线性代数辅导讲义

一层次

作者：Zebray

Attention is all you need.

目录

第一章 行列式计算

需要熟悉的知识点

- ❑ 2 阶、3 阶行列式手算
- ❑ 三角阵和反三角阵的行列式
- ❑ 分块三角阵和分块反三角阵的行列式
- ❑ 3 种初等变换及对应行列式变化
- ❑ 按某行或某列展开的 Laplace 公式
- ❑ Vandemonde 行列式
- ❑ 余子式 M_{ij} 与代数余子式 A_{ij} 定义及性质
- ❑ $|AB| = |A|\,|B|$

1.1 直接计算

1.1.1 初等变换

务必多加练习！

一般步骤：

- 通过初等变换
- 得到某一行（列）全为 1
    - 某一行（列）全相等亦可，只需提出即得到全 1
- 再次初等变换得到某一行（列）只有一个 1
- Laplace 公式

常见特征：

- 每行（列）和全相等
- 每行（列）与其相邻行（列）有明显规律
- 某行（列）只有个别项不是 0

✍ **练习 1.1** (2015W-1-1) 设 $A = (a_{ij})_{n\times n}, a_{ij} = ij$，求 $|A|$.

✍ **练习 1.2** (2017S-5) 计算行列式 $D_n = \begin{vmatrix} b & b & \cdots & b & b & a \\ b & b & \cdots & b & a & b \\ b & b & \cdots & a & b & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ b & a & \cdots & b & b & b \\ a & b & \cdots & b & b & b \end{vmatrix}$.

✍ **练习 1.3** (2018W-1-5) 计算行列式 $D_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n-1 \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & n-1 & n-2 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$.

✍ **练习 1.4** (2019S-4) 计算 $f(\pi)$ 与 $f'(\pi)$，此处

$$f(x) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & a_1x^2 + b_1x + c_1 \\ a_2 & b_2 & a_2x^2 + b_2x + c_2 \\ a_3 & b_3 & a_3x^2 + b_3x + c_3 \end{vmatrix}.$$

✍ **练习 1.5** (2019W-1-1) 计算行列式 $D = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$.

✍ **练习 1.6** (2020S-1-1) 计算行列式 $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$.

1.1.2 可递推型

常见特征为使用 Laplace 公式将行列式降阶后变为所求行列式的低阶版本或一个局部。

- 三对角阵或反三对角阵
- 中心对称且边界稀疏

递推式通过 Laplace 公式得到。

例题 1.1 (2016W-1-5) 计算行列式 $D_n = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$.

解

$$\begin{aligned} D_n &= (-1)^{n+1} \times 2 \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ 2 & 1 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} + (-1)^{n+2} \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ 2 & 1 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} \\ &= (-1)^{n+1} \times 2D_{n-1} + (-1)^n \times (-1)^n \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 2 & \cdots & 0 \\ 2 & 1 & \cdots & 0 \end{vmatrix} \\ &= (-1)^{n+1} \times 2D_{n-1} + D_{n-2} \end{aligned}$$

设

$$D_n + aD_{n-1} = b(D_{n-1} + aD_{n-2})$$

即

$$D_n = (b-a)D_{n-1} + abD_{n-2} = (-1)^{n+1} \times 2D_{n-1} + D_{n-2}$$

从而 $\begin{cases} b-a=(-1)^{n+1}\times 2 \\ ab=1 \end{cases}$，得 $\begin{cases} a=(-1)^{n} \\ b=(-1)^{n+1} \end{cases}$，结合 $D_1=2, D_2=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=-3$

$$\begin{aligned} D_n+(-1)^n D_{n-1} &= (-1)^{n+1}(D_{n-1}+(-1)^n D_{n-2}) \\ &= (-1)^{\sum_{k=4}^{n+1} k}(D_2+(-1)^3 D_1) \\ &= (-1)^{\frac{(n+5)(n-2)}{2}}(D_2-D_1) \\ &= (-1)^{\frac{n^2+3n-10}{2}}(-5) \\ &= (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}5 \end{aligned}$$

对 n 奇偶分类即可。

✍ **练习 1.7** 计算行列式 $D_n=\begin{vmatrix} \alpha+\beta & \alpha\beta & & \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \alpha\beta \\ & & 1 & \alpha+\beta \end{vmatrix}$.

✍ **练习 1.8** 计算行列式 $D_{2n}=\begin{vmatrix} a & & & & & b \\ & \ddots & & & \iddots & \\ & & a & b & & \\ & & b & a & & \\ & \iddots & & & \ddots & \\ b & & & & & a \end{vmatrix}$.

✍ **练习 1.9** 计算行列式 $D_{n+1}=\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ -1 & x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & x \end{vmatrix}$.

