 4) sans faire l'hypothèse que la variable X suive une loi normale (justifier votre réponse)

Problème 10: loi normale et théorème central limite

Une cabine pour skieurs est conçue pour une charge totale limite de 5 tonnes. La capacité est limitée à 50 personnes. On suppose que le poids X des usagers suit une loi normale de moyenne 80 kg et d'écart-type 10 kg

1) Quelle est la loi de probabilité suivie par la variable X_{50}="poids de 50 personnes"
2) Quelle est la probabilité que le poids d'un groupe de 50 personnes choisies au hasard soit plus élevé que la limite permise?
3) Quelle est la loi de probabilité suivie par la variable X_n="poids de n personnes"
4) Quelle doit être le nombre maximum n de passagers dans la cabine si on veut que le risque pour que le poids d'un groupe de n personnes choisies au hasard soit plus élevé que la limite permise soit inférieur à 0,01%,? On demande seulement l'équation que doit vérifier n, **sans la résoudre** (la réponse est n=59).

Valeurs complémentaires de la loi Normale centrée réduite

p	$0,9999$	$1\text{-}3.10^{-5}$	$1\text{-}3.10^{-7}$	$1\text{-}10^{-9}$	$1\text{-}1,3.10^{-12}$	1	1	1
t_p	**3,7195**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**

Problème 11: estimation moyenne

Pour une fabrication correcte, la valeur de la résistance R_{on} d'une porte analogique suit une loi normale de moyenne 0,3Ω. On mesure en sortie d'une chaîne de fabrication, la résistance R_{on} d'un échantillon de 40 portes. On obtient sur cet échantillon une moyenne de 0,45Ω avec une variance de $0,4\Omega^2$.

1) Donner l'intervalle de confiance à 95% de la moyenne des résistances R_{on} de l'échantillon.
2) Au risque de 5%, peut-on dire que la chaîne de fabrication où a été effectué le prélèvement a un fonctionnement correct.
3) En conservant la même valeur de la moyenne quelle devrait être la taille de l'échantillon mesuré pour conclure sur un fonctionnement incorrect de la chaîne de fabrication.

Problème 12: estimation proportion

On a choisi un échantillon de 250 personnes et 28 d'entre elles votent pour le partie A.
1) Donner un intervalle de confiance à 90% la proportion de personnes votant pour le parti A
2) En supposant que la proportion est identique, combien de personnes aurait-il fallu interroger pour avoir un intervalle de confiance à 90% de largeur ±0,02.

Réponse aux Problèmes

Réponse problème 2

1) moy(m)= 26,6667 ; moy(dB)= 14,3333 ; VAR(m)= 155,5556; VAR(dB)= 42,8889 ;
COV(m,dB)= -78,8889
m = f(dB) ; a= -1,839378238 ; b= 53,03108808
dB =f(m) ; a= -0,507142857; b= 27,85714286
2) r = -0,965829972 ; bonne corrélation
3) m = f(dB) => A=17,95774648 ; dB =f(m) => A=17,71428571

Réponse problème 5

1) Poisson (lamda=3), sur 6 jours on demande en moyenne 3 CNA
2) P(X>5)=P(X≥6)
3) P(X≥6) = 1- P(X≤5)= 1-(P(X=0)+ P(X=1)+ P(X=2)+ P(X=3)+ P(X=4)+ P(X=5))
4) P(X≤5)=0,9161 dans la table, P(X≥6) = 0,0859, ou sans la table

$$P(X=k)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}\ ;\ P(X=0)=\frac{e^{-3}\lambda^0}{0!}=e^{-3}=0,0498\ ;\ P(X=1)=\frac{e^{-3}3^1}{1!}=3e^{-3}=0,1494$$

$$P(X=2)=\frac{e^{-3}3^2}{2!}=0,2240\ ;\ P(X=3)=\frac{e^{-3}3^3}{3!}=0,2240\ ;\ P(X=4)=\frac{e^{-3}3^4}{4!}=0,1680\ ;$$

$P(X=5)=\frac{e^{-3}\,3^5}{5!}=0{,}1008$; à chaque fois on multi par 3 et on divise par k

P(X≤5)= 0,9160 ; P(X≥6) = 0,0840

Réponse problème 6

1) X = "nombre de passagers présents sur les 82 qui ont réservé" suit une loi binomiale loi $\mathcal{B}$(82;0,9).

2) $P(X>80)=P(X=81)+P(X=82)$ avec $P(X=i)=C_{82}^{i}(0{,}9)^{i}(0{,}1)^{82-i}$; et $C_n^p=\frac{n(n-1)...(n-p+1)}{p!}$

$P(X=81)=C_{82}^{81}(0{,}9)^{81}(0{,}1)^{1}=\frac{82\cdot 81\cdot...\cdot 2}{81!}(0{,}9)^{81}(0{,}1)^{1}=82\cdot(0{,}9)^{81}(0{,}1)^{1}=0{,}001612$

Remarque $C_n^p=C_n^{n-p}$

$P(X=82)=C_{82}^{82}(0{,}9)^{81}(0{,}1)^{1}=(0{,}9)^{81}(0{,}1)^{1}=0{,}000177$

$P(X>80)=0{,}001789\approx 0{,}18\%$

3) $E(X)=np=0{,}9\cdot 82=73{,}8$; $V(X)=n\cdot p\cdot(1-p)=82\cdot 0{,}9\cdot 0{,}1=7{,}38$; $\sigma=2{,}72$

Réponse problème 7

1) P(X1<8) =P(T<(8-9,5)/4) =P(T< -0.3750)=0,363

2) P(X1<n) =P(T<(n-9,5)/4) =P(T< tp)=0,90 ; tp=1,282 =>n=9,5+1,282*4=14,6280

3) X_{20} suit une loi N(20*9,5 ; 4*sqrt(20)) = N(190 ; 17,8885)

4) P(X20<n) =P(T<(n-190)/17,8885) =P(T< tp)=0,95 ; tp=1,645 =>n=190+1,645*17,8885=219,43

Transformée de Laplace

Définition : $\mathrm{TL}[f(t)] = \mathrm{TL}[f(t)\mathbb{1}(t)] = F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t)dt$

avec $\mathbb{1}(t)$ l'échelon unité: $\mathbb{1}(t) = 0$ pour $t<0$; $\mathbb{1}(t) = 1$ pour $t>0$

Théorèmes importants

Linéarité : $\mathrm{TL}\,[\lambda f(t) + \mu g(t)] = \lambda\, \mathrm{TL}\,[f(t)] + \mu\, \mathrm{TL}\,[g(t)]$

Changement d'échelle des temps : $\mathrm{TL}\,[f(at)\,\mathbb{1}(t)] = \frac{1}{a} F(\frac{p}{a})\,;\, a \in \Re^{*+}$

Changement d'origine des temps : $\mathrm{TL}[f(t - t_0)\,\mathbb{1}(t - t_0)] = e^{-t_0 p}\, F(p)$ avec $F(p) = \mathrm{TL}[f(t)\,\mathbb{1}(t)]$

Changement d'origine en p : $F(p + a) = \mathrm{TL}\,[\,e^{-at}\, f(t)\,\mathbb{1}(t)]$ avec $\mathrm{TL}[f(t)\mathbb{1}(t)] = F(p)$

Produit par t : $\mathrm{TL}[t\, f(t)\mathbb{1}(t)] = -\frac{d\,F(p)}{dp}$

Division par t : $\mathrm{TL}\left[\frac{f(t)}{t}\mathbb{1}(t)\right] = \int_p^{\infty} F(u)\, d(u)$

Valeur initiale

$$\lim_{t\to 0} f(t) = \lim_{p\to +\infty} pF(p)$$

Valeur finale

$$\lim_{t\to +\infty} f(t) = \lim_{p\to 0^+} pF(p)$$

Transformée des dérivées : $\mathrm{TL}[f'(t)] = p\,F(p) - f(0^+)$

$\mathrm{TL}[f''(t)] = p^2\, F(p) - p\, f(0^+) - f'(0^+)$

Transformée d'une primitive : $\mathrm{TL}\left[\left(\int_0^t f(x)dx\right)\mathbb{1}(t)\right] = \frac{F(p)}{p}$

Transformée d'une fonction périodique (période T): $\mathrm{TL}[f(t)\mathbb{1}(t)] = \frac{F_0(p)}{1 - e^{-pT}}$

avec $f_0(t)$ = motif (durée T : nulle sur $]T, +\infty[$) ; $\mathrm{TL}\,[f_0(t)] = F_0(p)$

