Записки към упражненията по Числени методи сп. Информатика

ас. Здравка Недялкова

Съдържание

Упражнение 3

Полиноми на Чебишов

(Продължение)

Задача 4. Нека $P(x) \in \pi_n$ и $|P(\eta_k)| \leq 1, k = \overline{0,n}$, където η_k са точките на алтернанс за $T_n(x)$ $\left(\text{т.е. } \eta_k = \cos\dfrac{k\pi}{n}, k = \overline{0,n}\right)$. Да се докаже, че $|P(x)| \leq |T_n(x)|,\ |x| > 1$.

Доказателство. Нека $\eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_n$ са точките на алтернанс. Да разгледаме интерполационните полиноми за $P(x)$ и $T_n(x)$, построени за възли η_k:

$$P(x) \overset{\in\pi_n}{\equiv} L_n(P;x) = \sum_{k=0}^{n} P(\eta_k) l_{kn}(x), \tag{3.1}$$

$$T_n(x) \overset{\in\pi_n}{\equiv} L_n(T_n;x) = \sum_{k=0}^{n} T_n(\eta_k) l_{kn}(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k l_{kn}(x). \tag{3.2}$$

Ще използваме последните две, за да покажем, че $|P(x)| \leq |T_n(x)|,\ |x| > 1$.

- Нека $x > 1$. Имаме

$$|P(x)| \overset{(3.1)}{=} \left|\sum_{k=0}^{n} P(\eta_k) l_{kn}(x)\right| \leq \sum_{k=0}^{n} |P(\eta_k) l_{kn}(x)| \overset{|P(\eta_k)|\leq 1}{\leq} \sum_{k=0}^{n} |l_{kn}(x)|. \tag{3.3}$$

  Нашата цел е да ограничим последното отгоре от $T_n(x)$, затова ще намерим връзка между $|l_{kn}(x)|$ и $|T_n(x)|$. В случая, ще използваме, че $|l_{kn}(x)|=\operatorname{sign}(l_{kn}(x)) l_{kn}(x)$. Знаем, че

$$l_{kn}(x) = \prod_{i=0,\ i\neq k}^{n} \frac{x-\eta_i}{\eta_k-\eta_i} = \frac{(x-\eta_0)(x-\eta_1)\ldots(x-\eta_{k-1})(x-\eta_{k+1})\ldots(x-\eta_n)}{(\eta_k-\eta_0)(\eta_k-\eta_1)\ldots(\eta_k-\eta_{k-1})(\eta_k-\eta_{k+1})\ldots(\eta_k-\eta_n)}.$$

  Да определим знака му. Имаме:

$$l_{kn}(x) = \frac{\overbrace{(x-\eta_0)}^{>0}\overbrace{(x-\eta_1)}^{>0}\ldots\overbrace{(x-\eta_{k-1})}^{>0}\overbrace{(x-\eta_{k+1})}^{>0}\ldots\overbrace{(x-\eta_n)}^{>0}}{\underbrace{(\eta_k-\eta_0)}_{<0}\underbrace{(\eta_k-\eta_1)}_{<0}\ldots\underbrace{(\eta_k-\eta_{k-1})}_{<0}\underbrace{(\eta_k-\eta_{k+1})}_{>0}\ldots\underbrace{(\eta_k-\eta_n)}_{>0}},$$

  откъдето следва, че $|l_{kn}(x)| = (-1)^k l_{kn}(x)$. Заместваме в (3.3):

$$|P(x)| \leq \sum_{k=0}^{n} |l_{kn}(x)| = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k l_{kn}(x) = \sum_{k=0}^{n} T_n(\eta_k) l_{kn}(x) \overset{(3.2)}{\equiv} T_n(x) = |T_n(x)|.$$

  За последното равенство използвахме факта, че $|T_n(x)| = T_n(x),\ x > 1$.

- Нека $x < -1$. Постъпваме аналогично.

$$|P(x)| \overset{(3.1)}{=} \left| \sum_{k=0}^{n} P(\eta_k) l_{kn}(x) \right| \le \sum_{k=0}^{n} |P(\eta_k) l_{kn}(x)| \overset{|P(\eta_k)|\le 1}{\le} \sum_{k=0}^{n} |l_{kn}(x)| \, .$$

Определяме знака на $l_{kn}(x)$:

$$l_{kn}(x) = \frac{\overbrace{(x-\eta_0)}^{<0}\overbrace{(x-\eta_1)}^{<0}\dots\overbrace{(x-\eta_{k-1})}^{<0}\overbrace{(x-\eta_{k+1})}^{<0}\dots\overbrace{(x-\eta_n)}^{<0}}{\underbrace{(\eta_k-\eta_0)}_{<0}\underbrace{(\eta_k-\eta_1)}_{<0}\dots\underbrace{(\eta_k-\eta_{k-1})}_{<0}\underbrace{(\eta_k-\eta_{k+1})}_{>0}\dots\underbrace{(\eta_k-\eta_n)}_{>0}}.$$

От последното следва, че

$$|l_{kn}(x)| = (-1)^{n+k} l_{kn}(x)$$

и следователно

$$|P(x)| \le \sum_{k=0}^{n} |l_{kn}(x)| = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n+k} l_{kn}(x) = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} T_n(\eta_k) l_{kn}(x) \overset{(3.2)}{=} (-1)^n T_n(x) = |T_n(x)|.$$

Последното равенство следва от факта, че $T_n(x) > 0$ при n – четно и $T_n(x) < 0$ при n – нечетно за всяко $x < -1$.

$\square$

Упражнение 4

Разделени разлики. Интерполационна формула на Нютон

Досега в упражненията разгледахме интерполационната задача на Лагранж – постановка, как да определим полинома, чиято графика минава през дадени точки, как да намерим оценка на грешката при това приближение и кои възли ни дават „най-добра" такава оценка. Нека накратко припомним постановката на задачата. Търсим $p(x) \in \pi_n$ такъв, че $p(x_i) = y_i$, $i = \overline{0, n}$, където x_i са различни възли, а $y_0, \ldots, y_n$ са дадени стойности. Както казахме, полиномът на Лагранж може да бъде намерен като например:

- решим получената система за неизвестните коефициенти на полинома $a_0, a_1, \ldots, a_n$.
- използваме интерполационната формула на Лагранж

  $$p(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k l_{kn}(x),$$

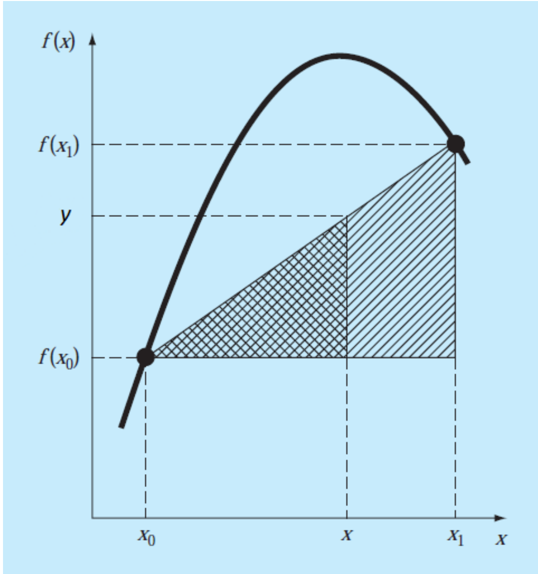
  където $l_{kn}(x)$ са базисните полиноми на Лагранж.

В тази секция ще разгледаме още една формула, по която може да се намери интерполационният полином на Лагранж – известната формула на Нютон. Всъщност, исторически, Нютон първи е получил аналитична формула за намирането му. Да обърнем внимание, че аналитичните формули, по които може да се построи полиномът, са различни, но полученият полином е **един и същ** (той е и единствен).

И така, преди да дадем общата формула на Нютон за намиране на полинома от π_n, ще разгледаме задачата в случая, когато търсим линеен и квадратичен интерполационен полином.

1. Линеен полином

   Нека в равнината са дадени точки (x_0, y_0) и (x_1, y_1). Търсим полином от π_1, чиято графика минава през точките:



Нека (x, y) е произволна точка в равнината, лежаща върху правата, съответстваща на графиката на полинома. Лесно се вижда (например използвайки подобни триъгълници или факта, че наклонът на правата е постоянен), че е в сила

$$\frac{y - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}.$$

От последното следва, че

$$y = f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0)\,,$$

т.е. това е уравнението на правата и следователно търсеният полином е

$$p(x) = f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0)\,.$$

Да обърнем внимание, че намерихме полинома във вида $p(x) = b_0 + b_1(x - x_0)$, където $b_0 = f(x_0)$, $b_1 = \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$.

2. Квадратична интерполация

Да намерим полинома от π_2, който интерполира точките (x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2). Последния ще търсим във вида

$$p(x) = \mathbf{b_0} + \mathbf{b_1}\,(x - x_0) + \mathbf{b_2}\,(x - x_0)\,(x - x_1)\,.$$

След известно пресмятане, като се използват условията за интерполация (тук няма да се спираме на извеждането), ще получим

$$b_0 = f(x_0),\ b_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0},\ b_2 = \frac{\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} - \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0}.$$

Следователно търсеният полином е

$$p(x) = f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0) + \frac{\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} - \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0}(x - x_0)(x - x_1).$$

Можем да постъпим аналогично за определяне на полинома на Лагранж от n-та степен, който отново ще търсим във вида

$$p(x) = b_0 + b_1\,(x - x_0) + b_2\,(x - x_0)\,(x - x_1) + \cdots + b_n(x - x_0)\ldots(x - x_{n-1}).$$

Интересно

Причината да търсим полинома във вида

$$p(x) = b_0 + b_1\,(x - x_0) + b_2\,(x - x_0)\,(x - x_1) + \cdots + b_n(x - x_0)\ldots(x - x_{n-1})$$

е следната. Както казахме, базисните полиноми на Лагранж имат стойност 1 само в един от възлите – този, за който отговарят. Във формулата на Нютон полиномът се търси като линейна комбинация на друг базис:

$$1,\ x - x_0,\ (x - x_0)(x - x_1),\ (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2), \ldots,\ (x - x_0)\ldots(x - x_{n-1}).$$

Втората базисна функция се нулира в x_0, следващата в x_0, x_1 и т.н. Благодарение на това, интерполационните условия водят до система с триъгълна матрица. Както знаем, решаването на такава система е непосредствено.

Преди да дадем общата формула на Нютон, ще въведем едно необходимо понятие.

Определение 1. Нека $x_0, \ldots, x_n$ са дадени различни точки. **Разделена разлика** от n-ти ред на функцията f в точките $x_0, \ldots, x_n$ ще бележим с $f[x_0, \ldots, x_n]$ и дефинираме с рекурентната връзка

$$f[x_0, \ldots, x_n] = \frac{f[x_1, \ldots, x_n] - f[x_0, \ldots, x_{n-1}]}{x_n - x_0},\ n = 1, 2, \ldots,$$

като $f[x_i] = f(x_i), \forall i$.

Преди да продължим, ще разгледаме един кратък пример.

Пример 1. Да се намери $f[x_0, x_1, x_2]$, ако $x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 2$ и $f(x_0) = 0,\ f(x_1) = -1$, $f(x_2) = 1$.

Решение. От дефиницията следва, че

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0}.$$

Последното означава, че за да пресметнем разделената разлика от втори ред $f[x_0, x_1, x_2]$, трябва да пресметнем разделените разлики от първи $f[x_1, x_2]$ и $f[x_0, x_1]$. И така:

$$f[x_0, x_1] = \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{-1 - 0}{1 - 0} = -1;$$
$$f[x_1, x_2] = \frac{f[x_2] - f[x_1]}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{1 - (-1)}{2 - 1} = 2.$$

Заместваме полученото във формулата за разделената разлика от втори ред:

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{2 - (-1)}{2 - 0} = \frac{3}{2}.$$

□

Връзката между понятието разделена разлика и интерполационния полином на Лагранж се открива в следната теорема.

Теорема 1. Разделената разлика $f[x_0, \dots, x_n]$ съвпада с коефициента пред x^n в интерполационния полином на Лагранж $L_n(f; x)$ за функцията f с възли $x_0, \dots, x_n$.

Като се използва последната теорема, може да се изведе формулата на Нютон за интерполационния полином на Лагранж:

$$L_n(f;x) = f(x_0)+f[x_0,x_1](x-x_0)+f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1)+\dots+f[x_0,\dots,x_n](x-x_0)\dots(x-x_{n-1})$$

или записана еквивалентно

$$L_n(f;x) = \sum_{k=0}^{n} f[x_0,\dots,x_k](x-x_0)\dots(x-x_{k-1}),$$

като допълнително приемем, че $(x-x_0)\dots(x-x_{k-1}) = 1$, при $k = 0$.

Задачата за намиране на интерполационния полином на Лагранж чрез формулата на Нютон се свежда до определянето на разделените разлики в горепосочената формула. Тъй като формулата е рекурсивна, на практика се използва следната, удобна за компютърна реализация, схема (например за възли $x_0, \dots, x_5$):

x	$f(x)$	First divided differences	Second divided differences	Third divided differences
x_0	$f[x_0]$			
		$f[x_0,x_1] = \dfrac{f[x_1]-f[x_0]}{x_1-x_0}$		
x_1	$f[x_1]$		$f[x_0,x_1,x_2] = \dfrac{f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_0}$	
		$f[x_1,x_2] = \dfrac{f[x_2]-f[x_1]}{x_2-x_1}$		$f[x_0,x_1,x_2,x_3] = \dfrac{f[x_1,x_2,x_3]-f[x_0,x_1,x_2]}{x_3-x_0}$
x_2	$f[x_2]$		$f[x_1,x_2,x_3] = \dfrac{f[x_2,x_3]-f[x_1,x_2]}{x_3-x_1}$	
		$f[x_2,x_3] = \dfrac{f[x_3]-f[x_2]}{x_3-x_2}$		$f[x_1,x_2,x_3,x_4] = \dfrac{f[x_2,x_3,x_4]-f[x_1,x_2,x_3]}{x_4-x_1}$
x_3	$f[x_3]$		$f[x_2,x_3,x_4] = \dfrac{f[x_3,x_4]-f[x_2,x_3]}{x_4-x_2}$	
		$f[x_3,x_4] = \dfrac{f[x_4]-f[x_3]}{x_4-x_3}$		$f[x_2,x_3,x_4,x_5] = \dfrac{f[x_3,x_4,x_5]-f[x_2,x_3,x_4]}{x_5-x_2}$
x_4	$f[x_4]$		$f[x_3,x_4,x_5] = \dfrac{f[x_4,x_5]-f[x_3,x_4]}{x_5-x_3}$	
		$f[x_4,x_5] = \dfrac{f[x_5]-f[x_4]}{x_5-x_4}$		
x_5	$f[x_5]$			

Нека сега приложим формулата на Нютон за конкретна задача.

Задача 1. Да се намери интерполационният полином на Лагранж във форма на Нютон, интерполиращ функцията $f(x) = \sqrt{x}$ в т. $0, 1, 4$.

Решение. Да запишем първо интерполационните условия в таблица

x	0	1	4
y	0	1	2

Търсим полинома във вида

$$L_2(f;x) = f[x_0] + f[x_0,x_1](x-x_0) + f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1).$$

Да пресметнем разделените разлики, като попълним съответната таблица.

Възли	Ред 0	Ред 1	Ред 2
$x_0 = 0$	$f[x_0] = 0$		
		$f[x_0,x_1] = \dfrac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} = 1$	
$x_1 = 1$	$f[x_1] = 1$		$f[x_0,x_1,x_2] = \dfrac{f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_0} = -\dfrac{1}{6}$
		$f[x_1,x_2] = \dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = \dfrac{1}{3}$	
$x_2 = 4$	$f[x_2] = 2$		

Заместваме получените разделени разлики и получаваме

$$L_2(f;x) = 0 + 1(x-0) - \frac{1}{6}(x-0)(x-1) = \frac{7}{6}\,x - \frac{1}{6}\,x^2.$$

Забележка: Подробно решена задача може да намерите и тук: Newton's divided differences formula □

Вече показахме как се намира интерполационният полином на Лагранж, като се използва формулата на Нютон. Сега ще се спрем на няколко интересни свойства на разделената разлика. Нека първо отбележим, че от дефиницията на разделена разлика става ясно, че всяка разделена разлика се представя като линейна комбинация на функционалните стойности на f в съответните възли. Нека сега го покажем.

Задача 2. Да се докаже, че

$$f[x_0,\dots,x_n] = \sum_{k=0}^{n} \frac{f(x_k)}{\omega'(x_k)}, \tag{4.1}$$

за $\omega(x) = (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)$.

