Sprawozdanie

Matematyka Dyskretna

Autorzy

- Igor Gawłowicz
- Piotr Rucki
- Krystian Niedźwiedź

Prezentowany program

- Aplikacja
- github

SPIS TREŚCI

CZĘŚĆ TECHNICZNA

WSTĘP

Program został napisany w języku Python wraz z pomocą frameworka flask oraz biblioteki Flask-SocketIO do obsługi zdarzeń występujących w czasie rzeczywistym. Oprawa wizualna została napisana przy użyciu języka JavaScript oraz HTML.

Flask

W funkcji "**generateCircles**" przesyłane są dane wejściowe do serwera,

```
@app.route("/generate_circles", methods=["POST"])
def generate_circles():
    data = request.get_json()
    num_circles = data["numCircles"]
    connection_chance = data["connectionChance"]
    start_point = data["startPoint"]
    matrix = generate_matrix(num_circles, connection_chance / 100)
    circle_data = create_graph(matrix)
    layers = bfs(matrix, start_point)
    degrees_sum = 0
    degrees: list[int] = []
    for i in range(num_circles):
        degrees_sum += circle_data[i].degrees
        degrees.append(circle_data[i].degrees)
        x = circle_data[i].x
        y = circle_data[i].y
        radius = 40
        connections = circle_data[i].neighbours
        circle_data[i] = {
            "x": x,
            "y": y,
            "radius": radius,
            "connections": connections,
            "matrix": matrix,
        }
    density = (0.5 * degrees_sum) / (0.5 * len(matrix) * (len(matrix) - 1))
    circle_data[len(circle_data)] = layers
    circle_data[0]["density"] = density
    circle_data[0]["degrees"] = sorted(degrees, reverse=True)
    return jsonify(circle_data)
```

Generowanie wierzchołków i działanie algorytmu

gdzie następuje ich przetwarzanie, w ciągu którego tworzymy macierz za pomocą funkcji **generate_matrix(n: int, p: float) -> list[int]**, która przyjmuje liczbę całkowitą jako ilość wierzchołków oraz liczbę zmiennoprzecinkową jako szansę na połączenie pomiędzy dwoma wierzchołkami po czym zwraca listę elementów typu całkowitego.

```
def generate_matrix(n: int, p: float) -> list[int]:
    """Generates [n]x[n] matrix with [p] chance of its elements being 1 and (1-
[p]) chance of it being 0

    Returns:
        list[int]: Matrix describing graph
    """
    A = []
    p = p * 100
    for i in range(n):
        row = []
        for j in range(n):
            if i == j:
                row.append(0)
            elif j > i:
                r = randint(1, 100)
                if r <= p:
                    row.append(1)
                else:
                    row.append(0)
            else:
                row.append(A[j][i])
        A.append(row)
    return A
```

Następnie na podstawie otrzymanej macierzy jest tworzony graf w funckji **create_graph(matrix: list[int]) -> dict[int:Vertex]**, która przyjmuje listę elementów typu liczb całkowitych i zwraca słownik którego każdy element ma kluczem zawierający liczbę całkowitą odpowiadającą indexowi naszego wierzchołka i element typu **Vertex** jako jego wartość.

```
def create_graph(matrix: list[int]) -> dict[int:Vertex]:
    """Creates list of vertices and based on given argument [matrix] assigns it's
neighbours indexes"""
    Graph: dict[int:Vertex] = {}
    for v in range(len(matrix)):
        vertex: Vertex = Vertex(v)
        vertex.get_neighbours(matrix)
        Graph[v] = vertex
    return Graph
```