Produit de convolution : $\mathrm{TL}^{-1}[F(p)\,G(p)] = f(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t - u)\, g(u)\, du = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)\, g(t - u)\, du$

si f(t) et g(t) sont deux fonctions causales : $f(t) * g(t) = \int_0^t f(u)\, g(t - u)\, du = \int_0^t f(t - u)\, g(u)\, du$

Transformée de Laplace --> étude harmonique (transformée de Fourier): **p = jω**

Dictionnaire usuel

$\mathrm{TL}[\mathbb{1}(t)] = \frac{1}{p}$; $\mathrm{TL}[\delta(t)] = 1$; $\mathrm{TL}[t^n\,\mathbb{1}(t)] = \frac{n!}{p^{n+1}}$; $\mathrm{TL}[e^{-at}\mathbb{1}(t)] = \frac{1}{p + a}\,(a \in \mathbb{C})$

$\mathrm{TL}[\sin(\omega_0 t)\mathbb{1}(t)] = \frac{\omega_0}{p^2 + \omega_0^2}$; $\mathrm{TL}[\cos(\omega_0 t)\mathbb{1}(t)] = \frac{p}{p^2 + \omega_0^2}$;

$\mathrm{TL}[e^{-at}\sin(\omega_0 t)\mathbb{1}(t)] = \frac{\omega_0}{(p + a)^2 + \omega_0^2}$; $\mathrm{TL}[e^{-at}\cos(\omega_0 t)\mathbb{1}(t)] = \frac{(p + a)}{(p + a)^2 + \omega_0^2}$

Transformée de Fourier

Définitions

Développement en série de Fourier de x(t) de période T:

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos(n\frac{2\pi}{T}t) + b_n\sin(n\frac{2\pi}{T}t)\right] = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[c_n\cos(n\frac{2\pi}{T}t+\varphi_n)\right] = \sum_{n=1}^{\infty}X_n e^{jn\frac{2\pi}{T}t} \text{ avec :}$$

$$a_0 = \tfrac{1}{T}\int_{t'}^{t'+T}x(t)\,dt;\; a_n = \tfrac{2}{T}\int_{t'}^{t'+T}x(t)\cos(n\frac{2\pi}{T}t)\,dt;\; b_n = \tfrac{2}{T}\int_{t'}^{t'+T}x(t)\sin(n\frac{2\pi}{T}t)\,dt;\;(t'\text{ quelconque})$$

$$X_0=c_0=a_0;\; c_n=\sqrt{a_n^2+b_n^2}\;;\; \varphi_n=\mathrm{arctg}(-b_n/a_n);\text{ soit } c_n e^{j\varphi_n}=a_n-jb_n\;;\; X_n=\frac{c_n}{2}e^{j\varphi_n}\;;\; X_{-n}=X_n^*=\frac{c_n}{2}e^{-j\varphi_n}$$

Transformée de Fourier : $X(\nu)=TF[x(t)]=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-j2\pi\nu t}dt$

Transformée de Fourier inverse : $x(t)=TF^{-1}[X(\nu)]=\int_{-\infty}^{\infty}X(\nu)e^{j2\pi\nu t}d\nu$

Théorèmes importants

Linéarité : $TF[\lambda x(t)+\mu y(t)]=\lambda\, TF[x(t)]+\mu\, TF[y(t)]$

Changement d'échelle des temps : $TF[x(a t)]=\frac{1}{|a|}X\left(\frac{\nu}{a}\right);\; a\in\Re^*$

Changement d'origine des temps : $TF[x(t-t_0)]=e^{-j2\pi\nu t_0}\,X(\nu)$ avec $X(\nu)=TF[x(t)]$

Changement d'origine en ν : $X(\nu-\nu_0)=TF[\,e^{j2\pi\nu_0 t}\,x(t)]$ avec $x(t)=TF^{-1}[X(\nu)]$

Transformée des dérivées : $TF\left[\frac{d^n x(t)}{dt^n}\right]=(j2\pi\nu)^n X(\nu)\,;\; TF[(-j2\pi\nu)^n x(t)]=\frac{d^n X(\nu)}{d\nu^n}$

Produit : $TF[x(t)y(t)]=X(\nu)*Y(\nu)$ avec $X(\nu)*Y(\nu)=\int_{-\infty}^{\infty}X(\nu-u)\,Y(u)\,du=\int_{-\infty}^{\infty}X(\nu')\,Y(\nu-\nu')\,d\nu'$

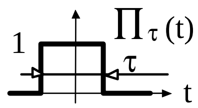
Produit de convolution: $TF[x(t)*y(t)]=X(\nu)\,Y(\nu)$ avec $x(t)*y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t-u)\,y(u)\,du=\int_{-\infty}^{\infty}x(t')\,y(t-t')\,dt'$

Transformée de Fourier de fonction réelle: $x(t)\in\Re\Rightarrow X(-\nu)=X(\nu)^*$ $\quad\begin{cases}|X(-\nu)|=|X(\nu)|\\ \arg(X(-\nu))=-\arg(X(\nu))\end{cases}$

Dictionnaire usuel

$TF[\delta(t)]=1$; $\quad TF[1]=\delta(\nu)$; $\quad TF[\,e^{j2\pi\nu_0 t}\,]=\delta(\nu-\nu_0)$

$TF[\cos(2\pi\nu_0 t)]=\frac{1}{2}(\delta(\nu+\nu_0)+\delta(\nu-\nu_0))$; $\quad TF[\sin(2\pi\nu_0 t)]=\frac{j}{2}(\delta(\nu+\nu_0)-\delta(\nu-\nu_0))$



$\prod_\tau(t)$ porte unitaire centrée de largeur τ : $TF[\prod_\tau(t)]=\frac{\sin(\pi\nu\tau)}{\pi\nu}=\tau\,\mathrm{sinc}(\pi\nu\tau)$

Gaussienne: $TF\left[e^{-a t^2}\right]=\sqrt{\frac{\pi}{a}}\,e^{-\frac{\pi^2\nu^2}{a}}$ avec $a\in\Re^{*+}$

Peigne de Dirac de période T: $\text{Ш}_T(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-kT)\,;\; TF\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-kT)\right]=\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\nu-\frac{n}{T})=\frac{1}{T}\text{Ш}_{1/T}(\nu)$

Transformée en Z

Définition (signal causal)

$$\mathrm{TZ}\,[f(t)] = \mathrm{TZ}\,[f(k)] = F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(k) z^{-k} \qquad \text{avec } f(k) = f(t=k\,Te)$$

$$\left.\begin{array}{l} f(t) : \text{fonction du temps} \\ f(k) : \text{suite de nombres} \end{array}\right\} f(k) = f(k\,Te)\,;\ Te : \text{période d'échantillonnage} = \frac{1}{\nu_{ech}}$$

Transformée en Z ---> Transformée de Laplace : Relation exacte : $z = e^{pTe}$

Relation approchée : $p \approx \dfrac{2}{Te}\dfrac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} = 2\nu_{ech}\dfrac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$ à utiliser avec le pré-décalage des fréquences

$\nu_{c\,app} = \dfrac{1}{\pi Te}\,\mathrm{tg}(\pi\, Te\ \nu_c)$;

Théorèmes importants

Linéarité : TZ [$\lambda f(t) + \mu g(t)$] = λ TZ [f(t)] + μ TZ [g(t)]

Décalage temporel : $\mathrm{TZ}\,[f(t-Te)\,\mathbb{1}(t-Te)] = \mathrm{TZ}\ [f(k-1)\mathbb{1}(k-1)] = z^{-1}F(z)$

(signal causal)-> $\mathrm{TZ}\,[f(t+Te)\,\mathbb{1}(t)] = \mathrm{TZ}\ [f(k+1)\mathbb{1}(k)] = z\,F(z) - z\,f(0)$

Valeur finale (si elle existe)

$$\lim_{k\to\infty} f(k) = \lim_{z\to 1}(1-z^{-1})F(z)$$

Valeur initiale

$$f(0) = \lim_{z\to\infty} F(z)$$

$$\mathrm{TZ}\,[e^{-a\,t} f(t)] = F\left(\frac{z}{e^{-aTe}}\right) \qquad \mathrm{TZ}\,[t\,f(t)] = -z\,Te\frac{d\,F(z)}{dz}$$