Доказателство. За да докажем горното тъждество, ще използваме, че разделената разлика от n-ти ред съвпада с коефициента пред x^n в полинома на Лагранж. Нека припомним и формулата на Лагранж, записана чрез $\omega(x)$:

$$L_n(f;x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k) l_{kn}(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k) \frac{\omega(x)}{(x-x_k)\omega'(x_k)}.$$

От последната формула се вижда, че коефициентът пред x^n е $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{f(x_k)}{\omega'(x_k)}$, откъдето следва исканото тъждество. □

От последната задача се вижда, че разделената разлика е линейна комбинация на $f(x_k)$ с коефициенти $\dfrac{1}{\omega'(x_k)}$ за съответните възли:

$$f[x_0,\dots,x_n] = \frac{1}{\omega'(x_0)} f(x_0) + \frac{1}{\omega'(x_1)} f(x_1) + \dots + \frac{1}{\omega'(x_n)} f(x_n). \tag{4.2}$$

Ще казваме още, че разделената разлика е **линеен функционал**[1] от вида $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$, където $A_k = \dfrac{1}{\omega'(x_k)}$.

Друг интересен факт за разделените разлики е, че те не зависят от подредбата на възлите. Лесно може да се покаже например, че $f[x_0,x_1] = f[x_1,x_0]$ или $f[x_0,x_1,x_2] = f[x_1,x_2,x_0]$. В общия случай на база само на рекурентната връзка това трудно може да се покаже, затова ще го покажем като използваме изведеното досега.

Задача 3. Докажете, че разделената разлика не зависи от подредбата на възлите, т.е.

$$f[x_0,\dots,x_n] = f[x_{i_0}, x_{i_1},\dots,x_{i_n}],$$

където $i_0, i_1, \dots, i_n$ е произволна пермутация.

[1] Функционал е изображение, което приема функция и връща число. Пример за функционал е определеният интеграл. Линейният функционал F изпълнява условията $F(f+g) = F(f) + F(g)$ и $F(\lambda g) = \lambda F(g)$.

Доказателство. Тъй като разделената разлика от ред n съвпада с коефициента пред x^n, то, независимо от подредбата на възлите $x_0, \dots, x_n$, тя ще бъде едно и също число.
Забележка: Друг начин да се докаже последното е като се използва фактът, че разделената разлика е линейна комбинация на функционалните стойности, вж. (4.2). Това означава, че дори и да разместим местата на възлите в разделената разлика, линейната комбинация ще се запази. □

Задача 4. Да се докаже, че $(f+cg)[x_0, \dots, x_n] = f[x_0, \dots, x_n] + cg[x_0, \dots, x_n]$, където $c \in R$, а f и g са дадени функции.

Доказателство. За доказателството отново ще използваме (4.2), т.е. $f[x_0, \dots, x_n] = \sum_{k=0}^{n} \frac{f(x_k)}{\omega'(x_k)}$.
От последното имаме

$$(f+cg)[x_0, \dots, x_n] = \sum_{k=0}^{n} \frac{(f(x)+cg(x))\big|_{x=x_k}}{\omega'(x_k)} = \sum_{k=0}^{n} \frac{f(x_k)+cg(x_k)}{\omega'(x_k)}$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{f(x_k)}{\omega'(x_k)} + c\sum_{k=0}^{n} \frac{g(x_k)}{\omega'(x_k)} = f[x_0, \dots, x_n] + cg[x_0, \dots, x_n].$$

□

Вече показахме, че ако $f \in \pi_n$, то интерполационният полином на Лагранж за f съвпада с f. Интересно свойство имат и разделените разлики, когато функцията, която интерполираме, е полином:

- Ако $f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n \in \pi_n$, то $f[x_0, \dots, x_n] = a_n$;
- Ако $f \in \pi_{n-1}$, то $f[x_0, \dots, x_n] = 0$.

Задача 5. Да се докаже, че $\sum_{k=0}^{n} \frac{\omega''(x_k)}{\omega'(x_k)} = 0$.

Доказателство. За доказателството ще използваме формула (4.1). След като я приложим за функцията $f(x) = \omega''(x)$ получаваме:

$$f[x_0, \dots, x_n] = \sum_{k=0}^{n} \frac{\omega''(x_k)}{\omega'(x_k)}.$$

Тъй като $f(x) = \omega''(x)$ е от степен $n-1$ ($\omega(x)$ е от степен $n+1$), то разделената разлика е равна на 0, откъдето следва и исканото тъждество. □

Задача 6. Нека $x_k \neq 0, -1$ за $k = 1, \dots, n$. Докажете равенството

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k^n f\left(\dfrac{1}{x_k}\right)}{f'(x_k)(1+x_k)} = (-1)^n \left(x_1 x_2 \dots x_n - 1\right),$$

където $f(x) = (x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)$.

Доказателство. Нека означим $x_{n+1} = -1$ и $\omega(x) = (x-x_1)\dots(x-x_n)(x-x_{n+1})$. Ще докажем твърдението поетапно.

(a) Да разгледаме функцията $g(x) = x^n f\left(\dfrac{1}{x}\right)$, чиято стойност в т. x_k е равна на числителя. Имаме:

$$\begin{aligned}g(x) &= x^n\left(\frac{1}{x}-x_1\right)\left(\frac{1}{x}-x_2\right)\dots\left(\frac{1}{x}-x_n\right)\\ &= \cancel{x}^n\frac{(1-x_1x)}{\cancel{x}}\frac{(1-x_2x)}{\cancel{x}}\dots\frac{(1-x_nx)}{\cancel{x}} = \left((-1)^n x_1\dots x_n\right)x^n+\dots\end{aligned}$$

Следователно

$$g[x_1,\dots,x_{n+1}] = (-1)^n x_1\dots x_n \tag{4.3}$$

(б) Ще покажем, че знаменателят в сумата е равен на $\omega'(x_k)$. Да припомним първо, че

$$f'(x_k) = (x_k-x_1)(x_k-x_2)\dots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\dots(x_k-x_n). \tag{4.4}$$

От друга страна,

$$\omega'(x_k) = (x_k-x_1)(x_k-x_2)\dots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\dots(x_k-x_n)(x_k-x_{n+1}). \tag{4.5}$$

От (4.4) и (4.5) следва, че

$$\omega'(x_k) = (x_k-x_{n+1})f'(x_k) = (x_k+1)f'(x_k).$$

След като заместим полученото дотук в търсената сума от условието, получаваме

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k^n f\left(1/x_k\right)}{f'(x_k)(1+x_k)} = \sum_{k=1}^{n}\frac{g(x_k)}{\omega'(x_k)}.$$

За функцията g обаче намерихме разделената разлика от n-ти ред, вж. (а), и следователно ще изразим дясната страна в последното равенство чрез $g[x_1,\dots,x_{n+1}]$. Използваме (4.1):

$$\begin{aligned}g[x_1,\dots,x_{n+1}] &= \sum_{k=1}^{n+1}\frac{g(x_k)}{\omega'(x_k)} = \sum_{k=1}^{n}\frac{g(x_k)}{\omega'(x_k)} + \frac{g(x_{n+1})}{\omega'(x_{n+1})}\\ \iff \sum_{k=1}^{n}\frac{g(x_k)}{\omega'(x_k)} &= g[x_1,\dots,x_{n+1}] - \frac{g(x_{n+1})}{\omega'(x_{n+1})}.\end{aligned} \tag{4.6}$$

Остана да определим последните два члена.

- $g[x_1,\dots,x_{n+1}] =$ коефициента пред $x^n = (-1)^n x_1x_2\dots x_n$;
- $\dfrac{g(x_{n+1})}{\omega'(x_{n+1})} = \dfrac{g(-1)}{\omega'(-1)} = \dfrac{(-1)^n(-1-x_1)(-1-x_2)\dots(-1-x_n)}{(-1-x_1)(-1-x_2)\dots(-1-x_n)} = (-1)^n.$

Заместваме последното в (4.6) и получаваме исканото тъждество. □

- Формула на Лагранж

  Базисните полиноми на Лагранж зависят само от възлите на интерполация. Следователно, ако искаме да решим интерполационната задача с едни и същи възли, но различни съответстващи им стойности, можем да построим базисните полиноми само веднъж. Тогава в линейната комбинация на базисните полиноми ще променяме само коефициентите – $f(x_i)$.

- Формула на Нютон

  Ако искаме да построим редица от интерполационните полиноми $L_1(f;x), L_2(f;x),\dots,$ както следва – $L_1(f;x)$ интерполира f в точките x_0, x_1, $L_2(f;x)$ интерполира f в точките x_0, x_1, x_2 и т.н., то е удобно да използваме формулата на Нютон. Тъй като за всеки нов полином добавяме по един възел, само ще трябва да допълним таблицата с разделени разлики и да прибавим съответния член към построения преди това полином. Ако сменим функционалните стойности обаче, ще трябва да пресметнем всички разделени разлики отначало!

Упражнение 5

Крайни разлики

В предишното упражнение разгледахме една нова формула за намиране на интерполационния полином на Лагранж – формулата на Нютон. Полиномът във формата на Нютон има следния вид:

$$L_n(f;x) = f[x_0]+f[x_0,x_1](x-x_0)+f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1)+\cdots+f[x_0,\ldots,x_n](x-x_0)\ldots(x-x_{n-1}).$$

Както казахме, той се търси като линейна комбинация на базисните функции

$$1,\ x-x_0,\ (x-x_0)(x-x_1),\ (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2),\ldots,(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1}),$$

като коефициентите в полинома са така наречените разделени разлики, които можем лесно да пресметнем, използвайки следната схема:

x	$f(x)$	First divided differences	Second divided differences	Third divided differences
x_0	$f[x_0]$			
		$f[x_0,x_1]=\dfrac{f[x_1]-f[x_0]}{x_1-x_0}$		
x_1	$f[x_1]$		$f[x_0,x_1,x_2]=\dfrac{f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_0}$	
		$f[x_1,x_2]=\dfrac{f[x_2]-f[x_1]}{x_2-x_1}$		$f[x_0,x_1,x_2,x_3]=\dfrac{f[x_1,x_2,x_3]-f[x_0,x_1,x_2]}{x_3-x_0}$
x_2	$f[x_2]$		$f[x_1,x_2,x_3]=\dfrac{f[x_2,x_3]-f[x_1,x_2]}{x_3-x_1}$	
		$f[x_2,x_3]=\dfrac{f[x_3]-f[x_2]}{x_3-x_2}$		$f[x_1,x_2,x_3,x_4]=\dfrac{f[x_2,x_3,x_4]-f[x_1,x_2,x_3]}{x_4-x_1}$
x_3	$f[x_3]$		$f[x_2,x_3,x_4]=\dfrac{f[x_3,x_4]-f[x_2,x_3]}{x_4-x_2}$	
		$f[x_3,x_4]=\dfrac{f[x_4]-f[x_3]}{x_4-x_3}$		$f[x_2,x_3,x_4,x_5]=\dfrac{f[x_3,x_4,x_5]-f[x_2,x_3,x_4]}{x_5-x_2}$
x_4	$f[x_4]$		$f[x_3,x_4,x_5]=\dfrac{f[x_4,x_5]-f[x_3,x_4]}{x_5-x_3}$	
		$f[x_4,x_5]=\dfrac{f[x_5]-f[x_4]}{x_5-x_4}$		
x_5	$f[x_5]$			

И така, всяка разделена разлика от вида $f[x_i,\ldots,x_j]$ съдържа в знаменателя си разликата x_j-x_i. Нека сега изберем възлите x_i да са равноотдалечени, т.е. всеки два последователни възела да бъдат на разстояние h (още ще го наричаме стъпка), т.е. $x_1=x_0+h$, $x_2=x_1+h,\ldots$ или, иначе казано, $x_i=x_0+ih,\ i=1,2,\ldots,n$. В този случай знаменателят в разделената разлика ще бъде един и същ за всяка разделена разлика от нашата таблица. Оказва се, че в случая на равноотдалечени възли е удобно знаменателите да се пропуснат и може да се изведе формула за интерполационния полином на база на така наречените **крайни разлики**.

Определение 2. Нека е дадена крайна редица от числа $f_0,f_1,f_2,\ldots,$ които са стойности на функцията f в точките $x_0,\ x_1,\ x_2,\ldots.$ Крайна разлика от k-ти ред за функцията f в точката x_i ще бележим с $\Delta^k f_i$ и дефинираме рекурентно

$$\Delta^k f_i=\Delta^{k-1}f_{i+1}-\Delta^{k-1}f_i,\ k=1,2,\ldots,$$

като $\Delta^0 f_i=f_i,\forall i.$

Нека отново разгледаме кратък пример.

Пример 2. Дадена е редицата от стойности $f_0 = 1,\ f_1 = 3,\ f_2 = -1,\ f_3 = 7$. Намерете $\Delta^2 f_1$ и $\Delta^3 f_0$.

Решение. Да пресметнем двете крайни разлики поотделно. Използваме рекурентната връзка и заместваме, като всеки път понижаваме реда на крайната разлика:

$$\Delta^2 f_1 = \Delta^1 f_2 - \Delta^1 f_1 = (f_3 - f_2) - (f_2 - f_1) = f_3 - 2f_2 + f_1 = 7 + 2 + 3 = 12;$$

$$\begin{aligned}\Delta^3 f_0 &= \Delta^2 f_1 - \Delta^2 f_0 = \left(\Delta^1 f_2 - \Delta^1 f_1\right) - \left(\Delta^1 f_1 - \Delta^1 f_0\right) = \Delta^1 f_2 - 2\Delta^1 f_1 + \Delta^1 f_0 \\ &= (f_3 - f_2) - 2(f_2 - f_1) + (f_1 - f_0) = f_3 - 3f_2 + 3f_1 - f_0 \\ &= 7 + 3 + 9 - 1 = 18.\end{aligned}$$

□

След малко ще покажем, че в интерполационната формула с равноотдалечени възли участват крайни разлики $\Delta^k f_0$ и тях ще намираме като използваме познатата ни, но модифицирана таблица:

Възли	Ред 0	Ред 1	Ред 2	...
x_0	$\Delta^0 f_0 = f(x_0)$			
		$\Delta^1 f_0 = \Delta^0 f_1 - \Delta^0 f_0$		
x_1	$\Delta^0 f_1 = f(x_1)$		$\Delta^2 f_0 = \Delta^1 f_1 - \Delta^1 f_0$	
		$\Delta^1 f_1 = \Delta^0 f_2 - \Delta^0 f_1$		...
x_2	$\Delta^0 f_2 = f(x_2)$		$\Delta^2 f_1 = \Delta^1 f_2 - \Delta^1 f_1$	
		$\Delta^1 f_2 = \Delta^0 f_2 - \Delta^0 f_1$		
x_3	$\Delta^0 f_3 = f(x_3)$			
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	

Да обърнем внимание, че

- неслучайно със символа Δ се означава крайна разлика. На езика на математиката, той често се използва като синоним на думата „изменение";
- за да се пресметне $\Delta^k f_i$, се пресмята линейна комбинация на стойностите f_i, f_{i+1}, $\dots$, f_{i+k}, т.е. линейна комбинация на f_i и следващите k на брой стойности на f (да забележим, че коефициентите в горните примери са точно биномни коефициенти, т.е. коефициентите в развитието на Нютоновия бином, с редуващи се знаци).

Нека разгледаме някои важни свойства на крайната разлика, след което ще изведем интерполационния полином на Лагранж в случая на равноотдалечени възли. Преди ще припомним една важна лема, доказана на лекции.

Лема. Нека $x_i = x_0 + ih,\ i = 0, \dots, k$ и функцията $f(x)$ е определена в тези точки. Тогава

$$f[x_0, \dots, x_k] = \frac{\Delta^k f_0}{k!h^k}.$$

Доказателството на последната лема е непосредствено, като се използва индукция по броя на точките.

Последната лема ни дава връзка между разделената разлика от k-ти ред и крайната разлика от същия ред, взета в т. x_0. Чрез последната връзка част от свойствата на разделената разлика се пренасят върху крайната:

- Крайната разлика е линеен функционал, т.е. $\Delta^n (f + cg)_i = \Delta^n f_i + c\Delta^n g_i$;
- Ако $f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n \in \pi_n$, то $\Delta^n f_0 = n!h^n a_n$;
- Крайната разлика от n-ти ред е нула за всяка функция $f \in \pi_{n-1}$.

Нека сега разгледаме една аналитична формула за пресмятането на произволна крайна разлика от n-ти ред за функцията f, взета в т. x_i.

Задача 7. Да се докаже, че $\Delta^k f_i = \sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}\binom{k}{j}f_{i+j}$.