1.1.3 Vandemonde

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\le j<i\le n}(x_i-x_j)$$

- $j<i$ 而非 $j\le i$
- x_i-x_j 而非 x_j-x_i

例题 1.2 (2015W-2-(1))

(1) 计算 $D_{n+1}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n & x \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 & x^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} & x^{n-2} \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} & x^{n-1} \\ x_1^n & x_2^n & \cdots & x_n^n & x^n \end{vmatrix}$.

解

(1) $D_{n+1}=\prod_{1\le j<i\le n}(x_i-x_j)\prod_{i=1}^n(x-x_i)$

1.1.4 秩一修正型

对于可逆的方阵 A，

$$\left|A+\alpha\beta^{\mathrm{T}}\right|=(1+\beta^{\mathrm{T}}A^{-1}\alpha)\,|A|$$

证明 注意到

$$\begin{vmatrix} A+\alpha\beta^{\mathrm{T}} & 0 \\ -\beta^{\mathrm{T}} & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} I & -\alpha \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} A & \alpha \\ -\beta^{\mathrm{T}} & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} I & \alpha \\ \beta^{\mathrm{T}}A^{-1} & 1 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} A & \alpha \\ -\beta^{\mathrm{T}} & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} A & \alpha \\ 0 & 1+\beta^{\mathrm{T}}A^{-1}\alpha \end{vmatrix}$$

✍ **练习 1.10** 计算 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} a_1+x_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2+x_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n+x_n \end{vmatrix},$$

其中 $x_i\ne 0, i=1,2,\dots,n$.

1.2 余子式与代数余子式之和类型

- $M_{ij}=(-1)^{i+j}A_{ij}$
- $$\begin{aligned} D&=\sum_{i=1}^n a_{ij}A_{ij},\forall j=1,2,\dots,n \\ &=\sum_{j=1}^n a_{ij}A_{ij},\forall i=1,2,\dots,n \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned} 0&=\sum_{i=1}^n a_{ij_0}A_{ij},\forall j=1,2,\dots,n,j\ne j_0 \\ &=\sum_{j=1}^n a_{i_0j}A_{ij},\forall i=1,2,\dots,n,i\ne i_0 \end{aligned}$$

例题 1.3 (2019S-1-1) 计算 $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \end{vmatrix}$ 的第一行所有元素的代数余子式之和。

解

$$A_{11}+A_{12}+A_{13}+A_{14}=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\-1&0&0&0\\2&-2&0&0\\0&3&-3&0\end{vmatrix}$$
$$=6$$

✍ **练习 1.11** (2021S-1-1) 计算 $A_{11}+M_{12}-M_{13}$，其中 $D=\begin{vmatrix}2&1&1&1&1\\1&2&1&1&1\\1&1&2&1&1\\1&1&1&2&1\\1&1&1&1&2\end{vmatrix}$，$A_{ij}$ 是元素 a_{ij} 的代数余子式，M_{ij} 是元素 a_{ij} 的余子式。

✍ **练习 1.12** 设行列式 $D=\begin{vmatrix}2&0&-1&1\\3&1&0&1\\4&1&1&0\\5&-1&0&a\end{vmatrix}$，$A_{ij}$ 表示元素 $a_{ij}(i,j=1,2,3,4)$ 的代数余子式。若 $A_{11}-A_{21}+A_{41}=4$，求 a。

1.3 分块行列式计算

- $\begin{vmatrix}A&O\\C&D\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}A&B\\O&D\end{vmatrix}=|A|\,|D|$

✍ **练习 1.13** 设 A 是 m 阶矩阵，B 是 n 阶矩阵，且 $|A|=a$，$|B|=b$，求 $\begin{vmatrix}O&A\\B&O\end{vmatrix}$.

1.4 多项式行列式计算

关注各幂次前系数。

例题 1.4 (2015W-2-(2))

(1) 计算 $D_{n+1}=\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1&1\\x_1&x_2&\cdots&x_n&x\\x_1^2&x_2^2&\cdots&x_n^2&x^2\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\x_1^{n-2}&x_2^{n-2}&\cdots&x_n^{n-2}&x^{n-2}\\x_1^{n-1}&x_2^{n-1}&\cdots&x_n^{n-1}&x^{n-1}\\x_1^n&x_2^n&\cdots&x_n^n&x^n\end{vmatrix}$.

(2) 由 (1) 计算 $C_n=\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1\\x_1&x_2&\cdots&x_n\\x_1^2&x_2^2&\cdots&x_n^2\\\vdots&\vdots&&\vdots\\x_1^{n-2}&x_2^{n-2}&\cdots&x_n^{n-2}\\x_1^n&x_2^n&\cdots&x_n^n\end{vmatrix}$.

