# Записки към упражненията по Числени методи
# сп. Информатика

ас. Здравка Недялкова

# Съдържание

# Упражнение 3

# Полиноми на Чебишов

(Продължение)

**Задача 4.** Нека $P(x) \in \pi_n$ и $|P(\eta_k)| \leq 1, k = \overline{0, n}$, където $\eta_k$ са точките на алтернанс за $T_n(x)$ $\left(\text{т.е. } \eta_k = \cos \dfrac{k\pi}{n}, k = \overline{0, n}\right)$. Да се докаже, че $|P(x)| \leq |T_n(x)|,\ |x| > 1$.

*Доказателство.* Нека $\eta_0, \eta_1, \dots, \eta_n$ са точките на алтернанс. Да разгледаме интерполационните полиноми за $P(x)$ и $T_n(x)$, построени за възли $\eta_k$:

$$P(x) \overset{\in \pi_n}{\equiv} L_n(P; x) = \sum_{k=0}^{n} P(\eta_k) l_{kn}(x), \tag{3.1}$$

$$T_n(x) \overset{\in \pi_n}{\equiv} L_n(T_n; x) = \sum_{k=0}^{n} T_n(\eta_k) l_{kn}(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k l_{kn}(x). \tag{3.2}$$

Ще използваме последните две, за да покажем, че $|P(x)| \leq |T_n(x)|,\ |x| > 1$.

- Нека $x > 1$. Имаме

$$|P(x)| \overset{(3.1)}{=} \left| \sum_{k=0}^{n} P(\eta_k) l_{kn}(x) \right| \leq \sum_{k=0}^{n} |P(\eta_k) l_{kn}(x)| \overset{|P(\eta_k)| \leq 1}{\leq} \sum_{k=0}^{n} |l_{kn}(x)|. \tag{3.3}$$

  Нашата цел е да ограничим последното отгоре от $T_n(x)$, затова ще намерим връзка между $|l_{kn}(x)|$ и $|T_n(x)|$. В случая, ще използваме, че $|l_{kn}(x)|=\operatorname{sign}(l_{kn}(x)) l_{kn}(x)$. Знаем, че

$$l_{kn}(x) = \prod_{i=0,\ i \neq k}^{n} \frac{x - \eta_i}{\eta_k - \eta_i} = \frac{(x - \eta_0)(x - \eta_1) \dots (x - \eta_{k-1})(x - \eta_{k+1}) \dots (x - \eta_n)}{(\eta_k - \eta_0)(\eta_k - \eta_1) \dots (\eta_k - \eta_{k-1})(\eta_k - \eta_{k+1}) \dots (\eta_k - \eta_n)}.$$

  Да определим знака му. Имаме:

$$l_{kn}(x) = \frac{\overbrace{(x - \eta_0)}^{>0} \overbrace{(x - \eta_1)}^{>0} \dots \overbrace{(x - \eta_{k-1})}^{>0} \overbrace{(x - \eta_{k+1})}^{>0} \dots \overbrace{(x - \eta_n)}^{>0}}{\underbrace{(\eta_k - \eta_0)}_{<0} \underbrace{(\eta_k - \eta_1)}_{<0} \dots \underbrace{(\eta_k - \eta_{k-1})}_{<0} \underbrace{(\eta_k - \eta_{k+1})}_{>0} \dots \underbrace{(\eta_k - \eta_n)}_{>0}},$$

  откъдето следва, че $|l_{kn}(x)| = (-1)^k l_{kn}(x)$. Заместваме в (3.3):

$$|P(x)| \leq \sum_{k=0}^{n} |l_{kn}(x)| = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k l_{kn}(x) = \sum_{k=0}^{n} T_n(\eta_k) l_{kn}(x) \overset{(3.2)}{\equiv} T_n(x) = |T_n(x)|.$$

  За последното равенство използвахме факта, че $|T_n(x)| = T_n(x),\ x > 1$.