Dictionnaire usuel

$\mathrm{TZ}\,[\delta(t)] = 1$; $\mathrm{TZ}\,[\mathbb{1}(t)] = \dfrac{z}{z-1}$; $\mathrm{TZ}\,[t\mathbb{1}(t)] = \dfrac{z\ Te}{(z-1)^2}$

$\mathrm{TZ}\,[a^{\frac{t}{Te}}\mathbb{1}(t)] = \dfrac{z}{z-a}$; $\mathrm{TZ}\,[e^{-at}\mathbb{1}(t)] = \dfrac{z}{z-e^{-aTe}}$; $\mathrm{TZ}\,[t\,e^{-at}\mathbb{1}(t)] = \dfrac{zTe\ e^{-aTe}}{(z-e^{-aTe})^2}$

$\mathrm{TZ}\,[\sin(\omega t)\mathbb{1}(t)] = \dfrac{z\sin(\omega Te)}{z^2 - 2z\cos(\omega Te)+1}$; $\mathrm{TZ}\,[\cos(\omega t)\mathbb{1}(t)] = \dfrac{z\,(z-\cos(\omega Te))}{z^2 - 2z\cos(\omega Te)+1}$

$$\mathrm{TZ}\,[e^{-\frac{t}{\tau}}\sin(\omega t)\mathbb{1}(t)] = \frac{z\,e^{-\frac{Te}{\tau}}\sin(\omega Te)}{z^2 - 2\,z\,e^{-\frac{Te}{\tau}}\cos(\omega Te) + e^{-2\frac{Te}{\tau}}}$$

$$\mathrm{TZ}\,[e^{-\frac{t}{\tau}}\cos(\omega t)\mathbb{1}(t)] = \frac{z(z-e^{-\frac{Te}{\tau}}\cos(\omega Te))}{z^2 - 2\,z\,e^{-\frac{Te}{\tau}}\cos(\omega Te) + e^{-2\frac{Te}{\tau}}}$$

Formulaire de trigonométrie

$\sin(a\pm b) = \sin(a)\cos(b) \pm \cos(a)\sin(b)$; $\cos(a\pm b) = \cos(a)\cos(b) \mp \sin(a)\sin(b)$;

$\sin(a)\cos(b) = (1/2)(\sin(a-b)+\sin(a+b))$;

Formulaire de probabilités

Régression linéaire: $a = \frac{s_{XY}}{s_X^2}$; $b = \bar{y} - a\,\bar{x}$; $r = \frac{s_{XY}}{s_X\, s_Y}$; avec $s_{XY} = \frac{\sum n_i (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{N}$

Soient A et B deux évènements:

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$	$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
A et B incompatibles si $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$	Probabilité conditionnelle: $P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$
Evènements indépendants: $P(B/A) = P(B)$ ou $P(A/B) = P(A)$	A et B indépendants: $P(A \cap B) = P(A)\,P(B)$
Théorème de Bayes: $P(A/B) = P(B/A)\frac{P(A)}{P(B)}$	

p tirages parmi n objets	Sans remise	Avec remise
Avec ordre	A_n^p	n^p
Sans ordre (combinaison)	C_n^p	C_{n+p-1}^p

$$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{n(n-1)...(n-p+1)}{p!}$$

p objets sur n cases	un objet par case	sans limitation du nombre d'objets par case
Objets discernables (ordre)	A_n^p	n^p
Objets non discernables (sans ordre)	C_n^p	C_{n+p-1}^p

Loi binomiale $\mathcal{B}$(n;p): $P(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$ pour tout k de 0 à n; E(X)=n p; V(X)=n p(1-p);

Loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$: $P(X = k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$; E(X)=λ ; V(X)= λ;

Approximation: loi binomiale => loi de Poisson: si n>50 et p≤0,1 et np <17, on remplace la loi binomiale $\mathcal{B}$(n;p) par la loi de Poisson $\mathcal{P}$(np).

Loi Normale $\mathcal{N}(\mu,\sigma)$: $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right)$; E(X)=$\mu$; V(X)= σ^2;

Approximation: loi binomiale => loi Normale sous une des conditions :

- si n>5 et $\left|\sqrt{\frac{p}{1-p}} - \sqrt{\frac{1-p}{p}}\right| \frac{1}{\sqrt{n}} < 0{,}3$
- n≥30 et (n p>10) et (n(1-p)>10)
- np(1-p)>9

on remplace la loi binomiale $\mathcal{B}$(n,p) par la loi $\mathcal{N}$(np, $\sqrt{n\,p\,(1-p)}$)

Approximation: loi de Poisson => loi Normale: si λ>18 alors on remplace la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ par la loi $\mathcal{N}(\lambda, \sqrt{\lambda}$).

Résumé de l'estimation

Notation:

Caractéristique	Echantillon	Population totale
Taille	n	N
Moyenne	$\overline{x}$	μ
Variance	s^2	σ^2
Ecart-type	s	σ
Proportion	p_e	p

I ESTIMATION PONCTUELLE

$$\hat{\mu} = \overline{x}$$

$$\hat{p} = p_e$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{n}{n-1}s^2$$

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{n}{n-1}}\ s$$

II INTERVALLES DE CONFIANCE

A Moyenne d'une loi X

***Hypothèses* : X suit une loi Normale ou la taille de l'échantillon est supérieure à 30.**

$$I = \left[\overline{x} - t\frac{\sigma}{\sqrt{n}} ; \overline{x} + t\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

Obtention de t :

- **si la variance de la population mère est connue**, t est obtenu dans la table de la loi **Normale** $\mathcal{N}(0{,}1)$ pour 1- $\frac{\alpha}{2}$
- **si la variance est inconnue mais estimée par** $\hat{\sigma}$, t est obtenu à partir de la loi de **Student** *bilatérale* à (n-1) degrés de liberté pour p = (1- α) et l'intervalle I devient :

$$I = \left[\overline{x} - t\frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}} ; \overline{x} + t\frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}}\right]$$

remarque : si n est supérieur à 30, on remplace la loi de Student par la loi Normale.

B Fréquence

***Hypothèses* : les conditions d'approximation de la loi Binomiale par la loi Normale s'appliquent.**

$$I = \left[p - t\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} ; p + t\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right]$$

t est déterminé à l'aide de la table $\mathcal{N}(0{,}1)$ pour la valeur $1 - \frac{\alpha}{2}$.

B Variance

***Hypothèses* : X suit une loi Normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$ ou la taille de l'échantillon est supérieure à 30.**

- Si μ est connu : $I=\left[\dfrac{n\,v}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)};\dfrac{n\,v}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n)}\right]$ avec $v=\dfrac{1}{n}\sum(x_i-\mu)^2$, $\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)$ est la valeur x telle que $P\left(\chi^2(n)<x\right)=1-\dfrac{\alpha}{2}$ et $\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n)$ est la valeur x telle que $P\left(\chi^2(n)<x\right)=\dfrac{\alpha}{2}$ pour la loi χ^2 à n degrés de liberté.
- Si μ est inconnu : $I=\left[\dfrac{n\,s^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)};\dfrac{n\,s^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\right]$ avec $s^2=\dfrac{1}{n}\sum(x_i-\overline{x})^2$ variance de l'échantillon et $\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$ est la valeur x telle que $P\left(\chi^2(n-1)<x\right)=1-\dfrac{\alpha}{2}$ et $\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$ est la valeur x telle que $P\left(\chi^2(n-1)<x\right)=\dfrac{\alpha}{2}$ pour la loi χ^2 à (n-1) degrés de liberté.

Résumé sur les test d'hypothèse

<u>Comparaison d'une moyenne d'échantillon à une valeur donnée</u>

Loi Normale :

- Variance de la population σ^2 connue : $t_{cal} = \dfrac{\bar{x} - a}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ suit une loi $\mathcal{N}(0,1)$
- Variance de la population σ^2 inconnue : $t_{cal} = \dfrac{\bar{x} - a}{\dfrac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}}}$ suit une loi $\mathcal{S}$(n-1)

Loi quelconque (n>30) : $t_{cal} = \dfrac{\bar{x} - a}{\dfrac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}}}$ suit une loi $\mathcal{N}(0,1)$

<u>Comparaison d'une fréquence à une valeur donnée</u> : $t_{cal} = \dfrac{p_{mes} - p_1}{\sqrt{\dfrac{p_1(1-p_1)}{n}}}$ suit une loi $\mathcal{N}(0,1)$

<u>Comparaison de deux moyennes</u>

Echantillons indépendants (2 échantillons (n_1, n_2))

- Populations normales de variances connues ou grands échantillons (n>30) :

$$t_{obs} = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\dfrac{\hat{\sigma}_1^2}{n_1} + \dfrac{\hat{\sigma}_2^2}{n_2}}} \text{ suit une loi } \mathcal{N}(0,1)$$

- Populations normales et variances inconnues: petits échantillons (n≤30) :

Test préliminaire d'égalité des variances: $F_{obs} = \dfrac{\hat{\sigma}_1^{\ 2}}{\hat{\sigma}_2^{\ 2}} > 1$ suit une loi de Fischer $F_{n1-1,n2-1}$.