Następnie nasz słownik jest przetwarzany przez funkcje **def bfs(A: list[list[int]], start: int) -> list[list[int]]**, która ponownie przyjmuje naszą macierz, oraz punkt startowy typu liczby całkowitej i zwraca nam listę składającą się z list zawierających liczby całkowite. Funkcja ta stosuje algorytm `breadth first search`[15] czyli szukanie po szerokości. Algorytm jest zmodyfikowany w taki sposób aby zwracane wartości były posortowane na kolejne warstwy w wykresie zaczynając od punktu startowego.

```
def bfs(A: list[list[int]], start: int) -> list[list[int]]:
    """`breadth first search`<sup>15</sup> algorith generating layers of graph
from matrix starting from integer start

    Args:
        A (list[list[int]]): matrix describing graph
        start (int): starting point

    Returns:
        list[list[int]]: list of lists describing each layer of graph
    """
    n = len(A)
    visited = [False] * n
    queue = deque([start])
    visited[start] = True
    layers = [[start]]
    while queue:
        layer = []
        for _ in range(len(queue)):
            vertex = queue.popleft()
            for neighbour in range(n):
                if A[vertex][neighbour] and not visited[neighbour]:
                    visited[neighbour] = True
                    queue.append(neighbour)
                    layer.append(neighbour)
        if layer:
            layers.append(layer)
    return layers
```

Ostatecznie wyliczana jest także ilość wierchołków suma stopni tych wierchołków oraz posortowana lista tych wierchołków. Dla wizualizacji jest także generowana losowa pozycja na osi x,y dla każdego wierchołka. Wyniki są zwracane jako JSON.

Funkcja "**generateCirclesFromArray**" działa podobnie, ale przyjmuje macierz grafu jako argument wejściowy.

Funkcja "**Update circles**"

```
@app.route("/update_circles", methods=["POST"])
def update_circles():
    data = request.get_json()
    start_point = data["startPoint"]
    matrix = data["matrix"]
    layers = bfs(matrix, start_point)
    return jsonify(layers)
```

aktualizuje naszą wizualizację po zmianie punktu startowego.

JavaScript

W JavaScriptie nasze dane są przyjmowane i na podstawie nich na ekranie wyświetlają się odpowiednie "**kółka**" reprezentujące wierzchołki

```
function generateCircles(numCircles, connectionChance, startPoint) {
  console.log("Generating circles...");
  var xhr = new XMLHttpRequest();
  xhr.open("POST", "/generate_circles");
  xhr.setRequestHeader("Content-Type", "application/json;charset=UTF-8");
  xhr.send(
    JSON.stringify({
      numCircles: numCircles,
      connectionChance: connectionChance,
      startPoint: startPoint,
    })
  );
  xhr.onreadystatechange = function () {
    if (xhr.readyState === 4 && xhr.status === 200) {
      var circleData = JSON.parse(xhr.responseText);
      circles = addCircles(circleData);
      layers = circleData[Object.keys(circleData).length - 1];
      colors = generateColors(layers);
      matrix = circleData[0].matrix;
      density = circleData[0].density;
      degrees = circleData[0].degrees;
      displayData();
    }
  };
}
```

Podczas generowania całości musimy wykorzystać funkcję **addCircles(circleData)** która przyjmuje dane wysłane z servera i na ich podstawie generuje odpowiednią ilość wierchołków.

```
function addCircles(circleData) {
  var circles = [];
  var keys = Object.keys(circleData);
  for (var i = 0; i < keys.length - 1; i++) {
    var key = keys[i];
    var circle = {
      x: circleData[key].x,
      y: circleData[key].y,
      radius: circleData[key].radius,
      connections: circleData[key].connections,
    };
    circles.push(circle);
  }return circles;
}
```

Następuje także losowanie kolorów przypisanych dla każdej z warstw.

```
function generateColors(layers) {
  var colors = [];
  for (var i = 0; i < layers.length; i++) {
    var color = getRandomColor();
    if (colors.length < 20) {
      while (colors.indexOf(color) !== -1) {
        color = getRandomColor();
      }
    }
    colors.push(color);
  }
  return colors;
}
```

Gdy wszystkie dane są przygotowane musimy stworzyć jeszcze funkcje nasłuchujące, w naszym płótnie, odpowiednie wydarzenia

W poniższej funckji program sprawdza, który wierzchołek został przycisnięty na podstawie lokalizacji kursora na ekranie.

```
var isDragging = false;
var selectedCircle = null;

canvas.addEventListener("mousedown", function (event) {
  var rect = canvas.getBoundingClientRect();
  var mouseX = event.clientX - rect.left;
  var mouseY = event.clientY - rect.top;
  for (var i = 0; i < circles.length; i++) {
    var circle = circles[i];
    var distance = Math.sqrt(
      (mouseX - circle.x) ** 2 + (mouseY - circle.y) ** 2
    );
    if (distance <= circle.radius) {
      isDragging = true;
      selectedCircle = circle;
      break;
    }
  }
});
```

