Записки към упражненията по Числени методи
сп. Информатика

ас. Здравка Недялкова

Съдържание

3 Полиноми на Чебишов 2

4 Разделени разлики. Интерполационна формула на Нютон 4

5 Крайни разлики 11

Упражнение 3

Полиноми на Чебишов

(Продължение)

Задача 4. Нека $P(x) \in \pi_n$ и $|P(\eta_k)| \leq 1, k = \overline{0,n}$, където η_k са точките на алтернанс за $T_n(x)$ $\left(\text{т.е. } \eta_k = \cos\dfrac{k\pi}{n}, k = \overline{0,n}\right)$. Да се докаже, че $|P(x)| \leq |T_n(x)|,\ |x| > 1$.

Доказателство. Нека $\eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_n$ са точките на алтернанс. Да разгледаме интерполационните полиноми за $P(x)$ и $T_n(x)$, построени за възли η_k:

$$P(x) \overset{\in\pi_n}{\equiv} L_n(P;x) = \sum_{k=0}^{n} P(\eta_k) l_{kn}(x), \tag{3.1}$$

$$T_n(x) \overset{\in\pi_n}{\equiv} L_n(T_n;x) = \sum_{k=0}^{n} T_n(\eta_k) l_{kn}(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k l_{kn}(x). \tag{3.2}$$

Ще използваме последните две, за да покажем, че $|P(x)| \leq |T_n(x)|,\ |x| > 1$.

- Нека $x > 1$. Имаме

$$|P(x)| \overset{(3.1)}{=} \left|\sum_{k=0}^{n} P(\eta_k) l_{kn}(x)\right| \leq \sum_{k=0}^{n} |P(\eta_k) l_{kn}(x)| \overset{|P(\eta_k)|\leq 1}{\leq} \sum_{k=0}^{n} |l_{kn}(x)|\,. \tag{3.3}$$

Нашата цел е да ограничим последното отгоре от $T_n(x)$, затова ще намерим връзка между $|l_{kn}(x)|$ и $|T_n(x)|$. В случая, ще използваме, че $|l_{kn}(x)|=\operatorname{sign}(l_{kn}(x)) l_{kn}(x)$. Знаем, че

$$l_{kn}(x) = \prod_{i=0,\ i\neq k}^{n} \frac{x-\eta_i}{\eta_k - \eta_i} = \frac{(x-\eta_0)(x-\eta_1)\ldots(x-\eta_{k-1})(x-\eta_{k+1})\ldots(x-\eta_n)}{(\eta_k-\eta_0)(\eta_k-\eta_1)\ldots(\eta_k-\eta_{k-1})(\eta_k-\eta_{k+1})\ldots(\eta_k-\eta_n)}.$$

Да определим знака му. Имаме:

$$l_{kn}(x) = \frac{\overbrace{(x-\eta_0)}^{>0}\overbrace{(x-\eta_1)}^{>0}\ldots\overbrace{(x-\eta_{k-1})}^{>0}\overbrace{(x-\eta_{k+1})}^{>0}\ldots\overbrace{(x-\eta_n)}^{>0}}{\underbrace{(\eta_k-\eta_0)}_{<0}\underbrace{(\eta_k-\eta_1)}_{<0}\ldots\underbrace{(\eta_k-\eta_{k-1})}_{<0}\underbrace{(\eta_k-\eta_{k+1})}_{>0}\ldots\underbrace{(\eta_k-\eta_n)}_{>0}},$$

откъдето следва, че $|l_{kn}(x)| = (-1)^k l_{kn}(x)$. Заместваме в (3.3):

$$|P(x)| \leq \sum_{k=0}^{n} |l_{kn}(x)| = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k l_{kn}(x) = \sum_{k=0}^{n} T_n(\eta_k) l_{kn}(x) \overset{(3.2)}{\equiv} T_n(x) = |T_n(x)|.$$

За последното равенство използвахме факта, че $|T_n(x)| = T_n(x),\ x > 1$.

- Нека $x < -1$. Постъпваме аналогично.

$$|P(x)| \overset{(3.1)}{=} \left| \sum_{k=0}^{n} P(\eta_k) l_{kn}(x) \right| \le \sum_{k=0}^{n} |P(\eta_k) l_{kn}(x)| \overset{|P(\eta_k)|\le 1}{\le} \sum_{k=0}^{n} |l_{kn}(x)| \, .$$

Определяме знака на $l_{kn}(x)$:

$$l_{kn}(x) = \frac{\overbrace{(x-\eta_0)}^{<0}\overbrace{(x-\eta_1)}^{<0}\dots\overbrace{(x-\eta_{k-1})}^{<0}\overbrace{(x-\eta_{k+1})}^{<0}\dots\overbrace{(x-\eta_n)}^{<0}}{\underbrace{(\eta_k-\eta_0)}_{<0}\underbrace{(\eta_k-\eta_1)}_{<0}\dots\underbrace{(\eta_k-\eta_{k-1})}_{<0}\underbrace{(\eta_k-\eta_{k+1})}_{>0}\dots\underbrace{(\eta_k-\eta_n)}_{>0}}.$$

От последното следва, че

$$|l_{kn}(x)| = (-1)^{n+k} l_{kn}(x)$$

и следователно

$$|P(x)| \le \sum_{k=0}^{n} |l_{kn}(x)| = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n+k} l_{kn}(x) = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} T_n(\eta_k) l_{kn}(x) \overset{(3.2)}{=} (-1)^n T_n(x) = |T_n(x)|.$$

Последното равенство следва от факта, че $T_n(x) > 0$ при n – четно и $T_n(x) < 0$ при n – нечетно за всяко $x < -1$.