On estime la variance commune : $\hat{\sigma}_c^2 = \dfrac{(n_1 - 1)\hat{\sigma}_1^2 + (n_2 - 1)\hat{\sigma}_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$

$$t_{obs} = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\hat{\sigma}_c^2\left(\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}\right)}} \text{ suit une loi } \mathcal{S}(n_1+n_2-2)$$

Echantillons appariés : $t_{cal} = \dfrac{\bar{d}}{\dfrac{\hat{\sigma}_d}{\sqrt{n}}}$ suit une loi $\mathcal{S}$(n-1) avec $\hat{\sigma}_d$ écart type estimé des écarts.

<u>Comparaison de deux fréquences</u> : $t_{cal} = \dfrac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{\dfrac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n_1} + \dfrac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{n_2}}}$ suit une loi $\mathcal{N}(0,1)$

Dans chaque cas les valeurs de t_{obs} sont à comparer avec $t_{théo}$ lu suivant le cas

- dans la table de la loi **Normale** $\mathcal{N}(0,1)$ pour 1- $\dfrac{\alpha}{2}$
- dans la table de la loi de **Student** *bilatérale* pour p = (1- α)

Comparaison d'une variance d'échantillon à une valeur donnée (loi normale $\mathcal{N}(\mu,\sigma)$) :

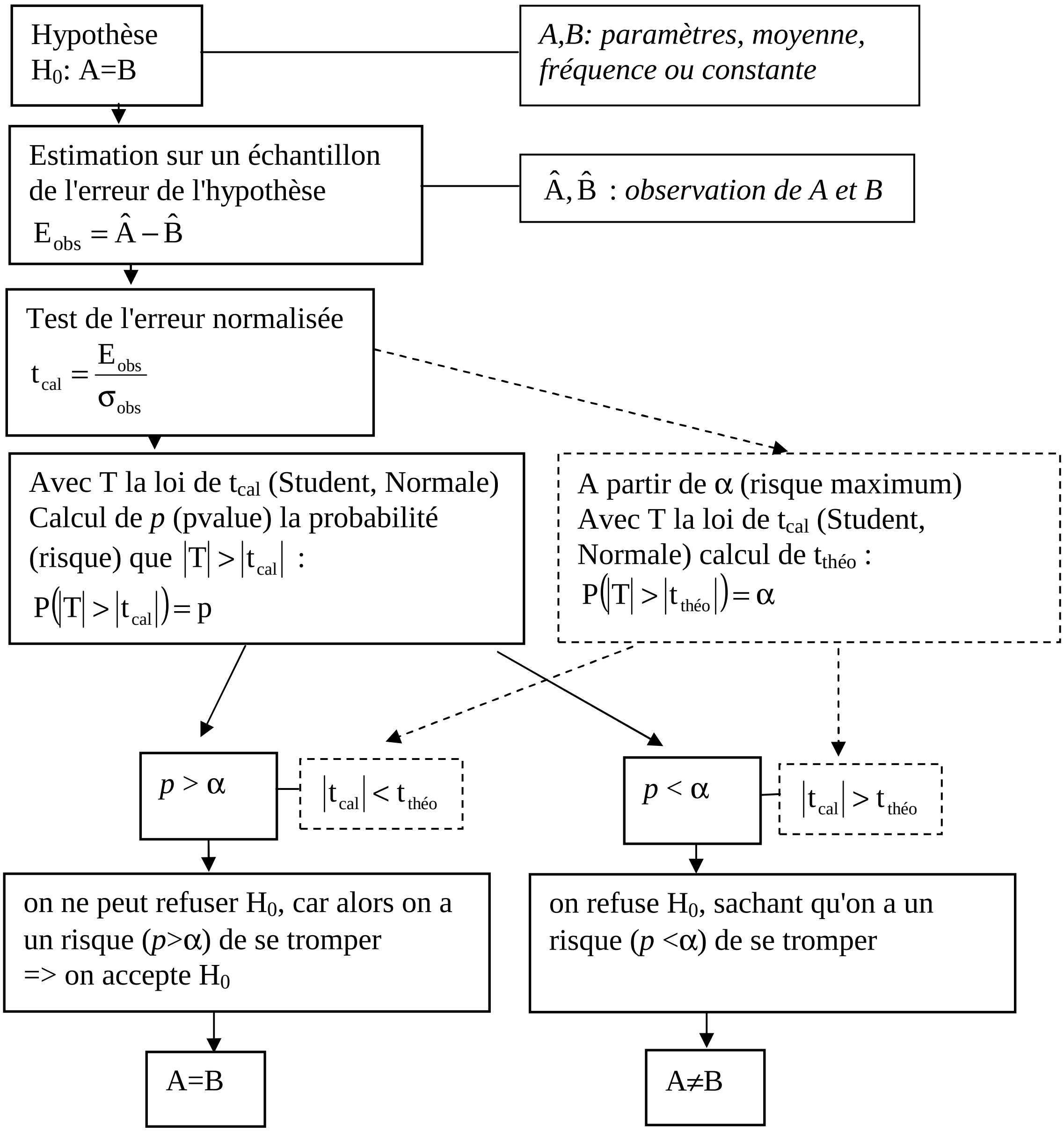
- Moyenne connue : $\frac{n\,v}{\sigma^2}$ avec $v = \frac{1}{n}\sum(x_i - \mu)^2$ suit une loi du $\chi^2(n)$
- moyenne inconnue, $\frac{n\,s^2}{\sigma^2}$ suit une loi du $\chi^2(n\text{-}1)$

Comparaison de deux variances d'échantillons (n_1, n_2) : $F_{cal} = \frac{\hat{\sigma}_1^{\,2}}{\hat{\sigma}_2^{\,2}}$ suit une loi de Fischer $F_{n1-1,n2-1}$.

Test du χ^2 : on compare sur n classes la répartition des effectifs observée (o) à la répartition théorique (t). On construit $\chi^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{(o_i - t_i)^2}{t_i}$ qui suit une loi du $\chi^2(n\text{-}1)$.

Répartition théorique (t) suivant l'hypothèse H_0. Effectif min des classes : 5
Ddl = n-1-nb paramètre loi ; Ddl = (n_1-1)(n_2-1) si indépendance.

Résumé de la démarche d'un test



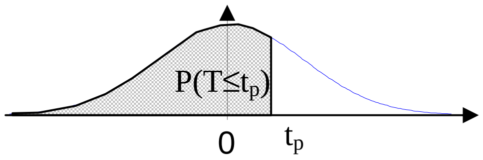


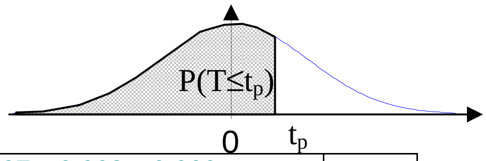
Table 1 : **Loi Normale centrée réduite $\mathcal{N}(0\ ;\ 1)$: $P(T<t_p)$, détermination de $p=P(T\leq t_p)$ pour t_p connue**