Доказателство. Искаме да покажем, че крайната разлика от n-ти ред се представя във вида

$$\Delta^k f_i = (-1)^k\binom{k}{0}f_i + (-1)^{k-1}\binom{k}{1}f_{i+1} + \cdots - \binom{k}{k-1}f_{i+k-1} + \binom{k}{k}f_{i+k},$$

т.е. да покажем, че коефициентите в линейната комбинация пред стойностите $f_i, \ldots, f_{i+k}$ се определят еднозначно с горната формула. Ще използваме индукция по реда на крайната разлика, както и тъждеството

$$\binom{n}{k+1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1}. \tag{5.1}$$

База на индукцията. Проверяваме дали твърдението е изпълнено за $k = 1:$

$$\Delta^1 f_i = f_{i+1} - f_i = (-1)^1\binom{1}{0}f_i + (-1)^0\binom{1}{1}f_{i+1}.$$

Индукционна стъпка. Нека допуснем, че твърдението е вярно за някое n, т.е. е в сила

$$\Delta^n f_i = \sum_{j=0}^{n}(-1)^{n-j}\binom{n}{j}f_{i+j}.$$

Ще покажем, че то е в сила и за $k = n+1$, т.е. е изпълнено

$$\begin{aligned}\Delta^{n+1} f_i &= \sum_{j=0}^{n+1}(-1)^{n+1-j}\binom{n+1}{j}f_{i+j}\\ &= (-1)^{n+1}\underbrace{\binom{n+1}{0}}_{1}f_i + (-1)^n\binom{n+1}{1}f_{i+1} + \cdots - \binom{n+1}{n}f_{i+n} + \underbrace{\binom{n+1}{n+1}}_{1}f_{i+n+1}.\end{aligned}$$

Имаме

$$\begin{aligned}\Delta^{n+1} f_i =&\Delta^n f_{i+1} - \Delta^n f_i = \sum_{j=0}^{n}(-1)^{n-j}\binom{n}{j}f_{i+j+1} - \sum_{j=0}^{n}(-1)^{n-j}\binom{n}{j}f_{i+j}\\ =&\left((-1)^n\binom{n}{0}f_{i+1} + (-1)^{n-1}\binom{n}{1}f_{i+2} + \cdots + \binom{n}{n-2}f_{i+n-1} - \binom{n}{n-1}f_{i+n} + \binom{n}{n}f_{i+n+1}\right)\\ &-\left((-1)^n\binom{n}{0}f_i + (-1)^{n-1}\binom{n}{1}f_{i+1} + \cdots + \binom{n}{n-2}f_{i+n-2} - \binom{n}{n-1}f_{i+n-1} + \binom{n}{n}f_{i+n}\right).\end{aligned}$$

Групираме членовете и получаваме, че последното е равно на

$$\begin{aligned}(-1)^{n+1}\binom{n}{0}f_i + (-1)^n\left\{\binom{n}{0} + \binom{n}{1}\right\}f_{i+1} + \cdots + \left\{\binom{n}{n-1} + \binom{n}{n-2}\right\}f_{i+n-1}\\ - \left\{\binom{n}{n} + \binom{n}{n-1}\right\}f_{i+n} + \binom{n}{n}f_{i+n+1}.\end{aligned}$$

Накрая, използвайки (5.1), имаме

$$\Delta^{n+1} f_i =(-1)^{n+1}\binom{n}{0}f_i + (-1)^n\binom{n+1}{1}f_{i+1} + \cdots + \binom{n+1}{n-1}f_{i+n-1} - \binom{n+1}{n}f_{i+n} + \binom{n}{n}f_{i+n+1}.$$

Тъй като $\binom{n}{0} = \binom{n+1}{0} = 1$ и $\binom{n}{n} = \binom{n+1}{n+1} = 1$, то

$$\Delta^{n+1} f_i = (-1)^{n+1} \binom{n+1}{0} f_i + \dots + \binom{n+1}{n-1} f_{i+n-1} - \binom{n+1}{n} f_{i+n} + \binom{n+1}{n+1} f_{i+n+1}\ .$$

$\square$

Следствие 1. За всяко естествено число n е в сила формулата

$$\Delta^n f_0 = \sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} \binom{n}{j} f_j.$$

Последната задача ни дава формула, по която можем да пресметнем всяка крайна разлика от произволен ред, взета за съответните възли.

Задача 8. Пресметнете крайните разлики в пример 5, като използвате аналитичната формула.

Да обобщим накратко какво се случи дотук:

- В случая на равноотдалечени възли, т.е. $x_i = x_0 + ih,\ \ i = 1, 2, \dots, n$, разделените разлики във формулата на Нютон имат един и същ знаменател. Въведохме понятието крайна разлика;

- Връзката между разделена и крайна разлика се задава с тъждеството

$$f[x_0, \dots, x_k] = \frac{\Delta^k f_0}{k! h^k};$$

- За крайната разлика от n-ти ред е в сила

$$\Delta^n f_0 = \sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} \binom{n}{j} f_j.$$

За да направим връзка между интерполационната формула и крайната разлика, ще заместим разделената разлика в интерполационния полином във форма на Нютон, с еквивалентния ѝ израз, който получихме:

$$\begin{aligned} L_n(f;x) &= \sum_{k=0}^{n} f[x_0, \dots, x_k](x - x_0) \dots (x - x_{k-1}) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\Delta^k f_0}{k! h^k} (x - x_0) \dots (x - x_{k-1}) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{\Delta^k f_0}{k! h^k} (x - x_0)(x - x_0 - h)(x - x_0 - 2h) \dots (x - x_0 - (k-2)h)(x - x_0 - (k-1)h). \end{aligned}$$

Тъй като навсякъде изразът $x - x_0$ се повтаря, ще го положим да бъде равно на th. Последното полагане избираме, за да можем да изнесем коефициент h от всяка една от скобите в сумата. Заместваме полагането:

$$\begin{aligned} L_n(f;x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{\Delta^k f_0}{k! h^k} (th)(th - h)(th - 2h) \dots (th - (k-2)h)(th - (k-1)h) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{\Delta^k f_0}{k! \cancel{h^k}} \cancel{h^k} t(t-1)(t-2) \dots (t-k+2)(t-k+1). \end{aligned}$$

И така, за полагането $x - x_0 = th$ или еквивалентно $x = x_0 + th$, получихме

$$L_n(f;x) = L_n(f; x_0 + th) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\Delta^k f_0}{k!} t(t-1)(t-2) \dots (t-k+2)(t-k+1).$$

В литературата означението $\binom{t}{k}$ се среща при произволни реални стойности на параметъра t. С него се означава биномната функция, която се определя от равенството

$$\binom{t}{k} := \begin{cases} \dfrac{t(t-1)\dots(t-k+1)}{k!}, & k>0, \\ 1, & k=0. \end{cases}$$

Неформално, можем да си мислим за горната формула като $\dfrac{t!}{k!(t-k)!}$. От последното следва, че интерполационният полином може да се запише като

$$L_n(f;x_0+th) = \sum_{k=0}^{n} \Delta^k f_0 \binom{t}{k}.$$

Последната формула се нарича **формула на Нютон за интерполиране напред**.

Нека сега използваме горната формула, за да определим интерполационния полином за дадени равноотдалечени възли и стойности.

Задача 9. Определете стойността на $\sin 52°$, като построите интерполационния полином за таблицата

$\alpha°$	45	50	55	60
$\sin\alpha$	0.7071	0.7660	0.8192	0.8660

и използвате формулата на Нютон за интерполиране напред.

Решение. Търсим полинома във вида

$$L_3(f;x_0+th) = \sum_{k=0}^{3} \Delta^k f_0 \binom{t}{k} = \Delta^0 f_0 \binom{t}{0} + \Delta^1 f_0 \binom{t}{1} + \Delta^2 f_0 \binom{t}{2} + \Delta^3 f_0 \binom{t}{3}.$$

Да обърнем внимание, че полиномът се представя по степените на независимата променлива t чрез полиномите

$$\binom{t}{0} = 1, \quad \binom{t}{1} = t, \quad \binom{t}{2} = \frac{t(t-1)}{2!}, \quad \binom{t}{3} = \frac{t(t-1)(t-2)}{3!},$$

т.е. наистина търсеният полином е от степен 3.

Да построим таблицата с крайни разлики

Възли	Ред 0	Ред 1	Ред 2	Ред 3
$x_0 = 45$	$\Delta^0 f_0 = 0.7071$			
		$\Delta^1 f_0 = 0.7660 - 0.7071 = 0.0589$		
$x_1 = 50$	$\Delta^0 f_1 = 0.7660$		$\Delta^2 f_0 = -0.0057$	
		$\Delta^1 f_1 = 0.8192 - 0.7660 = 0.0532$		$\Delta^3 f_0 = -0.0007$
$x_2 = 55$	$\Delta^0 f_2 = 0.8192$		$\Delta^2 f_1 = -0.0064$	
		$\Delta^1 f_2 = 0.8660 - 0.8192 = 0.0468$		
$x_3 = 60$	$\Delta^0 f_3 = 0.8660$			

Заместваме полученото в интерполационната формула:

$$L_3(f;x_0+th) = 0.7071 + 0.0589t - 0.0057\frac{t(t-1)}{2} - 0.0007\frac{t(t-1)(t-2)}{6}.$$

Търсим стойността на полинома в точката $x = 52$. Нашата формула обаче е израз на независимата променлива t, която можем да определим като използваме връзката

$t = \dfrac{x - x_0}{h}$. Заместваме $x = 52, h = 5$ и $x_0 = 45$ във формулата за t и получаваме $t = \dfrac{7}{5}$. Следователно

$$L_3(f;52) = \left(0.7071 + 0.0589t - 0.0057\frac{(t-1)}{2} - 0.0007\frac{t(t-1)(t-2)}{6}\right)\Bigg|_{t=\frac{7}{5}} = 0.788003.$$

□

По подобен начин може да се изведе и формулата за интерполиране назад (вж. лекции). Тя се извежда, като се използва формулата на Нютон, приложена за възлите x_n, x_{n-1}, $x_{n-2}, \ldots$, x_0 (взети в тази последователност), т.е.

$$L_n(f;x) = \sum_{k=0}^{n} f[x_n, x_{n-1} \ldots, x_{n-k}](x - x_n)\ldots(x - x_{n-k+1}).$$

След аналогична смяна $x = x_n + th$ се получава **формулата на Нютон за интерполиране назад**

$$L_n(f;x_n + th) = \sum_{k=0}^{n} \Delta^k f_{n-k}\binom{t+k-1}{k}.$$

За намирането на полинома по горната формула се използва същата таблица с крайни разлики, като коефициентите се намират на последния ред във всеки един от нейните стълбове.

Задача 10. Решете задача 9, като използвате формулата на Нютон за интерполиране назад.

Разбира се, всички разглеждани до момента формули намират един и същи полином, ако им зададем конкретни възли и стойности. Разликата между формулите за интерполиране напред и интерполиране назад обаче се вижда в следния случай. Нека са ни дадени например 50 равноотдалечени възела $x_0, \ldots, x_{49}$ и съответстващи стойности на дадена функция f в тези точки. Нека построим редица от интерполационни полиноми по формулата за интерполиране напред. Тогава полиномът от първа степен ще интерполира f в точките x_0, x_1; полиномът от втора степен – в точките x_0, x_1, x_2 и т.н. Ако използваме формулата за интерполиране назад, полиномът от първа степен ще използва възли x_n, x_{n-1}; полиномът от втора – възлите x_n, x_{n-1}, x_{n-2} и т.н.

Ако искаме да пресметнем приближено стойността на f в дадена точка, често на практика се подхожда по следния начин. Построява се редица от интерполационни полиноми докато разликата на две съседни приближения стане достатъчно близка, т.е. по-малка от предварително зададен толеранс на грешката. Тогава можем да считаме, че сме намерили стойността с такава точност. Вземайки предвид казаното по-горе е ясно, че ако търсим стойността на f в точка близка до началото на интервала, за предпочитане е да използваме формулата с разлика напред и обратно, ако искаме да намерим стойността на f в точка близка до края на интервала – да използваме формулата с разлика назад.

Да отбележим отново, че формулите с крайни разлики имат следното предимство в сравнение с формулата с разделени разлики – за пресмятането на крайните разлики не се налага да се извършва деление, което е относително бавна и неточна операция в компютъра. Разбира се, недостатък е, че формулите са приложими само за равноотдалечени възли.

Задача 11. Нека $f_0, f_1, \ldots$ е произволна редица от числа, за които $\Delta^{n+1} f_i = 0$ за всяко $i = 0, 1, \ldots$ Докажете, че съществува единствен алгебричен полином $q(x)$ от степен n, за който $q(i) = f_i, i = 0, 1, \ldots, n, n+1, \ldots$

Доказателство. Нека $q(x) \in \pi_n$ е полиномът, който удовлетворява интерполационните условия $q(i) = f_i, i = \overline{0, n}$. Вече знаем, че последният е единствен. Ще покажем, че той удовлетворява и условията $q(i) = f_i, i > n$. За целта ще използваме принципа на математическата индукция. Нека допуснем, че $q(i) = f_i, i = 0, 1, \ldots, m$ за $m \geq n$. Ще покажем, че твърдението е изпълнено и за $m + 1$, т.е. $q(m + 1) = f_{m+1}$. Имаме

- $q(0) = f_0, \ldots, q(m) = f_m,\ m \geq n,$
- $\Delta^{n+1} f_i = 0,\ i = 0, 1, \ldots$ (по условие),
- $\Delta^{n+1} q(i) = 0\ (q \in \pi_n).$

От последните две следва, че $\Delta^{n+1} f_i = \Delta^{n+1} q(i)$. От друга страна, аналитичната формула от задача 7 за крайната разлика от $n + 1$-ви ред ни дава

$$\sum_{j=0}^{n+1} (-1)^{n+1-j} \binom{n+1}{j} f_{i+j} = \sum_{j=0}^{n+1} (-1)^{n+1-j} \binom{n+1}{j} q(i + j),\ \forall i.$$

Нека $i = m - n$. Тогава

$$\sum_{j=0}^{n+1} (-1)^{n+1-j} \binom{n+1}{j} f_{m-n+j} = \sum_{j=0}^{n+1} (-1)^{n+1-j} \binom{n+1}{j} q(m - n + j).$$

или, което е същото,

$$\sum_{j=0}^{n} (-1)^{n+1-j} \binom{n+1}{j} f_{m-n+j} + f_{m+1} = \sum_{j=0}^{n} (-1)^{n+1-j} \binom{n+1}{j} q(m - n + j) + q(m + 1).$$

Сега използвайки факта, че $f_i = q(i), i = m - n, ..., m$ следва, че $f_{m+1} = q(m + 1)$. □

Последната задача дава прост критерий да проверим дали дадени точки лежат върху права/парабола/крива от трета степен и т.н. Така например, ако крайните разлики от втори ред се нулират, то точките лежат върху права (коефициентите пред втората и по-високите степени в интерполационния полином ще бъдат нули).

Задача 12. Като се използват крайни разлики, да се намери сумата $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$.

Решение. За да намерим сумата, ще използваме доказаното в предишната задача. Нека означим $S_i = 0^2 + 1^2 + 2^2 + \cdots + i^2$. Разглеждаме редицата от числа $S_0, S_1, \ldots$ Да пресметнем последователно крайните разлики

$$\begin{aligned}
\Delta^1 S_i &= \Delta^0 S_{i+1} - \Delta^0 S_i = S_{i+1} - S_i = (i + 1)^2, \\
\Delta^2 S_i &= \Delta^1 S_{i+1} - \Delta^1 S_i = (i + 2)^2 - (i + 1)^2 = 2i + 3, \\
\Delta^3 S_i &= \Delta^2 S_{i+1} - \Delta^2 S_i = 2(i + 1) + 3 - (2i + 3) = 2, \\
\Delta^4 S_i &= \Delta^3 S_{i+1} - \Delta^3 S_i = 2 - 2 = 0,\ i = 0, 1, 2, \ldots.
\end{aligned}$$

Получихме, че за редицата от числа $S_0, S_1, \ldots$ е изпълнено $\Delta^4 S_i = 0$, $i = 0, 1, 2, \ldots$ Следователно съществува единствен полином $q \in \pi_3$, такъв че $q(i) = S_i,\ i = 0, 1, \ldots$ Последния можем да определим с интерполационната формула на Нютон за интерполиране напред

$$\begin{aligned}
q(t) &= \sum_{k=0}^{3} \Delta^k q_0 \binom{t}{k} = \sum_{k=0}^{3} \Delta^k S_0 \binom{t}{k} \\
&= \Delta^0 S_0 + \Delta^1 S_0 \frac{t}{1!} + \Delta^2 S_0 \frac{t(t-1)}{2!} + \Delta^3 S_0 \frac{t(t-1)(t-2)}{3!} \\
&= 0 + t + \frac{3}{2} t(t-1) + \frac{2}{6} t(t-1)(t-2) = \frac{t(t+1)(2t+1)}{6}.
\end{aligned}$$

Следователно търсената сума е

$$0^2 + 1^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

□

Задача 13. Като се използват крайни разлики, да се намери сумата $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3$.