□

Упражнение 4

Разделени разлики. Интерполационна формула на Нютон

Досега в упражненията разгледахме интерполационната задача на Лагранж – постановка, как да определим полинома, чиято графика минава през дадени точки, как да намерим оценка на грешката при това приближение и кои възли ни дават „най-добра" такава оценка. Нека накратко припомним постановката на задачата. Търсим $p(x) \in \pi_n$ такъв, че $p(x_i) = y_i$, $i = \overline{0, n}$, където x_i са различни възли, а $y_0, \dots, y_n$ са дадени стойности. Както казахме, полиномът на Лагранж може да бъде намерен като например:

- решим получената система за неизвестните коефициенти на полинома $a_0, a_1, \dots, a_n$.
- използваме интерполационната формула на Лагранж

  $$p(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k l_{kn}(x),$$

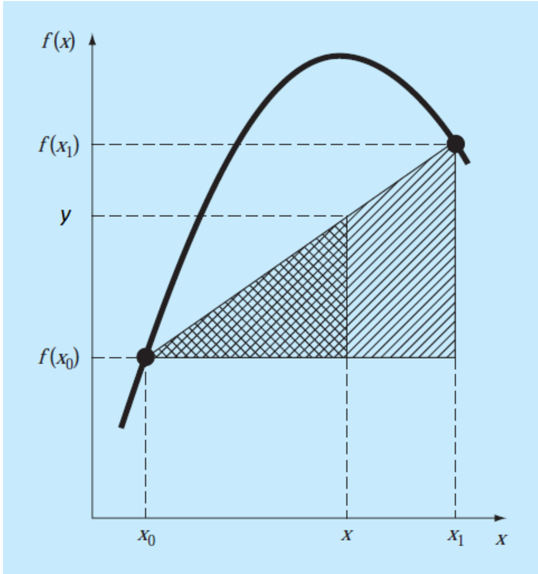
  където $l_{kn}(x)$ са базисните полиноми на Лагранж.

В тази секция ще разгледаме още една формула, по която може да се намери интерполационният полином на Лагранж – известната формула на Нютон. Всъщност, исторически, Нютон първи е получил аналитична формула за намирането му. Да обърнем внимание, че аналитичните формули, по които може да се построи полиномът, са различни, но полученият полином е **един и същ** (той е и единствен).

И така, преди да дадем общата формула на Нютон за намиране на полинома от π_n, ще разгледаме задачата в случая, когато търсим линеен и квадратичен интерполационен полином.

1. Линеен полином

   Нека в равнината са дадени точки (x_0, y_0) и (x_1, y_1). Търсим полином от π_1, чиято графика минава през точките:



Нека (x, y) е произволна точка в равнината, лежаща върху правата, съответстваща на графиката на полинома. Лесно се вижда (например използвайки подобни триъгълници или факта, че наклонът на правата е постоянен), че е в сила

$$\frac{y - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}.$$

От последното следва, че

$$y = f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0)\,,$$

т.е. това е уравнението на правата и следователно търсеният полином е

$$p(x) = f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0)\,.$$

Да обърнем внимание, че намерихме полинома във вида $p(x) = b_0 + b_1(x - x_0)$, където $b_0 = f(x_0)$, $b_1 = \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$.

2. Квадратична интерполация

Да намерим полинома от π_2, който интерполира точките (x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2). Последния ще търсим във вида

$$p(x) = \mathbf{b_0} + \mathbf{b_1}\,(x - x_0) + \mathbf{b_2}\,(x - x_0)\,(x - x_1)\,.$$

След известно пресмятане, като се използват условията за интерполация (тук няма да се спираме на извеждането), ще получим

$$b_0 = f(x_0),\ b_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0},\ b_2 = \frac{\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} - \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0}.$$

Следователно търсеният полином е

$$p(x) = f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0) + \frac{\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} - \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0}(x - x_0)(x - x_1).$$

Можем да постъпим аналогично за определяне на полинома на Лагранж от n-та степен, който отново ще търсим във вида

$$p(x) = b_0 + b_1\,(x - x_0) + b_2\,(x - x_0)\,(x - x_1) + \cdots + b_n(x - x_0)\ldots(x - x_{n-1}).$$

Интересно

Причината да търсим полинома във вида

$$p(x) = b_0 + b_1\,(x - x_0) + b_2\,(x - x_0)\,(x - x_1) + \cdots + b_n(x - x_0)\ldots(x - x_{n-1})$$

е следната. Както казахме, базисните полиноми на Лагранж имат стойност 1 само в един от възлите – този, за който отговарят. Във формулата на Нютон полиномът се търси като линейна комбинация на друг базис:

$$1,\; x - x_0,\; (x - x_0)(x - x_1),\; (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2), \ldots,\; (x - x_0)\ldots(x - x_{n-1}).$$

Втората базисна функция се нулира в x_0, следващата в x_0, x_1 и т.н. Благодарение на това, интерполационните условия водят до система с триъгълна матрица. Както знаем, решаването на такава система е непосредствено.

Преди да дадем общата формула на Нютон, ще въведем едно необходимо понятие.

Определение 1. Нека $x_0, \ldots, x_n$ са дадени различни точки. **Разделена разлика** от n-ти ред на функцията f в точките $x_0, \ldots, x_n$ ще бележим с $f[x_0, \ldots, x_n]$ и дефинираме с рекурентната връзка

$$f[x_0, \ldots, x_n] = \frac{f[x_1, \ldots, x_n] - f[x_0, \ldots, x_{n-1}]}{x_n - x_0},\; n = 1, 2, \ldots,$$

като $f[x_i] = f(x_i), \forall i$.

Преди да продължим, ще разгледаме един кратък пример.

Пример 1. Да се намери $f[x_0, x_1, x_2]$, ако $x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 2$ и $f(x_0) = 0$, $f(x_1) = -1$, $f(x_2) = 1$.

Решение. От дефиницията следва, че

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0}.$$

Последното означава, че за да пресметнем разделената разлика от втори ред $f[x_0, x_1, x_2]$, трябва да пресметнем разделените разлики от първи $f[x_1, x_2]$ и $f[x_0, x_1]$. И така:

$$f[x_0, x_1] = \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{-1 - 0}{1 - 0} = -1;$$
$$f[x_1, x_2] = \frac{f[x_2] - f[x_1]}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{1 - (-1)}{2 - 1} = 2.$$

Заместваме полученото във формулата за разделената разлика от втори ред:

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{2 - (-1)}{2 - 0} = \frac{3}{2}.$$

□

Връзката между понятието разделена разлика и интерполационния полином на Лагранж се открива в следната теорема.

Теорема 1. Разделената разлика $f[x_0, \dots, x_n]$ съвпада с коефициента пред x^n в интерполационния полином на Лагранж $L_n(f;x)$ за функцията f с възли $x_0, \dots, x_n$.