解

(2) 注意到 $-C_n$ 为 D_{n+1} 的 x^{n-1} 项前系数，由 Vieta 定理，$C_n=\prod_{1\le j<i\le n}(x_i-x_j)\sum_{i=1}^n x_i$

✍ **练习 1.14** (2019S-4 改) 计算 $f'(\pi)$ 与 $f''(\pi)$，此处

$$f(x)=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & a_1x^2+b_1x+c_1 \\ a_2 & b_2 & a_2x^2+b_2x+c_2 \\ a_3 & b_3 & a_3x^2+b_3x+c_3 \end{vmatrix}.$$

✍ **练习 1.15** 分析不恒为零的函数 $f(x)=\begin{vmatrix} a_1+x & b_1+x & c_1+x \\ a_2+x & b_2+x & c_2+x \\ a_3+x & b_3+x & c_3+x \end{vmatrix}$ 的零点数量情况。

✍ **练习 1.16** 设 $f(x)=\begin{vmatrix} x+1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & x+2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 2 & x+3 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & x+n \end{vmatrix}$，求 $f^{(n-1)}(0)$。

第二章 矩阵基础性质、计算与初等变换

需要熟悉的知识点

- ❑ 手算矩阵乘法
- ❑ 矩阵的逆、伴随、转置定义及性质
- ❑ 手算求逆，手算求伴随
- ❑ 矩阵的初等变换、初等矩阵，初等变换的矩阵表示，相抵关系，计算具体矩阵的秩，解线性方程组
- ❑ 分块矩阵处理与矩阵分块，简单矩阵分解

2.1 基本性质与计算型

- $$AB = \begin{bmatrix} \alpha_1^{\mathrm{T}} \\ \alpha_2^{\mathrm{T}} \\ \vdots \\ \alpha_s^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}_{s\times n} [\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m]_{n\times m} = \begin{bmatrix} \alpha_1^{\mathrm{T}}\beta_1 & \alpha_1^{\mathrm{T}}\beta_2 & \cdots & \alpha_1^{\mathrm{T}}\beta_m \\ \alpha_2^{\mathrm{T}}\beta_1 & \alpha_1^{\mathrm{T}}\beta_2 & \cdots & \alpha_1^{\mathrm{T}}\beta_m \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_s^{\mathrm{T}}\beta_1 & \alpha_s^{\mathrm{T}}\beta_2 & \cdots & \alpha_s^{\mathrm{T}}\beta_m \end{bmatrix}_{s\times m}$$
- $AA^{-1} = A^{-1}A = I$，逆如果存在是唯一的
  - $(A^{-1})^{-1} = A$
  - $\left|A^{-1}\right| = |A|^{-1}$
  - 3 阶及以下矩阵算逆用伴随，3 阶以上矩阵算逆用初等行变换
- $AA^* = A^*A = |A|\, I$，伴随是唯一的
  - 一般没有 $(A^*)^* = A$
  - $|A^*| = |A|^{n-1}$
  - A^* 的 (i, j) 元是 A_{ji} 而非 A_{ij}
- $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|}A^*$
  - 看到逆和伴随，优先考虑乘一个原矩阵化简
  - 最后不要忘记去除乘原矩阵的影响
- 转置是唯一的
  - $(A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = A$
  - $\left|A^{\mathrm{T}}\right| = |A|$
- 初等行（列）变换等价于把对应的初等矩阵左（右）乘原矩阵
- 初等变换不改变秩，但可能改变行列式

例题 2.1 (2015W-5) 一个方阵 A 称为幂零的，如果存在正整数 N 使得 $A^N = 0$. 设 A 为幂零的，证明：

(1) $B = a_1A + a_2A^2 + \cdots + a_mA^m$ 也是幂零的.

(2) 若 $a_0 \neq 0$，则 $C = a_0E + a_1A + a_2A^2 + \cdots + a_mA^m$ 是可逆矩阵，并利用 B 来表示 C^{-1}.

证明 (1) 直接验证 $B^N = O$，从而幂零。

(2) 假设我们已经知道了 C 可逆，$C^{-1}=(a_0E+B)^{-1}$，完全形式化地处理矩阵的逆。

$$\begin{aligned}(a_0E+B)^{-1}&=\frac{E}{a_0E+B}\\&=\frac{1}{a_0}\frac{E}{E+\frac{1}{a_0}B}\\&=\frac{1}{a_0}\sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{a_0}B\right)^k\\&=\frac{1}{a_0}\sum_{k=0}^{N-1}\left(-\frac{1}{a_0}B\right)^k\end{aligned}$$