- Нека $x < -1$. Постъпваме аналогично.

$$|P(x)| \overset{(3.1)}{=} \left|\sum_{k=0}^{n} P(\eta_k) l_{kn}(x)\right| \leq \sum_{k=0}^{n} |P(\eta_k) l_{kn}(x)| \overset{|P(\eta_k)|\leq 1}{\leq} \sum_{k=0}^{n} |l_{kn}(x)|\,.$$

Определяме знака на $l_{kn}(x)$:

$$l_{kn}(x) = \frac{\overbrace{(x-\eta_0)}^{<0}\overbrace{(x-\eta_1)}^{<0}\ldots\overbrace{(x-\eta_{k-1})}^{<0}\overbrace{(x-\eta_{k+1})}^{<0}\ldots\overbrace{(x-\eta_n)}^{<0}}{\underbrace{(\eta_k-\eta_0)}_{<0}\underbrace{(\eta_k-\eta_1)}_{<0}\ldots\underbrace{(\eta_k-\eta_{k-1})}_{<0}\underbrace{(\eta_k-\eta_{k+1})}_{>0}\ldots\underbrace{(\eta_k-\eta_n)}_{>0}}.$$

От последното следва, че

$$|l_{kn}(x)| = (-1)^{n+k} l_{kn}(x)$$

и следователно

$$|P(x)| \leq \sum_{k=0}^{n} |l_{kn}(x)| = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n+k} l_{kn}(x) = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} T_n(\eta_k) l_{kn}(x) \overset{(3.2)}{=} (-1)^n T_n(x) = |T_n(x)|.$$

Последното равенство следва от факта, че $T_n(x) > 0$ при $n$ – четно и $T_n(x) < 0$ при $n$ – нечетно за всяко $x < -1$.

$\square$

# Упражнение 4

# Разделени разлики. Интерполационна формула на Нютон

Досега в упражненията разгледахме интерполационната задача на Лагранж – постановка, как да определим полинома, чиято графика минава през дадени точки, как да намерим оценка на грешката при това приближение и кои възли ни дават „най-добра" такава оценка. Нека накратко припомним постановката на задачата. Търсим $p(x) \in \pi_n$ такъв, че $p(x_i) = y_i$, $i = \overline{0, n}$, където $x_i$ са различни възли, а $y_0, \ldots, y_n$ са дадени стойности. Както казахме, полиномът на Лагранж може да бъде намерен като например:

- решим получената система за неизвестните коефициенти на полинома $a_0, a_1, \ldots, a_n$.
- използваме интерполационната формула на Лагранж

  $$p(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k l_{kn}(x),$$

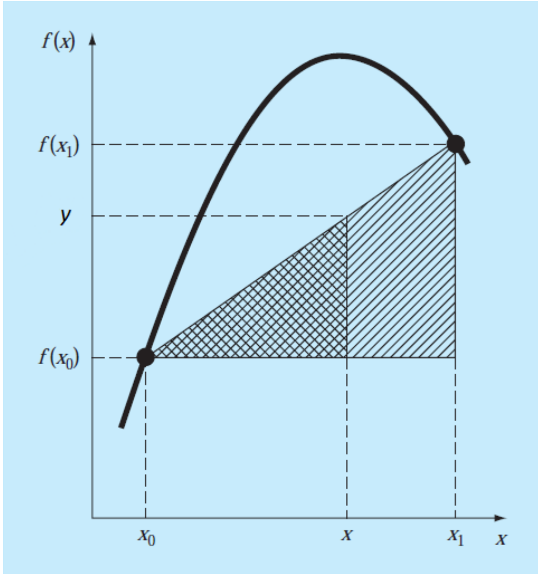
  където $l_{kn}(x)$ са базисните полиноми на Лагранж.