Като се използва последната теорема, може да се изведе формулата на Нютон за интерполационния полином на Лагранж:

$$L_n(f;x) = f(x_0)+f[x_0,x_1](x-x_0)+f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1)+\dots+f[x_0,\dots,x_n](x-x_0)\dots(x-x_{n-1})$$

или записана еквивалентно

$$L_n(f;x) = \sum_{k=0}^{n} f[x_0,\dots,x_k](x-x_0)\dots(x-x_{k-1}),$$

като допълнително приемем, че $(x-x_0)\dots(x-x_{k-1}) = 1$, при $k=0$.

Задачата за намиране на интерполационния полином на Лагранж чрез формулата на Нютон се свежда до определянето на разделените разлики в горепосочената формула. Тъй като формулата е рекурсивна, на практика се използва следната, удобна за компютърна реализация, схема (например за възли $x_0, \dots, x_5$):

x	$f(x)$	First divided differences	Second divided differences	Third divided differences
x_0	$f[x_0]$			
		$f[x_0,x_1] = \dfrac{f[x_1]-f[x_0]}{x_1-x_0}$		
x_1	$f[x_1]$		$f[x_0,x_1,x_2] = \dfrac{f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_0}$	
		$f[x_1,x_2] = \dfrac{f[x_2]-f[x_1]}{x_2-x_1}$		$f[x_0,x_1,x_2,x_3] = \dfrac{f[x_1,x_2,x_3]-f[x_0,x_1,x_2]}{x_3-x_0}$
x_2	$f[x_2]$		$f[x_1,x_2,x_3] = \dfrac{f[x_2,x_3]-f[x_1,x_2]}{x_3-x_1}$	
		$f[x_2,x_3] = \dfrac{f[x_3]-f[x_2]}{x_3-x_2}$		$f[x_1,x_2,x_3,x_4] = \dfrac{f[x_2,x_3,x_4]-f[x_1,x_2,x_3]}{x_4-x_1}$
x_3	$f[x_3]$		$f[x_2,x_3,x_4] = \dfrac{f[x_3,x_4]-f[x_2,x_3]}{x_4-x_2}$	
		$f[x_3,x_4] = \dfrac{f[x_4]-f[x_3]}{x_4-x_3}$		$f[x_2,x_3,x_4,x_5] = \dfrac{f[x_3,x_4,x_5]-f[x_2,x_3,x_4]}{x_5-x_2}$
x_4	$f[x_4]$		$f[x_3,x_4,x_5] = \dfrac{f[x_4,x_5]-f[x_3,x_4]}{x_5-x_3}$	
		$f[x_4,x_5] = \dfrac{f[x_5]-f[x_4]}{x_5-x_4}$		
x_5	$f[x_5]$			

Нека сега приложим формулата на Нютон за конкретна задача.

Задача 1. Да се намери интерполационният полином на Лагранж във форма на Нютон, интерполиращ функцията $f(x) = \sqrt{x}$ в т. $0, 1, 4$.

Решение. Да запишем първо интерполационните условия в таблица

x	0	1	4
y	0	1	2

Търсим полинома във вида

$$L_2(f;x) = f[x_0] + f[x_0,x_1](x-x_0) + f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1).$$

Да пресметнем разделените разлики, като попълним съответната таблица.

Възли	Ред 0	Ред 1	Ред 2
$x_0 = 0$	$f[x_0] = 0$		
		$f[x_0,x_1] = \dfrac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} = 1$	
$x_1 = 1$	$f[x_1] = 1$		$f[x_0,x_1,x_2] = \dfrac{f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_0} = -\dfrac{1}{6}$
		$f[x_1,x_2] = \dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = \dfrac{1}{3}$	
$x_2 = 4$	$f[x_2] = 2$		

Заместваме получените разделени разлики и получаваме

$$L_2(f;x) = 0 + 1(x-0) - \frac{1}{6}(x-0)(x-1) = \frac{7}{6}\,x - \frac{1}{6}\,x^2.$$

Забележка: Подробно решена задача може да намерите и тук: Newton's divided differences formula ☐

Вече показахме как се намира интерполационният полином на Лагранж, като се използва формулата на Нютон. Сега ще се спрем на няколко интересни свойства на разделената разлика. Нека първо отбележим, че от дефиницията на разделена разлика става ясно, че всяка разделена разлика се представя като линейна комбинация на функционалните стойности на f в съответните възли. Нека сега го покажем.

Задача 2. Да се докаже, че

$$f[x_0,\dots,x_n] = \sum_{k=0}^{n} \frac{f(x_k)}{\omega'(x_k)}, \tag{4.1}$$

за $\omega(x) = (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)$.

Доказателство. За да докажем горното тъждество, ще използваме, че разделената разлика от n-ти ред съвпада с коефициента пред x^n в полинома на Лагранж. Нека припомним и формулата на Лагранж, записана чрез $\omega(x)$:

$$L_n(f;x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k) l_{kn}(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k) \frac{\omega(x)}{(x-x_k)\omega'(x_k)}.$$

От последната формула се вижда, че коефициентът пред x^n е $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{f(x_k)}{\omega'(x_k)}$, откъдето следва исканото тъждество. ☐

От последната задача се вижда, че разделената разлика е линейна комбинация на $f(x_k)$ с коефициенти $\dfrac{1}{\omega'(x_k)}$ за съответните възли:

$$f[x_0,\dots,x_n] = \frac{1}{\omega'(x_0)}f(x_0) + \frac{1}{\omega'(x_1)}f(x_1) + \dots + \frac{1}{\omega'(x_n)}f(x_n). \tag{4.2}$$

Ще казваме още, че разделената разлика е **линеен функционал**[1] от вида $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$, където $A_k = \dfrac{1}{\omega'(x_k)}$.

Друг интересен факт за разделените разлики е, че те не зависят от подредбата на възлите. Лесно може да се покаже например, че $f[x_0,x_1] = f[x_1,x_0]$ или $f[x_0,x_1,x_2] = f[x_1,x_2,x_0]$. В общия случай на база само на рекурентната връзка това трудно може да се покаже, затова ще го покажем като използваме изведеното досега.

Задача 3. Докажете, че разделената разлика не зависи от подредбата на възлите, т.е.

$$f[x_0,\dots,x_n] = f[x_{i_0},x_{i_1},\dots,x_{i_n}],$$

където $i_0, i_1, \dots, i_n$ е произволна пермутация.

[1]Функционал е изображение, което приема функция и връща число. Пример за функционал е определеният интеграл. Линейният функционал F изпълнява условията $F(f+g) = F(f) + F(g)$ и $F(\lambda g) = \lambda F(g)$.