这表明如果 C 可逆，那么 $C^{-1}=\frac{1}{a_0}\sum_{k=0}^{N-1}\left(-\frac{1}{a_0}B\right)^k$，那么只需验证 $C\frac{1}{a_0}\sum_{k=0}^{N-1}\left(-\frac{1}{a_0}B\right)^k=E$：

$$\begin{aligned}C\frac{1}{a_0}\sum_{k=0}^{N-1}\left(-\frac{1}{a_0}B\right)^k&=\frac{1}{a_0}(a_0E+B)\sum_{k=0}^{N-1}\left(-\frac{1}{a_0}B\right)^k\\&=\sum_{k=0}^{N-1}\left(-\frac{1}{a_0}B\right)^k-\sum_{k=1}^{N}\left(-\frac{1}{a_0}B\right)^k\\&=\sum_{k=0}^{N-1}\left(-\frac{1}{a_0}B\right)^k-\sum_{k=1}^{N-1}\left(-\frac{1}{a_0}B\right)^k\\&=E\end{aligned}$$

上面的过程请在草稿纸上完成。解题过程如下：

断言：C 可逆，并且 $C^{-1}=\frac{1}{a_0}\sum_{k=0}^{N-1}\left(-\frac{1}{a_0}B\right)^k$。

事实上，

$$\begin{aligned}C\frac{1}{a_0}\sum_{k=0}^{N-1}\left(-\frac{1}{a_0}B\right)^k&=\frac{1}{a_0}(a_0E+B)\sum_{k=0}^{N-1}\left(-\frac{1}{a_0}B\right)^k\\&=\sum_{k=0}^{N-1}\left(-\frac{1}{a_0}B\right)^k-\sum_{k=1}^{N}\left(-\frac{1}{a_0}B\right)^k\\&=\sum_{k=0}^{N-1}\left(-\frac{1}{a_0}B\right)^k-\sum_{k=1}^{N-1}\left(-\frac{1}{a_0}B\right)^k\\&=E\end{aligned}$$

✍ **练习 2.1** (2015W-1-3) 设 $A+B=\begin{bmatrix}1&1\\2&4\end{bmatrix}, A-B=\begin{bmatrix}3&5\\0&2\end{bmatrix}$, 求 A^2-B^2.

✍ **练习 2.2** (2017S-1-1) 设 A 为 3 阶方阵，$|A|=\frac{1}{2}$，求 $\left|(3A)^{-1}-2A^*\right|$.

✍ **练习 2.3** (2017S-1-4) 已知 $A=\begin{bmatrix}-5&2\\-12&5\end{bmatrix}, P=\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}$，求 $P^{-1}AP$ 和 $A^{-3}-A$.

✍ **练习 2.4** (2017S-2) 若方阵满足 $X^2=X$，则称 X 是幂等的。设 A 和 B 是同阶的幂等方阵，证明：$A+B$ 是幂等的当且仅当 $AB=BA=O$。

✍ **练习 2.5** (2018W-1-2) 设 $A=\begin{bmatrix}0&1&&&\\&0&2&&\\&&\ddots&\ddots&\\&&&0&n-1\\n&&&&0\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}2&1\\5&3\end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix}A&O\\O&B\end{bmatrix}$，其中 $n\geq 2$，求 C^{-1}.

✍ **练习 2.6** (2018W-1-3) 设 $A\in\mathbb{R}^{3\times 3}$，$|A|\neq 0$，且 $A_{ij}=2a_{ij}, i,j=1,2,3$，其中 A_{ij} 为 a_{ij} 的代数余子式，求 $|A^*|$.

✍ 练习 2.7 (2019S-1-3) 已知 4 阶方阵 A 的伴随矩阵 $A^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$，求 A.

✍ 练习 2.8 (2019W-1-3) 已知 $A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & -6 \end{bmatrix}$，求 $(E+A)^{-1}$.

✍ 练习 2.9 (2019W-3) 设 n 阶方阵满足 $(A^*)^* = O$，证明 $|A| = 0$.

✍ 练习 2.10 (2021S-1-4) 计算 $(A^*)^*$，其中 $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

✍ 练习 2.11 (2021S-5(1)) 设 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n), B = A^{-1} = \begin{bmatrix} \beta_1^{\mathrm{T}} \\ \beta_2^{\mathrm{T}} \\ \vdots \\ \beta_n^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}, C = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \beta_i^{\mathrm{T}} \quad (k < n)$.

(1) 证明：$C^2 = C$.

2.2 初等变换计算型

- 计算具体矩阵的秩
- 求解线性方程组
- 求解矩阵方程：$AX = B \iff A[x_1, x_2, \ldots, x_n] = [\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n] \iff Ax_k = \beta_k, k = 1, 2, \ldots, n$

解题方法相当统一且简单：对矩阵作初等行变换直至变为行阶梯型。**多加练习！不要跳步！没有技巧！**

例题 2.2 (2017S-4) 解带参数方程组

$$\begin{cases} x_1 + (\lambda^2+1)x_2 + 2x_3 = \lambda \\ \lambda x_1 + \lambda x_2 + (2\lambda+1)x_3 = 0 \\ x_1 + (2\lambda+1)x_2 + 2x_3 = 2 \end{cases}.$$

✍ 练习 2.12 (2015W-1-2) 求 p 使得矩阵 $A = \begin{bmatrix} p & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 15 & 3 \\ 2 & 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ 的秩 $r(A)$ 最小，并求 $r(A)$.