В тази секция ще разгледаме още една формула, по която може да се намери интерполационният полином на Лагранж – известната формула на Нютон. Всъщност, исторически, Нютон първи е получил аналитична формула за намирането му. Да обърнем внимание, че аналитичните формули, по които може да се построи полиномът, са различни, но полученият полином е **един и същ** (той е и единствен).

И така, преди да дадем общата формула на Нютон за намиране на полинома от $\pi_n$, ще разгледаме задачата в случая, когато търсим линеен и квадратичен интерполационен полином.

1. Линеен полином

   Нека в равнината са дадени точки $(x_0, y_0)$ и $(x_1, y_1)$. Търсим полином от $\pi_1$, чиято графика минава през точките:




Нека $(x, y)$ е произволна точка в равнината, лежаща върху правата, съответстваща на графиката на полинома. Лесно се вижда (например използвайки подобни триъгълници или факта, че наклонът на правата е постоянен), че е в сила

$$\frac{y - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}.$$

От последното следва, че

$$y = f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0)\,,$$

т.е. това е уравнението на правата и следователно търсеният полином е

$$p(x) = f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0)\,.$$

Да обърнем внимание, че намерихме полинома във вида $p(x) = b_0 + b_1(x - x_0)$, където $b_0 = f(x_0)$, $b_1 = \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$.

2. Квадратична интерполация

Да намерим полинома от $\pi_2$, който интерполира точките $(x_0, y_0)$, $(x_1, y_1)$, $(x_2, y_2)$. Последния ще търсим във вида

$$p(x) = \mathbf{b_0} + \mathbf{b_1}\,(x - x_0) + \mathbf{b_2}\,(x - x_0)\,(x - x_1)\,.$$

След известно пресмятане, като се използват условията за интерполация (тук няма да се спираме на извеждането), ще получим

$$b_0 = f(x_0),\ b_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0},\ b_2 = \frac{\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} - \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0}.$$

Следователно търсеният полином е

$$p(x) = f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0) + \frac{\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} - \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0}(x - x_0)(x - x_1).$$

Можем да постъпим аналогично за определяне на полинома на Лагранж от $n$-та степен, който отново ще търсим във вида

$$p(x) = b_0 + b_1\,(x - x_0) + b_2\,(x - x_0)\,(x - x_1) + \cdots + b_n(x - x_0)\ldots(x - x_{n-1}).$$

**Интересно**

Причината да търсим полинома във вида

$$p(x) = b_0 + b_1\,(x - x_0) + b_2\,(x - x_0)\,(x - x_1) + \cdots + b_n(x - x_0)\ldots(x - x_{n-1})$$

е следната. Както казахме, базисните полиноми на Лагранж имат стойност 1 само в един от възлите – този, за който отговарят. Във формулата на Нютон полиномът се търси като линейна комбинация на друг базис:

$$1,\ x - x_0,\ (x - x_0)(x - x_1),\ (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2), \ldots,\ (x - x_0)\ldots(x - x_{n-1}).$$

Втората базисна функция се нулира в $x_0$, следващата в $x_0, x_1$ и т.н. Благодарение на това, интерполационните условия водят до система с триъгълна матрица. Както знаем, решаването на такава система е непосредствено.

Преди да дадем общата формула на Нютон, ще въведем едно необходимо понятие.

**Определение 1.** Нека $x_0, \ldots, x_n$ са дадени различни точки. **Разделена разлика** от $n$-ти ред на функцията $f$ в точките $x_0, \ldots, x_n$ ще бележим с $f[x_0, \ldots, x_n]$ и дефинираме с рекурентната връзка

$$f[x_0, \ldots, x_n] = \frac{f[x_1, \ldots, x_n] - f[x_0, \ldots, x_{n-1}]}{x_n - x_0},\ n = 1, 2, \ldots,$$

като $f[x_i] = f(x_i), \forall i$.

Преди да продължим, ще разгледаме един кратък пример.