tp	*0,00*	*0,01*	*0,02*	*0,03*	*0,04*	*0,05*	*0,06*	*0,07*	*0,08*	*0,09*
0,0	**0,5000**	**0,5040**	**0,5080**	**0,5120**	**0,5160**	**0,5199**	**0,5239**	**0,5279**	**0,5319**	**0,5359**
0,1	**0,5398**	**0,5438**	**0,5478**	**0,5517**	**0,5557**	**0,5596**	**0,5636**	**0,5675**	**0,5714**	**0,5753**
0,2	**0,5793**	**0,5832**	**0,5871**	**0,5910**	**0,5948**	**0,5987**	**0,6026**	**0,6064**	**0,6103**	**0,6141**
0,3	**0,6179**	**0,6217**	**0,6255**	**0,6293**	**0,6331**	**0,6368**	**0,6406**	**0,6443**	**0,6480**	**0,6517**
0,4	**0,6554**	**0,6591**	**0,6628**	**0,6664**	**0,6700**	**0,6736**	**0,6772**	**0,6808**	**0,6844**	**0,6879**
0,5	**0,6915**	**0,6950**	**0,6985**	**0,7019**	**0,7054**	**0,7088**	**0,7123**	**0,7157**	**0,7190**	**0,7224**
0,6	**0,7257**	**0,7291**	**0,7324**	**0,7357**	**0,7389**	**0,7422**	**0,7454**	**0,7486**	**0,7517**	**0,7549**
0,7	**0,7580**	**0,7611**	**0,7642**	**0,7673**	**0,7704**	**0,7734**	**0,7764**	**0,7794**	**0,7823**	**0,7852**
0,8	**0,7881**	**0,7910**	**0,7939**	**0,7967**	**0,7995**	**0,8023**	**0,8051**	**0,8078**	**0,8106**	**0,8133**
0,9	**0,8159**	**0,8186**	**0,8212**	**0,8238**	**0,8264**	**0,8289**	**0,8315**	**0,8340**	**0,8365**	**0,8389**
1,0	**0,8413**	**0,8438**	**0,8461**	**0,8485**	**0,8508**	**0,8531**	**0,8554**	**0,8577**	**0,8599**	**0,8621**
1,1	**0,8643**	**0,8665**	**0,8686**	**0,8708**	**0,8729**	**0,8749**	**0,8770**	**0,8790**	**0,8810**	**0,8830**
1,2	**0,8849**	**0,8869**	**0,8888**	**0,8907**	**0,8925**	**0,8944**	**0,8962**	**0,8980**	**0,8997**	**0,9015**
1,3	**0,9032**	**0,9049**	**0,9066**	**0,9082**	**0,9099**	**0,9115**	**0,9131**	**0,9147**	**0,9162**	**0,9177**
1,4	**0,9192**	**0,9207**	**0,9222**	**0,9236**	**0,9251**	**0,9265**	**0,9279**	**0,9292**	**0,9306**	**0,9319**
1,5	**0,9332**	**0,9345**	**0,9357**	**0,9370**	**0,9382**	**0,9394**	**0,9406**	**0,9418**	**0,9429**	**0,9441**
1,6	**0,9452**	**0,9463**	**0,9474**	**0,9484**	**0,9495**	**0,9505**	**0,9515**	**0,9525**	**0,9535**	**0,9545**
1,7	**0,9554**	**0,9564**	**0,9573**	**0,9582**	**0,9591**	**0,9599**	**0,9608**	**0,9616**	**0,9625**	**0,9633**
1,8	**0,9641**	**0,9649**	**0,9656**	**0,9664**	**0,9671**	**0,9678**	**0,9686**	**0,9693**	**0,9699**	**0,9706**
1,9	**0,9713**	**0,9719**	**0,9726**	**0,9732**	**0,9738**	**0,9744**	**0,9750**	**0,9756**	**0,9761**	**0,9767**
2,0	**0,9772**	**0,9778**	**0,9783**	**0,9788**	**0,9793**	**0,9798**	**0,9803**	**0,9808**	**0,9812**	**0,9817**
2,1	**0,9821**	**0,9826**	**0,9830**	**0,9834**	**0,9838**	**0,9842**	**0,9846**	**0,9850**	**0,9854**	**0,9857**
2,2	**0,9861**	**0,9864**	**0,9868**	**0,9871**	**0,9875**	**0,9878**	**0,9881**	**0,9884**	**0,9887**	**0,9890**
2,3	**0,9893**	**0,9896**	**0,9898**	**0,9901**	**0,9904**	**0,9906**	**0,9909**	**0,9911**	**0,9913**	**0,9916**
2,4	**0,9918**	**0,9920**	**0,9922**	**0,9925**	**0,9927**	**0,9929**	**0,9931**	**0,9932**	**0,9934**	**0,9936**
2,5	**0,9938**	**0,9940**	**0,9941**	**0,9943**	**0,9945**	**0,9946**	**0,9948**	**0,9949**	**0,9951**	**0,9952**
2,6	**0,9953**	**0,9955**	**0,9956**	**0,9957**	**0,9959**	**0,9960**	**0,9961**	**0,9962**	**0,9963**	**0,9964**
2,7	**0,9965**	**0,9966**	**0,9967**	**0,9968**	**0,9969**	**0,9970**	**0,9971**	**0,9972**	**0,9973**	**0,9974**
2,8	**0,9974**	**0,9975**	**0,9976**	**0,9977**	**0,9977**	**0,9978**	**0,9979**	**0,9979**	**0,9980**	**0,9981**
2,9	**0,9981**	**0,9982**	**0,9982**	**0,9983**	**0,9984**	**0,9984**	**0,9985**	**0,9985**	**0,9986**	**0,9986**

tp	*3,0*	*3,1*	*3,2*	*3,3*	*3,4*	*3,5*	*3,6*	*3,7*	*3,8*	*3,9*
P(T<tp)	**0,998650**	**0,999032**	**0,999313**	**0,999517**	**0,999663**	**0,999767**	**0,999841**	**0,999892**	**0,999928**	**0,999952**

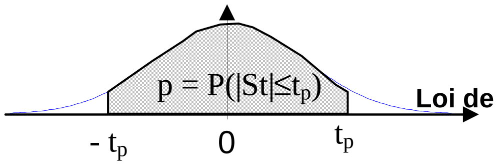
Table 2 : **Loi Normale centrée réduite $\mathcal{N}(0\ ;\ 1)$**