Упражнение 6

Интерполационна задача на Ермит. Разделени разлики с кратни възли

Дотук разгледахме задачата на Лагранж, при която по дадена таблица от стойности намерихме алгебричен полином от π_n, чиято графика минава през съответните точки. В практиката често възникват задачи за приближаване на дадена функция f по зададени условия (информация за стойностите на функцията и нейните производни в дадени точки). Например интересен пример е полиномът на Тейлър, $T_n(x)$, който приближава (апроксимира) дадена функция, като използва една централна точка a, в която знаем стойността на функцията f и нейните производни:

$$T_n(x) = f(a) + f'(a)\frac{(x-a)}{1!} + f''(a)\frac{(x-a)^2}{2!} + \cdots + f^{(n)}(a)\frac{(x-a)^n}{n!}.$$

Да забележим, че $T_n(a) = f(a),\ T_n'(a) = f'(a),\ \ldots,\ T_n^{(n)}(a) = f^{(n)}(a)$. Последното означава, че полиномът на Тейлър интерполира функцията заедно с производните ѝ до n-ти ред, включително, взети в точката a.

Бихме могли да си зададем следния въпрос. Можем ли за произволна таблица от $n+1$ стойности на функция f и нейни производни от произволен ред да построим единствен полином от степен, ненадминаваща n? Въпросът какви условия трябва да изпълнява таблицата от стойности, за да се определи единственият полином, който я интерполира, все още няма отговор. Съществуват, разбира се, частни случаи, за които единственост на решението е доказана. Най-важният в практиката случай (след задачата на Лагранж) е задачата на Ермит.

Постановка на интерполационната задача на Ермит. Нека са дадени $n+1$ различни точки $x_0, \ldots, x_n$, съответни на тях цели положителни числа $\nu_0, \ldots, \nu_n$ (още се наричат кратности) и таблица от стойности на функцията f и нейните производни

$$\begin{aligned}
x_0 :&\quad f(x_0), f'(x_0), \ldots, f^{(\nu_0-1)}(x_0),\\
x_1 :&\quad f(x_1), f'(x_1), \ldots, f^{(\nu_1-1)}(x_1),\\
&\quad\vdots\\
x_n :&\quad f(x_n), f'(x_n), \ldots, f^{(\nu_n-1)}(x_n).
\end{aligned}$$

Да се намери полином, който интерполира функцията f и съответните ѝ производни във възлите $x_0, \ldots, x_n$.

$\square$

Последните задават общо $\nu_0 + \nu_1 + \cdots + \nu_n$ интерполационни условия. Нека $N = \nu_0 + \nu_1 + \cdots + \nu_n - 1$. Тогава задачата на Ермит може да се обобщи така – да се намери полиномът $H_N \in \pi_N$, който удовлетворява условията

$$H_N^{(\lambda)}(x_k) = f^{(\lambda)}(x_k),\ k = 0, \ldots, n,\ \lambda = 0, \ldots, \nu_k - 1.$$

Да отбележим, че интерполирането на производните позволява по-добре да се контролира поведението на полинома, например да има същата кривина като оригиналната функция и др.

Забележка: В учебника на Б.Боянов се използва означението $y_{k\lambda} = f^{(\lambda)}(x_k)$, т.е. търси се полином $P(x)$, който удовлетворява

$$P^{(\lambda)}(x_k) = y_{k\lambda}.$$

Интересно

Полиномът на Ермит се означава с $H_N(f;x)$ в чест на Чарлз Ермит (Charles Hermite). Ермит (1822-1901) има значителни открития в областта на комплексния анализ, в частност теория на уравненията. Един от неговите приноси в областта на математиката е, че през 1873 г. е доказал, че числото e е трансцедентно, т.е. че не е корен на нито едно алгебрично уравнение с цели коефициенти. Вследствие на това, през 1882 г. същото е доказано и за числото π.

Теорема 2. При всеки избор на интерполационните възли $\{x_k\}_0^n$ ($x_i \neq x_j$ при $i \neq j$) и при всяка таблица от стойности $y_{k\lambda}$ интерполационната задача на Ермит има единствено решение.

Нека сега се спрем на въпроса за построяването на решението на интерполационната задача. Както при тази на Лагранж, решението на задачата на Ермит може да бъде намерено по различни начини. Съществува аналогична формула на тази на Лагранж, както и обобщение на формулата на Нютон с разделени разлики, които ще разгледаме последователно.

Интерполационна формула във вид на Лагранж

Ще разгледаме формулата в един частен случай, при който $\nu_0 = \nu_1 = \cdots = \nu_n = 2$. Да припомним задачата. Търсим полинома на Ермит от степен $2n+1$ (за всеки възел имаме 2 условия – за стойността на функцията и първата ѝ производна, откъдето имаме общо $2(n+1)$ условия), който интерполира функцията и нейната производна във всяка от точките $x_0, \dots, x_n$. За целта да означим:

- стойността на функцията f в т. x_k с y_k;
- стойността на производната на f в т. x_k с y'_k;

Теорема 3. Нека $x_0, \dots, x_n$ са произволни различни точки от реалната права. Тогава при всеки избор на числата $y_0, \dots, y_n$ и $y'_0, \dots, y'_n$ полиномът

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k \left\{1 - \frac{\omega''(x_k)}{\omega'(x_k)}(x - x_k)\right\} \left(\frac{\omega(x)}{(x-x_k)\omega'(x_k)}\right)^2 + \sum_{k=0}^{n} y'_k \left\{\frac{\omega(x)}{(x-x_k)\omega'(x_k)}\right\}^2 (x - x_k)$$

е от степен, ненадминаваща $2n+1$, и удовлетворява условията

$$P(x_k) = y_k,\ P'(x_k) = y'_k,\ k = 0, \dots, n.$$

Идея на доказателството. Аналогично на задачата на Лагранж, полиномът се търси във вида

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} \left(y_k H_{k0}(x) + y'_k H_{k1}(x)\right),$$

където $H_{k0},\ H_{k1} \in \pi_{2n+1}$ са базисните полиноми, удовлетворяващи интерполационните условия:

$$\begin{aligned} H_{k0}(x_i) &= \delta_{ki}, & H'_{k0}(x_i) &= 0, \\ H_{k1}(x_i) &= 0, & H'_{k1}(x_i) &= \delta_{ki}, \end{aligned}$$

$k = 0, \ldots, n, \quad i = 0, \ldots, n$. Символът δ_{ki} е познатият ни символ на Кронекер

$$\delta_{ki} = \begin{cases} 0, \text{ при } k \neq i, \\ 1, \text{ при } k = i. \end{cases}$$

С други думи, за всеки възел x_k отговарят два базисни полинома – H_{k0} за интерполационните условия за стойностите на функцията и H_{k1} за интерполационните условия за стойностите на производната ѝ. Аналитичният вид на базисните полиноми се намира от интерполационните условия, които изпълняват, като получаваме

$$H_{k0}(x) = \left\{1 - \frac{\omega''(x_k)}{\omega'(x_k)}(x - x_k)\right\} \underbrace{\left(\frac{\omega(x)}{(x - x_k)\omega'(x_k)}\right)^2}_{l_{kn}^2(x)} = \left\{1 - \frac{\omega''(x_k)}{\omega'(x_k)}(x - x_k)\right\} l_{kn}^2(x);$$

$$H_{k1}(x) = \left\{\frac{\omega(x)}{(x - x_k)\omega'(x_k)}\right\}^2 (x - x_k) = l_{kn}^2(x_k)(x - x_k).$$

□

В общия случай извеждането на явния вид на полинома е доста трудоемко, затова няма да се спираме на него тук. Сега ще разгледаме една задача, тясно свързана с горната теорема.

Задача 14. Нека $l_{kn}(x)$, $k = \overline{0, n}$ са базисните полиноми на Лагранж, съответни на възлите $x_0, \ldots, x_n$, и

$$\varphi_k(x) = \left(1 - \frac{\omega''(x_k)}{\omega'(x_k)}(x - x_k)\right) l_{kn}^2(x).$$

Докажете, че

$$\varphi_k'(x_k) = 0, k = \overline{0, n}.$$

Доказателство. Преди да докажем твърдението от условието на задачата, да обърнем внимание, че това е базисният полином $H_{k0}(x)$, който отговаря за интерполационните условия за стойностите на функцията. За него искаме да покажем, че производната му се нулира във всеки от възлите.

И така, имаме

$$\begin{aligned} \varphi_k'(x) &= \left(1 - \frac{\omega''(x_k)}{\omega'(x_k)}(x - x_k)\right)' l_{kn}^2(x) + \left(1 - \frac{\omega''(x_k)}{\omega'(x_k)}(x - x_k)\right) \left(l_{kn}^2(x)\right)' \\ &= -\frac{\omega''(x_k)}{\omega'(x_k)} l_{kn}^2(x) + \left(1 - \frac{\omega''(x_k)}{\omega'(x_k)}(x - x_k)\right) \left(2 l_{kn}(x) l_{kn}'(x)\right). \end{aligned}$$

Искаме да пресметнем $\varphi_k'(x_k)$. Полагаме $x = x_k$ в горната функция и заместваме $l_{kn}(x_k) = 1$. Имаме

$$\varphi_k'(x_k) = -\frac{\omega''(x_k)}{\omega'(x_k)} + 2 l_{kn}'(x_k). \tag{6.1}$$

Остава да пресметнем производната на базисния полином на Лагранж в точката x_k. За тази цел ще използваме представянето му

$$l_{kn}(x) = \frac{\omega(x)}{(x - x_k)\omega'(x_k)}.$$

Да пресметнем производната на последното.

$$l'_{kn}(x) = \frac{1}{\omega'(x_k)}\left(\frac{\omega(x)}{x-x_k}\right)'$$

$$\Rightarrow l'_{kn}(x_k) = \frac{1}{\omega'(x_k)}\left(\frac{\omega(x)}{x-x_k}\right)'\Bigg|_{x=x_k} = \frac{1}{\omega'(x_k)}\left(\frac{\omega'(x)(x-x_k)-\omega(x).1}{(x-x_k)^2}\right)\Bigg|_{x=x_k}$$

Формално горният израз не е дефиниран (ако заместим с $x = x_k$, ще получим частно $0/0$), той трябва да се интерпретира като граница при $x \to x_k$, т.е.

$$l'_{kn}(x_k) = \lim_{x\to x_k} l'_{kn}(x) = \lim_{x\to x_k}\left(\frac{\omega'(x)(x-x_k)-\omega(x)}{(x-x_k)^2}\right).$$

Имаме

$$\left(\frac{\omega'(x)(x-x_k)-\omega(x)}{(x-x_k)^2}\right)\Bigg|_{x=x_k} = \lim_{x\to x_k}\frac{\omega'(x)(x-x_k)-\omega(x)}{(x-x_k)^2}$$

$$\overset{L'H}{=} \lim_{x\to x_k}\frac{\omega''(x)(x-x_k)+\cancel{\omega'(x)}-\cancel{\omega'(x)}}{2(x-x_k)} = \frac{\omega''(x_k)}{2}.$$

От последното следва, че за базисния полином на Лагранж е в сила $l'_{kn}(x_k) = \dfrac{\omega''(x_k)}{2\omega'(x_k)}$.

Заместваме последното в (6.1) и получаваме търсеното равенство. □

Интерполационна формула във вид на Нютон

Оказва се, че можем да използваме обобщение на формулата на Нютон и за намиране на полинома на Ермит. В предишното упражнение въведохме понятието разделена разлика, като приехме, че точките са различни. При задачата на Ермит във всяка точка можем да налагаме по няколко условия. Оттук нататък ще приемаме, че ако напишем възлите x_0, x_0, x_1, x_1, x_1, то ще сме наложили условия за функцията и производната ѝ в x_0 (който е двукратен), функцията и първите две производни в x_1 (който е трикратен).

Искаме да обобщим понятието разделена разлика така, че да можем да го свържем с понятието производна. Нека дадем прост пример, като разгледаме производната от първи ред. Имаме

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} f[x, x_0] = f[x_0, x_0].$$

Ще постъпим аналогично, като разширим понятието разделена разлика по следния начин.

Определение 3. Нека f има непрекъснати производни до ред k включително в $[a, b]$. Разделена разлика от ред k за възлите $x_0 \le \cdots \le x_n$ дефинираме рекурентно

$$f[x_0,\dots,x_k] = \begin{cases} \dfrac{f[x_1,\dots,x_k]-f[x_0,\dots,x_{k-1}]}{x_k-x_0}, & \text{ако } x_0 < x_k,\\[2ex] \dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}, & \text{ако } x_0 = x_k.\end{cases}$$

Вече сме готови да се върнем на построяването на интерполационния полином. Нека са дадени възли $t_0 < \cdots < t_n$ и техни кратности $\nu_0, \dots, \nu_n$, заедно със стойността на функцията и съответните ѝ производни във всеки от тях. Нека $N+1$ е общият брой на интерполационни условия, т.е. $N = \nu_0 + \nu_1 + \cdots + \nu_n - 1$. Нека още

$$(x_0, \dots, x_N) = (\underbrace{t_0,\dots,t_0}_{\nu_0}, \underbrace{t_1,\dots,t_1}_{\nu_1}, \dots, \underbrace{t_n,\dots,t_n}_{\nu_n}).$$

Да обърнем внимание, че от последното следва, че $x_0 \le x_1 \le \cdots \le x_N$.

Теорема 4. За полинома на Ермит е в сила формулата

$$H_N(f;x) = \sum_{k=0}^{N} f[x_0,\dots,x_k](x-x_0)\dots(x-x_{k-1}).$$

С други думи, ако искаме да определим полинома на Ермит, ще използваме познатата ни формула на Нютон, като единствената разлика е в това, че сме обобщили понятието разделена разлика. Оказва се, че, така обобщена, тя е точно коефициентът пред x^N в съответния полином на Ермит. Да построим такъв полином.

Задача 15. Като използвате интерполационната формула на Нютон с разделени разлики с кратни възли, намерете интерполационния полином на Ермит, който удовлетворява условията

$$p(0) = -1,\ p'(0) = 1,\ p''(0) = 2,\ p(1) = 0,\ p'(1) = -1.$$

Представете полинома по степените на x.

Решение. В условието на задачата са ни дадени пет интерполационни условия, следователно търсим полинома $H_4(f;x) \in \pi_4$ с явен вид

$$H_4(f;x) = f[0]+f[0,0](x-0)+f[0,0,0](x-0)(x-0)+f[0,0,0,1](x-0)^3+f[0,0,0,1,1](x-0)^3(x-1).$$

И така, искаме да интерполираме таблицата

$x_0 = 0$	$x_1 = 0$	$x_2 = 0$	$x_3 = 1$	$x_4 = 1$
$f(0) = -1$	$f'(0) = 1$	$f''(0) = 2$	$f(1) = 0$	$f'(1) = -1$

Ще използваме познатата ни схема. За улеснение ще слагаме звезда на тези разделени разлики, които включват само кратни възли.

Възли	Ред 0	Ред 1	Ред 2	Ред 3	Ред 4
$x_0 = 0$	$f[x_0] = -1$				
		$f[x_0,x_1]^* = 1$			
$x_1 = 0$	$f[x_1] = -1$		$f[x_0,x_1,x_2]^* = 1$		
		$f[x_1,x_2]^* = 1$		$f[x_0,x_1,x_2,x_3] = -1$	
$x_2 = 0$	$f[x_2] = -1$		$f[x_1,x_2,x_3] = 0$		$f[x_0,\dots,x_4] = -1$
		$f[x_2,x_3] = 1$		$f[x_1,x_2,x_3,x_4] = -2$	
$x_3 = 1$	$f[x_3] = 0$		$f[x_2,x_3,x_4] = -2$		
		$f[x_3,x_4]^* = -1$			
$x_4 = 1$	$f[x_4] = 0$				

- Разделени разлики от първи ред:

$$f[x_0,x_1]^* = \frac{f'(x_0)}{1!} = \frac{f'(0)}{1!} = \frac{1}{1!} = 1; \qquad f[x_1,x_2]^* = \frac{f'(x_1)}{1!} = \frac{f'(0)}{1!} = \frac{1}{1!} = 1;$$

$$f[x_2,x_3] = \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2} = 1; \qquad f[x_3,x_4]^* = \frac{f'(x_3)}{1!} = \frac{f'(1)}{1!} = \frac{-1}{1!} = -1.$$

- Разделени разлики от втори ред:

$$f[x_0,x_1,x_2]^* = \frac{f''(x_0)}{2!} = \frac{f''(0)}{2!} = \frac{2}{2!} = 1; \qquad f[x_1,x_2,x_3] = \frac{f[x_2,x_3]-f[x_1,x_2]}{x_3-x_1} = 0;$$

$$f[x_2,x_3,x_4] = \frac{f[x_3,x_4]-f[x_2,x_3]}{x_4-x_2} = \frac{-1-1}{1-0} = -2.$$

- Разделени разлики от 3 и 4-ти ред:

$$f[x_0,x_1,x_2,x_3] = \frac{f[x_1,x_2,x_3]-f[x_0,x_1,x_2]}{x_3-x_0} = \frac{0-1}{1} = -1;$$
$$f[x_1,x_2,x_3,x_4] = \frac{f[x_2,x_3,x_4]-f[x_1,x_2,x_3]}{x_4-x_1} = \frac{-2-0}{1} = -2;$$
$$f[x_0,x_1,x_2,x_3,x_4] = \frac{f[x_1,x_2,x_3,x_4]-f[x_0,x_1,x_2,x_3]}{x_4-x_0} = \frac{-2-(-1)}{1-0} = -1.$$

Заместваме получените разделени разлики във формулата за полинома:

$$\begin{aligned} H_4(f;x) &= -1+1(x-0)+1(x-0)^2-1(x-0)^3-1(x-0)^3(x-1) \\ &= -1+x+x^2-x^3-x^4+x^3 = -x^4+x^2+x-1. \end{aligned}$$

□

Забележка: Важно е да отбележим, че интерполационната задача на Ермит включва условия за функцията и производните ѝ, като те се взимат в последователен ред. Така например, ако сменим условието на горната задача на

$$p(0)=-1,\ p''(0)=2,\ p(1)=0,\ p'(1)=-1,$$

то задачата вече не е интерполационна задача на Ермит, защото липсва условие за $p'(0)$. В общия случай не можем да твърдим съществуване и единственост на решението.