**Пример 1.** Да се намери $f[x_0, x_1, x_2]$, ако $x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 2$ и $f(x_0) = 0$, $f(x_1) = -1$, $f(x_2) = 1$.

*Решение.* От дефиницията следва, че

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0}.$$

Последното означава, че за да пресметнем разделената разлика от втори ред $f[x_0, x_1, x_2]$, трябва да пресметнем разделените разлики от първи $f[x_1, x_2]$ и $f[x_0, x_1]$. И така:

$$f[x_0, x_1] = \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{-1 - 0}{1 - 0} = -1;$$
$$f[x_1, x_2] = \frac{f[x_2] - f[x_1]}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{1 - (-1)}{2 - 1} = 2.$$

Заместваме полученото във формулата за разделената разлика от втори ред:

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{2 - (-1)}{2 - 0} = \frac{3}{2}.$$

□

Връзката между понятието разделена разлика и интерполационния полином на Лагранж се открива в следната теорема.

**Теорема 1.** Разделената разлика $f[x_0,\dots,x_n]$ съвпада с коефициента пред $x^n$ в интерполационния полином на Лагранж $L_n(f;x)$ за функцията $f$ с възли $x_0,\dots,x_n$.

Като се използва последната теорема, може да се изведе формулата на Нютон за интерполационния полином на Лагранж:

$$L_n(f;x) = f(x_0)+f[x_0,x_1](x-x_0)+f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1)+\dots+f[x_0,\dots,x_n](x-x_0)\dots(x-x_{n-1})$$

или записана еквивалентно

$$L_n(f;x) = \sum_{k=0}^{n} f[x_0,\dots,x_k](x-x_0)\dots(x-x_{k-1}),$$

като допълнително приемем, че $(x-x_0)\dots(x-x_{k-1}) = 1$, при $k=0$.

Задачата за намиране на интерполационния полином на Лагранж чрез формулата на Нютон се свежда до определянето на разделените разлики в горепосочената формула. Тъй като формулата е рекурсивна, на практика се използва следната, удобна за компютърна реализация, схема (например за възли $x_0,\dots,x_5$):

| $x$ | $f(x)$ | First divided differences | Second divided differences | Third divided differences |
|---|---|---|---|---|
| $x_0$ | $f[x_0]$ | | | |
| | | $f[x_0,x_1] = \dfrac{f[x_1]-f[x_0]}{x_1-x_0}$ | | |
| $x_1$ | $f[x_1]$ | | $f[x_0,x_1,x_2] = \dfrac{f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_0}$ | |
| | | $f[x_1,x_2] = \dfrac{f[x_2]-f[x_1]}{x_2-x_1}$ | | $f[x_0,x_1,x_2,x_3] = \dfrac{f[x_1,x_2,x_3]-f[x_0,x_1,x_2]}{x_3-x_0}$ |
| $x_2$ | $f[x_2]$ | | $f[x_1,x_2,x_3] = \dfrac{f[x_2,x_3]-f[x_1,x_2]}{x_3-x_1}$ | |
| | | $f[x_2,x_3] = \dfrac{f[x_3]-f[x_2]}{x_3-x_2}$ | | $f[x_1,x_2,x_3,x_4] = \dfrac{f[x_2,x_3,x_4]-f[x_1,x_2,x_3]}{x_4-x_1}$ |
| $x_3$ | $f[x_3]$ | | $f[x_2,x_3,x_4] = \dfrac{f[x_3,x_4]-f[x_2,x_3]}{x_4-x_2}$ | |
| | | $f[x_3,x_4] = \dfrac{f[x_4]-f[x_3]}{x_4-x_3}$ | | $f[x_2,x_3,x_4,x_5] = \dfrac{f[x_3,x_4,x_5]-f[x_2,x_3,x_4]}{x_5-x_2}$ |
| $x_4$ | $f[x_4]$ | | $f[x_3,x_4,x_5] = \dfrac{f[x_4,x_5]-f[x_3,x_4]}{x_5-x_3}$ | |
| | | $f[x_4,x_5] = \dfrac{f[x_5]-f[x_4]}{x_5-x_4}$ | | |
| $x_5$ | $f[x_5]$ | | | |

Нека сега приложим формулата на Нютон за конкретна задача.