Détermination de t_p pour $p=P(T\leq t_p)$ connue



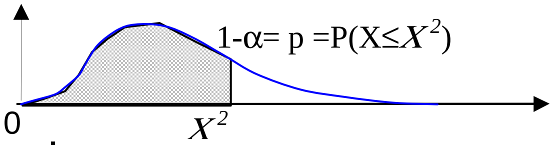
P<0,5	*0,000*	*0,001*	*0,002*	*0,003*	*0,004*	*0,005*	*0,006*	*0,007*	*0,008*	*0,009*		
0,00		**3,090**	**2,878**	**2,748**	**2,652**	**2,576**	**2,512**	**2,457**	**2,409**	**2,366**	**2,326**	*0,99*
0,01	**2,326**	**2,290**	**2,257**	**2,226**	**2,197**	**2,170**	**2,144**	**2,120**	**2,097**	**2,075**	**2,054**	*0,98*
0,02	**2,054**	**2,034**	**2,014**	**1,995**	**1,977**	**1,960**	**1,943**	**1,927**	**1,911**	**1,896**	**1,881**	*0,97*
0,03	**1,881**	**1,866**	**1,852**	**1,838**	**1,825**	**1,812**	**1,799**	**1,787**	**1,774**	**1,762**	**1,751**	*0,96*
0,04	**1,751**	**1,739**	**1,728**	**1,717**	**1,706**	**1,695**	**1,685**	**1,675**	**1,665**	**1,655**	**1,645**	*0,95*
0,05	**1,645**	**1,635**	**1,626**	**1,616**	**1,607**	**1,598**	**1,589**	**1,580**	**1,572**	**1,563**	**1,555**	*0,94*
0,06	**1,555**	**1,546**	**1,538**	**1,530**	**1,522**	**1,514**	**1,506**	**1,499**	**1,491**	**1,483**	**1,476**	*0,93*
0,07	**1,476**	**1,468**	**1,461**	**1,454**	**1,447**	**1,440**	**1,433**	**1,426**	**1,419**	**1,412**	**1,405**	*0,92*
0,08	**1,405**	**1,398**	**1,392**	**1,385**	**1,379**	**1,372**	**1,366**	**1,359**	**1,353**	**1,347**	**1,341**	*0,91*
0,09	**1,341**	**1,335**	**1,329**	**1,323**	**1,317**	**1,311**	**1,305**	**1,299**	**1,293**	**1,287**	**1,282**	*0,90*
0,10	**1,282**	**1,276**	**1,270**	**1,265**	**1,259**	**1,254**	**1,248**	**1,243**	**1,237**	**1,232**	**1,227**	*0,89*
0,11	**1,227**	**1,221**	**1,216**	**1,211**	**1,206**	**1,200**	**1,195**	**1,190**	**1,185**	**1,180**	**1,175**	*0,88*
0,12	**1,175**	**1,170**	**1,165**	**1,160**	**1,155**	**1,150**	**1,146**	**1,141**	**1,136**	**1,131**	**1,126**	*0,87*
0,13	**1,126**	**1,122**	**1,117**	**1,112**	**1,108**	**1,103**	**1,098**	**1,094**	**1,089**	**1,085**	**1,080**	*0,86*
0,14	**1,080**	**1,076**	**1,071**	**1,067**	**1,063**	**1,058**	**1,054**	**1,049**	**1,045**	**1,041**	**1,036**	*0,85*
0,15	**1,036**	**1,032**	**1,028**	**1,024**	**1,019**	**1,015**	**1,011**	**1,007**	**1,003**	**0,999**	**0,994**	*0,84*
0,16	**0,994**	**0,990**	**0,986**	**0,982**	**0,978**	**0,974**	**0,970**	**0,966**	**0,962**	**0,958**	**0,954**	*0,83*
0,17	**0,954**	**0,950**	**0,946**	**0,942**	**0,938**	**0,935**	**0,931**	**0,927**	**0,923**	**0,919**	**0,915**	*0,82*
0,18	**0,915**	**0,912**	**0,908**	**0,904**	**0,900**	**0,896**	**0,893**	**0,889**	**0,885**	**0,882**	**0,878**	*0,81*
0,19	**0,878**	**0,874**	**0,871**	**0,867**	**0,863**	**0,860**	**0,856**	**0,852**	**0,849**	**0,845**	**0,842**	*0,80*
0,20	**0,842**	**0,838**	**0,834**	**0,831**	**0,827**	**0,824**	**0,820**	**0,817**	**0,813**	**0,810**	**0,806**	*0,79*
0,21	**0,806**	**0,803**	**0,800**	**0,796**	**0,793**	**0,789**	**0,786**	**0,782**	**0,779**	**0,776**	**0,772**	*0,78*
0,22	**0,772**	**0,769**	**0,765**	**0,762**	**0,759**	**0,755**	**0,752**	**0,749**	**0,745**	**0,742**	**0,739**	*0,77*
0,23	**0,739**	**0,736**	**0,732**	**0,729**	**0,726**	**0,722**	**0,719**	**0,716**	**0,713**	**0,710**	**0,706**	*0,76*
0,24	**0,706**	**0,703**	**0,700**	**0,697**	**0,693**	**0,690**	**0,687**	**0,684**	**0,681**	**0,678**	**0,674**	*0,75*
0,25	**0,674**	**0,671**	**0,668**	**0,665**	**0,662**	**0,659**	**0,656**	**0,653**	**0,650**	**0,646**	**0,643**	*0,74*
0,26	**0,643**	**0,640**	**0,637**	**0,634**	**0,631**	**0,628**	**0,625**	**0,622**	**0,619**	**0,616**	**0,613**	*0,73*
0,27	**0,613**	**0,610**	**0,607**	**0,604**	**0,601**	**0,598**	**0,595**	**0,592**	**0,589**	**0,586**	**0,583**	*0,72*
0,28	**0,583**	**0,580**	**0,577**	**0,574**	**0,571**	**0,568**	**0,565**	**0,562**	**0,559**	**0,556**	**0,553**	*0,71*
0,29	**0,553**	**0,550**	**0,548**	**0,545**	**0,542**	**0,539**	**0,536**	**0,533**	**0,530**	**0,527**	**0,524**	*0,70*
0,30	**0,524**	**0,522**	**0,519**	**0,516**	**0,513**	**0,510**	**0,507**	**0,504**	**0,502**	**0,499**	**0,496**	*0,69*
0,31	**0,496**	**0,493**	**0,490**	**0,487**	**0,485**	**0,482**	**0,479**	**0,476**	**0,473**	**0,470**	**0,468**	*0,68*
0,32	**0,468**	**0,465**	**0,462**	**0,459**	**0,457**	**0,454**	**0,451**	**0,448**	**0,445**	**0,443**	**0,440**	*0,67*
0,33	**0,440**	**0,437**	**0,434**	**0,432**	**0,429**	**0,426**	**0,423**	**0,421**	**0,418**	**0,415**	**0,412**	*0,66*
0,34	**0,412**	**0,410**	**0,407**	**0,404**	**0,402**	**0,399**	**0,396**	**0,393**	**0,391**	**0,388**	**0,385**	*0,65*
0,35	**0,385**	**0,383**	**0,380**	**0,377**	**0,375**	**0,372**	**0,369**	**0,366**	**0,364**	**0,361**	**0,358**	*0,64*
0,36	**0,358**	**0,356**	**0,353**	**0,350**	**0,348**	**0,345**	**0,342**	**0,340**	**0,337**	**0,335**	**0,332**	*0,63*
0,37	**0,332**	**0,329**	**0,327**	**0,324**	**0,321**	**0,319**	**0,316**	**0,313**	**0,311**	**0,308**	**0,305**	*0,62*
0,38	**0,305**	**0,303**	**0,300**	**0,298**	**0,295**	**0,292**	**0,290**	**0,287**	**0,285**	**0,282**	**0,279**	*0,61*
0,39	**0,279**	**0,277**	**0,274**	**0,272**	**0,269**	**0,266**	**0,264**	**0,261**	**0,259**	**0,256**	**0,253**	*0,60*
0,40	**0,253**	**0,251**	**0,248**	**0,246**	**0,243**	**0,240**	**0,238**	**0,235**	**0,233**	**0,230**	**0,228**	*0,59*
0,41	**0,228**	**0,225**	**0,222**	**0,220**	**0,217**	**0,215**	**0,212**	**0,210**	**0,207**	**0,204**	**0,202**	*0,58*
0,42	**0,202**	**0,199**	**0,197**	**0,194**	**0,192**	**0,189**	**0,187**	**0,184**	**0,181**	**0,179**	**0,176**	*0,57*
0,43	**0,176**	**0,174**	**0,171**	**0,169**	**0,166**	**0,164**	**0,161**	**0,159**	**0,156**	**0,154**	**0,151**	*0,56*
0,44	**0,151**	**0,148**	**0,146**	**0,143**	**0,141**	**0,138**	**0,136**	**0,133**	**0,131**	**0,128**	**0,126**	*0,55*
0,45	**0,126**	**0,123**	**0,121**	**0,118**	**0,116**	**0,113**	**0,111**	**0,108**	**0,105**	**0,103**	**0,100**	*0,54*
0,46	**0,100**	**0,098**	**0,095**	**0,093**	**0,090**	**0,088**	**0,085**	**0,083**	**0,080**	**0,078**	**0,075**	*0,53*
0,47	**0,075**	**0,073**	**0,070**	**0,068**	**0,065**	**0,063**	**0,060**	**0,058**	**0,055**	**0,053**	**0,050**	*0,52*
0,48	**0,050**	**0,048**	**0,045**	**0,043**	**0,040**	**0,038**	**0,035**	**0,033**	**0,030**	**0,028**	**0,025**	*0,51*
0,49	**0,025**	**0,023**	**0,020**	**0,018**	**0,015**	**0,013**	**0,010**	**0,008**	**0,005**	**0,003**	**0,000**	*0,50*
		0,009	*0,008*	*0,007*	*0,006*	*0,005*	*0,004*	*0,003*	*0,002*	*0,001*	*0,000*	p≥0,5

p	*0,9991*	*0,9992*	*0,9993*	*0,9994*	*0,9995*	*0,9996*	*0,9997*	*0,9998*	*0,9999*
t_p	**3,1214**	**3,1559**	**3,1947**	**3,2389**	**3,2905**	**3,3528**	**3,4316**	**3,5401**	**3,7190**



Loi de Student bilatérale à υ degrés de liberté, détermination de t_p pour $p=P(|St|\le t_p)$ connue

