Разделена разлика. Интерполационна формула на Нютон

Задача 1

Да се намери интерполационният полином на Лагранж, който интерполира функцията $f(x) = \sqrt{x}$ в т. $0, 1, 4$, като се използва формулата на Нютон.

Решение

Търсим полинома на Лагранж

$$L_2(f;x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1),$$

който удовлетворява интерполационните условия:

x	0	1	4
y	0	1	2

Разделена разлика. Интерполационна формула на Нютон

За да определим полинома, трябва да пресметнем разделените разлики до втори ред включително. Построяваме си таблицата с разделените разлики.

Възли	Ред 0	Ред 1	Ред 2
$x_0 = 0$	$f[x_0] = 0$		
		$f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = 1$	
$x_1 = 1$	$f[x_1] = 1$		$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0} = -\frac{1}{6}$
		$f[x_1, x_2] = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{1}{3}$	
$x_2 = 4$	$f[x_2] = 2$		

За да определим полинома, трябва да пресметнем разделените разлики до втори ред включително. Построяваме си таблицата с разделените разлики.

Възли	Ред 0	Ред 1	Ред 2
$x_0 = 0$	$f[x_0] = 0$		
		$f[x_0, x_1] = \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = 1$	
$x_1 = 1$	$f[x_1] = 1$		$f[x_0, x_1, x_2] = \dfrac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0} = -\dfrac{1}{6}$
		$f[x_1, x_2] = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \dfrac{1}{3}$	
$x_2 = 4$	$f[x_2] = 2$		

За да определим полинома, трябва да пресметнем разделените разлики до втори ред включително. Построяваме си таблицата с разделените разлики.

Възли	Ред 0	Ред 1	Ред 2
$x_0 = 0$	$f[x_0] = 0$		
		$f[x_0, x_1] = \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = 1$	
$x_1 = 1$	$f[x_1] = 1$		$f[x_0, x_1, x_2] = \dfrac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0} = -\dfrac{1}{6}$
		$f[x_1, x_2] = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \dfrac{1}{3}$	
$x_2 = 4$	$f[x_2] = 2$		

Разделена разлика. Интерполационна формула на Нютон

За да определим полинома, трябва да пресметнем разделените разлики до втори ред включително. Построяваме си таблицата с разделените разлики.

Възли	Ред 0	Ред 1	Ред 2
$x_0 = 0$	$f[x_0] = 0$		
		$f[x_0, x_1] = \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = 1$	
$x_1 = 1$	$f[x_1] = 1$		$f[x_0, x_1, x_2] = \dfrac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0} = -\dfrac{1}{6}$
		$f[x_1, x_2] = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \dfrac{1}{3}$	
$x_2 = 4$	$f[x_2] = 2$		

Разделена разлика. Интерполационна формула на Нютон

За да определим полинома, трябва да пресметнем разделените разлики до втори ред включително. Построяваме си таблицата с разделените разлики.

Възли	Ред 0	Ред 1	Ред 2
$x_0 = 0$	$f[x_0] = 0$		
		$f[x_0, x_1] = \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = 1$	
$x_1 = 1$	$f[x_1] = 1$		$f[x_0, x_1, x_2] = \dfrac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0} = -\dfrac{1}{6}$
		$f[x_1, x_2] = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \dfrac{1}{3}$	
$x_2 = 4$	$f[x_2] = 2$		

Разделена разлика. Интерполационна формула на Нютон

За да определим полинома, трябва да пресметнем разделените разлики до втори ред включително. Построяваме си таблицата с разделените разлики.

Възли	Ред 0	Ред 1	Ред 2
$x_0 = 0$	$f[x_0] = 0$		
		$f[x_0, x_1] = \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = 1$	
$x_1 = 1$	$f[x_1] = 1$		$f[x_0, x_1, x_2] = \dfrac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0} = -\dfrac{1}{6}$
		$f[x_1, x_2] = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \dfrac{1}{3}$	
$x_2 = 4$	$f[x_2] = 2$		

Разделена разлика. Интерполационна формула на Нютон

За да определим полинома, трябва да пресметнем разделените разлики до втори ред включително. Построяваме си таблицата с разделените разлики.