**Задача 1.** Да се намери интерполационният полином на Лагранж във форма на Нютон, интерполиращ функцията $f(x)=\sqrt{x}$ в т. $0,1,4$.

*Решение.* Да запишем първо интерполационните условия в таблица

| x | 0 | 1 | 4 |
|---|---|---|---|
| y | 0 | 1 | 2 |

Търсим полинома във вида

$$L_2(f;x) = f[x_0] + f[x_0,x_1](x-x_0) + f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1).$$

Да пресметнем разделените разлики, като попълним съответната таблица.

| Възли | Ред 0 | Ред 1 | Ред 2 |
|---|---|---|---|
| $x_0=0$ | $f[x_0]=0$ | | |
| | | $f[x_0,x_1] = \dfrac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} = 1$ | |
| $x_1=1$ | $f[x_1]=1$ | | $f[x_0,x_1,x_2] = \dfrac{f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_0} = -\dfrac{1}{6}$ |
| | | $f[x_1,x_2] = \dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = \dfrac{1}{3}$ | |
| $x_2=4$ | $f[x_2]=2$ | | |

Заместваме получените разделени разлики и получаваме

$$L_2(f;x) = 0 + 1(x-0) - \frac{1}{6}(x-0)(x-1) = \frac{7}{6}\,x - \frac{1}{6}\,x^2.$$

Забележка: Подробно решена задача може да намерите и тук: Newton's divided differences formula ☐

Вече показахме как се намира интерполационният полином на Лагранж, като се използва формулата на Нютон. Сега ще се спрем на няколко интересни свойства на разделената разлика. Нека първо отбележим, че от дефиницията на разделена разлика става ясно, че всяка разделена разлика се представя като линейна комбинация на функционалните стойности на $f$ в съответните възли. Нека сега го покажем.

**Задача 2.** Да се докаже, че

$$f[x_0,\dots,x_n] = \sum_{k=0}^{n} \frac{f(x_k)}{\omega'(x_k)}, \tag{4.1}$$

за $\omega(x) = (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)$.

*Доказателство.* За да докажем горното тъждество, ще използваме, че разделената разлика от $n$-ти ред съвпада с коефициента пред $x^n$ в полинома на Лагранж. Нека припомним и формулата на Лагранж, записана чрез $\omega(x)$:

$$L_n(f;x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k) l_{kn}(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k) \frac{\omega(x)}{(x-x_k)\omega'(x_k)}.$$

От последната формула се вижда, че коефициентът пред $x^n$ е $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{f(x_k)}{\omega'(x_k)}$, откъдето следва исканото тъждество. ☐

От последната задача се вижда, че разделената разлика е линейна комбинация на $f(x_k)$ с коефициенти $\dfrac{1}{\omega'(x_k)}$ за съответните възли:

$$f[x_0,\dots,x_n] = \frac{1}{\omega'(x_0)}f(x_0) + \frac{1}{\omega'(x_1)}f(x_1) + \dots + \frac{1}{\omega'(x_n)}f(x_n). \tag{4.2}$$

Ще казваме още, че разделената разлика е **линеен функционал**[1] от вида $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$, където $A_k = \dfrac{1}{\omega'(x_k)}$.

Друг интересен факт за разделените разлики е, че те не зависят от подредбата на възлите. Лесно може да се покаже например, че $f[x_0,x_1] = f[x_1,x_0]$ или $f[x_0,x_1,x_2] = f[x_1,x_2,x_0]$. В общия случай на база само на рекурентната връзка това трудно може да се покаже, затова ще го покажем като използваме изведеното досега.