Доказателство. Тъй като разделената разлика от ред n съвпада с коефициента пред x^n, то, независимо от подредбата на възлите $x_0, \dots, x_n$, тя ще бъде едно и също число.
Забележка: Друг начин да се докаже последното е като се използва фактът, че разделената разлика е линейна комбинация на функционалните стойности, вж. (4.2). Това означава, че дори и да разместим местата на възлите в разделената разлика, линейната комбинация ще се запази. □

Задача 4. Да се докаже, че $(f+cg)[x_0, \dots, x_n] = f[x_0, \dots, x_n] + cg[x_0, \dots, x_n]$, където $c \in R$, а f и g са дадени функции.

Доказателство. За доказателството отново ще използваме (4.2), т.е. $f[x_0, \dots, x_n] = \sum_{k=0}^{n} \frac{f(x_k)}{\omega'(x_k)}$. От последното имаме

$$(f+cg)[x_0, \dots, x_n] = \sum_{k=0}^{n} \frac{(f(x)+cg(x))\big|_{x=x_k}}{\omega'(x_k)} = \sum_{k=0}^{n} \frac{f(x_k)+cg(x_k)}{\omega'(x_k)}$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{f(x_k)}{\omega'(x_k)} + c\sum_{k=0}^{n} \frac{g(x_k)}{\omega'(x_k)} = f[x_0, \dots, x_n] + cg[x_0, \dots, x_n].$$

□

Вече показахме, че ако $f \in \pi_n$, то интерполационният полином на Лагранж за f съвпада с f. Интересно свойство имат и разделените разлики, когато функцията, която интерполираме, е полином:

- Ако $f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n \in \pi_n$, то $f[x_0, \dots, x_n] = a_n$;
- Ако $f \in \pi_{n-1}$, то $f[x_0, \dots, x_n] = 0$.

Задача 5. Да се докаже, че $\sum_{k=0}^{n} \frac{\omega''(x_k)}{\omega'(x_k)} = 0$.

Доказателство. За доказателството ще използваме формула (4.1). След като я приложим за функцията $f(x) = \omega''(x)$ получаваме:

$$f[x_0, \dots, x_n] = \sum_{k=0}^{n} \frac{\omega''(x_k)}{\omega'(x_k)}.$$

Тъй като $f(x) = \omega''(x)$ е от степен $n-1$ ($\omega(x)$ е от степен $n+1$), то разделената разлика е равна на 0, откъдето следва и исканото тъждество. □

Задача 6. Нека $x_k \neq 0, -1$ за $k = 1, \dots, n$. Докажете равенството

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k^n f\left(\dfrac{1}{x_k}\right)}{f'(x_k)(1+x_k)} = (-1)^n \left(x_1 x_2 \dots x_n - 1\right),$$

където $f(x) = (x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)$.

Доказателство. Нека означим $x_{n+1} = -1$ и $\omega(x) = (x-x_1)\dots(x-x_n)(x-x_{n+1})$. Ще докажем твърдението поетапно.

(a) Да разгледаме функцията $g(x) = x^n f\left(\dfrac{1}{x}\right)$, чиято стойност в т. x_k е равна на числителя. Имаме:

$$
\begin{aligned}
g(x) &= x^n\left(\frac{1}{x}-x_1\right)\left(\frac{1}{x}-x_2\right)\dots\left(\frac{1}{x}-x_n\right)\\
&= \cancel{x}^n\frac{(1-x_1x)}{\cancel{x}}\frac{(1-x_2x)}{\cancel{x}}\dots\frac{(1-x_nx)}{\cancel{x}} = \left((-1)^n x_1\dots x_n\right)x^n+\dots
\end{aligned}
$$

Следователно

$$
g[x_1,\dots,x_{n+1}] = (-1)^n x_1\dots x_n \tag{4.3}
$$

(б) Ще покажем, че знаменателят в сумата е равен на $\omega'(x_k)$. Да припомним първо, че

$$
f'(x_k) = (x_k-x_1)(x_k-x_2)\dots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\dots(x_k-x_n). \tag{4.4}
$$

От друга страна,

$$
\omega'(x_k) = (x_k-x_1)(x_k-x_2)\dots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\dots(x_k-x_n)(x_k-x_{n+1}). \tag{4.5}
$$

От (4.4) и (4.5) следва, че

$$
\omega'(x_k) = (x_k-x_{n+1})f'(x_k) = (x_k+1)f'(x_k).
$$

След като заместим полученото дотук в търсената сума от условието, получаваме

$$
\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k^n f\left(1/x_k\right)}{f'(x_k)(1+x_k)} = \sum_{k=1}^{n}\frac{g(x_k)}{\omega'(x_k)}.
$$

За функцията g обаче намерихме разделената разлика от n-ти ред, вж. (а), и следователно ще изразим дясната страна в последното равенство чрез $g[x_1,\dots,x_{n+1}]$. Използваме (4.1):

$$
\begin{aligned}
g[x_1,\dots,x_{n+1}] &= \sum_{k=1}^{n+1}\frac{g(x_k)}{\omega'(x_k)} = \sum_{k=1}^{n}\frac{g(x_k)}{\omega'(x_k)} + \frac{g(x_{n+1})}{\omega'(x_{n+1})}\\
\iff \sum_{k=1}^{n}\frac{g(x_k)}{\omega'(x_k)} &= g[x_1,\dots,x_{n+1}] - \frac{g(x_{n+1})}{\omega'(x_{n+1})}.
\end{aligned} \tag{4.6}
$$

Остана да определим последните два члена.

- $g[x_1,\dots,x_{n+1}] =$ коефициента пред $x^n = (-1)^n x_1x_2\dots x_n$;
- $\dfrac{g(x_{n+1})}{\omega'(x_{n+1})} = \dfrac{g(-1)}{\omega'(-1)} = \dfrac{(-1)^n(-1-x_1)(-1-x_2)\dots(-1-x_n)}{(-1-x_1)(-1-x_2)\dots(-1-x_n)} = (-1)^n.$

Заместваме последното в (4.6) и получаваме исканото тъждество. □

- Формула на Лагранж

  Базисните полиноми на Лагранж зависят само от възлите на интерполация. Следователно, ако искаме да решим интерполационната задача с едни и същи възли, но различни съответстващи им стойности, можем да построим базисните полиноми само веднъж. Тогава в линейната комбинация на базисните полиноми ще променяме само коефициентите – $f(x_i)$.

