Числени методи, сп. Информатика
Задачи за изпит I

I тип

Задача 1. Като използвате интерполационната формула на Лагранж, намерете полинома $p \in \pi_2$, който удовлетворява условията $p(-1) = 2,\ p(1) = 2,\ p(2) = 5$. Преставете $p(x)$ по степените на x.

Задача 2. Полиномът $L_2(f;x)$ интерполира $f(x) = e^x$ в т. $-1, 0, 1$. Като използвате формулата за оценка на грешката, докажете, че

$$\max_{x\in[-1,1]} |f(x) - L_2(f;x)| \leq \frac{1}{5}.$$

Задача 3. Като използвате интерполационната формула на Нютон с разделени разлики, намерете полинома $p \in \pi_3$, който удовлетворява условията: $p(-2) = -8$, $p(0) = 2$, $p(1) = 4$, $p(2) = 12$. Представете $p(x)$ по степените на x.

Задача 4. Нека $S_k = 1^2 + \cdots + k^2,\ k \geq 1$, където $S_0 = 0$. Покажете, че съществува единствен $p \in \pi_3$: $p(k) = S_k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ Намерете S_k, като използвате формулата на Нютон с крайни разлики за интерполиране напред.

Задача 5. Като използвате интерполационната формула на Нютон с разделени разлики с кратни възли, намерете интерполационния полином на Ермит, който удовлетворява условията $p(0) = -1$, $p'(0) = 1$, $p''(0) = 2$, $p(1) = 0$, $p'(1) = 1$. Представете $p(x)$ по степените на x.

Задача 6. Като използвате формулата за тригонометрична интерполация при равноотдалечени възли, определете коефициентите a_0, a_1, b_1 така, че $\tau(x) = \dfrac{a_0}{2} + a_1 \cos x + b_1 \sin x$ да удовлетворява условията $\tau(0) = -1,\ \tau\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) = 2,\ \tau\left(\dfrac{4\pi}{3}\right) = 2$.

II тип

Задача 1. Нека $l_{kn}(x)$, $k = \overline{0, n}$ са базисните полиноми на Лагранж, съответни на възлите $x_0, \ldots, x_n$. Да се намери

$$\sum_{k=0}^{n} (x - x_n)^{n+1} l_{kn}(x).$$

Задача 2. Нека $f \in C^2[0,1]$ и е известно, че $|f''(x)| \leq x^2, \forall x \in [0,1]$. За $\xi \in (0,1)$ да означим с $P_\xi(x)$ по части линейната в $[0,\xi]$ и $[\xi,1]$ непрекъсната функция, която интерполира f в $0, \xi, 1$. Да се определи ξ така, че

$$\max_{x\in[0,1]} |f(x) - P_\xi(x)| \leq 0.02.$$

Задача 3. Нека $\{\eta_k\}_{k=0}^{n}$ са екстремалните точки на полинома на Чебишов $T_n(x)$. Да се докаже, че ако $p \in \pi_n$ и $|p(\eta_k)| \leq 1$ за $k = \overline{0, n}$, то $|p(x)| \leq |T_n(x)|$ за всяко $|x| \geq 1$.

Задача 4. Нека $x_k \neq -1, 0$ за $k = 1, \dots, n$. Намерете

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k^n \, f\left(\dfrac{1}{x_k}\right)}{f'(x_k)(1+x_k)},$$

където $f(x) = (x - x_1)\dots(x - x_n)$.

Задача 5. Нека $l_{kn}(x)$, $k = \overline{0, n}$ са базисните полиноми на Лагранж, съответни на $x_0, \dots, x_n$, $w(x) = (x - x_0)\dots(x - x_n)$ и

$$\varphi_k(x) = \left(1 - \frac{w''(x)}{w'(x)}(x - x_k)\right) l_{kn}^2(x), \ \ k = \overline{0, n}.$$

Докажете, че $\varphi_k'(x_k) = 0, \ \ k = \overline{0, n}$.

Задача 6. Да се докаже, че функциите $\{1, e^{2x}, e^{5x^2}\}$ образуват система на Чебишов.