**Задача 3.** Докажете, че разделената разлика не зависи от подредбата на възлите, т.е.

$$f[x_0,\dots,x_n] = f[x_{i_0},x_{i_1},\dots,x_{i_n}],$$

където $i_0,i_1,\dots,i_n$ е произволна пермутация.

[1]Функционал е изображение, което приема функция и връща число. Пример за функционал е определеният интеграл. Линейният функционал $F$ изпълнява условията $F(f+g) = F(f)+F(g)$ и $F(\lambda g) = \lambda F(g)$.

*Доказателство.* Тъй като разделената разлика от ред $n$ съвпада с коефициента пред $x^n$, то, независимо от подредбата на възлите $x_0, \dots, x_n$, тя ще бъде едно и също число.
*Забележка: Друг начин да се докаже последното е като се използва фактът, че разделената разлика е линейна комбинация на функционалните стойности, вж. (4.2). Това означава, че дори и да разместим местата на възлите в разделената разлика, линейната комбинация ще се запази.* □

**Задача 4.** Да се докаже, че $(f+cg)[x_0, \dots, x_n] = f[x_0, \dots, x_n]+cg[x_0, \dots, x_n]$, където $c \in R$, а $f$ и $g$ са дадени функции.

*Доказателство.* За доказателството отново ще използваме (4.2), т.е. $f[x_0, \dots, x_n] = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{f(x_k)}{\omega'(x_k)}$.
От последното имаме

$$(f + cg)[x_0, \dots, x_n] = \sum_{k=0}^{n} \frac{(f(x) + cg(x))\big|_{x=x_k}}{\omega'(x_k)} = \sum_{k=0}^{n} \frac{f(x_k) + cg(x_k)}{\omega'(x_k)}$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{f(x_k)}{\omega'(x_k)} + c\sum_{k=0}^{n} \frac{g(x_k)}{\omega'(x_k)} = f[x_0, \dots, x_n] + cg[x_0, \dots, x_n].$$

□

Вече показахме, че ако $f \in \pi_n$, то интерполационният полином на Лагранж за $f$ съвпада с $f$. Интересно свойство имат и разделените разлики, когато функцията, която интерполираме, е полином:

- Ако $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n \in \pi_n$, то $f[x_0, \dots, x_n] = a_0$;
- Ако $f \in \pi_{n-1}$, то $f[x_0, \dots, x_n] = 0$.

**Задача 5.** Да се докаже, че $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{\omega''(x_k)}{\omega'(x_k)} = 0$.

*Доказателство.* За доказателството ще използваме формула (4.1). След като я приложим за функцията $f(x) = \omega''(x)$ получаваме:

$$f[x_0, \dots, x_n] = \sum_{k=0}^{n} \frac{\omega''(x_k)}{\omega'(x_k)}.$$

Тъй като $f(x) = \omega''(x)$ е от степен $n - 1$ ($\omega(x)$ е от степен $n + 1$), то разделената разлика е равна на 0, откъдето следва и исканото тъждество. □

**Задача 6.** Нека $x_k \neq 0, -1$ за $k = 1, \dots, n$. Докажете равенството

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k^n f\left(\dfrac{1}{x_k}\right)}{f'(x_k)(1 + x_k)} = (-1)^n \left(x_1x_2 \dots x_n - 1\right),$$

където $f(x) = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)$.

*Доказателство.* Нека означим $x_{n+1} = -1$ и $\omega(x) = (x - x_1) \dots (x - x_n)(x - x_{n+1})$. Ще докажем твърдението поетапно.