Възли	Ред 0	Ред 1	Ред 2
$x_0 = 0$	$f[x_0] = 0$		
		$f[x_0, x_1] = \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = 1$	
$x_1 = 1$	$f[x_1] = 1$		$f[x_0, x_1, x_2] = \dfrac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0} = -\dfrac{1}{6}$
		$f[x_1, x_2] = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \dfrac{1}{3}$	
$x_2 = 4$	$f[x_2] = 2$		

Разделена разлика. Интерполационна формула на Нютон

За да определим полинома, трябва да пресметнем разделените разлики до втори ред включително. Построяваме си таблицата с разделените разлики.

Възли	Ред 0	Ред 1	Ред 2
$x_0 = 0$	$f[x_0] = 0$		
		$f[x_0, x_1] = \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = 1$	
$x_1 = 1$	$f[x_1] = 1$		$f[x_0, x_1, x_2] = \dfrac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0} = -\dfrac{1}{6}$
		$f[x_1, x_2] = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \dfrac{1}{3}$	
$x_2 = 4$	$f[x_2] = 2$		

Разделена разлика. Интерполационна формула на Нютон

За да определим полинома, трябва да пресметнем разделените разлики до втори ред включително. Построяваме си таблицата с разделените разлики.

Възли	Ред 0	Ред 1	Ред 2
$x_0 = 0$	$f[x_0] = 0$		
		$f[x_0, x_1] = \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = 1$	
$x_1 = 1$	$f[x_1] = 1$		$f[x_0, x_1, x_2] = \dfrac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0} = -\dfrac{1}{6}$
		$f[x_1, x_2] = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \dfrac{1}{3}$	
$x_2 = 4$	$f[x_2] = 2$		

За да определим полинома, трябва да пресметнем разделените разлики до втори ред включително. Построяваме си таблицата с разделените разлики.

Възли	Ред 0	Ред 1	Ред 2
$x_0 = 0$	$f[x_0] = 0$		
		$f[x_0, x_1] = \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = 1$	
$x_1 = 1$	$f[x_1] = 1$		$f[x_0, x_1, x_2] = \dfrac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0} = -\dfrac{1}{6}$
		$f[x_1, x_2] = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \dfrac{1}{3}$	
$x_2 = 4$	$f[x_2] = 2$		

Разделена разлика. Интерполационна формула на Нютон

За да определим полинома, трябва да пресметнем разделените разлики до втори ред включително. Построяваме си таблицата с разделените разлики.

Възли	Ред 0	Ред 1	Ред 2
$x_0 = 0$	$f[x_0] = 0$		
		$f[x_0, x_1] = \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = 1$	
$x_1 = 1$	$f[x_1] = 1$		$f[x_0, x_1, x_2] = \dfrac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0} = -\dfrac{1}{6}$
		$f[x_1, x_2] = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \dfrac{1}{3}$	
$x_2 = 4$	$f[x_2] = 2$		

Разделена разлика. Интерполационна формула на Нютон

За да определим полинома, трябва да пресметнем разделените разлики до втори ред включително. Построяваме си таблицата с разделените разлики.

Възли	Ред 0	Ред 1	Ред 2
$x_0 = 0$	$f[x_0] = 0$		
		$f[x_0, x_1] = \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = 1$	
$x_1 = 1$	$f[x_1] = 1$		$f[x_0, x_1, x_2] = \dfrac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0} = -\dfrac{1}{6}$
		$f[x_1, x_2] = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \dfrac{1}{3}$	
$x_2 = 4$	$f[x_2] = 2$		

Получихме $f[x_0] = 0$, $f[x_0, x_1] = 1$, $f[x_0, x_1, x_2] = -\frac{1}{6}$.
Заместваме във формулата

$$L_2(f; x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1)$$

и получаваме

$$L_2(f; x) = 0 + 1(x - 0) - \frac{1}{6}(x - 0)(x - 1) = \frac{7}{6}x - \frac{1}{6}x^2.$$

Забележка: Лесно може да проверите дали сте объркали сметките си, като се уверите, че полученият полином изпълнява интерполационните условия!