✍ 练习 2.13 (2015W-4) 求过点 $(-2,0), (-1,1), (1,-3), (t,1)$ 的三次多项式函数 $y = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$，其中 t 为参数。

✍ 练习 2.14 (2016W-5) 设 $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & -11 \\ 2 & 3 & -5 \end{bmatrix}$.

(1) 解方程组 $Ax = 0$.

(2) 求满足 $A^2x = 0$ 但不满足 $Ax = 0$ 的 x 的集合.

✍ 练习 2.15 (2017S-6) 设 A 和 X 为 n 阶方阵，且满足 $AX = A + 2X$.

(1) 证明：$AX = XA$.

(2) 若 $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$，求解矩阵方程 $AX = A + 2X$.

✍ **练习 2.16** (2018W-1-1) 设 $A=\begin{bmatrix}1&2&1\\1&1&0\\2&1&-\lambda\end{bmatrix}$ 经过多次初等行变换和列变换得到 $B=\begin{bmatrix}-5&17&6\\-7&0&5\\13&9&-8\end{bmatrix}$

✍ **练习 2.17** (2019S-1-2) 计算 3 阶方阵 X 使其满足 $\begin{bmatrix}1&1&1\\1&-1&0\\0&0&-1\end{bmatrix}X\begin{bmatrix}1&1&1\\1&-1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&-1&0\\0&2&2\end{bmatrix}$

✍ **练习 2.18** (2019S-5) 给定矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&-1&-3&-2&-3\\1&3&8&-3&9\\3&1&2&-7&3\end{bmatrix}$

(1) 计算 $r(A)$.

(2) 计算线性方程组 $Ax=0$ 的基本解组.

(3) 若 $\eta=(1,-1,0,0,2)^{\mathrm{T}}$ 是 $Ax=b$ 的解，确定 b 并求 $Ax=b$ 的通解.

✍ **练习 2.19** (2019W-2) 设 $A=\begin{bmatrix}1&-3&5\\-2&1&-3\\-1&-7&9\end{bmatrix},\beta=\begin{bmatrix}4\\-3\\6\end{bmatrix},\gamma=\begin{bmatrix}3\\s\\2.4\end{bmatrix}$，其中 s 为参数。

(1) 解方程组 $Ax=\beta$.

(2) 令 $B=\begin{bmatrix}A&\beta\\\gamma^{\mathrm{T}}&3\end{bmatrix}$，解方程组 $By=0$.

✍ **练习 2.20** (2020S-1-2) 设 $A=\begin{bmatrix}1&-2&1\\2&1&3\\1&-1&1\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}-6&8\\4&5\\2&2\end{bmatrix},C=\begin{bmatrix}1&3\\2&2\\3&1\end{bmatrix}$，求解矩阵方程 $A(X-B)=C$.

✍ **练习 2.21** (2020S-2) 解方程组 $\begin{cases}2x_1+3x_2-5x_3+4x_4=-11\\x_1+ax_2+2x_3-7x_4=7\\3x_1-x_2-2x_3-5x_4=0\end{cases}$.

✍ **练习 2.22** (2021S-1-5) 计算矩阵 X 使得 $\begin{bmatrix}2&1&0\\1&2&1\\0&1&2\end{bmatrix}X\begin{bmatrix}1&-1&0&0\\0&1&-1&0\\0&0&1&-1\\0&0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\-1&1&0&0\\0&-1&1&0\end{bmatrix}$.

✍ **练习 2.23** (2021S-5(2)) 设 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n),B=A^{-1}=\begin{bmatrix}\beta_1^{\mathrm{T}}\\\beta_2^{\mathrm{T}}\\\vdots\\\beta_n^{\mathrm{T}}\end{bmatrix},C=\sum_{i=1}^k\alpha_i\beta_i^{\mathrm{T}}\quad(k<n)$.

(2) 写出 $Cx=0$ 的一个基础解系。

2.3 矩阵分解型

- 求 A^n
  - 低秩矩阵将其分解为低维矩阵（向量）之积后利用结合律
  - 幂零矩阵，如 $\begin{bmatrix}0&1&&\\&0&\ddots&\\&&\ddots&1\\&&&0\end{bmatrix}$
- 矩阵的每一列被写为向量组线性表出形式

例题 2.3 (2016W-1-1) 已知矩阵 $A=\begin{bmatrix}3 & 6 & -3\\ -1 & -2 & 1\\ 2 & 4 & -2\end{bmatrix}$，求 A^n.