- Формула на Нютон

  Ако искаме да построим редица от интерполационните полиноми $L_1(f;x), L_2(f;x), \dots$, както следва – $L_1(f;x)$ интерполира f в точките x_0, x_1, $L_2(f;x)$ интерполира f в точките x_0, x_1, x_2 и т.н., то е удобно да използваме формулата на Нютон. Тъй като за всеки нов полином добавяме по един възел, само ще трябва да допълним таблицата с разделени разлики и да прибавим съответния член към построения преди това полином. Ако сменим функционалните стойности обаче, ще трябва да пресметнем всички разделени разлики отначало!

Упражнение 5

Крайни разлики

В предишното упражнение разгледахме една нова формула за намиране на интерполационния полином на Лагранж – формулата на Нютон. Полиномът във формата на Нютон има следния вид:

$$L_n(f;x) = f[x_0]+f[x_0,x_1](x-x_0)+f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1)+\cdots+f[x_0,\ldots,x_n](x-x_0)\ldots(x-x_{n-1}).$$

Както казахме, той се търси като линейна комбинация на базисните функции

$$1,\ x-x_0,\ (x-x_0)(x-x_1),\ (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2),\ldots,(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1}),$$

като коефициентите в полинома са така наречените разделени разлики, които можем лесно да пресметнем, използвайки следната схема:

x	$f(x)$	First divided differences	Second divided differences	Third divided differences
x_0	$f[x_0]$			
		$f[x_0,x_1]=\frac{f[x_1]-f[x_0]}{x_1-x_0}$		
x_1	$f[x_1]$		$f[x_0,x_1,x_2]=\frac{f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_0}$	
		$f[x_1,x_2]=\frac{f[x_2]-f[x_1]}{x_2-x_1}$		$f[x_0,x_1,x_2,x_3]=\frac{f[x_1,x_2,x_3]-f[x_0,x_1,x_2]}{x_3-x_0}$
x_2	$f[x_2]$		$f[x_1,x_2,x_3]=\frac{f[x_2,x_3]-f[x_1,x_2]}{x_3-x_1}$	
		$f[x_2,x_3]=\frac{f[x_3]-f[x_2]}{x_3-x_2}$		$f[x_1,x_2,x_3,x_4]=\frac{f[x_2,x_3,x_4]-f[x_1,x_2,x_3]}{x_4-x_1}$
x_3	$f[x_3]$		$f[x_2,x_3,x_4]=\frac{f[x_3,x_4]-f[x_2,x_3]}{x_4-x_2}$	
		$f[x_3,x_4]=\frac{f[x_4]-f[x_3]}{x_4-x_3}$		$f[x_2,x_3,x_4,x_5]=\frac{f[x_3,x_4,x_5]-f[x_2,x_3,x_4]}{x_5-x_2}$
x_4	$f[x_4]$		$f[x_3,x_4,x_5]=\frac{f[x_4,x_5]-f[x_3,x_4]}{x_5-x_3}$	
		$f[x_4,x_5]=\frac{f[x_5]-f[x_4]}{x_5-x_4}$		
x_5	$f[x_5]$			

И така, всяка разделена разлика от вида $f[x_i,\ldots,x_j]$ съдържа в знаменателя си разликата $x_j - x_i$. Нека сега изберем възлите x_i да са равноотдалечени, т.е. всеки два последователни възела да бъдат на разстояние h (още ще го наричаме стъпка), т.е. $x_1 = x_0 + h$, $x_2 = x_1 + h, \ldots$ или, иначе казано, $x_i = x_0 + ih,\ i = 1,2,\ldots,n$. В този случай знаменателят в разделената разлика ще бъде един и същ за всяка разделена разлика от нашата таблица. Оказва се, че в случая на равноотдалечени възли е удобно знаменателите да се пропуснат и може да се изведе формула за интерполационния полином на база на така наречените **крайни разлики**.

Определение 2. Нека е дадена крайна редица от числа $f_0, f_1, f_2, \ldots$, които са стойности на функцията f в точките $x_0,\ x_1,\ x_2, \ldots$. Крайна разлика от k-ти ред за функцията f в точката x_i ще бележим с $\Delta^k f_i$ и дефинираме рекурентно

$$\Delta^k f_i = \Delta^{k-1} f_{i+1} - \Delta^{k-1} f_i,\ k = 1,2,\ldots,$$

като $\Delta^0 f_i = f_i, \forall i$.

Нека отново разгледаме кратък пример.

Пример 2. Дадена е редицата от стойности $f_0 = 1,\ f_1 = 3,\ f_2 = -1,\ f_3 = 7$. Намерете $\Delta^2 f_1$ и $\Delta^3 f_0$.

Решение. Да пресметнем двете крайни разлики поотделно. Използваме рекурентната връзка и заместваме, като всеки път понижаваме реда на крайната разлика:

$$\Delta^2 f_1 = \Delta^1 f_2 - \Delta^1 f_1 = (f_3 - f_2) - (f_2 - f_1) = f_3 - 2f_2 + f_1 = 7 + 2 + 3 = 12;$$

$$\begin{aligned}\Delta^3 f_0 &= \Delta^2 f_1 - \Delta^2 f_0 = \left(\Delta^1 f_2 - \Delta^1 f_1\right) - \left(\Delta^1 f_1 - \Delta^1 f_0\right) = \Delta^1 f_2 - 2\Delta^1 f_1 + \Delta^1 f_0 \\ &= (f_3 - f_2) - 2(f_2 - f_1) + (f_1 - f_0) = f_3 - 3f_2 + 3f_1 - f_0 \\ &= 7 + 3 + 9 - 1 = 18.\end{aligned}$$

$\square$

След малко ще покажем, че в интерполационната формула с равноотдалечени възли участват крайни разлики $\Delta^k f_0$ и тях ще намираме като използваме познатата ни, но модифицирана таблица:

Възли	Ред 0	Ред 1	Ред 2	...
x_0	$\Delta^0 f_0 = f(x_0)$			
		$\Delta^1 f_0 = \Delta^0 f_1 - \Delta^0 f_0$		
x_1	$\Delta^0 f_1 = f(x_1)$		$\Delta^2 f_0 = \Delta^1 f_1 - \Delta^1 f_0$	
		$\Delta^1 f_1 = \Delta^0 f_2 - \Delta^0 f_1$		...
x_2	$\Delta^0 f_2 = f(x_2)$		$\Delta^2 f_1 = \Delta^1 f_2 - \Delta^1 f_1$	
		$\Delta^1 f_2 = \Delta^0 f_2 - \Delta^0 f_1$		
x_3	$\Delta^0 f_3 = f(x_3)$			
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	

Да обърнем внимание, че

- неслучайно със символа Δ се означава крайна разлика. На езика на математиката, той често се използва като синоним на думата „изменение”;
- за да се пресметне $\Delta^k f_i$, се пресмята линейна комбинация на стойностите f_i, f_{i+1}, $\dots$, f_{i+k}, т.е. линейна комбинация на f_i и следващите k на брой стойности на f (да забележим, че коефициентите в горните примери са точно биномни коефициенти, т.е. коефициентите в развитието на Нютоновия бином, с редуващи се знаци).

