Числени методи, сп. Информатика
Задачи за упражнение

Задача 1. Като използвате интерполационната формула на Лагранж, намерете полинома $p \in \pi_2$, който удовлетворява условията $p(-1) = 2,\ p(1) = 2,\ p(2) = 5$. Представете $p(x)$ по степените на x.

Задача 2. Да се построи полиномът на Лагранж от трета степен, който удовлетворява условията $L_3(x_k) = y_k$, където $x_k = k - 5$, $y_k = 3k^3 + 2k^2 + k + 1$, $k = 0, 1, 2, 3$.

Задача 3. Като се използва интерполационната формула на Лагранж, без да се разкриват скобите, да се опрости изразът

$$-\frac{1}{6}(x-1)(x-2)(x-3) + x(x-2)(x-3) - \frac{3}{2}x(x-1)(x-3) + \frac{2}{3}(x-1)(x-2)x.$$

Задача 4. Да се докаже равенството

$$\sum_{k=0}^{n}(x-x_k)^{n+1} l_{kn}(x) = (-1)^n \omega(x),$$

където $\omega(x) = (x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n)$.

Задача 5. Полиномът $L_2(f;x)$ интерполира $f(x) = e^x$ в т. $-1, 0, 1$. Като използвате формулата за оценка на грешката, докажете, че

$$\max_{x\in[-1,1]} |f(x) - L_2(f;x)| \le \frac{1}{5}.$$

Задача 6. Да се докаже, че грешката при апроксимация на функцията $f(x) = e^{2x}$ в интервала $[-1/2, 1/2]$ с интерполационния полином на Лагранж от втора степен, построен за възли $-1/2,\ 0,\ 1/2$, не надминава $\sqrt{3}/9$.

Задача 7. Нека $f \in C^2[0,1]$ и $|f''(x)| \le x^2$ за всяко $x \in [0,1]$. Да означим с $p_\xi(x)$ по части линейната в $[0,\xi]$ и $[\xi,1]$ непрекъсната функция, която интерполира f в точките $0, \xi, 1$. Да се определи ξ така, че $|f(x) - p_\xi(x)|$ да бъде по-малко от 0.02 в интервала [0,1].

Задача 8. Нека $P_\xi(x) \in \pi_2$ е полиномът, който интерполира функцията $f(x) = |x|$ в точките $-1, \xi, 1$, където $0 \le \xi < 1$. Да се определи ξ така, че грешката $\max\limits_{x\in[-1,1]} |f(x) - P_\xi(x)|$ да е минимална.

Задача 9. Нека $\max\limits_{x\in[a,b]} |f^{(k)}(x)| = M_k$ и $M_k \le A^k$, за $k = 0, 1, \ldots$, където A е константа. Да се докаже, че

$$\max_{x\in[a,b]} |L_n(f;x) - f(x)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

при произволна таблица от интерполационни възли $\{x_{kn}\}_{k=0}^{n}$, $n = 0, 1, \ldots$, $a \le x_{k0} < x_{k1} < \cdots < x_{kn} \le b$.

Задача 10. Търси се приближено стойността на функцията $f(x) = e^x$ за $x = 0.15$. Да се даде оценка на грешката на апроксимация, която се получава, като се построи полиномът, интерполиращ $f(x)$ в точките $0, 0.1, 0.2, 0.3$.

Задача 11. Нека са дадени възли $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$. Да означим с $P(x) \in \pi_n$ полинома, който удовлетворява интерполационните условия $P(x_k) = (-1)^{n-k}$, $k = \overline{0,n}$.

(а) Да се докаже, че $|L_n(f;x)| \leq |P(x)|$, $\forall x \notin (x_0, x_n)$, ако $|f(x_k)| \leq 1,\ k = \overline{0,n}$.

(б) Да се докаже, че равенство се достига тогава и само тогава, когато $f(x_k) = P(x_k)$ или $f(x_k) = -P(x_k),\ k = \overline{0,n}$.

Задача 12. Като се използва интерполационната формула на Нютон, да се намери полиномът, интерполиращ таблицата

x	-5	-1	0	2
f(x)	-2	6	1	3

Задача 13. В таблицата са дадени част от разделените разлики за функцията f. Като се използва дефиницията на разделена разлика, да се намерят липсващите стойности.

$x_0 = 0$	$f[x_0]$		
		$f[x_0, x_1]$	
$x_1 = 0.4$	$f[x_1]$		$f[x_0, x_1, x_2] = \dfrac{50}{7}$
		$f[x_1, x_2] = 10$	
$x_2 = 0.7$	$f[x_2] = 6$		

Задача 14. За функцията f формулата на Нютон за интерполационната задача на Лагранж дава следния полином

$$P_3(x) = 1 + 4x + 4x(x - 0.25) + \frac{16}{3}x(x - 0.25)(x - 0.5),$$

построен за възли $x_0 = 0,\ x_1 = 0.25,\ x_2 = 0.5$ и $x_3 = 0.75$. Намерете $f(0.75)$. Каква грешка сте допуснали?

Задача 15. Нека $f(x) = x^{n+1}$. Да се докаже, че $f[x_0, \ldots, x_n] = x_0 + x_1 + \cdots + x_n$ за $x_0 < \cdots < x_n$.
Упътване: Намерете грешката $f(x) - L_n(f;x)$, като използвате теоремата за оценка на грешката, и сравнете разделените разлики на получените функции от двете страни на равенството.

Задача 16. Да се докаже, че $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} x_k \frac{\omega''(x_k)}{\omega'(x_k)} = (n+1)n$.