Задача 16. Намерете полинома, интерполиращ таблицата

0	0	0	1	2
-1	0	0	0	7

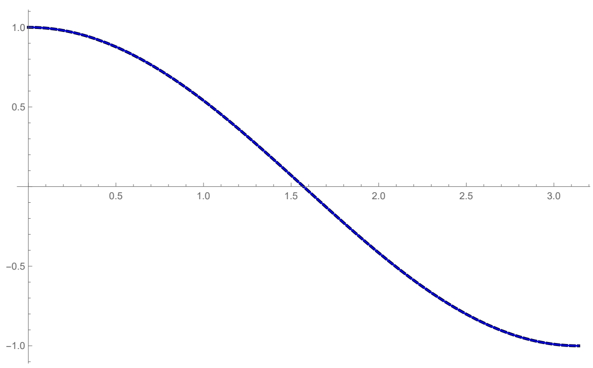
Оказва се, че за задачата на Ермит също може да се даде оценка на грешката, която правим при приближение $f(x) \approx H_N(f;x)$.

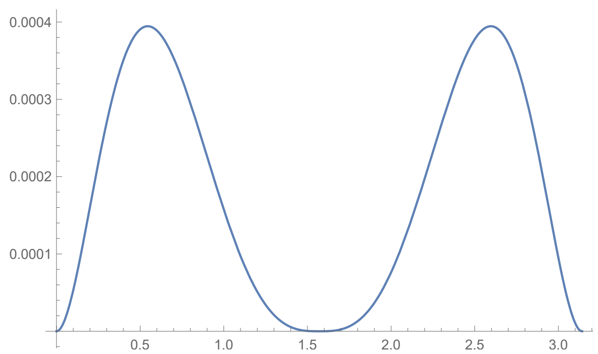
Теорема 5. Нека $a \le x_0 < \cdots < x_n \le b$ са дадени възли, $\{\nu_k\}_0^N$ са произволни цели положителни числа (техни кратности) и функцията f има непрекъсната $(N+1)-$ ва производна в $[a,b]$, където $N = \nu_0+\nu_1+\cdots+\nu_n-1$. Тогава за всяко $x \in [a,b]$, съществува число $\xi \in [a,b]$ такова, че

$$f(x)-H_N(f;x) = \frac{f^{(N+1)}(\xi)}{(N+1)!}(x-x_0)^{\nu_0}\dots(x-x_n)^{\nu_n}.$$

Задача 17. Нека $f(x)=\cos x$ и $H_5(f;x)$ интерполира f в точките $0, \dfrac{\pi}{2}, \pi$ с кратност равна на 2. Дайте оценка на грешката.

Забележка: На фигурата вляво може да видите графиките на $f(x)=\cos x$ (с черен пунктир) и на полинома $H_5(f;x)$ (в синьо), построени в една координатна система, а вдясно – графиката на грешката $|f(x)-H_5(f;x)|$.





От графиката на грешката се вижда, че в действителност тя не надминава 0.0004. А вие каква оценка на грешката получихте?

Упражнение 7

Системи на Чебишов. Интерполиране с тригонометрични полиноми

Дотук разгледахме задачата за приближаване на функция с алгебричен полином, който я интерполира в краен брой точки, т.е. търсихме функция от вида

$$a_0\varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x) + \cdots + a_n\varphi_n(x), \tag{7.1}$$

където $\varphi_i(x), i = \overline{0, n}$ образуват базис на пространството π_n. Да обърнем внимание, че освен стандартния базис $1, x, x^2, \ldots, x^n$, ние използвахме Лагранжевия базис $(l_0(x), \ldots, l_n(x))$ и Нютоновия базис $(1,\ x - x_0,\ (x - x_0)(x - x_1), \ldots, (x - x_0)\ldots(x - x_{n-1}))$. Тези базиси ни помагат лесно да определим неизвестните коефициенти в полинома. Естествено е изборът на функцията, с която апроксимираме, да зависи от процеса, който искаме да опишем. Например, ако имаме експериментални данни за някакъв периодичен процес, бихме искали да моделираме процеса с периодична функция; растежът на микроорганизми често има експоненциален характер и т.н.

И така, ако искаме да определим възможно най-добро приближение на дадена функция (в нашия случай чрез интерполация), в зависимост от процеса може да се наложи да работим с други базиси в някое друго крайномерно линейно пространство. Такива например са:

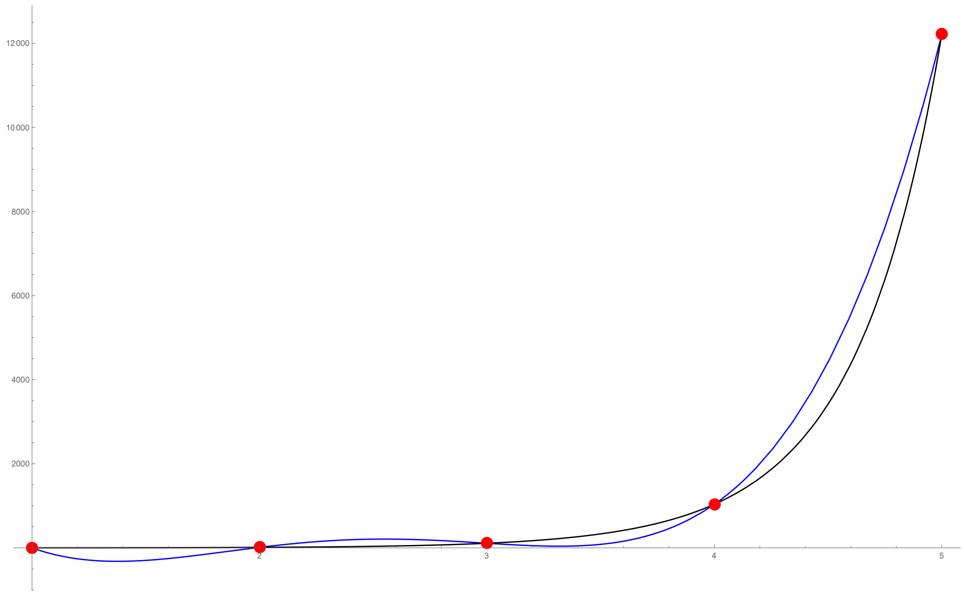
- Пространството от тригонометрични полиноми от ред n. Често използван базис на това пространство е

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \ldots, \cos nx, \sin nx;$$

- Пространството от експоненциални полиноми. Примерен негов базис е

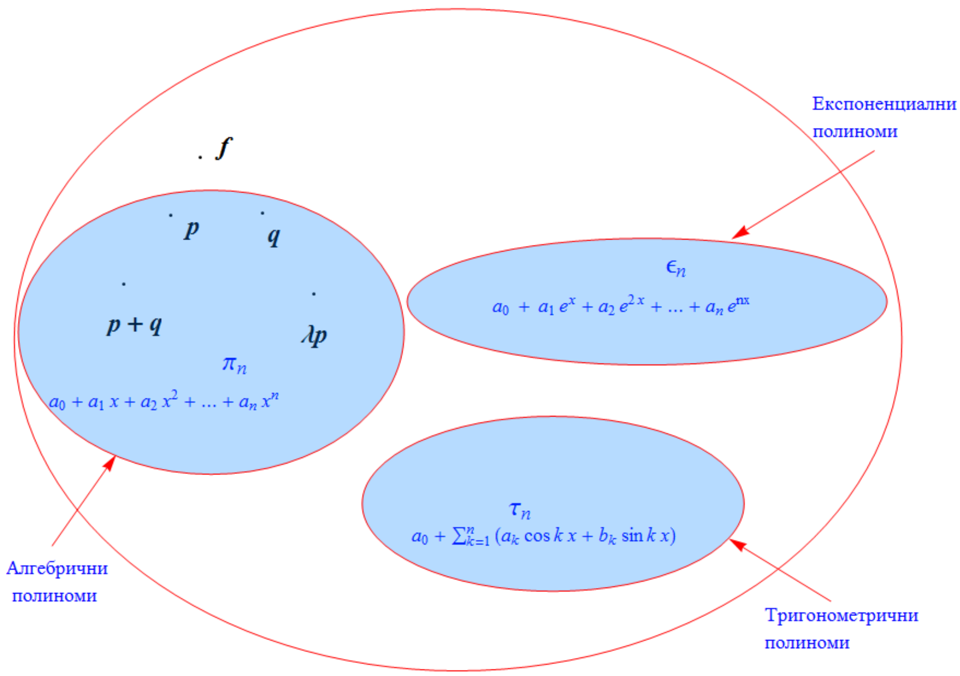
$$1, e^x, e^{2x}, \ldots, e^{nx}.$$

Едно от значенията на това по какъв базис се избира полиномът, който интерполира дадени данни (или функция) е илюстрирано със следващата фигура. В червено са дадени измервания за развитието на бактериална популация (време/брой клетки$\times$1000), в синьо е построеният съответно алгебричен полином, а в черно – полином по базиса $1, e^x, e^{2x}, e^{3x}, e^{4x}$.



От графиката можем да забележим, че в интервала $[1, 2]$ алгебричният полином има отрицателни стойности (което е недопустима стойност за брой клетки), докато експоненциалният полином е положителен за всяко x в интервала на интерполация.

Обикновено, когато искаме да намерим някакво приближение, го търсим в **крайномерно линейно пространство**. Причината за това е следната – всяко крайномерно пространство има краен брой базисни функции, а всяка функция от дадено линейно пространство може да се представи като линейна комбинация на базисните му функции. Така всяка функция от едно линейно крайномерно пространство може да се зададе като крайна линейна комбинация. С други думи, ако искаме да определим конкретна функция от крайномерно линейно пространство, то трябва да определим краен брой числа – нейните коефициенти в линейната комбинация.



Нека сега разгледаме задачата за намиране на интерполационен полином от произволно дадено крайномерно пространство.

Определение 4. Нека $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$ са дадени линейно независими и непрекъснати функции в $[a, b]$. Линейната комбинация

$$\varphi(x) = a_0\varphi_0(x) + \cdots + a_n\varphi_n(x)$$

ще наричаме *обобщен полином по системата от функции* $\{\varphi_i(x)\}_{i=0}^n$.

Обща интерполационна задача. Нека в $[a,b]$ са дадени възли $x_0 < \cdots < x_n$ и $y_0, \ldots, y_n$ са дадени стойности. Търсим обобщен полином $\varphi(x) = a_0\varphi_0(x) + \cdots + a_n\varphi_n(x)$, който да удовлетворява интерполационните условия

$$\varphi(x_k) = y_k, \quad k = 0, \ldots, n. \tag{7.2}$$

Последната задача може да се запише като линейна система по отношение на неизвестните коефициенти $a_0, \ldots, a_n$:

$$\begin{pmatrix} \varphi_0(x_0) & \varphi_1(x_0) & \ldots & \varphi_n(x_0) \\ \varphi_0(x_1) & \varphi_1(x_1) & \ldots & \varphi_n(x_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \varphi_0(x_n) & \varphi_1(x_n) & \ldots & \varphi_n(x_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Следователно интерполационната задача (7.2) има единствено решение тогава и само тогава, когато детерминантата на матрицата на системата е различна от 0. Матрицата на системата ще бележим с $D[x_0, \ldots, x_n]$. Оказва се, че единствеността на решението на общата интерполационна задача може да се покаже и по друг начин, като се използват така наречените *системи на Чебишов.*

Определение 5. Казваме, че функциите $\varphi_0(x), \ldots, \varphi_n(x)$ образуват **система на Чебишов** (в литературата още се среща като T-система) **в интервала** I, ако всеки **ненулев** обобщен полином по тази система има най-много n различни нули в I.

Да припомним, че ненулев полином означава, че поне един от коефициентите в представянето му (7.1) е различен от 0. И така, в сила е следната теорема.

Теорема 6. Функциите $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$ образуват система на Чебишов в интервала I тогава и само тогава, когато за **всеки избор** на точки $x_0 < \cdots < x_n$ от I

$$\det D[x_0, \ldots, x_n] \neq 0.$$

С други думи, последната теорема ни казва, че достатъчно условие общата интерполационна задача да има единствено решение е базисните функции на крайномерното пространство, в което търсим решение, да образуват система на Чебишов.

Пример 3. Най-простият пример за Чебишова система е алгебричната система, породена от функциите $\varphi_k(x) = x^k$. От основната теорема на алгебрата знаем, че всеки алгебричен полином

$$\varphi(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$$

има най-много n различни нули, което означава, че системата е Чебишова.

Задача 18. Да се докаже, че $\{x^{2k+1}\}_{k=0}^n$ образуват Чебишова система в произволен интервал $[\alpha, \beta]$, $0 < \alpha < \beta$.

Доказателство. Нека

$$\varphi(x) = a_0x + a_1x^3 + \cdots + a_nx^{2n+1}$$

е обобщен полином по тази система. Ще покажем, че той има не повече от n различни нули във всеки интервал $[\alpha, \beta]$, $0 < \alpha < \beta$, като го сведем чрез полагане до алгебрично уравнение от степен n. Да разгледаме уравнението

$$a_0x + a_1x^3 + \cdots + a_nx^{2n+1} = 0.$$

Тъй като $x = 0$ не е в интервала $[\alpha, \beta]$, то можем да разделим на x двете страни на уравнението:

$$a_0 + a_1x^2 + \cdots + a_nx^{2n} = 0. \tag{7.3}$$

Полагаме $y = x^2$, за да сведем горното уравнение до алгебрично уравнение от степен n:

$$a_0 + a_1 y + \cdots + a_n y^n = 0.$$

От основната теорема на алгебрата знаем, че това уравнение има най-много n различни корена. Тъй като $x = \pm\sqrt{y}$ има най-много едно положително решение (ако $y > 0$), то на всяко y се съпоставя най-много едно положително число x, което да принадлежи на $[\alpha, \beta]$. Така (7.3) има най-много n различни корена в съответния интервал, т.е. системата е Чебишова в съответния интервал.

Забележка: Да обърнем внимание, че интервалът, в който изследваме системата функции е от съществено значение. В този случай използвахме, че корените на уравнението трябва да са положителни. □

Нека сега разгледаме пример за една Чебишова система, в която ясно се вижда значението на интервала I.

Задача 19. Да се докаже, че $\{1, \cos x\}$ образуват Чебишова система в интервала $[0, \pi]$, но не и в интервала $[0, 2\pi]$.

Доказателство. Ще докажем, че обобщеният полином

$$\varphi(x) = a_0 + a_1 \cos x$$

има най-много една нула в интервала $[0, \pi]$. Да отбележим, че условието $a_1 = 0$ влече $a_0 = 0$, което означава, че $\varphi(x)$ в този случай е нулевият полином. Следователно ние се интересуваме от случая, в който $a_1 \neq 0$. От $a_0 + a_1 \cos x = 0 \Rightarrow \cos x = -\dfrac{a_0}{a_1}$. Тъй като в интервала $[0, \pi]$ е в сила $-1 \leq \cos x \leq 1$, то ако $-1 \leq -\dfrac{a_0}{a_1} \leq 1$ задачата ще има едно решение, а в противен случай – няма да има. С други думи, обобщеният полином по системата има най-много една нула, следователно системата е Чебишова.