W tej funkcji wyliczane są nowe współrzędne naszego wierzchołka w zależności od ruchu myszką.

```
canvas.addEventListener("mousemove", function (event) {
  if (isDragging && selectedCircle) {
    var rect = canvas.getBoundingClientRect();
    selectedCircle.x = event.clientX - rect.left;
    selectedCircle.y = event.clientY - rect.top;
  }
});
```

Ta funkcja blokuje pozostałe funkcje, które zależą od ruchu myszki.

```
canvas.addEventListener("mouseup", function (event) {
  isDragging = false;
  selectedCircle = null;
});
```

Ostatecznie trzeba wszystko podsumować w interwałach w których sprawdzane jest czy wszystko na naszym wirtualnym płótnie jest tak jak być powinno.

```
setInterval(function () {
  ctx.clearRect(0, 0, canvas.width, canvas.height);
  for (var i = 0; i < circles.length; i++) {
    var layer = -1;
    for (var j = 0; j < layers.length; j++) {
      if (layers[j].indexOf(i) !== -1) {
        layer = j;
        break;
      }
    }
    addCircle(circles[i], i, layer);
  }
  socket.emit("move", { x: x, y: y });
}, 10);
```

CZĘŚĆ EMPIRYCZNA

Test 1

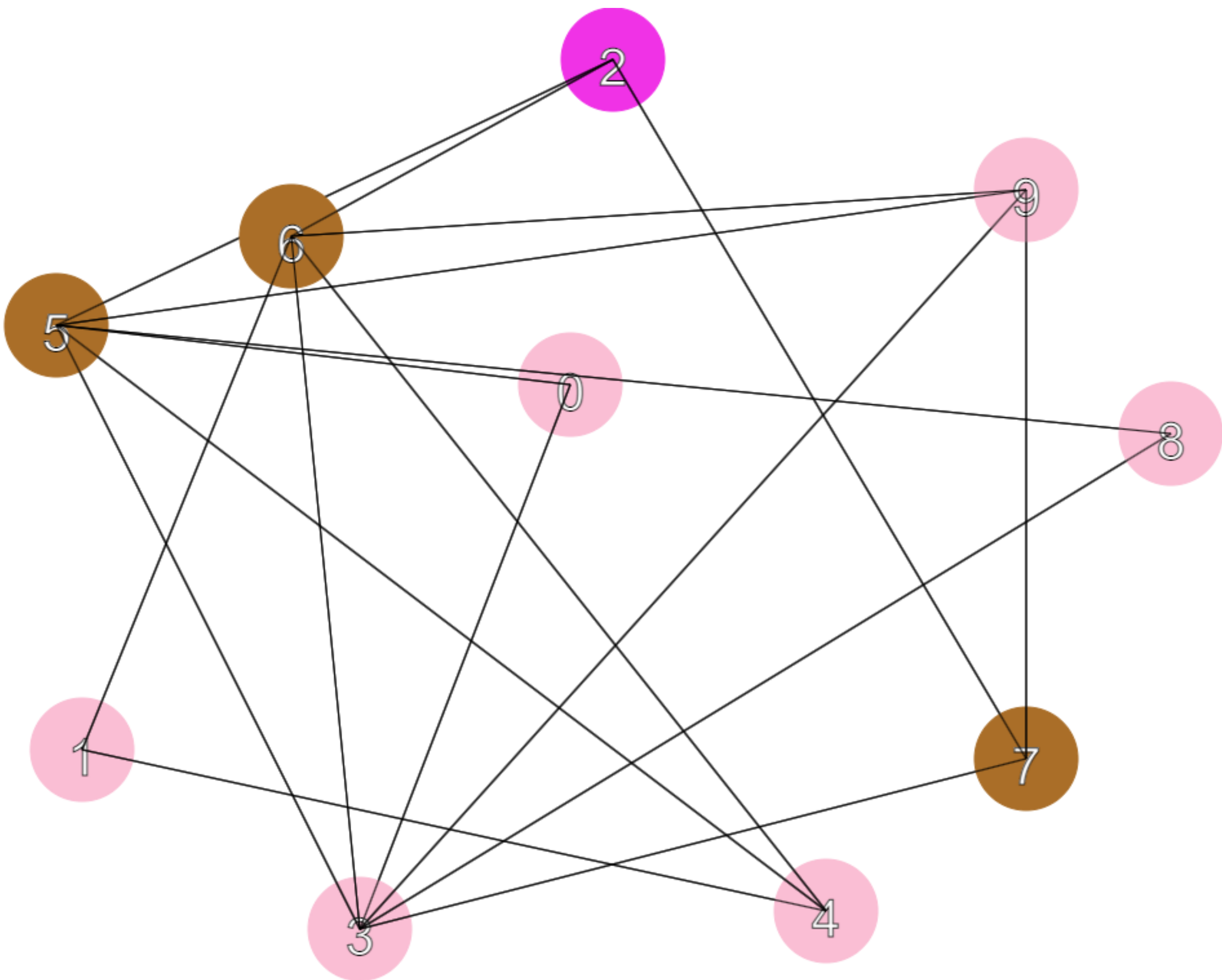
Liczba wierzchołków: 10

Szansa na połązenie: 40%

Punkt startowy: 2

Macierz:

```
[
 [0,0,0,0,0,1,0,0,0,0],
 [0,0,1,1,0,0,1,0,0,1],
 [0,1,0,1,0,0,1,0,0,1],
 [0,1,1,0,1,1,1,1,0,0],
 [0,0,0,1,0,0,0,0,1,1],
 [1,0,0,1,0,0,0,0,0,1],
 [0,1,1,1,0,0,0,1,1,0],
 [0,0,0,1,0,0,1,0,0,0],