解 $A=\begin{bmatrix}3\\ -1\\ 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\end{bmatrix}=\alpha\beta^{\mathrm{T}}$，当 $n\geq 2$ 时，$A^n=\alpha(\beta^{\mathrm{T}}\alpha)^{n-1}\beta^{\mathrm{T}}=\alpha(-1)^{n-1}\beta^{\mathrm{T}}=(-1)^{n-1}\alpha\beta^{\mathrm{T}}=(-1)^{n-1}A$，故 $A^n=(-1)^{n-1}A, n\geq 1$.

✍ **练习 2.24** (2021S-1-2) 计算 A^{2021}，其中 $A=\begin{bmatrix}-1 & 1 & -2 & -1\\ 1 & -1 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 2 & -2 & 4 & 2\end{bmatrix}$.

例题 2.4 (2016W-1-2) 已知矩阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\in\mathbb{R}^{3\times 3}$, $|A|=3$, 矩阵 $B=(2\alpha_1-\alpha_2+2\alpha_3,\alpha_1-3\alpha_2+\alpha_3,\alpha_1+2\alpha_2-\alpha_3)$，计算 $|B|$.

解 $|B|=|A|\begin{vmatrix}2 & 1 & 1\\ -1 & -3 & 2\\ 2 & 1 & -1\end{vmatrix}=30.$

✍ **练习 2.25** (2019W-1-4) 设 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3), B=(-3\alpha_2+\alpha_3,\alpha_1-\alpha_2+2\alpha_3,-2\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3), |B|=16$，求 $|A+B|$.

第三章 矩阵的秩、向量线性相关性与线性方程组解的结构

需要熟悉的知识点

- ❑ 线性相关，线性无关，线性表出，向量组等价，向量组的秩
- ❑ 矩阵行秩、列秩，秩的行秩列秩定义，秩的子式定义
- ❑ Sylvester 秩不等式
- ❑ 矩阵加法、乘法、组合对秩的影响
- ❑ 线性方程组解的结构
- ❑ 线性方程组无解、有解、有唯一解、有无穷多解条件
- ❑ 维数定理

3.1 秩的相关性质

- Sylvester 秩不等式：$r(A)+r(B)-n \le r(AB) \le \min(r(A), r(B))$
  - 当 $AB=O$ 时，$r(A)+r(B) \le n$
  - 如果 A 为可逆方阵，$r(AB)=r(B)$，B 为可逆方阵时同理
- $r(A+B) \le r(A)+r(B)$
- $r(A,B) \le r(A)+r(B), r\left(\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}\right) \le r(A)+r(B)$
- $r\left(\begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix}\right) = r(A)+r(B)$

例题 3.1 (2015W-6) 若 n 阶方阵 A 满足 $A^2=A$，则称 A 为幂等矩阵。设 A 为幂等矩阵，证明：

(1) $E-A$ 也为幂等矩阵。

(2) $r(A)+r(E-A)=n$.

证明 (1) $(E-A)^2 = E-2A+A^2 = E-2A+A = E-A$.

(2) 注意到 $A(E-A)=O$，由 Sylvester 秩不等式，$n=r(A+E-A) \le r(A)+r(E-A) \le n$ 即得 $r(A)+r(E-A)=n$.

✍ **练习 3.1** (2017S-1-2) 设 A 为 n 阶方阵且满足 $A^2=-A$，证明：$r(A)+r(E+A)=n$.

✍ **练习 3.2** (2018W-1-4) 设 $A=MN^{\mathrm{T}}$，其中 $M,N \in \mathbb{R}^{n\times r}(r \le n)$，$\left|N^{\mathrm{T}}M\right| \ne 0$。证明：$r(A^2)=r(A)$。

✍ **练习 3.3** (2019S-1-4 改) 对于 $A=\{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{100}\}, B=\{\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_{20}\}$，若 $r(A)=7$，给出 $r(A\cup B)$ 的取值范围。

✍ **练习 3.4** (2019W-3) 设 n 阶方阵满足 $(A^*)^*=O$，证明 $|A|=0$.

✍ **练习 3.5** (2020S-6) 设 A 为 n 阶方阵，$r(A)=n-1$，证明：$A^*=\alpha\beta^{\mathrm{T}}$，其中 α,β 为 n 维列向量，且有 $A\alpha=A^{\mathrm{T}}\beta=0$。

3.2 线性方程组解的结构

- 抓住 $r(A)$ 与 $r(A|b)$

✍ **练习 3.6** (2019S-5) 设矩阵 $A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 & -2 & -3 \\ 1 & 3 & 8 & -3 & 9 \\ 3 & 1 & 2 & -7 & 3 \end{bmatrix}$.