Да разгледаме сега интервала $[0, 2\pi]$. Достатъчно е да покажем, че съществува полином, който има повече от 1 нула. Да разгледаме например полинома

$$\psi(x) = 0.1 + 1.\cos x = \cos x \quad (a_0 = 0,\ a_1 = 1).$$

Последният има два корена в интервала $[0, 2\pi]$: $\dfrac{\pi}{2}$ и $\dfrac{3\pi}{2}$, което означава, че системата не е Чебишова в този интервал. □

Нека сега дадем пример за еквивалентността на това интерполационната задача с обобщен полином по дадена система от функции да има единствено решение за произволен избор на възлите и това системата да е Чебишова.

Пример 4. Да се намери обобщен полином по базиса $\{1, \cos x\}$, който интерполира таблицата

x	0	2π
$\varphi(x)$	0	1

Решение. Коефициентите в обобщения полином $\varphi(x) = a_0.1 + a_1.\cos x$ ще намерим, като решим системата уравнения, получена от интерполационните условия

$$\left| \begin{aligned} &a_0.1 + a_1.1 = 0 \\ &a_0.1 + a_1.1 = 1 \end{aligned} \right.$$

Очевидно горната система няма решение.

Забележка: Ако стойността в $x = 2\pi$ беше 0, задачата щеше да има безброй много решения. Както виждаме, тъй като системата не е Чебишова в интервала $[0, 2\pi]$, то не може да се гарантира единствеността на решението на интерполационната задача. □

Да обърнем внимание, че една система може да не е Чебишова в даден интервал, но възлите могат да се изберат така, че въпреки това интерполационната задача да има единствено решение.

Задача 20. Нека функциите $\{\varphi_k(x)\}_0^n$ образуват система на Чебишов в $[a,b]$ и $\psi(x) > 0$ при $x \in [a,b]$. Да се докаже, че функциите $\{\psi(x)\varphi_k(x)\}_{k=0}^n$ също образуват система на Чебишов в $[a,b]$.

Доказателство. Да разгледаме системата от функции $\{\psi(x)\varphi_k(x)\}_0^n$. Произволен обобщен полином по последната система има вида

$$\Psi(x) = a_0\psi(x)\varphi_0(x) + \cdots + a_n\psi(x)\varphi_n(x).$$

Изнасяме $\psi(x)$ пред скоби и получаваме

$$\Psi(x) = \psi(x)\left(a_0\varphi_0(x) + \cdots + a_n\varphi_n(x)\right).$$

Тъй като $a_0\varphi_0(x), \ldots, a_n\varphi_n(x)$ е обобщен полином по системата $\{\varphi_k(x)\}_{k=0}^n$, която е Чебишова, а $\psi(x) > 0$ по условие, то $\Psi(x)$ има толкова нули, колкото линейната комбинация $a_0\varphi_0(x), \ldots, a_n\varphi_n(x)$, т.е. има най-много n различни нули. $\square$

Задача 21. Да се докаже, че функциите $\{\cos(kx)\}_0^n$ образуват система на Чебишов в интервала $[0,\pi]$.

Доказателство. Нека

$$\varphi(x) = a_0.1 + a_1.\cos x + a_2.\cos 2x + \cdots + a_n.\cos nx$$

е произволен ненулев обобщен полином по системата. Да допуснем, че полиномът има $n+1$ различни нули в интервала $[0,\pi]$. Ще покажем, че от допуснатото следва, че полиномът $\varphi(x)$ съвпада с нулевия полином, което е в противоречие с неговото построение.

Да направим смяна $x = \arccos t$ и да означим $\psi(t) = \varphi(\arccos t)$. Тъй като $x \in [0,\pi]$, то $t \in [-1,1]$. Заместваме смяната в обобщения полином и получаваме

$$\begin{aligned}\psi(t) &= a_0 + a_1\cos(\arccos t) + a_2\cos(2\arccos t) + \cdots + a_n\cos(n\arccos t)\\ &= a_0T_0(t) + a_1T_1(t) + \cdots + a_nT_n(t),\end{aligned}$$

където $T_k(x)$ е k-тият полином на Чебишов от I род. Тъй като $T_k(t) \in \pi_k$ (виж упражнението за полиноми на Чебишов), то $\psi(t) \in \pi_n$. От друга страна, допуснахме, че полиномът има $n+1$ различни нули, т.е. $\psi(t) \equiv 0$ и достигнахме до противоречие. Следователно полиномът има не повече от n различни нули. $\square$

Задача 22. Докажете, че $\{1, e^{2x}, e^{5x^2}\}$ образуват система на Чебишов в $(-\infty;+\infty)$.

Доказателство. За да бъде системата Чебишова, трябва всеки ненулев обобщен полином

$$f(x) = a_0 + a_1e^{2x} + a_2e^{5x^2}$$

да има най-много 2 различни нули в $(-\infty;+\infty)$. Да допуснем противното. Нека обобщеният полином има три различни нули в $(-\infty;\infty)$. Аналогично на горната задача ще докажем, че $a_0 = a_1 = a_2 = 0$, т.е. $f(t) \equiv 0$ и достигаме до противоречие.

Тъй като $f(x)$ има 3 различни нули, то от теоремата на Рол следва, че $f'(x)$ трябва да има поне 2 различни нули. *(Коментар: Теоремата на Рол ни казва, че ако е дадена непрекъсната функция в затворен интервал $[a,b]$, която е диференцируема в отворения интервал (a,b) и приема равни стойности в двата края на интервала, то $\exists\xi \in [a,b]$, за която $f'(\xi) = 0$. В нашия случай функцията f приема равни стойности в своите корени – там тя е нула, което означава, че между всеки два корена съществува поне една точка, в която производната се нулира.)* Имаме

$$f'(x) = 2a_1e^{2x} + 10a_2xe^{5x^2} = 2e^{2x}\left(a_1 + 5a_2xe^{5x^2-2x}\right).$$

Нека означим $g(x) := a_1 + 5a_2 x e^{5x^2-2x}$. Тъй като $e^{2x} > 0, \forall x$, то нулите на $f'(x)$ съвпадат с нулите на $g(x)$. Така $g(x)$ има поне 2 различни нули в $(-\infty; +\infty)$. Отново по теоремата на Рол следва, че $g'(x)$ има поне една нула, т.е.

$$\underbrace{5a_2 e^{5x^2-2x} + 5a_2 x e^{5x^2-2x}(10x-2)}_{g'(x)} = 0$$

има поне 1 решение. Изнасяме общ множител от последното и получаваме

$$5a_2 \underbrace{e^{5x^2-2x}}_{\neq 0} \underbrace{(10x^2 - 2x + 1)}_{\neq 0} = 0.$$

Последното влече $a_2 = 0$. Така $f'(x) = 0 \iff a_2 = a_1 = 0$ и следователно $f(x) = 0 \iff a_2 = a_1 = a_0 = 0$. Достигнахме до противоречие, защото по условие $f(x)$ е ненулев обобщен полином. Следователно $f(x)$ има най-много 2 нули в $(-\infty; +\infty)$. $\square$

Нека сега се спрем на задачата за интерполиране с тригонометрични полиноми. На нея ще отделим специално внимание, предвид факта, че тригонометричните полиноми са периодични функции. Много често в практиката се налага работата с периодични данни и затова тригонометричните полиноми имат важно значение.

Определение 6. Израз от вида

$$t_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

наричаме тригонометричен полином от ред n.

Вече показахме, че системата от функции $\{\cos kx\}_0^n$ образува система на Чебишов в интервала $[0, \pi]$. Оказва се, че функциите, които участват в дефиницията за тригонометричен полином от ред n

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots, \cos nx, \sin nx,$$

също образуват система на Чебишов – в интервала $[0, 2\pi)$. Това, разбира се, следва непосредствено от следващата лема (вж. лекции).

Лема 1. Всеки ненулев тригонометричен полином от ред n има не повече от $2n$ различни нули в $[0, 2\pi)$.

Като следствие на горната лема може да се покаже, че системата е Чебишова и във всеки от интервалите $[\alpha, \alpha + 2\pi)$, $\alpha \in \mathbb{R}$. От последното и от теоремата за единствеността на решението на обобщената интерполационна задача можем да формулираме следващата теорема.

Теорема 7. Нека $\alpha \le x_0 < \dots < x_{2n} < \alpha + 2\pi$. Тогава за всяка функция f, определена в точките $\{x_i\}_{i=0}^{2n}$, съществува единствен тригонометричен полином от ред n такъв, че $t_n(x_i) = f(x_i)$, $i = \overline{0, 2n}$.

Както вече казахме, когато разглеждаме дадена задача, често е полезно да имаме няколко различни начина за намирането на решението ѝ – например за решаване на интерполационните задачи можем да подходим чрез решаване на система, намиране на аналитична формула и т.н.

Забележка: Преди да продължим, да обърнем внимание, че тригонометричният полином от ред n има $2n+1$ коефициента и следователно за него трябва да се наложат $2n+1$ интерполационни условия.

Пример 5. Да се намери тригонометричният полином, интерполиращ таблицата

x	0	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/2$	π	$5\pi/4$	$3\pi/2$
y	0.1	0.807107	1.1	0.807107	0.1	-0.607107	-0.9

Решение. Нека първо обърнем внимание, че данните се съдържат в интервал с дължина 2π и следователно ще имаме единствено решение. Тъй като имаме седем интерполационни условия, то интерполационния полином ще търсим във вида

$$t(x) = a_0 + a_1 \cos x + a_2 \sin x + a_3 \cos 2x + a_4 \sin 2x + a_5 \cos 3x + a_6 \sin 3x.$$

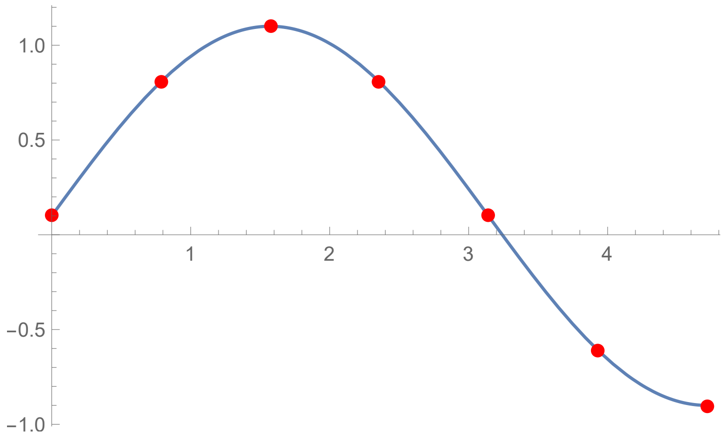
Последния можем да намерим, като решим системата, получена от интерполационните условия

$$t(x_0) = y_0,\ t(x_1) = y_1, \ldots,\ t(x_6) = y_6.$$

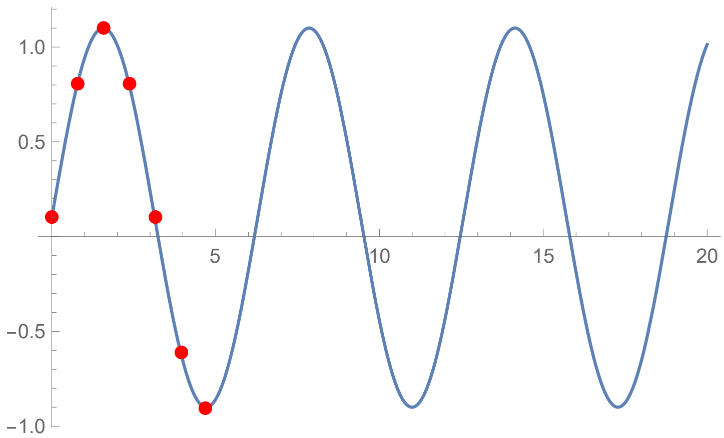
За решението ще използваме вградената функция *Solve* във *Wolfram Mathematica*:

```
t[x_] = a0 + a1 Cos[x] + a2 Sin[x] + a3 Cos[2 x] + a4 Sin[2 x] + a5 Cos[3 x] + a6 Sin[3 x];
Solve[{t[0] == 0.1 && t[Pi / 4] == 0.807107 && t[Pi / 2] == 1.1 && t[3 Pi / 4] == 0.807107 &&
   t[Pi] == 0.1 && t[5 Pi / 4] == -0.607107 && t[3 Pi / 2] == -0.9}, {a0, a1, a2, a3, a4, a5, a6}]
```

На следващата графика може да видим интерполационния полином с получените от решаването на системата коефициенти заедно с данните от таблицата:



Да обърнем внимание, че тригонометричният полином, който интерполира данните, е 2π-периодична функция:



□

Оказва се, че за задачата за интерполация с тригонометрични полиноми също съществува формула за намирането на интерполационния полином. Постъпвайки аналогично на формулата на Лагранж, търсим полинома във вида

$$\tau_n(x) = \sum_{k=0}^{2n} f(x_k)\lambda_k(x),$$

където базисните функции са тригонометрични полиноми, които удовлетворяват условията $\lambda_k(x_i) = \delta_{ki}$. Такъв базис, който удовлетворява дадените условия, се нарича интерполационен базис.

Теорема 8. Нека $\{x_k\}_{k=0}^{2n}$ са произволни точки, такива че $\alpha \le x_0 < x_1 < \cdots < x_{2n} < \alpha + 2\pi$ за някакво α и f е произволна функция, определена в тях. Тогава

$$\tau_n(x) = \sum_{k=0}^{2n} f(x_k) \prod_{i=0, i\neq k}^{2n} \frac{\sin \dfrac{x - x_i}{2}}{\sin \dfrac{x_k - x_i}{2}}$$

е единственият тригонометричен полином от ред n, който интерполира f в $x_0, \ldots, x_{2n}$.

Както виждаме, е много удобно, ако можем да въведем интерполационен базис в пространството, защото тогава можем да напишем проста формула за решението на интерполационната задача, която е аналог на формулата на Лагранж.

Задача 23. Като използвате аналитичната формула, намерете решението на Пример 5.

Отг. $\tau_3(x) = \sin x + 0.1$

Както вече видяхме при интерполирането с алгебрични полиноми, съществуват особено удобни интерполационни формули в случая на равноотдалечени възли. Оказва се, че такава може да се изведе и за тригонометричните полиноми. Нека са дадени $2n + 1$ равноотдалечени възела в интервала $[0, 2\pi)$, по-точно $x_k = \dfrac{2k\pi}{2n+1}, k = \overline{0, 2n}$.

В сила е следната формула:

$$\tau(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left(A_k \cos kx + B_k \sin kx\right),$$

където

$$A_k = \frac{2}{2n+1} \sum_{i=0}^{2n} y_i \cos(kx_i),\ k = \overline{0, n}, \quad B_k = \frac{2}{2n+1} \sum_{i=0}^{2n} y_i \sin(kx_i),\ k = \overline{1, n}.$$

Задача 24. Като използвате формулата за тригонометрична интерполация при равноотдалечени възли, определете A_0, A_1, B_1 така, че $\tau(x) = \dfrac{A_0}{2} + A_1 \cos x + B_1 \sin x$ да удовлетворява условията

$$\tau(0) = 1,\ \tau\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 2,\ \tau\left(\frac{4\pi}{3}\right) = 2.$$

Решение. Като при $n = 1$ заместим в горните формули $x_0 = 0, x_1 = 2\pi/3, x_2 = 4\pi/3$ и $y_0 = 1, y_1 = y_2 = 2$, получаваме

$$\begin{aligned}
A_0 &= \frac{2}{3} \sum_{i=0}^{2} y_i \cos(0x_i) = \frac{2}{3}(y_0 + y_1 + y_2) = \frac{2}{3}(1 + 2 + 2) = \frac{10}{3}; \\
A_1 &= \frac{2}{3} \sum_{i=0}^{2} y_i \cos x_i = \frac{2}{3}\left(1 \cos 0 + 2 \cos \frac{2\pi}{3} + 2 \cos \frac{4\pi}{3}\right) \\
&= \frac{2}{3}\left(1 + 2\left(-\frac{1}{2}\right) + 2\left(-\frac{1}{2}\right)\right) = -\frac{2}{3}; \\
B_1 &= \frac{2}{3} \sum_{i=0}^{2} y_i \sin x_i = \frac{2}{3}\left(1 \sin 0 + 2 \sin \frac{2\pi}{3} + 2 \sin \frac{4\pi}{3}\right) \\
&= \frac{2}{3}\left(0 + 2\frac{\sqrt{3}}{2} + 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) = 0.
\end{aligned}$$

Следователно търсеният тригонометричен полином е $\tau(x) = \dfrac{5}{3} - \dfrac{2}{3}\cos x$. □

Упражнение 8

Сплайн функции. Интерполиране с кубични сплайни

Вече показахме, че има и други класове от функции, освен алгебричните полиноми, които може да се използват за описване на дадени процеси – тригонометрични, експоненциални полиноми и др. В това упражнение ще се спрем на още един клас функции (т.нар. сплайн-функции или сплайни), който играе основна роля при различни практически задачи на изчислителната математика – интерполиране, числено диференциране, интегриране и др. Сплайните играят ключова роля например и в компютърната графика.