 [0,0,0,0,1,0,1,0,0,1],
 [0,1,1,0,1,1,0,0,1,0]
]
```



Można zauważyć, że dla liczby wierzchołków niezbyt dużej, a jednocześnie niezbyt małej, szansa na połączenie, pomimo wynoszącej 40%, sprawia wrażenie lekkiego chaosu grafie. Wynika to z faktu, że dla 10 wierzchołków szansa na połączenie wynosi:

1 - (1-0.4)^9 ~= 0.98

Około 98% szansy na uzyskanie jakiegokolwiek połączenia dla każdego z wierzchołków.

Można także zauważyć, że gęstość dla przedstawionego grafu wynosi dokładnie 0.4, co jest całkiem spodziewanym wynikiem, biorąc pod uwagę szansę na połączenie. Dowodzi to, że gęstość jest wyliczana poprawnie, gdyż dla tych samych danych wejściowych gstość zazwyczaj waha się w przedziale <0.3, 0.5>. Skoro szansa na połączenie wynosi 40%, to statystycznie mamy spore szanse na uzyskanie wyniku gęstości przybliżonego wartości równej szansie na połączenie.

W ramach eksperymentu wyliczyłem średnią z 10 wyników przy tych samych danych wejściowych i otrzymałem następuce wyniki:

```
0.4, 0.48, 0.44, 0.57, 0.35, 0.37, 0.57, 0.37, 0.33, .37
```

Średnia tych wyników wynosi 0.425, co daje nam wynik dość mocno zbliżony do naszej szansy na połączenie równej 40%. Im więcej testów przeprowadzimy, tym bliżej liczby 0.4 powinna być nasza gęstość.

Można także zauważyć, że nasz po przepuszczeniu przez algorytm **BFS** zawiera łącznie 3 warstwy, zaczynając od naszego punktu startowego w wierzchołku o indeksie 2.