Нека разгледаме някои важни свойства на крайната разлика, след което ще изведем интерполационния полином на Лагранж в случая на равноотдалечени възли. Преди ще припомним една важна лема, доказана на лекции.

Лема. Нека $x_i = x_0 + ih,\ i = 0, \dots, k$ и функцията $f(x)$ е определена в тези точки. Тогава

$$f[x_0, \dots, x_k] = \frac{\Delta^k f_0}{k! h^k}.$$

Доказателството на последната лема е непосредствено, като се използва индукция по броя на точките.

Последната лема ни дава връзка между разделената разлика от k-ти ред и крайната разлика от същия ред, взета в т. x_0. Чрез последната връзка част от свойствата на разделената разлика се пренасят върху крайната:

- Крайната разлика е линеен функционал, т.е. $\Delta^n (f + cg)_i = \Delta^n f_i + c\Delta^n g_i$;
- Ако $f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n \in \pi_n$, то $\Delta^n f_0 = n! h^n a_n$;
- Крайната разлика от n-ти ред е нула за всяка функция $f \in \pi_{n-1}$.

Нека сега разгледаме една аналитична формула за пресмятането на произволна крайна разлика от n-ти ред за функцията f, взета в т. x_i.

Задача 7. Да се докаже, че $\Delta^k f_i = \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} f_{i+j}$.

Доказателство. Искаме да покажем, че крайната разлика от n-ти ред се представя във вида

$$\Delta^k f_i = (-1)^k \binom{k}{0} f_i + (-1)^{k-1} \binom{k}{1} f_{i+1} + \cdots - \binom{k}{k-1} f_{i+k-1} + \binom{k}{k} f_{i+k},$$

т.е. да покажем, че коефициентите в линейната комбинация пред стойностите $f_i, \ldots, f_{i+k}$ се определят еднозначно с горната формула. Ще използваме индукция по реда на крайната разлика, както и тъждеството

$$\binom{n}{k+1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1}. \tag{5.1}$$

База на индукцията. Проверяваме дали твърдението е изпълнено за $k = 1:$

$$\Delta^1 f_i = f_{i+1} - f_i = (-1)^1 \binom{1}{0} f_i + (-1)^0 \binom{1}{1} f_{i+1}.$$

Индукционна стъпка. Нека допуснем, че твърдението е вярно за някое n, т.е. е в сила

$$\Delta^n f_i = \sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} \binom{n}{j} f_{i+j}.$$

Ще покажем, че то е в сила и за $k = n + 1$, т.е. е изпълнено

$$\begin{aligned}
\Delta^{n+1} f_i &= \sum_{j=0}^{n+1} (-1)^{n+1-j} \binom{n+1}{j} f_{i+j} \\
&= (-1)^{n+1} \underbrace{\binom{n+1}{0}}_{1} f_i + (-1)^n \binom{n+1}{1} f_{i+1} + \cdots - \binom{n+1}{n} f_{i+n} + \underbrace{\binom{n+1}{n+1}}_{1} f_{i+n+1}.
\end{aligned}$$

Имаме

$$\begin{aligned}
\Delta^{n+1} f_i =& \Delta^n f_{i+1} - \Delta^n f_i = \sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} \binom{n}{j} f_{i+j+1} - \sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} \binom{n}{j} f_{i+j} \\
&= \left((-1)^n \binom{n}{0} f_{i+1} + (-1)^{n-1} \binom{n}{1} f_{i+2} + \cdots + \binom{n}{n-2} f_{i+n-1} - \binom{n}{n-1} f_{i+n} + \binom{n}{n} f_{i+n+1} \right) \\
&- \left((-1)^n \binom{n}{0} f_i + (-1)^{n-1} \binom{n}{1} f_{i+1} + \cdots + \binom{n}{n-2} f_{i+n-2} - \binom{n}{n-1} f_{i+n-1} + \binom{n}{n} f_{i+n} \right).
\end{aligned}$$

Групираме членовете и получаваме, че последното е равно на

$$\begin{aligned}
(-1)^{n+1} \binom{n}{0} f_i + (-1)^n \left\{ \binom{n}{0} + \binom{n}{1} \right\} f_{i+1} + \cdots + \left\{ \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n-2} \right\} f_{i+n-1} \\
- \left\{ \binom{n}{n} + \binom{n}{n-1} \right\} f_{i+n} + \binom{n}{n} f_{i+n+1}.
\end{aligned}$$

Накрая, използвайки (5.1), имаме

$$\Delta^{n+1} f_i = (-1)^{n+1} \binom{n}{0} f_i + (-1)^n \binom{n+1}{1} f_{i+1} + \cdots + \binom{n+1}{n-1} f_{i+n-1} - \binom{n+1}{n} f_{i+n} + \binom{n}{n} f_{i+n+1}.$$

Тъй като $\binom{n}{0} = \binom{n+1}{0} = 1$ и $\binom{n}{n} = \binom{n+1}{n+1} = 1$, то

$$\Delta^{n+1} f_i = (-1)^{n+1} \binom{n+1}{0} f_i + \cdots + \binom{n+1}{n-1} f_{i+n-1} - \binom{n+1}{n} f_{i+n} + \binom{n+1}{n+1} f_{i+n+1} \ .$$

□

Следствие 1. За всяко естествено число n е в сила формулата

$$\Delta^n f_0 = \sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} \binom{n}{j} f_j.$$

Последната задача ни дава формула, по която можем да пресметнем всяка крайна разлика от произволен ред, взета за съответните възли.

Задача 8. Пресметнете крайните разлики в пример 5, като използвате аналитичната формула.