Както знаем, интерполирането с алгебрични полиноми може да има някои сериозни недостатъци. Такива например са:

- Полиномите от висока степен имат свойството да осцилират. Обикновено грешката при тях в някои интервали може да бъде много голяма (особено в краищата на интервала на интерполация);
- Високите степени на полинома могат да доведат до по-големи грешки от закръгляване;
- Колкото по-висока степен има даден полином, толкова повече коефициенти в представянето му трябва да се определят;
- Теоремата за оценка на грешката в общия случай не дава „сходимост" на решението. Това означава, че няма как да сме сигурни, че резултатът, който получаваме, ще бъде най-добър от гледна точка на достигане на минимална грешка;
- Всеки алгебричен полином е безкрайно диференцируем. Такава гладкост на решението обикновено не е необходима.

И така, за точността на интерполиране основно значение имат дължината на интервала на интерполация и степента на полинома. С други думи, бихме искали дължината на интервала да е достатъчно малка, а степента на полинома – достатъчно ниска. В такъв случай бихме могли да направим следното – да разделим интервала $[a, b]$ на подинтервали $[x_i, x_{i+1}]$, $i = \overline{0, m}$, където $x_0 = a$ и $x_{m+1} = b$, и във всеки подинтервал да намерим полином $p_i(x)$ от някоя ниска степен, който да интерполира данните в този интервал (или функцията). С други думи, ще търсим решението на интерполационната задача като **по части полиномиална крива**. Обикновено тази полиномиална крива трябва да описва гладък процес, затова ще налагаме допълнителни условия за гладкост, т.е. всяка от кривите в подинтервалите да се свързва гладко с полиномиалните криви от съседните интервали. Разбира се, това става, като наложим условия за нейните производни.

Определение 7. Ще казваме, че $s(x)$ е сплайн-функция (или сплайн) от степен r с възли $t_1 < \cdots < t_n$ (англ. **knots**, за разлика от **nodes**, който се използва за възли при интерполация), ако удовлетворява следните условия:

1. $s(x)$ е полином от степен най-много r (т.е. е от π_r) във всеки подинтервал (t_i, t_{i+1}), $i = \overline{0, n}$, където $t_0 = -\infty, t_{n+1} = +\infty$;

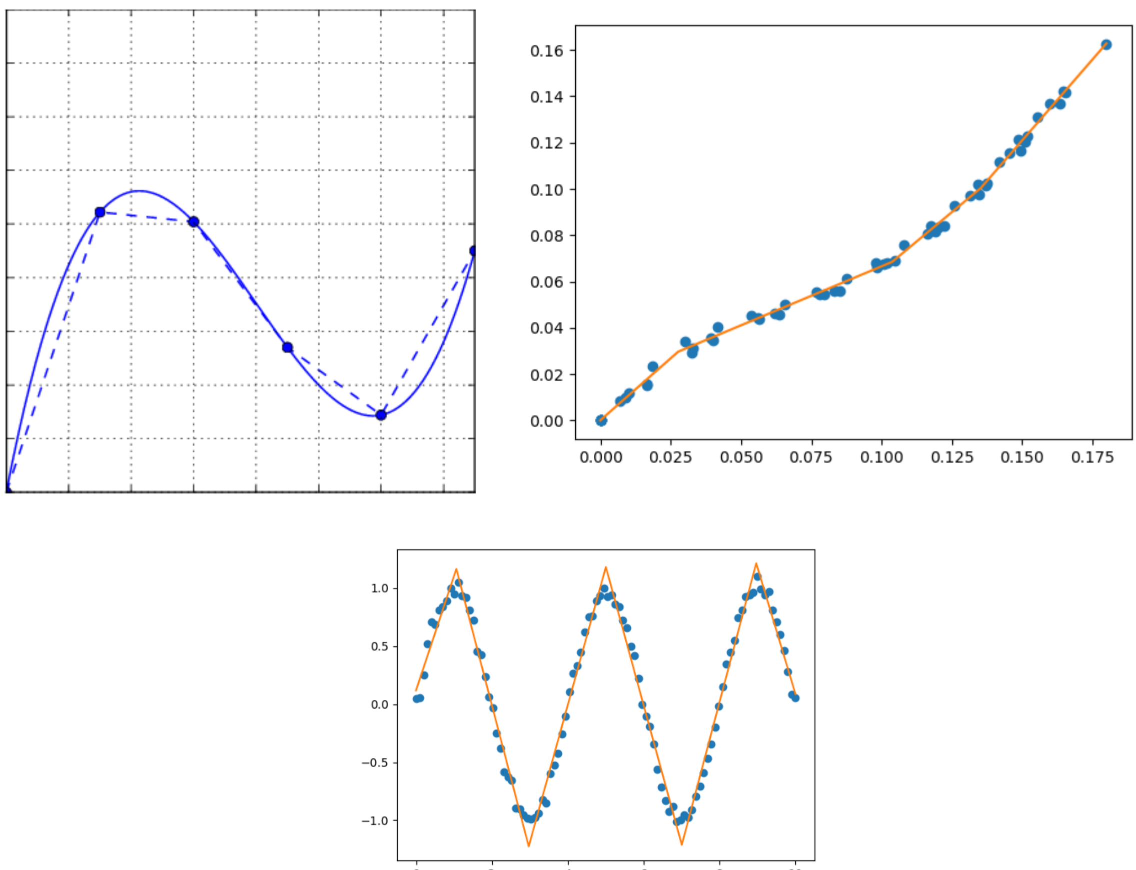
2. $s(x), s'(x), \dots, s^{(r-1)}(x)$ са непрекъснати функции в $(-\infty, +\infty)$, т.е. за $i = \overline{1, n}$

$$\begin{aligned} p_{i-1}(t_i) &= p_i(t_i), \\ p'_{i-1}(t_i) &= p'_i(t_i), \\ &\vdots \\ p^{(r-1)}_{i-1}(t_i) &= p^{(r-1)}_i(t_i). \end{aligned}$$

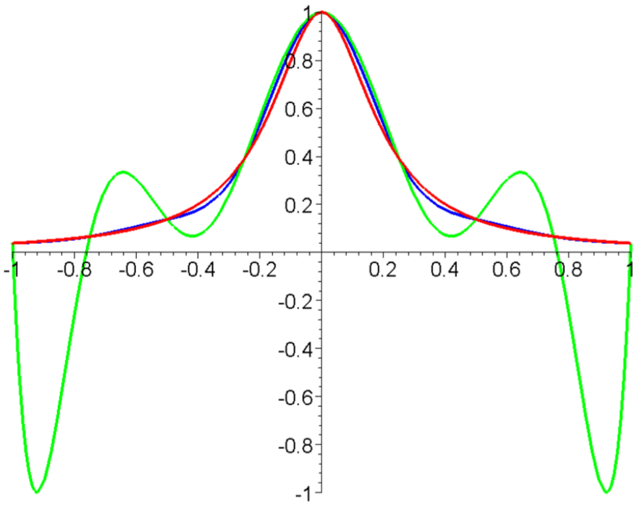
Множеството от сплайн-функции от степен r с възли $t_1 < \dots < t_n$ ще бележим с $S_r(t_1, \dots, t_n)$.

Нека сега обясним по-подробно горната дефиниция. Сплайн от степен r е по части полиномиална функция, която във всеки интервал съвпада с полином от степен, ненадминаваща r. Нещо повече, всеки сплайн трябва да удовлетворява условие за гладкост във всеки един от възлите си, т.е. полиномите от два съседни интервала трябва да се свързват гладко в съответния възел, т.е. да имат равни стойности в него, както и равни производни.

На фигурите по-долу са дадени примери за сплайни от първа степен (чиито графики са начупени непрекъснати линии) и сплайн от трета степен (който, предвид наложените условия за производната, изглежда като „гладка” крива).



Фигура 8.1: Сплайн от първа степен

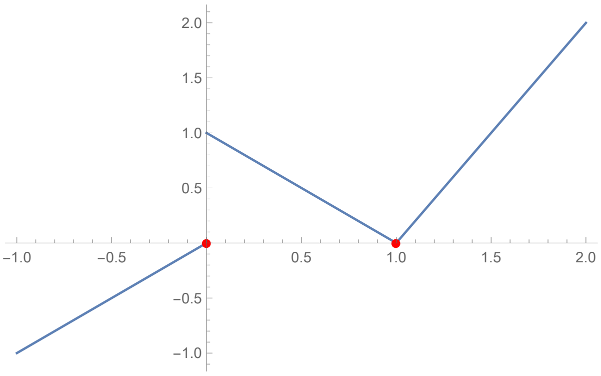


Фигура 8.2: Функцията на Рунге (в червено), интерполирана с полином от осма степен (в зелено) и сплайн от трета степен/кубичен сплайн (в синьо). Използвани са равноотдалечени възли в $[-1, 1]$ със стъпка 0.25.

От фигурите се вижда голямото предимство на сплайните – те са много гъвкави функции, които могат да описват много сложно поведение на дадени данни. От друга страна, във всеки подинтервал те са полиноми, което ги прави много лесни за работа.

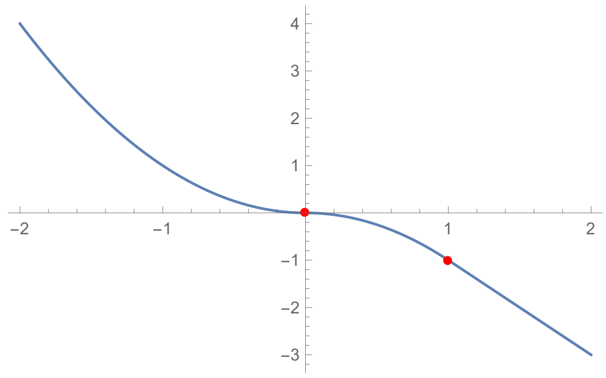
Задача 25. Определете дали функцията е сплайн от първа степен:

$$s(x) = \begin{cases} x, & x \in [-1, 0], \\ 1 - x, & x \in (0, 1), \\ 2x - 2, & x \in [1, 2] \end{cases}$$



Задача 26. Определете дали функцията е сплайн от втора степен:

$$s(x) = \begin{cases} x^2, & x \in [-2, 0], \\ -x^2, & x \in (0, 1), \\ 1 - 2x, & x \geq 1 \end{cases}$$



Нека разгледаме някои следствия от дефиницията на сплайн:

- производната на сплайн от степен r е сплайн от степен $r-1$;
- r-тата производна на сплайн $s(x) \in S_r(t_1, \dots, t_n)$ е по части константа с евентуални точки на прекъсване във възлите на сплайна;
- r-тата примитивна функция на една функция, която е по части константа, е сплайн от степен r.

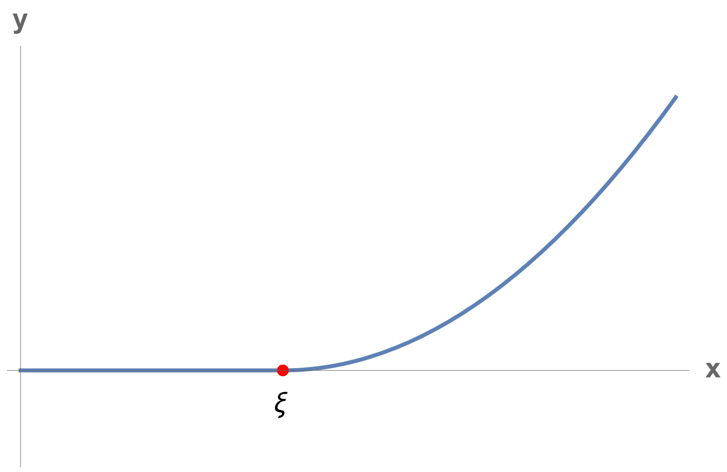
Разбира се, след като дадохме дефиниция на сплайн, естествено е да си зададем въпроса съществува ли базис, по който може да представим всеки сплайн от даден клас. Преди това да разгледаме един частен случай за сплайн от степен r с един възел.

Определение 8. Функцията

$$(x-\xi)_+^r = \begin{cases} (x-\xi)^r, & x \ge \xi \\ 0, & x < \xi, \end{cases}$$

ще наричаме **отсечена степенна функция**.

Последната очевидно изпълнява условията за сплайн от степен r с възел ξ – във всеки от двата интервала тя е от π_r и левите и десните ѝ производни до ред $r-1$ в точката ξ съвпадат (равни са на 0):



Оказва се, че отсечената степенна функция играе основна роля в теорията на сплайн-функциите. Следващата теорема показва, че всеки сплайн се представя като сума на алгебричен полином от π_r и линейна комбинация на подходящи отсечени степенни функции.

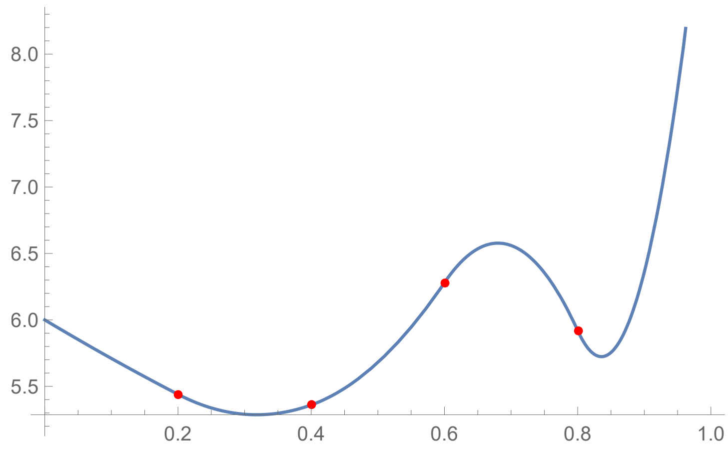
Теорема 9. Всяка сплайн-функция $s(x)$ от класа $S_r(t_1, \dots, t_n)$ се представя по единствен начин във вида

$$s(x) = p(x) + \sum_{k=1}^{n} c_k (x - t_k)_+^r,$$

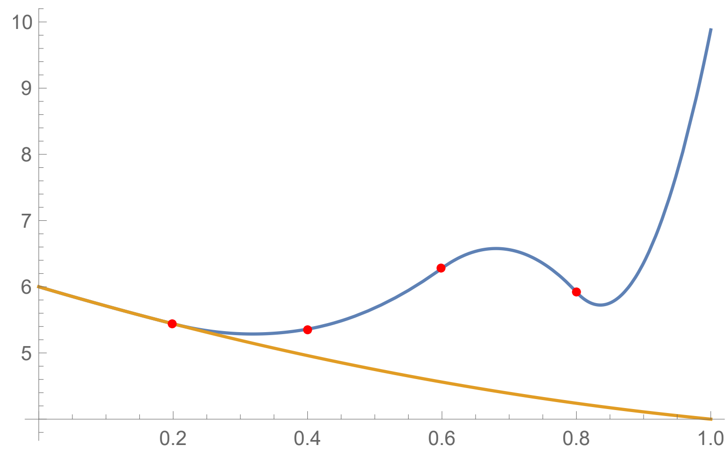
където $p(x) \in \pi_r$, а $c_1, \dots, c_n$ са реални числа. Нещо повече,

$$c_k = \frac{s^{(r)}(t_k + 0) - s^{(r)}(t_k - 0)}{r!}, \ k = 1, \dots, n.$$

Нека сега обясним представянето на сплайна като линейна комбинация на отсечени степенни функции и полином от π_r. Ясно е, че за да определим сплайна, то трябва във всеки интервал да определим алгебричния полином, който съвпада с него. Нека разгледаме следната примерна фигура на сплайн от втора степен (квадратичен сплайн) с 4 възела t_1, t_2, t_3, t_4 и нека го означим с $s(x)$:



В първия интервал е ясно, че $s(x)$ съвпада с някакъв (очевидно единствен) полином $p(x) \in \pi_2$, както е показано на следната фигура:

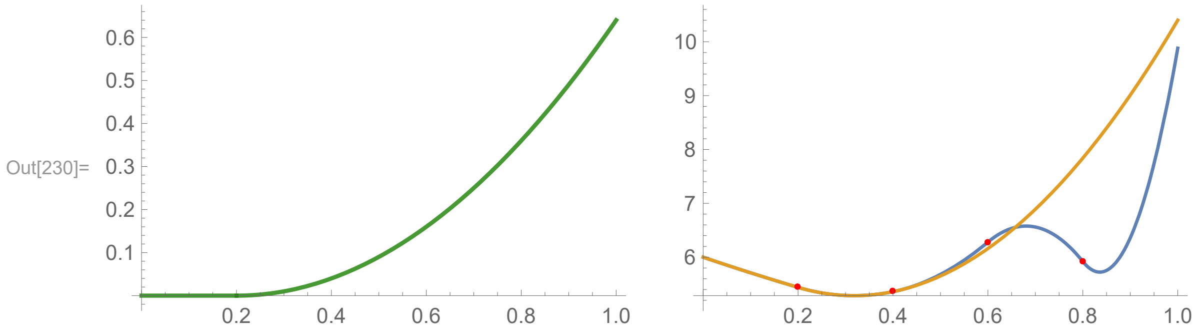


Искаме към полинома да прибавим някаква функция $s_1(x)$ така, че във втория интервал (t_1 до t_2) графиката на получената функция $p(x) + s_1(x)$ също да съвпада с графиката на сплайна. Следователно трябва да прибавим функция $s_1(x)$, която:

- не променя нищо в първия интервал;
- е полином от π_2 във втория;
- стойността ѝ в t_1 е 0;

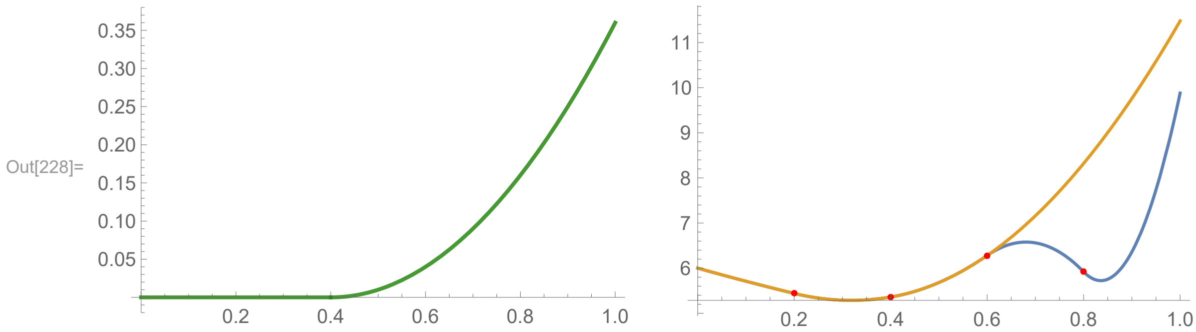
- стойността на първата ѝ производна в t_1 също е 0 (това ще гарантира непрекъснатостта на производната).

Такова условие удовлетворява точно отсечената степенна функция $s_1(x) = (x - t_1)_+^2$, евентуално умножена по константа. Графиките на $s_1(x)$ и $p(x) + c_1 s_1(x)$ са показани по-долу.



Фигура 8.3: Графика на $s_1(x)$(вляво) и $p(x) + c_1 s_1(x)$ заедно с $s(x)$ (вдясно).

Ще постъпим аналогично и за третия интервал. Към функцията $p(x)+c_1 s_1(x)$ прибавяме константа по отсечената степенна функция $s_2(x) = (x - t_2)_+^2$. Така не променяме нищо в първите два интервала спрямо предходната фигура, а целим да получим „правилния” полином в третия интервал.



Фигура 8.4: Графика на $s_2(x)$(вляво) и $p(x) + c_1 s_1(x) + c_2 s_2(x)$ заедно с $s(x)$ (вдясно).

За да получим сплайна, продължаваме аналогично за всеки следващ интервал.

От последната теорема следва, че всеки сплайн от степен r с възли $t_1, \dots, t_n$ има вида

$$s(x) = \underbrace{a_0 + a_1 x + \cdots + a_r x^r}_{p(x)} + c_1(x - x_1)_+^r + c_2(x - x_2)_+^r + \cdots + c_n(x - x_n)_+^r,$$

т.е. може да се разглежда като обобщен полином по базиса $1, x, \dots, x^r$,$(x - x_1)_+^r$,$\dots$, $(x - x_n)_+^r$.

С други думи, множеството $S_r(t_1, \dots, t_n)$ е **крайномерно линейно пространство с размерност $n + r + 1$**.

Интерполиране с кубични сплайни

Нека сега разгледаме задачата за интерполиране със сплайни. За да определим еднозначно $s(x)$ трябва да определим коефициентите в представянето му, които са $n + r + 1$ на брой. С други думи, ако искаме да определим сплайн, който интерполира дадени точки, трябва да му зададем общо $n+r+1$ условия (да отбележим, че това не означава, че тези условия може да са произволни). В това упражнение ще се спрем на въпроса за интерполиране с кубични сплайни, тъй като те са може би най-често използваните на практика сплайни за интерполация, заради тяхната гладкост. Да припомним, че за да бъде една по части полиномиална функция кубичен сплайн с възли $t_1, \dots, t_n$, тя трябва да изпълнява следните условия:

- да бъде полином от степен, ненадминаваща три, във всеки подинтервал, определен от възлите на сплайна;
- $s(x), s'(x), s''(x)$ трябва да бъдат непрекъснати функции в интервала $(-\infty, +\infty)$.

Нека $s(x) \equiv p_i(x)$ за всяко x в интервала $(t_i, t_{i+1}), i \in \overline{1,n}$. Тъй като $p_i(x) = a_i + b_i x + c_i x^2 + d_i x^3$, то, за да определим еднозначно $p_i(x)$, са необходими по 4 условия във всеки интервал.

Постановка на задачата Нека е дадена функцията $f(x)$, непрекъсната в $[a,b]$, и интерполационни възли $a = x_0 < \cdots < x_{n+1} = b$. Да се намери кубичен сплайн $s(x)$ с възли $x_1, \dots, x_n$, който да интерполира f във всеки от възлите.

С други думи, за възли на сплайна ще вземем тези интерполационни възли, които по естествен начин разделят интервала $[a,b]$, т.е. $x_1, \dots, x_n$.

Вече казахме, че за да построим $s(x)$, трябва да определим полиномите $p_i(x)$ във всеки подинтервал $(x_i, x_{i+1}), i = \overline{0,n}$. От интерполационните условия следва, че

$$s(x_i) = f(x_i), i = \overline{0, n+1}.$$

Последното влече условията за непрекъснатост

$$p_i(x_i) = f(x_i),\ p_i(x_{i+1}) = f(x_{i+1}),\ i = \overline{0,n},$$

еквивалентни на условията $p_{i-1}(x_i) = p_i(x_i),\ i = \overline{2,n}$. Така за всяка функция $p_i(x)$ налагаме 2 интерполационни условия, т.е. трябва да зададем още 2. Различните методи за интерполиране с по части кубични функции се определят от това как сме избрали тези две условия.

- условия за първа производна

  Можем да поискаме полиномите $p_i(x)$ да удовлетворяват условията

  $$p_i'(x_i) = d_i, \quad p_i'(x_{i+1}) = d_{i+1}.$$

  Последните условия гарантират непрекъснатост на първата производна на $s(x)$. За различен избор на числата $\{d_i\}_{i=0}^n$ получаваме различни интерполиращи функции. Например, ако изберем

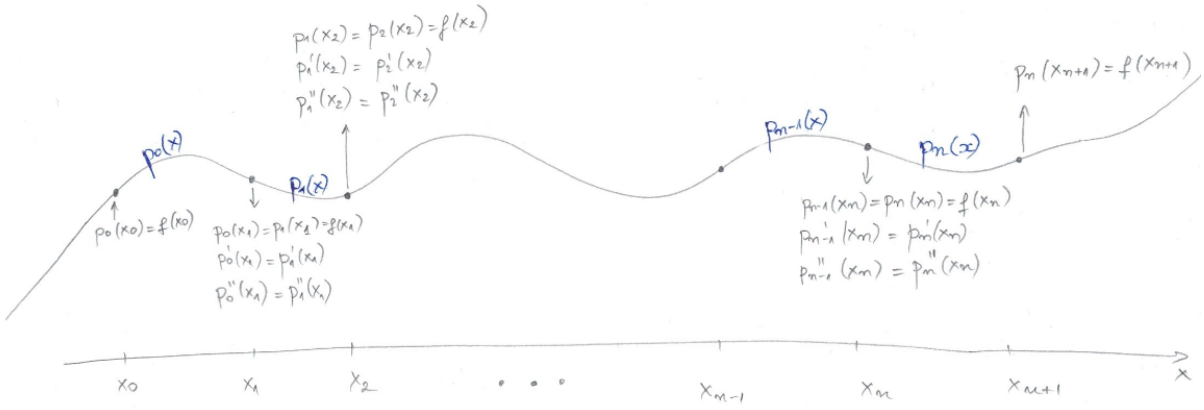
  $$p_i'(x_i) = f'(x_i), \quad p_i'(x_{i+1}) = f'(x_{i+1}),$$

  получаваме известната по части Ермитова интерполация – в този случай за полиномите $p_i(x)$ се налагат интерполационни условия за първата производна на функцията. Така получената функция се използва често на практика, но не е задължително кубичен сплайн, тъй като няма необходимата гладкост (има само непрекъсната първа производна).

- условия за втора производна

  Нека поискаме по части полиномиалната функция да бъде непрекъсната, с непрекъснати първи и втори производни, т.е. да бъде кубичен сплайн. Оказва се, че такъв винаги съществува, като се определя еднозначно от „граничните” условия за производните $s'(a), s''(a), s'(b), s''(b)$ $(a := x_0,\ b := x_{n+1})$.

  За да разберем последното, да припомним, че искаме да определим полиномите $p_0(x), p_1(x), \dots, p_n(x)$, като за всеки от тях трябва да зададем по 4 условия, т.е. общо $4(n+1)$. Да разгледаме следната скица:



На скицата съответства следната система уравнения:

	условие		общ брой условия
(1)	$p_i(x_i) = y_i$	$i = 0, \dots, n$	$n+1$
(2)	$p_i(x_{i+1}) = y_{i+1}$	$i = 0, \dots, n$	$n+1$
(3)	$p'_{i-1}(x_i) = p'_i(x_i)$	$i = 1, \dots, n$	n
(4)	$p''_{i-1}(x_i) = p''_i(x_i)$	$i = 1, \dots, n$	n

Последната система има $4(n+1)$ неизвестни и $4n+2$ условия. За да има единствено решение, трябва да зададем още две условия – в граничните точки $a = x_0$ и $b = x_{n+1}$. Следните две допълнителни условия най-често се добавят към горната система:

(i) Ако $f'(a)$ и $f'(b)$ се знаят, то естествено е да се вземат условията:

$$s'(a) = p'_0(a) = f'(a), \quad s'(b) = p_n(b) = f'(b).$$

С така зададени условия се получава така наречена **пълна сплайнова кубична интерполация**;

(ii) Добавят се условия

$$s''(a) = p''_0(a) = 0, \quad s''(b) = p''_n(b) = 0.$$

С тези условия получаваме така наречената **естествена кубична сплайнова интерполация**.

Нека сега разгледаме един конкретен пример за определяне на кубичен сплайн.

Задача 27. Да се намери сплайнът $s(x) \in S_3(0)$, интерполиращ $f(x) = x^4$ при пълна кубична сплайнова интерполация в точките $x_0 = -1,\ x_1 = 0, x_2 = 1$.

Решение. Търсим сплайн от степен $r = 3$ с възел $t_1 = 0$ във вида

$$s(x) = \begin{cases} p_0(x) \in \pi_3, x \le 0, \\ p_1(x) \in \pi_3, x \ge 0, \end{cases}$$

За да бъде кубичната сплайнова интерполация пълна, то трябва да зададем условия за първите производни в двата края. Имаме системата:

$p_0(x_0) = f(x_0), \quad p'_0(x_0) = f'(x_0)$ (леви гранични условия),
$p_0(x_1) = p_1(x_1) = f(x_1),\ p'_0(x_1) = p'_1(x_1),\ p''_0(x_1) = p''_1(x_1)$ (усл. за непрекъснатост в t_0),
$p_1(x_2) = f(x_2), \quad p'_1(x_2) = f'(x_2)$ (десни гранични условия).

Искаме да определим $p_0(x) = a_0 + b_0x + c_0x^2 + d_0x^3$ и $p_1(x) = a_1 + b_1x + c_1x^2 + d_1x^3$. Можем да решим задачата по няколко начина. Първият начин е да си разпишем производните на полиномите и да определим коефициентите във всеки един от тях, като решим получената система. Ние ще разгледаме друг подход, който използва наученото от предишните упражнения.

Да заместим интерполационните условия от условието на задачата. Имаме:

$$\begin{aligned}
&p_0(-1) = 1,\ p_0'(-1) = -4,\\
&p_0(0) = p_1(0) = 0,\\
&p_0'(0) = p_1'(0) = d,\ \text{(полагаме първата производна да е неизвестен параметър } d\text{)}\\
&p_0''(0) = p_1''(0),\\
&p_1(1) = 1,\ p_1'(1) = 4.
\end{aligned}$$

Ще определим $p_0(x)$ и $p_1(x)$, като решим две интерполационни задачи на Ермит. Неизвестния параметър d ще намерим от условието $p_0''(0) = p_1''(0)$. Имаме интерполационните таблици

$p_0(x)$:

-1	-1	0	0
1	-4	0	d

$p_1(x)$:

0	0	1	1
0	d	1	4

Ще използваме познатата ни схема за определяне на полиномите $p_0(x)$ и $p_1(x)$.

- Определяне на $p_0(x)$

Възли	Ред 0	Ред 1	Ред 2	Ред 3
$x_0 = -1$	$f(x_0) = 1$			
		$f[x_0, x_1]^* = -4$		
$x_1 = -1$	$f(x_1) = 1$		$f[x_0, x_1, x_2] = 3$	
		$f[x_1, x_2] = -1$		$f[x_0, x_1, x_2, x_3] = d - 2$
$x_2 = 0$	$f(x_2) = 0$		$f[x_1, x_2, x_3] = d + 1$	
		$f[x_2, x_3]^* = d$		
$x_3 = 0$	$f(x_3) = 0$			

От формулата на Нютон за интерполационния полином на Ермит получаваме

$$p_0(x) = 1 - 4(x + 1) + 3(x + 1)^2 + (d - 2)x(x + 1)^2 \Rightarrow p_0''(0) = 4d - 2.$$

- Определяне на $p_1(x)$

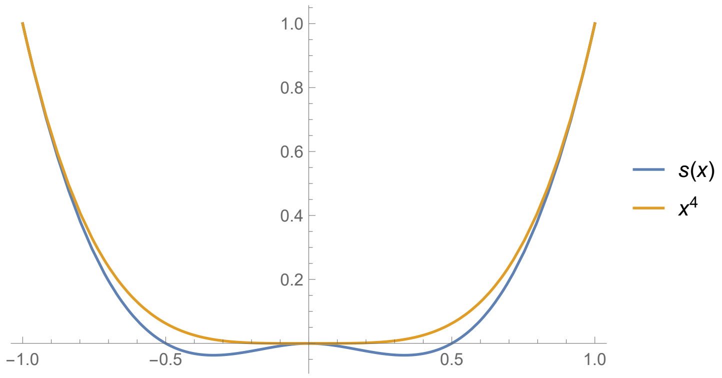
Възли	Ред 0	Ред 1	Ред 2	Ред 3
$x_0 = 0$	$f(x_0) = 0$			
		$f[x_0, x_1]^* = d$		
$x_1 = 0$	$f(x_1) = 0$		$f[x_0, x_1, x_2] = 1 - d$	
		$f[x_1, x_2] = 1$		$f[x_0, x_1, x_2, x_3] = 2 + d$
$x_2 = 1$	$f(x_2) = 1$		$f[x_1, x_2, x_3] = 3$	
		$f[x_2, x_3]^* = 4$		
$x_3 = 1$	$f(x_3) = 1$			

От формулата на Нютон за интерполационния полином на Ермит получаваме

$$p_1(x) = 0 + dx + (1 - d)x^2 + (2 + d)x^2(x - 1) \Rightarrow p_1''(0) = -4d - 2.$$

От условието за непрекъснатостта в $t = 0$ имаме $4d - 2 = 4d - 2 \Rightarrow d = 0$. Следователно търсеният сплайн е

$$s(x) = \begin{cases} -2x^3 - x^2, x \leq 0, \\ 2x^3 - x^2, x \geq 0. \end{cases}$$



□

Интересно

Понятието сплайн идва от корабостроенето в стари времена. Там се използвал дълъг тънък и плосък инструмент, наречен сплайн, който се фиксирал в дадени точки чрез болтове и изглеждал точно като естествен кубичен сплайн. При огъването му е известен физически факт, че добива такава форма, при която енергията от деформациите е минимална. Тази техника се използва и в наши дни при проектирането на кораби.