Test 2

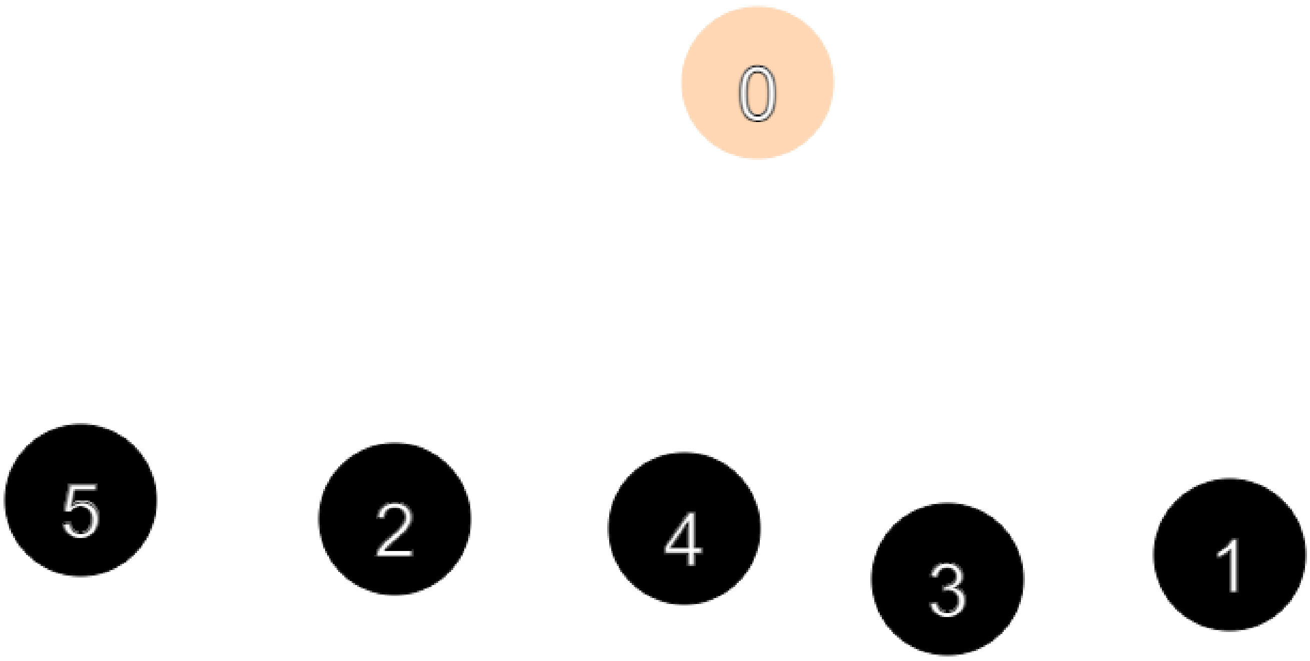
Ilość wierzchołków: 6

Szansa na połączenie: 0%

Punkt startowy: 0

Matrix:

```
[
  [0,0,0,0,0,0],
  [0,0,0,0,0,0],
  [0,0,0,0,0,0],
  [0,0,0,0,0,0],
  [0,0,0,0,0,0],
  [0,0,0,0,0,0]
]
```



Tym razem sprawdzamy działanie naszego programu pod względem ekstremalnej sytuacji przy dowolnej liczbie wierzchołków i zerowej szansie na połączenie. Ignorując fakt, że szanse są z góry równe zeru, możemy podstawić nasze dane pod wzór na prawdopodobieństwo wystąpienia połączenia:

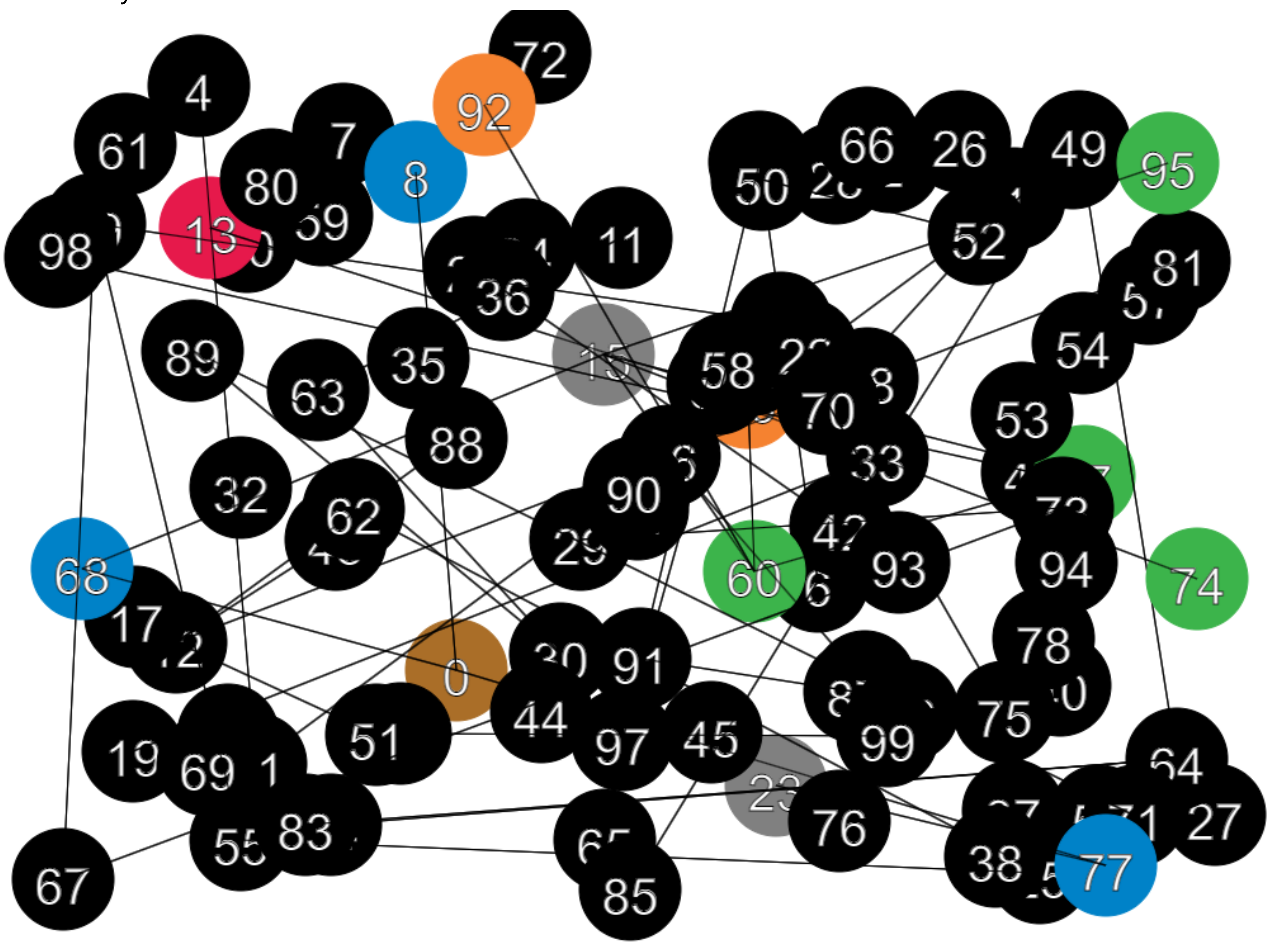
1 - (1-0)^5 = 0

Wynik zawsze daje nam 0. Co ciekawe, jednak przy ustawieniu pozornie bardzo niskiej szansy na połączenie, jaką byłaby 1%, nawet przy małej ilości wierzchołków, szansa na otrzymanie jakiegokolwiek połączenia wynosi aż 5%.

Ze względu na brak jakichkolwiek połączeń, mamy tylko jedną warstwę zawierającą jedynie punkt startowy.

Test 3

Ilość wierzchołków: 100
Szansa na połączenie: 1%
Punkt startowy: 0



Następny test jest pewnego rodzaju kolejnym ekstremum. Tym razem sprawdzamy coś, do czego odniosłem się w poprzednim teście, czyli bardzo niską szansę na połąc przy dużej ilości wierzchołków.

Od razu możemy zauważyć, że ścieżka przedstawiająca kolejne warstwy jest dość długa jak na to, że szansałączenia to tylko 1%. Jednak podstawiając pod wzór, możemy się łatwo przekonać, że ze względu na dużą ilość wierzchoł szansa już nie jest tak niska, jak się wydaje.