Risque bilatéral α	*80%*	*60%*	*40%*	*20%*	*10%*	*5%*	*2%*	*1%*	*0,5%*	*0,1%*
Probabilité p=1-α	*0,2*	*0,4*	*0,6*	*0,8*	*0,9*	*0,95*	*0,98*	*0,99*	*0,995*	*0,999*
υ=*1*	**0,325**	**0,727**	**1,376**	**3,078**	**6,314**	**12,706**	**31,821**	**63,656**	**318,289**	**636,578**
υ=*2*	**0,289**	**0,617**	**1,061**	**1,886**	**2,920**	**4,303**	**6,965**	**9,925**	**22,328**	**31,600**
υ=*3*	**0,277**	**0,584**	**0,978**	**1,638**	**2,353**	**3,182**	**4,541**	**5,841**	**10,214**	**12,924**
υ=*4*	**0,271**	**0,569**	**0,941**	**1,533**	**2,132**	**2,776**	**3,747**	**4,604**	**7,173**	**8,610**
υ=*5*	**0,267**	**0,559**	**0,920**	**1,476**	**2,015**	**2,571**	**3,365**	**4,032**	**5,894**	**6,869**
υ=*6*	**0,265**	**0,553**	**0,906**	**1,440**	**1,943**	**2,447**	**3,143**	**3,707**	**5,208**	**5,959**
υ=*7*	**0,263**	**0,549**	**0,896**	**1,415**	**1,895**	**2,365**	**2,998**	**3,499**	**4,785**	**5,408**
υ=*8*	**0,262**	**0,546**	**0,889**	**1,397**	**1,860**	**2,306**	**2,896**	**3,355**	**4,501**	**5,041**
υ=*9*	**0,261**	**0,543**	**0,883**	**1,383**	**1,833**	**2,262**	**2,821**	**3,250**	**4,297**	**4,781**
υ=*10*	**0,260**	**0,542**	**0,879**	**1,372**	**1,812**	**2,228**	**2,764**	**3,169**	**4,144**	**4,587**
υ=*11*	**0,260**	**0,540**	**0,876**	**1,363**	**1,796**	**2,201**	**2,718**	**3,106**	**4,025**	**4,437**
υ=*12*	**0,259**	**0,539**	**0,873**	**1,356**	**1,782**	**2,179**	**2,681**	**3,055**	**3,930**	**4,318**
υ=*13*	**0,259**	**0,538**	**0,870**	**1,350**	**1,771**	**2,160**	**2,650**	**3,012**	**3,852**	**4,221**
υ=*14*	**0,258**	**0,537**	**0,868**	**1,345**	**1,761**	**2,145**	**2,624**	**2,977**	**3,787**	**4,140**
υ=*15*	**0,258**	**0,536**	**0,866**	**1,341**	**1,753**	**2,131**	**2,602**	**2,947**	**3,733**	**4,073**
υ=*16*	**0,258**	**0,535**	**0,865**	**1,337**	**1,746**	**2,120**	**2,583**	**2,921**	**3,686**	**4,015**
υ=*17*	**0,257**	**0,534**	**0,863**	**1,333**	**1,740**	**2,110**	**2,567**	**2,898**	**3,646**	**3,965**
υ=*18*	**0,257**	**0,534**	**0,862**	**1,330**	**1,734**	**2,101**	**2,552**	**2,878**	**3,610**	**3,922**
υ=*19*	**0,257**	**0,533**	**0,861**	**1,328**	**1,729**	**2,093**	**2,539**	**2,861**	**3,579**	**3,883**
υ=*20*	**0,257**	**0,533**	**0,860**	**1,325**	**1,725**	**2,086**	**2,528**	**2,845**	**3,552**	**3,850**
υ=*21*	**0,257**	**0,532**	**0,859**	**1,323**	**1,721**	**2,080**	**2,518**	**2,831**	**3,527**	**3,819**
υ=*22*	**0,256**	**0,532**	**0,858**	**1,321**	**1,717**	**2,074**	**2,508**	**2,819**	**3,505**	**3,792**
υ=*23*	**0,256**	**0,532**	**0,858**	**1,319**	**1,714**	**2,069**	**2,500**	**2,807**	**3,485**	**3,768**
υ=*24*	**0,256**	**0,531**	**0,857**	**1,318**	**1,711**	**2,064**	**2,492**	**2,797**	**3,467**	**3,745**
υ=*25*	**0,256**	**0,531**	**0,856**	**1,316**	**1,708**	**2,060**	**2,485**	**2,787**	**3,450**	**3,725**
υ=*26*	**0,256**	**0,531**	**0,856**	**1,315**	**1,706**	**2,056**	**2,479**	**2,779**	**3,435**	**3,707**
υ=*27*	**0,256**	**0,531**	**0,855**	**1,314**	**1,703**	**2,052**	**2,473**	**2,771**	**3,421**	**3,689**
υ=*28*	**0,256**	**0,530**	**0,855**	**1,313**	**1,701**	**2,048**	**2,467**	**2,763**	**3,408**	**3,674**
υ=*29*	**0,256**	**0,530**	**0,854**	**1,311**	**1,699**	**2,045**	**2,462**	**2,756**	**3,396**	**3,660**
υ=*30*	**0,256**	**0,530**	**0,854**	**1,310**	**1,697**	**2,042**	**2,457**	**2,750**	**3,385**	**3,646**
υ=*∞*	**0,253**	**0,524**	**0,842**	**1,282**	**1,645**	**1,960**	**2,326**	**2,576**	**3,090**	**3,291**



