2. 编程基础Ⅱ：可计算性.

一、可计算性.

1. Leibniz之梦与Boole代数.

Leibniz:

(1) 创造涵盖人类知识全部范围的百科全书.

(2) 对其背后的关键概念提供合适的符号.

(3) 推理演算 (calculus rationcinator)

Boole:

(1) Boole代数.

(2) 证明了逻辑演绎可以成为数学的一个分支.

(3) 离完备性的目标还有距离.

2. 数理逻辑

Frege: 形式化的句法

全称量词(all), 存在量词(exist), 如果, 那么, 非, 或, 且

(1) 第一次有一个精确的数理逻辑系统至少原则上包含了数学家们通常使用的全部推理

(2) 希望能够为自然数提出一种纯粹逻辑的理论, 从而证明一切数学是逻辑的一个分支.

3. Russell悖论

设 $S := \{s \mid s \notin S\}$. 那么 $s \in S$?

4. 无穷集和对角线法

Cantor 集合论

对角线法: 构造一个集合, 与给定集合(至多可数个)皆不同.

$$
\begin{array}{ll}
s_1 & = \color{red}{0}\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\ldots \\
s_2 & = 1\,\color{red}{1}\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\ldots \\
s_3 & = 0\,1\,\color{red}{0}\,1\,0\,1\,0\,1\,0\,1\,0\ldots \\
s_4 & = 1\,0\,1\,\color{red}{0}\,1\,0\,1\,0\,1\,0\,1\ldots \\
s_5 & = 1\,1\,0\,1\,\color{red}{0}\,1\,1\,0\,1\,0\,1\ldots \\
s_6 & = 0\,0\,1\,1\,0\,\color{red}{1}\,1\,0\,1\,1\,0\ldots \\
s_7 & = 1\,0\,0\,0\,1\,0\,\color{red}{0}\,0\,1\,0\,0\ldots \\
s_8 & = 0\,0\,1\,1\,0\,0\,1\,\color{red}{1}\,0\,0\,1\ldots \\
s_9 & = 1\,1\,0\,0\,1\,1\,0\,0\,\color{red}{1}\,1\,0\ldots \\
s_{10} & = 1\,1\,0\,1\,1\,1\,0\,0\,1\,\color{red}{0}\,1\ldots \\
s_{11} & = 1\,1\,0\,1\,0\,1\,0\,0\,1\,0\,\color{red}{0}\ldots \\
\vdots & \quad \vdots\,\vdots\,\vdots\,\vdots\,\vdots\,\vdots\,\vdots\,\vdots\,\vdots\,\vdots\,\vdots\ \ddots
\end{array}
$$

$$
s = \color{blue}{1\,0\,1\,1\,1\,0\,1\,0\,0\,1\,1}\ldots
$$

s 与 s_i 至少有1位不同.

5. Hilbert 判定问题

试图找到清楚明白的验算程序，只要用所谓的一阶逻辑的符号系统写出来的某些前提和所提出的结果给定，那么通过这些程序就是可以判定的.

6. 停机问题

不存在这样一个程序(算法)，它能够计算任何程序(算法)在给定输入上是否会结束(停机).

7. Gödel 不完备定理.

存在一个Peano自然数公理系统中可表出的命题在公理系统内既不能被证明为真，又不能证明为假.

Example：使用停机问题解决Hilbert判定问题.