1 - (1-0.01)^99 ~= 0.63

Sprawia to, że każdy wierzchołek ma aż 63% szansy na posiadanie jakiegokolwiek połączenia. Widzimy jednak, patrząc na samą prezentację graficzną tego grafu, że graf wciąż ma wiele punktów "na krańcach" naszej ścieżki warstw algorytmu BFS.

Warto także dodać coś, co może nie być do końca oczywiste, lecz na grafie czarne "kółka" reprezentują wierzchołki, które nie mają połączenia z głą siecią.

Test 4

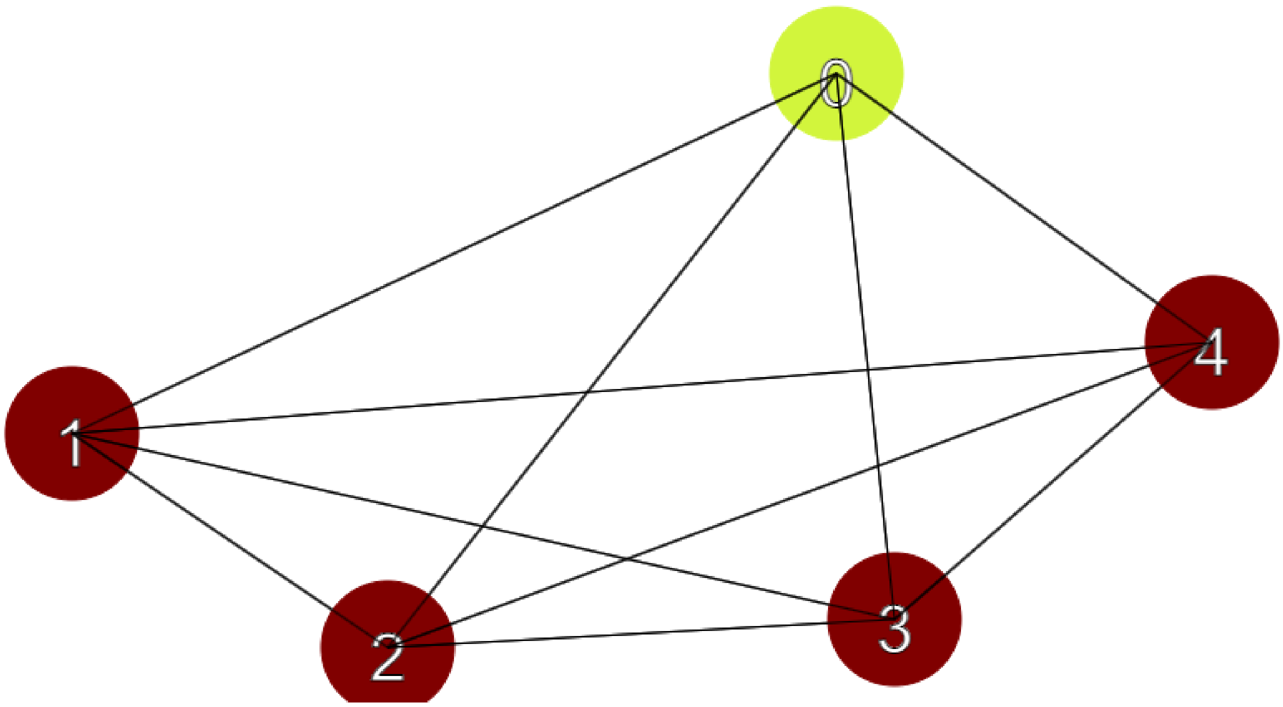
Liczba wierzchołków: 5

Szansa na połączenie: 100%

Punkt startowy: 0

Matrix:

```
[
 [0,1,1,1,1],
 [1,0,1,1,1],
 [1,1,0,1,1],
 [1,1,1,0,1],
 [1,1,1,1,0]
]
```



W tym przykzie pokazujemy działanie programu dla 100% szansy na połączenie. Łatwo możemy zauważyć, że w takiej sytuacji zawsze uzyskamy tylko dwie warstwy: warstwę wierzchołka startowego i warstwę drugą zawierającą wszystkie pozostałe elementy grafu.