(a) Да разгледаме функцията $g(x) = x^n f\left(\dfrac{1}{x}\right)$, чиято стойност в т. $x_k$ е равна на числителя. Имаме:

$$g(x) = x^n \left(\frac{1}{x} - x_1\right)\left(\frac{1}{x} - x_2\right)\dots\left(\frac{1}{x} - x_n\right)$$
$$= \cancel{x^n} \frac{(1 - x_1x)}{\cancel{x}}\frac{(1 - x_2x)}{\cancel{x}}\dots\frac{(1 - x_nx)}{\cancel{x}} = ((-1)^n x_1 \dots x_n)\, x^n + \dots$$

Следователно
$$g[x_1, \dots, x_{n+1}] = (-1)^n x_1 \dots x_n \tag{4.3}$$

(б) Ще покажем, че знаменателят в сумата е равен на $\omega'(x_k)$. Да припомним първо, че
$$f'(x_k) = (x_k - x_1)(x_k - x_2)\dots(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})\dots(x_k - x_n). \tag{4.4}$$

От друга страна,
$$\omega'(x_k) = (x_k - x_1)(x_k - x_2)\dots(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})\dots(x_k - x_n)(x_k - x_{n+1}). \tag{4.5}$$

От (4.4) и (4.5) следва, че
$$\omega'(x_k) = (x_k - x_{n+1})f'(x_k) = (x_k + 1)f'(x_k).$$

След като заместим полученото дотук в търсената сума от условието, получаваме
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k^n f(1/x_k)}{f'(x_k)(1 + x_k)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{g(x_k)}{\omega'(x_k)}.$$

За функцията $g$ обаче намерихме разделената разлика от $n$-ти ред, вж. (а), и следователно ще изразим дясната страна в последното равенство чрез $g[x_1, \dots, x_{n+1}]$. Използваме (4.1):
$$\begin{aligned} g[x_1, \dots, x_{n+1}] &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{g(x_k)}{\omega'(x_k)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{g(x_k)}{\omega'(x_k)} + \frac{g(x_{n+1})}{\omega'(x_{n+1})} \\ \iff \sum_{k=1}^{n} \frac{g(x_k)}{\omega'(x_k)} &= g[x_1, \dots, x_{n+1}] - \frac{g(x_{n+1})}{\omega'(x_{n+1})}. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Остана да определим последните два члена.

- $g[x_1, \dots, x_{n+1}] =$ коефициентът пред $x^n = (-1)^n x_1 x_2 \dots x_n$;
- $\dfrac{g(x_{n+1})}{\omega'(x_{n+1})} = \dfrac{g(-1)}{\omega'(-1)} = \dfrac{(-1)^n(-1 - x_1)(-1 - x_2)\dots(-1 - x_n)}{(-1 - x_1)(-1 - x_2)\dots(-1 - x_n)} = (-1)^n.$

Заместваме последното в (4.6) и получаваме исканото тъждество. □

И така, вече изведохме две формули за построяването на интерполационния полином на Лагранж – формулата на Лагранж и на Нютон. Бихме могли да си зададем следния въпрос – как да определим коя формула е по-подходяща за нашата цел и има ли изобщо значение коя ще изберем. Нека накратко отговорим на този въпрос.

- Формула на Лагранж

  Базисните полиноми на Лагранж зависят само от възлите на интерполация. Следователно, ако искаме да решим интерполационната задача с едни и същи възли, но различни съответстващи им стойности, можем да построим базисните полиноми само веднъж. Тогава в линейната комбинация на базисните полиноми ще променяме само коефициентите – $f(x_i)$.

- Формула на Нютон

  Ако искаме да построим редица от интерполационни полиноми $L_1(f; x), L_2(f; x), \dots,$ както следва – $L_1(f; x)$ интерполира $f$ в точките $x_0, x_1$, $L_2(f; x)$ интерполира $f$ в точките $x_0, x_1, x_2$ и т.н., то е удобно да използваме формулата на Нютон. Тъй като за всеки нов полином добавяме по един възел, само ще трябва да допълним таблицата с разделени разлики и да прибавим съответния член към построения преди това полином. Ако сменим функционалните стойности обаче, ще трябва да пресметнем всички разделени разлики отначало!