Полиноми на Бернщайн

Определение 1. Нека $f(t)$ е произволна функция, определена в интервала $[0,1]$. **Полином на Бернщайн** от степен n за функцията f дефинираме с равенството

$$B_n(f;t) := \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k}.$$

Да обърнем внимание, че последният се представя по базиса $\{\varphi_{nk}(t)\}_{k=0}^{n}$:

$$\varphi_{nk}(t) := \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k}.$$

Задача 1. Докажете, че ако $f \in C^1[0,1]$, то за производната на полинома на Бернщайн е изпълнено

$$B'_{n+1}(f;t) = \sum_{k=0}^{n} f'(\xi_k)\binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k},$$

където $\xi_k \in \left[\frac{k}{n+1}, \frac{k+1}{n+1}\right]$, $k = 0, \dots, n$.

Решение. От дефиницията за полином на Бернщайн от $(n+1)$-ва степен следва, че

$$B_{n+1}(f;t) = \sum_{k=0}^{n+1} f\left(\frac{k}{n+1}\right)\binom{n+1}{k} t^k (1-t)^{n+1-k}.$$

Диференцираме

$$\begin{aligned}
B'_{n+1}(f;t) &= \sum_{k=0}^{n+1} f\left(\frac{k}{n+1}\right)\binom{n+1}{k} k\ t^{k-1}(1-t)^{n+1-k} \\
&+ \sum_{k=0}^{n+1} f\left(\frac{k}{n+1}\right)\binom{n+1}{k} t^k (n+1-k)(1-t)^{n+1-k-1}(-1) \\
&= 0 + \sum_{k=1}^{n+1} f\left(\frac{k}{n+1}\right)\binom{n+1}{k} k\ t^{k-1}(1-t)^{n+1-k} \\
&+ \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n+1}\right)\binom{n+1}{k} t^k (n+1-k)(1-t)^{n+1-k-1}(-1) + 0.
\end{aligned}$$

За да можем да съберем двете суми, ще запишем първата в следния вид

$$\sum_{k=1}^{n+1} f\left(\frac{k}{n+1}\right)\binom{n+1}{k} k\ t^{k-1}(1-t)^{n+1-k} = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k+1}{n+1}\right)\binom{n+1}{k+1}(k+1)\ t^k (1-t)^{n-k},$$

където сме заместили k с $k+1$ и сме пуснали k да върви от 0 до n. Заместваме последното в горния израз за $B'_{n+1}(f;t)$:

$$\begin{aligned}
B'_{n+1}(f;t) &= \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k+1}{n+1}\right)\binom{n+1}{k+1}(k+1)\ t^k(1-t)^{n-k}, \\
&- \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n+1}\right)\binom{n+1}{k}(n+1-k)t^k(1-t)^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} t^k(1-t)^{n-k}\left[f\left(\frac{k+1}{n+1}\right)\binom{n+1}{k+1}(k+1) - f\left(\frac{k}{n+1}\right)\binom{n+1}{k}(n+1-k)\right].
\end{aligned}$$

Нека сега опростим сумата в квадратните скоби. Ще разгледаме последователно двата израза:

$$\begin{aligned}
\binom{n+1}{k+1}(k+1) &= \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n+1-(k+1))!}(k+1) = \frac{(n+1)!}{k!(n-k)!}, \\
\binom{n+1}{k}(n+1-k) &= \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!}(n+1-k) = \frac{(n+1)!}{k!(n-k)!}.
\end{aligned}$$

Заместваме последните:

$$B'_{n+1}(f;t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(n+1)!}{k!(n-k)!}\ t^k(1-t)^{n-k}\left[f\left(\frac{k+1}{n+1}\right) - f\left(\frac{k}{n+1}\right)\right].$$

От теоремата за крайните нараствания следва, че $\exists \xi_k \in \left[\frac{k}{n+1}, \frac{k+1}{n+1}\right]$ такова, че

$$f\left(\frac{k+1}{n+1}\right) - f\left(\frac{k}{n+1}\right) = f'(\xi_k)\left(\frac{k+1}{n+1} - \frac{k}{n+1}\right).$$

Получаваме окончателно

$$\begin{aligned}
B'_{n+1}(f;t) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{(n+1)!}{k!(n-k)!}\ t^k(1-t)^{n-k}\frac{f'(\xi_k)}{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n} f'(\xi_k)\frac{n!}{k!(n-k)!}\ t^k(1-t)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} f'(\xi_k)\binom{n}{k}\ t^k(1-t)^{n-k}.
\end{aligned}$$

□