Exercice 1 Approximation de matrice - Compression de données

1. Déterminer la SVD des matrices suivantes.
2. En déduire les matrices les plus proches de rang 1 et 2.
3. Quantifier la distance dans chaque cas avec la matrice initiale.
4. Retrouver les DVS avec R et/ou Python.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^T . A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\det(A^T A - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2 + 1 = 4 - 4\lambda + \lambda^2 + 1 = \lambda^2 - 4\lambda + 5.$$

$$Tr(A^T A) = \lambda_1 + \lambda_2 = 4 \qquad |A^T A| = \lambda_1 \lambda_2 = 3 \qquad \lambda_1 = 3 > \lambda_2 = 1.$$

$$A^T A v_1 = \lambda_1 v_1 \iff \begin{cases} 2x - y = 3x \\ -x + 2y = 3y \end{cases} \iff \begin{cases} -y = x \\ -x = y \end{cases} \iff v_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \text{ car } \|v_1\| = 1$$

$$A^T A v_2 = \lambda_2 v_2 \iff \begin{cases} 2x - y = x \\ -x + 2y = y \end{cases} \iff \begin{cases} x = y \\ -x = -y \end{cases} \iff v_2 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \text{ car } \|v_2\| = 1.$$

$$U = A V \Sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 2/\sqrt{3} & 0 \\ 1/\sqrt{3} & -1 \\ -1/\sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{donc } u_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ et } u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \times \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$A = \sqrt{3} \times \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} + 1 \times \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$A = \underbrace{\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \\ -1 & +1 \end{pmatrix}}_{A_1 \text{ la matrice la plus proche de } A \text{ de rang } 1 \text{ (Trm Eckart-Young)}} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \qquad A_1 = s_1 u_1 v_1^T$$

$$\|A - A_1\|_2 = s_2^2 = 1. \quad \text{(Trm Eckart-Young)}$$

Exercice 2 Inverse généralisée et moindres carrés

Soit une matrice réelle A. On note $U\Sigma V^T$ sa décomposition en valeurs singulières.

On appelle matrice pseudo inverse de A notée A^- une matrice vérifiant $AA^-A = A$. Cette matrice n'est pas toujours unique.

1. Montrer que la définition est équivalente à : Pour tout y de $\mathrm{Im}(A)$, A^-y est solution de $Ax = y$.
2. Montrer que $A^+ = V\Sigma^{-1}U^T$ est une inverse généralisée. On l'appelle inverse de Moore-Penrose.
3. Vérifier que A^+ vérifie les conditions dit de Penrose qui la rende unique :

$$AA^+A = A,\ A^+AA^+ = A,\ (AA^+)^T = AA^+,\ (A^+A)^T = A^+A$$

4. Application aux moindres carrés.

(a) Montrer que $x = A^+b$ minimise le critère des moindres carrés.

(b) En déduire x pour $Ax = b$ dans les exemples suivants :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\ b = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ b = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

1_ A^- => $\forall y \in Im(y)$ A^-y vérifie $Ax=y$ (A matrice $n \times p$)

$\exists x^* \in \mathbb{R}^p$ tq $y = Ax^*$ $\quad AA^-y = AA^-Ax^* = Ax^* = y$

(<=) $\forall y \in Im A$, $x = A^*y$ vérifie $Ax = y$ => $A^* = A^-$

2_ Soit A_j le j ème colonne de A $\quad A_j \in Im A$

Pour $x = A^*A$ $\quad \underbrace{AA^*A_j = A_j}_{\text{vraie pour tout colonne de } j}$ donc $AA^*A = A$

$AA^+A = U\Sigma \underbrace{V^T . V}_{I_r} \Sigma^{-1} \underbrace{U^T . U}_{I_r} \Sigma V^T = U \overbrace{\Sigma\Sigma^{-1}}^{I} \Sigma V^T = U\Sigma V^T = A.$

car U et V orthonormée

4-(a) On doit trouver $x^* \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|Ax^* - b\|_2 = \min_{x \in \mathbb{R}^n} \|Ax - b\|_2$

$\frac{1}{2}\|Ax-b\|_2^2 = \frac{1}{2}\langle Ax-b, Ax-b\rangle = \frac{1}{2}\langle A^TAx, x\rangle - \langle A^Tb, x\rangle + \frac{1}{2}\langle b, b\rangle$ on dérive

Soit pour $A^TAx - A^Tb = 0$.