Loi du χ^2 à υ degrés de liberté, détermination de X^2 pour p= P(X≤X^2) connue

probabilité	*0,001*	*0,005*	*0,01*	*0,025*	*0,05*	*0,1*	*0,5*	*0,9*	*0,95*	*0,975*	*0,99*	*0,995*	*0,999*	*0,9995*
$\upsilon=1$				**0,001**	**0,004**	**0,02**	**0,45**	**2,71**	**3,84**	**5,02**	**6,63**	**7,88**	**10,83**	**12,12**
$\upsilon=2$	**0,00**	**0,01**	**0,02**	**0,05**	**0,10**	**0,21**	**1,39**	**4,61**	**5,99**	**7,38**	**9,21**	**10,60**	**13,82**	**15,20**
$\upsilon=3$	**0,02**	**0,07**	**0,11**	**0,22**	**0,35**	**0,58**	**2,37**	**6,25**	**7,81**	**9,35**	**11,34**	**12,84**	**16,27**	**17,73**
$\upsilon=4$	**0,09**	**0,21**	**0,30**	**0,48**	**0,71**	**1,06**	**3,36**	**7,78**	**9,49**	**11,14**	**13,28**	**14,86**	**18,47**	**20,00**
$\upsilon=5$	**0,21**	**0,41**	**0,55**	**0,83**	**1,15**	**1,61**	**4,35**	**9,24**	**11,07**	**12,83**	**15,09**	**16,75**	**20,51**	**22,11**
$\upsilon=6$	**0,38**	**0,68**	**0,87**	**1,24**	**1,64**	**2,20**	**5,35**	**10,64**	**12,59**	**14,45**	**16,81**	**18,55**	**22,46**	**24,10**
$\upsilon=7$	**0,60**	**0,99**	**1,24**	**1,69**	**2,17**	**2,83**	**6,35**	**12,02**	**14,07**	**16,01**	**18,48**	**20,28**	**24,32**	**26,02**
$\upsilon=8$	**0,86**	**1,34**	**1,65**	**2,18**	**2,73**	**3,49**	**7,34**	**13,36**	**15,51**	**17,53**	**20,09**	**21,95**	**26,12**	**27,87**
$\upsilon=9$	**1,15**	**1,73**	**2,09**	**2,70**	**3,33**	**4,17**	**8,34**	**14,68**	**16,92**	**19,02**	**21,67**	**23,59**	**27,88**	**29,67**
$\upsilon=10$	**1,48**	**2,16**	**2,56**	**3,25**	**3,94**	**4,87**	**9,34**	**15,99**	**18,31**	**20,48**	**23,21**	**25,19**	**29,59**	**31,42**
$\upsilon=11$	**1,83**	**2,60**	**3,05**	**3,82**	**4,57**	**5,58**	**10,34**	**17,28**	**19,68**	**21,92**	**24,73**	**26,76**	**31,26**	**33,14**
$\upsilon=12$	**2,21**	**3,07**	**3,57**	**4,40**	**5,23**	**6,30**	**11,34**	**18,55**	**21,03**	**23,34**	**26,22**	**28,30**	**32,91**	**34,82**
$\upsilon=13$	**2,62**	**3,57**	**4,11**	**5,01**	**5,89**	**7,04**	**12,34**	**19,81**	**22,36**	**24,74**	**27,69**	**29,82**	**34,53**	**36,48**
$\upsilon=14$	**3,04**	**4,07**	**4,66**	**5,63**	**6,57**	**7,79**	**13,34**	**21,06**	**23,68**	**26,12**	**29,14**	**31,32**	**36,12**	**38,11**
$\upsilon=15$	**3,48**	**4,60**	**5,23**	**6,26**	**7,26**	**8,55**	**14,34**	**22,31**	**25,00**	**27,49**	**30,58**	**32,80**	**37,70**	**39,72**
$\upsilon=16$	**3,94**	**5,14**	**5,81**	**6,91**	**7,96**	**9,31**	**15,34**	**23,54**	**26,30**	**28,85**	**32,00**	**34,27**	**39,25**	**41,31**
$\upsilon=17$	**4,42**	**5,70**	**6,41**	**7,56**	**8,67**	**10,09**	**16,34**	**24,77**	**27,59**	**30,19**	**33,41**	**35,72**	**40,79**	**42,88**
$\upsilon=18$	**4,90**	**6,26**	**7,01**	**8,23**	**9,39**	**10,86**	**17,34**	**25,99**	**28,87**	**31,53**	**34,81**	**37,16**	**42,31**	**44,43**
$\upsilon=19$	**5,41**	**6,84**	**7,63**	**8,91**	**10,12**	**11,65**	**18,34**	**27,20**	**30,14**	**32,85**	**36,19**	**38,58**	**43,82**	**45,97**
$\upsilon=20$	**5,92**	**7,43**	**8,26**	**9,59**	**10,85**	**12,44**	**19,34**	**28,41**	**31,41**	**34,17**	**37,57**	**40,00**	**45,31**	**47,50**
$\upsilon=21$	**6,45**	**8,03**	**8,90**	**10,28**	**11,59**	**13,24**	**20,34**	**29,62**	**32,67**	**35,48**	**38,93**	**41,40**	**46,80**	**49,01**
$\upsilon=22$	**6,98**	**8,64**	**9,54**	**10,98**	**12,34**	**14,04**	**21,34**	**30,81**	**33,92**	**36,78**	**40,29**	**42,80**	**48,27**	**50,51**
$\upsilon=23$	**7,53**	**9,26**	**10,20**	**11,69**	**13,09**	**14,85**	**22,34**	**32,01**	**35,17**	**38,08**	**41,64**	**44,18**	**49,73**	**52,00**
$\upsilon=24$	**8,08**	**9,89**	**10,86**	**12,40**	**13,85**	**15,66**	**23,34**	**33,20**	**36,42**	**39,36**	**42,98**	**45,56**	**51,18**	**53,48**
$\upsilon=25$	**8,65**	**10,52**	**11,52**	**13,12**	**14,61**	**16,47**	**24,34**	**34,38**	**37,65**	**40,65**	**44,31**	**46,93**	**52,62**	**54,95**
$\upsilon=26$	**9,22**	**11,16**	**12,20**	**13,84**	**15,38**	**17,29**	**25,34**	**35,56**	**38,89**	**41,92**	**45,64**	**48,29**	**54,05**	**56,41**
$\upsilon=27$	**9,80**	**11,81**	**12,88**	**14,57**	**16,15**	**18,11**	**26,34**	**36,74**	**40,11**	**43,19**	**46,96**	**49,65**	**55,48**	**57,86**
$\upsilon=28$	**10,39**	**12,46**	**13,56**	**15,31**	**16,93**	**18,94**	**27,34**	**37,92**	**41,34**	**44,46**	**48,28**	**50,99**	**56,89**	**59,30**
$\upsilon=29$	**10,99**	**13,12**	**14,26**	**16,05**	**17,71**	**19,77**	**28,34**	**39,09**	**42,56**	**45,72**	**49,59**	**52,34**	**58,30**	**60,73**
$\upsilon=30$	**11,59**	**13,79**	**14,95**	**16,79**	**18,49**	**20,60**	**29,34**	**40,26**	**43,77**	**46,98**	**50,89**	**53,67**	**59,70**	**62,16**

Loi F de Fischer-Snedecor F(ddl1,ddl2, 0,05) risque α=5%

Ddl2 \ Ddl1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	25	30	40	60
1	161,45	199,50	215,71	224,58	230,16	233,99	236,77	238,88	240,54	241,88	243,91	245,95	248,01	249,26	250,10	251,14	252,20
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,35	19,37	19,38	19,40	19,41	19,43	19,45	19,46	19,46	19,47	19,48
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,89	8,85	8,81	8,79	8,74	8,70	8,66	8,63	8,62	8,59	8,57
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00	5,96	5,91	5,86	5,80	5,77	5,75	5,72	5,69
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,77	4,74	4,68	4,62	4,56	4,52	4,50	4,46	4,43
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10	4,06	4,00	3,94	3,87	3,83	3,81	3,77	3,74
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68	3,64	3,57	3,51	3,44	3,40	3,38	3,34	3,30
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39	3,35	3,28	3,22	3,15	3,11	3,08	3,04	3,01
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18	3,14	3,07	3,01	2,94	2,89	2,86	2,83	2,79
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02	2,98	2,91	2,85	2,77	2,73	2,70	2,66	2,62
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2,95	2,90	2,85	2,79	2,72	2,65	2,60	2,57	2,53	2,49
12	4,75	3,89	3,49	3,26	3,11	3,00	2,91	2,85	2,80	2,75	2,69	2,62	2,54	2,50	2,47	2,43	2,38
13	4,67	3,81	3,41	3,18	3,03	2,92	2,83	2,77	2,71	2,67	2,60	2,53	2,46	2,41	2,38	2,34	2,30
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,76	2,70	2,65	2,60	2,53	2,46	2,39	2,34	2,31	2,27	2,22
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,71	2,64	2,59	2,54	2,48	2,40	2,33	2,28	2,25	2,20	2,16
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,66	2,59	2,54	2,49	2,42	2,35	2,28	2,23	2,19	2,15	2,11
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,61	2,55	2,49	2,45	2,38	2,31	2,23	2,18	2,15	2,10	2,06
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,58	2,51	2,46	2,41	2,34	2,27	2,19	2,14	2,11	2,06	2,02
19	4,38	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,54	2,48	2,42	2,38	2,31	2,23	2,16	2,11	2,07	2,03	1,98
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,51	2,45	2,39	2,35	2,28	2,20	2,12	2,07	2,04	1,99	1,95
21	4,32	3,47	3,07	2,84	2,68	2,57	2,49	2,42	2,37	2,32	2,25	2,18	2,10	2,05	2,01	1,96	1,92
22	4,30	3,44	3,05	2,82	2,66	2,55	2,46	2,40	2,34	2,30	2,23	2,15	2,07	2,02	1,98	1,94	1,89
23	4,28	3,42	3,03	2,80	2,64	2,53	2,44	2,37	2,32	2,27	2,20	2,13	2,05	2,00	1,96	1,91	1,86
24	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,42	2,36	2,30	2,25	2,18	2,11	2,03	1,97	1,94	1,89	1,84
25	4,24	3,39	2,99	2,76	2,60	2,49	2,40	2,34	2,28	2,24	2,16	2,09	2,01	1,96	1,92	1,87	1,82
26	4,23	3,37	2,98	2,74	2,59	2,47	2,39	2,32	2,27	2,22	2,15	2,07	1,99	1,94	1,90	1,85	1,80
27	4,21	3,35	2,96	2,73	2,57	2,46	2,37	2,31	2,25	2,20	2,13	2,06	1,97	1,92	1,88	1,84	1,79
28	4,20	3,34	2,95	2,71	2,56	2,45	2,36	2,29	2,24	2,19	2,12	2,04	1,96	1,91	1,87	1,82	1,77
29	4,18	3,33	2,93	2,70	2,55	2,43	2,35	2,28	2,22	2,18	2,10	2,03	1,94	1,89	1,85	1,81	1,75
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,33	2,27	2,21	2,16	2,09	2,01	1,93	1,88	1,84	1,79	1,74
40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,25	2,18	2,12	2,08	2,00	1,92	1,84	1,78	1,74	1,69	1,64
50	4,03	3,18	2,79	2,56	2,40	2,29	2,20	2,13	2,07	2,03	1,95	1,87	1,78	1,73	1,69	1,63	1,58
60	4,00	3,15	2,76	2,53	2,37	2,25	2,17	2,10	2,04	1,99	1,92	1,84	1,75	1,69	1,65	1,59	1,53