(1) 计算 $r(A)$。

(2) 计算线性方程组 $Ax=0$ 的基本解组。

(3) 假定 $\eta=(1,-1,0,0,2)^{\mathrm{T}}$ 是 $Ax=b$ 的解，确定 b 并计算 $Ax=b$ 的通解。

3.3 秩与线性方程组解结构的相互转化

- 维数定理：对于齐次线性方程组 $Ax=0$，$x\in\mathbb{R}^n$，若 $r(A)=r$，方程的一个基础解系中有 $n-r$ 个向量。

例题 3.2 (2016W-3) 设 $A_1x=b_1$ 和 $A_2x=b_2$ 是两个非齐次线性方程组，其中 $A_1\in\mathbb{R}^{m\times n}, A_2\in\mathbb{R}^{k\times n}$. 如果这两个方程组同解，证明 A_1 和 A_2 的行向量组等价。

证明 $A_1x=b_1, A_2x=b_2, \begin{bmatrix}A_1\\A_2\end{bmatrix}x=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\end{bmatrix}$ 均同解，这表明 $r(A_1)=r(A_2)=r\left(\begin{bmatrix}A_1\\A_2\end{bmatrix}\right)$，得证。

例题 3.3 (2019S-7 改, 2021S-4 改) 设 A 为 $m\times n$ 阶实矩阵，b 为 m 维实向量。证明：

(1) $A^{\mathrm{T}}Ax=0$ 和 $Ax=0$ 同解。

(2) $r(A)=r(A^{\mathrm{T}}A)=r(AA^{\mathrm{T}})$。

(3) $A^{\mathrm{T}}Ax=A^{\mathrm{T}}b$ 恒有解。

(4) 如果 $Ax=b$ 有解，那么 $A^{\mathrm{T}}Ax=A^{\mathrm{T}}b$ 和 $Ax=b$ 同解。

证明 (1) 显然当 x 是 $Ax=0$ 的解时，x 是 $A^{\mathrm{T}}Ax=0$ 的解。反之，设 x 是 $A^{\mathrm{T}}Ax=0$ 的解，那么 $(Ax)^{\mathrm{T}}Ax=0$，这表明 $Ax=0$，得证。

(2) 由 (1)，$r(A)=r(A^{\mathrm{T}}A)$。又 $r(A)=r(A^{\mathrm{T}})$，$r(A^{\mathrm{T}}A)=r(A)=r(A^{\mathrm{T}})=r((A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}})=r(AA^{\mathrm{T}})$

(3) $r(A^{\mathrm{T}}A|A^{\mathrm{T}}b)=r(A^{\mathrm{T}})=r(A^{\mathrm{T}}A)$

(4) 显然当 x 是 $Ax=b$ 的解时，x 是 $A^{\mathrm{T}}Ax=A^{\mathrm{T}}b$ 的解。反之，设 x 是 $A^{\mathrm{T}}Ax=A^{\mathrm{T}}b$ 的解，x_0 是 $Ax=b$ 的解，由上，x_0 是 $A^{\mathrm{T}}Ax=A^{\mathrm{T}}b$ 的解。下验证 $Ax=b$ 成立，只需证明 $Ax-b=0$ 即可。

$A^{\mathrm{T}}(Ax-b)=A^{\mathrm{T}}A(x-x_0)=0$，那么 $(A(x-x_0))^{\mathrm{T}}A(x-x_0)=0$，这表明 $A(x-x_0)=0, Ax=Ax_0=b$，从而 x 是 $Ax=b$ 的解，得证。

注 上题结论请掌握，并熟悉证明过程。

✍ **练习 3.7** (2015W-1-5) 若 5 元方程组 $Ax=b, b\neq 0$ 有解 $\xi_1=(1,1,1,1,1)^{\mathrm{T}}, \xi_2=(1,2,3,4,5)^{\mathrm{T}}, \xi_3=(1,0,-3,-2,-3)^{\mathrm{T}}$，且 $r(A)=3$，求方程组的通解。

✍ **练习 3.8** (2016W-1-4) 设 $A\in\mathbb{R}^{m\times n}(m>n)$，$r(A)=n$，证明: 存在矩阵 $P\in\mathbb{R}^{n\times m}$ 使得 $PA=E_n$.

✍ **练习 3.9** (2016W-3 改) 设 $A_1x=b_1$ 和 $A_2x=b_2$ 是两个非齐次线性方程组，其中 $A_1\in\mathbb{R}^{m\times n}, A_2\in\mathbb{R}^{k\times n}$. 如果这两个方程组同解，证明 $[A_1|b_1]$ 和 $[A_2|b_2]$ 的行向量组等价。

✍ **练习 3.10** (2017S-1-5) 设 n 阶方阵 A 的秩为 $r<n$，证明存在秩为 $n-r$ 的 n 阶方阵 B 使得 $AB=O$.