Or $x = A^+b$ d'où $A^TAA^+b = V\Sigma U^T U\Sigma V^T V\Sigma^{-1}U^T b = V\Sigma\Sigma\Sigma^{-1}U^T b = V\Sigma U^T b = {}^TAb.$

donc x est solution des moindres carrés.

(b)

$A^+ = V\Sigma^{-1}U^T = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}$

$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1 \\ -1/\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2/3 & 1/3-1 & -1/3-1 \\ -2/3 & -1/3-1 & 1/3-1 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -2 & -4 & -2 \end{pmatrix}$

$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

$A^+b = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$

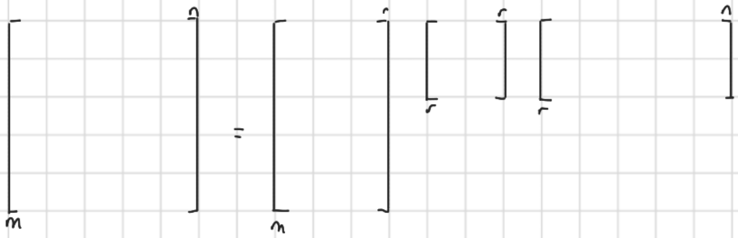
Exercice 3 Opérateurs de projection

Soit $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ de rang $r \leq \min(m, n)$.

On considère la décomposition en valeurs singulières de A, $U^TAV = \text{diag}(\sigma_1, \cdots, \sigma_r)$, où les σ_i sont les valeurs singulières de A

1. Montrer que $\text{Im}(A) = \text{Vect}\{u_1, \cdots, u_r\}$ et $\ker(A) = \text{Vect}\{v_{r+1}, \cdots, v_n\}$.
2. Montrer que $\text{Im}({}^TA) = \text{Vect}\{v^1, u^2, \cdots, v^r\}$ et $\text{Ker}(A^T) = \text{Vect}\{u^{r+1}, \cdots, u^m\}$.
3. Déterminer les matrices des projections orthogonales sur $\text{Im}(A)$, $\text{Ker}(A)$ à l'aide de U et V.
4. Soit $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. Déterminer l'opérateur de projection sur l'axe u et sur le plan (u, v).

1. $A = U\Sigma V^T = \sum s_i u_i v_i^T$



- Colonnes de A sont des combinaisons linéaires des colonnes de U

$\mathrm{Im}\ A = \mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_r)$ avec $\mathrm{rang}(A) = r$ donc <u>égalité</u>

- $\mathrm{Ker}\ A = \mathrm{Ker}\ A^T A$?

$\to$ $\forall x \in \mathrm{Ker}\ A$ $\quad Ax = 0$ donc $A^T A x = 0$. Soit $\mathrm{Ker}\ A \subset \mathrm{Ker}\ A^T A$

$\to$ $\dim \mathrm{Ker}(A) = n - r$ (thm du rang) or $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A^T A)$.

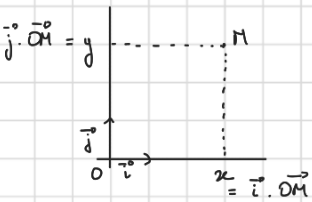
$\dim \mathrm{Ker}(A^T A) = n - r$ donc égalité.

- Soit $(v_1, \dots, v_r, \underbrace{v_{r+1}, \dots v_n}_{})$ base de vecteurs propres de $A^T A$

vecteurs propres associés à la valeur propre $\lambda = 0$

3) u normé. $\Pi_u = u u^T$ $\quad \Pi_u$ est la projection de x sur l'axe $\hat{u}$

$\Pi_u x = u \underbrace{u^T x}$
affixe de la projection sur E_u



$\vec{OM} = \vec{i}.\vec{OM}.\vec{i} + \vec{j}.\vec{OM}.\vec{j}$

$(u_1, \dots, u_k)$ bon de F_k

$\Pi_{F_k} = \sum_{i=1}^{k} u_i u_i^T \qquad \Pi_{I-A} = UU^T$ avec U bon de $\mathrm{Im}(A)$.

4) $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad u^* = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

1 0 -1

$\Pi_u = u^* u^{*T} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad u \perp v \qquad v^* = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\Pi_{u,v} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$