ARTYKUŁ

Connectedness - spójność grafu

`Union`[1] - suma grafów

We can combine two graphs to make a larger graph. If the two graphs are Gj = (V^Gj), E(G{)) and G2 = (V(G?), E(G2)), where V(G^) and V(G2) are disjoint, then their `union`[1] G{ u G9 is the graph with vertex set V(G^) u V(G2) and edge family E(GX) u E(G2) (see Fig. 2.7).

`Isomorphic`[2] - izomorficzny - grafy mają tę samą strukturę graficzną

Two graphs G1 and G2 are `isomorphic`[2] if there is a one-one correspondence between the vertices of Gx and those of G2 such that the number of edges joining any two vertices of Gx is equal to the number of edges joining the corresponding vertices of G2.

`Connected`[3] - spójny

Most all the graphs discussed so far have been 'in one piece'. A graph is `connected`[3] if it cannot be expressed as the `union`[1] of two graphs, and disconnected otherwise.

`Component`[4] - składowa, podzbiór wierzchołków grafu

Clearly any disconnected graph G can be expressed as the `union`[1] of `connected`[3] graphs, each of which is a `component`[4] of G. For example, a graph with three components is shown in Fig. 2.8.

`Adjacent`[5] - sąsiedni - relacja między dwoma wierzchołkami
`Incidence`[6] - przynależność - relacji między wierzchołkami i krawędziami w grafie

We say that two vertices v and w of a graph G are `adjacent`[5] if there is an edge vw joining them, and the vertices v and w are then incident with such an edge. Similarly, two distinct edges e and/are `adjacent`[5] if they have a vertex in common (see Fig. 2.10).

`Complement`[7] - uzupełnienie

If G is a simple graph with vertex set V(G), its `complement`[7] G is the simple graph with vertex set V(G) in which two vertices are `adjacent`[5] if and only if they are not `adjacent`[5] in G.

`Self-complementary`[8] - samodopełniający się - graf, który ma dokładnie tyle samo krawędzi co jego dopełnienie

A simple graph that is `Isomorphic`[2] to its `Complement`[7] is `self-complementary`[8].

`walk`[9] - spacer po grafie

Given a graph G, a `walk`[9] in G is a finite sequence of edges of the form VQVJ, VJV2, • • • , vm-\vm-> a^ so denoted by v0 —> vx —» V2 —» * • • —> vm, in which any two consecutive edges are `adjacent`[5] or identical.

`Path`[10] - ścieżka - odnosi się do unikalności wierzchołków

`Trail`[11] - szlak - odnosi się do unikalności krawędzi

The concept of a `walk`[9] is usually too general for our purposes, so we impose some restrictions. A `walk`[9] in which all the edges are distinct is a `trail`[11]. If, in addition, the vertices VQ, VJ, . . . , vm are distinct (except, possibly, VQ = vm), then the `trail`[11] is a `path`[10]. A

`Disconnecting set`[12] - zbiór rozłączający - zbiór krawędzi, których usunięcie powoduje rozłączenie

A `disconnecting set`[12] in a `connected`[3] graph G is a set of edges whose removal disconnects G.

`cutset`[13] - zbiór przecinający

We further define a `cutset`[13] to be a `disconnecting set`[12], no proper subset of which is a `disconnecting set`[12]. In the above example, only the second `disconnecting set`[12] is a `cutset`[13].

`Greedy algorithm`[14] - algorytm zachłanny, chciwy

It is known as a `greedy algorithm`[14], and involves choosing edges of minimum weight in such a way that no cycle is created.

`Breadth first search`[15] - przeszukiwanie wszerz

`Depth-first search`[16] - przeszukiwanie w głąb

There are two well-known search procedures - depth first search and breadth first search.

`Plane drawing`[17] - rysowanie na płaszczyźnie

`Plane graph`[18] - graf płaski

Any such drawing is a `plane drawing`[17]. For convenience, we often use the abbreviation `plane graph`[18] for a `plane drawing`[17] of a planar graph.

`Contractible`[19] - zwężalny

To do so, we first define a graph H to be `contractible`[19] to K5 or K33 if we can obtain K5 or K33 by successively contracting edges of H

Source: Graph theory Robein J.Wilson