Да обобщим накратко какво се случи дотук:

- В случая на равноотдалечени възли, т.е. $x_i = x_0 + ih, \ i = 1, 2, \ldots, n$, разделените разлики във формулата на Нютон имат един и същ знаменател. Въведохме понятието крайна разлика;
- Връзката между разделена и крайна разлика се задава с тъждеството
$$f[x_0, \ldots, x_k] = \frac{\Delta^k f_0}{k! h^k};$$
- За крайната разлика от n-ти ред е в сила
$$\Delta^n f_0 = \sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} \binom{n}{j} f_j.$$

За да направим връзка между интерполационната формула и крайната разлика, ще заместим разделената разлика в интерполационния полином във форма на Нютон, с еквивалентния ѝ израз, който получихме:

$$\begin{aligned} L_n(f; x) &= \sum_{k=0}^{n} f[x_0, \ldots, x_k](x - x_0) \ldots (x - x_{k-1}) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\Delta^k f_0}{k! h^k} (x - x_0) \ldots (x - x_{k-1}) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{\Delta^k f_0}{k! h^k} (x - x_0)(x - x_0 - h)(x - x_0 - 2h) \ldots (x - x_0 - (k-2)h)(x - x_0 - (k-1)h). \end{aligned}$$

Тъй като навсякъде изразът $x - x_0$ се повтаря, ще го положим да бъде равно на th. Последното полагане избираме, за да можем да изнесем коефициент h от всяка една от скобите в сумата. Заместваме полагането:

$$\begin{aligned} L_n(f; x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{\Delta^k f_0}{k! h^k} (th)(th - h)(th - 2h) \ldots (th - (k-2)h)(th - (k-1)h) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{\Delta^k f_0}{k! \cancel{h^k}} \cancel{h^k} t(t-1)(t-2) \ldots (t-k+2)(t-k+1). \end{aligned}$$

И така, за полагането $x - x_0 = th$ или еквивалентно $x = x_0 + th$, получихме

$$L_n(f; x) = L_n(f; x_0 + th) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\Delta^k f_0}{k!} t(t-1)(t-2) \ldots (t-k+2)(t-k+1).$$

В литературата означението $\binom{t}{k}$ се среща при произволни реални стойности на параметъра t. С него се означава биномната функция, която се определя от равенството

$$\binom{t}{k} := \begin{cases} \dfrac{t(t-1)\dots(t-k+1)}{k!}, & k > 0, \\ 1, & k = 0. \end{cases}$$

Неформално, можем да си мислим за горната формула като $\dfrac{t!}{k!(t-k)!}$. От последното следва, че интерполационният полином може да се запише като

$$L_n(f; x_0 + th) = \sum_{k=0}^{n} \Delta^k f_0 \binom{t}{k}.$$

Последната формула се нарича **формула на Нютон за интерполиране напред**.

Нека сега използваме горната формула, за да определим интерполационния полином за дадени равноотдалечени възли и стойности.

Задача 9. Определете стойността на $\sin 52°$, като построите интерполационния полином за таблицата

$\alpha°$	45	50	55	60
$\sin\alpha$	0.7071	0.7660	0.8192	0.8660

и използвате формулата на Нютон за интерполиране напред.

Решение. Търсим полинома във вида

$$L_3(f; x_0 + th) = \sum_{k=0}^{3} \Delta^k f_0 \binom{t}{k} = \Delta^0 f_0 \binom{t}{0} + \Delta^1 f_0 \binom{t}{1} + \Delta^2 f_0 \binom{t}{2} + \Delta^3 f_0 \binom{t}{3}.$$

Да обърнем внимание, че полиномът се представя по степените на независимата променлива t чрез полиномите

$$\binom{t}{0} = 1, \quad \binom{t}{1} = t, \quad \binom{t}{2} = \frac{t(t-1)}{2!}, \quad \binom{t}{3} = \frac{t(t-1)(t-2)}{3!},$$

т.е. наистина търсеният полином е от степен 3.

Да построим таблицата с крайни разлики

Възли	Ред 0	Ред 1	Ред 2	Ред 3
$x_0 = 45$	$\Delta^0 f_0 = 0.7071$			
		$\Delta^1 f_0 = 0.7660 - 0.7071 = 0.0589$		
$x_1 = 50$	$\Delta^0 f_1 = 0.7660$		$\Delta^2 f_0 = -0.0057$	
		$\Delta^1 f_1 = 0.8192 - 0.7660 = 0.0532$		$\Delta^3 f_0 = -0.0007$
$x_2 = 55$	$\Delta^0 f_2 = 0.8192$		$\Delta^2 f_1 = -0.0064$	
		$\Delta^1 f_2 = 0.8660 - 0.8192 = 0.0468$		
$x_3 = 60$	$\Delta^0 f_3 = 0.8660$			

Заместваме полученото в интерполационната формула:

$$L_3(f; x_0 + th) = 0.7071 + 0.0589t - 0.0057\frac{t(t-1)}{2} - 0.0007\frac{t(t-1)(t-2)}{6}.$$

Търсим стойността на полинома в точката $x = 52$. Нашата формула обаче е израз на независимата променлива t, която можем да определим като използваме връзката

$t = \dfrac{x - x_0}{h}$. Заместваме $x = 52, h = 5$ и $x_0 = 45$ във формулата за t и получаваме $t = \dfrac{7}{5}$. Следователно

$$L_3(f; 52) = \left(0.7071 + 0.0589t - 0.0057\frac{(t-1)}{2} - 0.0007\frac{t(t-1)(t-2)}{6}\right)\Bigg|_{t=\frac{7}{5}} = 0.788003.$$

□

По подобен начин може да се изведе и формулата за интерполиране назад (вж. лекции). Тя се извежда, като се използва формулата на Нютон, приложена за възлите x_n, x_{n-1}, x_{n-2},..., x_0 (взети в тази последователност), т.е.

$$L_n(f; x) = \sum_{k=0}^{n} f[x_n, x_{n-1} \dots, x_{n-k}](x - x_n) \dots (x - x_{n-k+1}).$$

След аналогична смяна $x = x_n + th$ се получава **формулата на Нютон за интерполиране назад**

$$L_n(f; x_n + th) = \sum_{k=0}^{n} \Delta^k f_{n-k} \binom{t + k - 1}{k}.$$

За намирането на полинома по горната формула се използва същата таблица с крайни разлики, като коефициентите се намират на последния ред във всеки един от нейните стълбове.