✍ **练习 3.11** (2017S-3) 证明方程组

$$\begin{cases} x_1-x_2 &= a_1\\ x_2-x_3 &= a_2\\ &\vdots\\ x_{n-1}-x_n &= a_{n-1}\\ x_n-x_1 &= a_n \end{cases}$$

有解当且仅当 $\sum_{i=1}^n a_i=0$，并在有解的情况下，求方程组的解集。

✍ **练习 3.12** (2019S-1-5) 已知线性方程组 $Ax=b$ 的三个特解为 $\alpha_1=(1,-2,3)^{\mathrm{T}}, \alpha_2=(0,-1,-2)^{\mathrm{T}}, \alpha_3=(-4,2,1)^{\mathrm{T}}, r(A)=1$，写出 $Ax=b$ 的通解。

✍ **练习 3.13** (2019W-1-5) 设 A,B 为 $m\times n$ 阶矩阵，证明 $r(AA^{\mathrm{T}}+BB^{\mathrm{T}})=r(A,B)$.

✍ **练习 3.14** (2021S-1-6) 设 A 为 3 阶方阵，$r(A)=1$，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是 $Ax=b$ 的三个解向量，$\alpha_1+\alpha_2=(1,-1,3)^{\mathrm{T}}, \alpha_2+\alpha_3=(0,-2,1)^{\mathrm{T}}, \alpha_3+\alpha_1=(3,0,4)^{\mathrm{T}}$，求 $Ax=b$ 的通解。

✍ **练习 3.15** (2021S-6) 设 A 为 $m\times n$ 阶矩阵，B 为 $n\times k$ 阶矩阵，$AB=O$，$r(A)+r(B)=n$，B 与 $C=(\gamma_1,\gamma_2,\dots,\gamma_k)$ 列等价，证明 $\gamma_1,\gamma_2,\dots,\gamma_k$ 的极大线性无关组可以成为 $Ax=0$ 的一个基础解系。

3.4 向量线性相关性与线性方程组解的相互转化

✍ **练习 3.16** (2016W-2) 设 $\alpha_1=\begin{bmatrix}3\\1\\2\\-1\end{bmatrix},\alpha_2=\begin{bmatrix}1\\-1\\4\\2\end{bmatrix},\alpha_3=\begin{bmatrix}7\\5\\-2\\-7\end{bmatrix},\alpha_4=\begin{bmatrix}5\\-1\\10\\3\end{bmatrix},\alpha_5=\begin{bmatrix}-1\\2\\1\\0\end{bmatrix}$.

(1) 求 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$ 的一个极大线性无关组，并用该极大线性无关组表出其他向量。

(2) 若有向量 $\beta=(1,0,-1,-1)^{\mathrm{T}}$，向量组 α_3,α_4,β 是否与 $\alpha_1,\alpha_3,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$ 等价？

✍ **练习 3.17** (2018W-2) 设有向量组

$$\alpha_1=\begin{bmatrix}2\\-2\\-1\\4\end{bmatrix},\alpha_2=\begin{bmatrix}1\\-2\\0\\1\end{bmatrix},\alpha_3=\begin{bmatrix}1\\-4\\1\\-1\end{bmatrix},\alpha_4=\begin{bmatrix}1\\0\\2\\3\end{bmatrix},\alpha_5=\begin{bmatrix}2\\1\\2\\7\end{bmatrix}$$

(1) 求一个极大线性无关组，并用其表示其余向量。

(2) 找出在 e_1,e_2,e_3,e_4 中所有不能被向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$ 线性表出的向量。

✍ **练习 3.18** (2019W-4) 设向量组 $A:\alpha_1=\begin{bmatrix}2\\4\\3\\1\end{bmatrix},\alpha_2=\begin{bmatrix}4\\8\\6\\2\end{bmatrix},\alpha_3=\begin{bmatrix}1\\3\\1\\2\end{bmatrix}$ 和 $B:\beta_1=\begin{bmatrix}2\\4\\3\\1\end{bmatrix},\alpha_2=\begin{bmatrix}4\\8\\6\\2\end{bmatrix},\alpha_3=\begin{bmatrix}1\\3\\1\\2\end{bmatrix}$.

(1) 分别求向量组 A 和 B 的一个极大线性无关组。

(2) 求向量 γ 使得向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\gamma$ 和 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\gamma$ 等价。

✍ **练习 3.19** (2020S-4) 设有向量组

$$\alpha_1=\begin{bmatrix}1\\8\\-1\\4\end{bmatrix},\alpha_2=\begin{bmatrix}3\\0\\-5\\4\end{bmatrix},\alpha_3=\begin{bmatrix}0\\12\\1\\4\end{bmatrix},\alpha_4=\begin{bmatrix}2\\6\\-2\\4\end{bmatrix},\alpha_5=\begin{bmatrix}-2\\-4\\3\\-4\end{bmatrix}$$

(1) 求一个极大线性无关组，并用其表示其余向量。

(2) 在 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$ 中去除一个向量，使得去除后向量组的秩减小。