Задача 10. Решете задача 9, като използвате формулата на Нютон за интерполиране назад.

Разбира се, всички разглеждани до момента формули намират един и същи полином, ако им зададем конкретни възли и стойности. Разликата между формулите за интерполиране напред и интерполиране назад обаче се вижда в следния случай. Нека са ни дадени например 50 равноотдалечени възела $x_0, \dots, x_{49}$ и съответстващи стойности на дадена функция f в тези точки. Нека построим редица от интерполационни полиноми по формулата за интерполиране напред. Тогава полиномът от първа степен ще интерполира f в точките x_0, x_1; полиномът от втора степен – в точките x_0, x_1, x_2 и т.н. Ако използваме формулата за интерполиране назад, полиномът от първа степен ще използва възли x_n, x_{n-1}; полиномът от втора – възлите x_n, x_{n-1}, x_{n-2} и т.н.

Ако искаме да пресметнем приближено стойността на f в дадена точка, често на практика се подхожда по следния начин. Построява се редица от интерполационни полиноми докато разликата на две съседни приближения стане достатъчно близка, т.е. по-малка от предварително зададен толеранс на грешката. Тогава можем да считаме, че сме намерили стойността с такава точност. Вземайки предвид казаното по-горе е ясно, че ако търсим стойността на f в точка близка до началото на интервала, за предпочитане е да използваме формулата с разлика напред и обратно, ако искаме да намерим стойността на f в точка близка до края на интервала – да използваме формулата с разлика назад.

Да отбележим отново, че формулите с крайни разлики имат следното предимство в сравнение с формулата с разделени разлики – за пресмятането на крайните разлики не се налага да се извършва деление, което е относително бавна и неточна операция в компютъра. Разбира се, недостатък е, че формулите са приложими само за равноотдалечени възли.

Задача 11. Нека $f_0, f_1, \dots$ е произволна редица от числа, за които $\Delta^{n+1} f_i = 0$ за всяко $i = 0, 1, \dots$ Докажете, че съществува единствен алгебричен полином $q(x)$ от степен n, за който $q(i) = f_i, i = 0, 1, \dots, n, n + 1, \dots$

Доказателство. Нека $q(x) \in \pi_n$ е полиномът, който удовлетворява интерполационните условия $q(i) = f_i, i = \overline{0, n}$. Вече знаем, че последният е единствен. Ще покажем, че той удовлетворява и условията $q(i) = f_i, i > n$. За целта ще използваме принципа на математическата индукция. Нека допуснем, че $q(i) = f_i, i = 0, 1, \ldots, m$ за $m \geq n$. Ще покажем, че твърдението е изпълнено и за $m + 1$, т.е. $q(m+1) = f_{m+1}$. Имаме

- $q(0) = f_0, \ldots, q(m) = f_m,\ m \geq n,$
- $\Delta^{n+1} f_i = 0,\ i = 0, 1, \ldots$ (по условие),
- $\Delta^{n+1} q(i) = 0\ (q \in \pi_n)$.

От последните две следва, че $\Delta^{n+1} f_i = \Delta^{n+1} q(i)$. От друга страна, аналитичната формула от задача 7 за крайната разлика от $n+1$-ви ред ни дава

$$\sum_{j=0}^{n+1} (-1)^{n+1-j} \binom{n+1}{j} f_{i+j} = \sum_{j=0}^{n+1} (-1)^{n+1-j} \binom{n+1}{j} q(i+j),\ \forall i.$$

Нека $i = m - n$. Тогава

$$\sum_{j=0}^{n+1} (-1)^{n+1-j} \binom{n+1}{j} f_{m-n+j} = \sum_{j=0}^{n+1} (-1)^{n+1-j} \binom{n+1}{j} q(m-n+j).$$

или, което е същото,

$$\sum_{j=0}^{n} (-1)^{n+1-j} \binom{n+1}{j} f_{m-n+j} + f_{m+1} = \sum_{j=0}^{n} (-1)^{n+1-j} \binom{n+1}{j} q(m-n+j) + q(m+1).$$

Сега използвайки факта, че $f_i = q(i), i = m-n, ..., m$ следва, че $f_{m+1} = q(m+1)$. □

Последната задача дава прост критерий да проверим дали дадени точки лежат върху права/парабола/крива от трета степен и т.н. Така например, ако крайните разлики от втори ред се нулират, то точките лежат върху права (коефициентите пред втората и по-високите степени в интерполационния полином ще бъдат нули).

Задача 12. Като се използват крайни разлики, да се намери сумата $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$.

Решение. За да намерим сумата, ще използваме доказаното в предишната задача. Нека означим $S_i = 0^2 + 1^2 + 2^2 + \cdots + i^2$. Да пресметнем последователно крайните разлики

$$\begin{aligned}
\Delta^1 S_i &= S_{i+1} - S_i = (i+1)^2, \\
\Delta^2 S_i &= \Delta^1 S_{i+1} - \Delta^1 S_i = (i+2)^2 - (i+1)^2 = 2i + 3, \\
\Delta^3 S_i &= \Delta^2 S_{i+1} - \Delta^2 S_i = 2(i+1) + 3 - (2i+3) = 2, \\
\Delta^4 S_i &= 2 - 2 = 0,\ i = 0, 1, 2, \ldots.
\end{aligned}$$

Получихме, че за редицата от числа $S_0, S_1, \ldots$ е изпълнено $\Delta^4 S_i = 0$, $i = 0, 1, 2, \ldots$ Следователно съществува единствен полином $q \in \pi_3$, такъв че $q(i) = S_i,\ i = 0, 1, \ldots$ Последния можем да определим с интерполационната формула на Нютон за интерполиране напред

$$\begin{aligned}
q(t) &= \sum_{k=0}^{3} \Delta^k q_0 \binom{t}{k} = \sum_{k=0}^{3} \Delta^k S_0 \binom{t}{k} \\
&= \Delta^0 S_0 + \Delta^1 S_0 \frac{t}{1!} + \Delta^2 S_0 \frac{t(t-1)}{2!} + \Delta^3 S_0 \frac{t(t-1)(t-2)}{3!} \\
&= 0 + t + \frac{3}{2} t(t-1) + \frac{2}{6} t(t-1)(t-2) = \frac{t(t+1)(2t+1)}{6}.
\end{aligned}$$

Следователно търсената сума е

$$0^2 + 1^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

□