第四章 非线性方程求根

/* Solutions of Nonlinear Equations */

求 $f(x)=0$ 的根

数学物理中的许多问题常常归结为解函数方程 $f(x)=0$，方程 $f(x)=0$ 的解 x^* 称作它的根，或称为 $f(x)$ 的零点。

设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续且 $f(a)f(b)<0$，根据连续函数的性质可知方程 $f(x)=0$ 在区间 $[a,b]$ 内一定有实根，这时称 (a,b) 为方程 $f(x)=0$ 的有根区间。

§ 2 简单迭代法 /* Fixed-Point Iteration */

$$f(x)=0 \xleftrightarrow{\text{等价变换}} x=\varphi(x)$$

$f(x)=0$ 的根 $\Longleftrightarrow$ $\varphi(x)$ 的不动点

思路

从一个初值 x_0 出发，计算 $x_1=\varphi(x_0)$，$x_2=\varphi(x_1)$, …, $x_{k+1}=\varphi(x_k)$, … 若 $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ 收敛，即存在 x^* 使得 $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x^*$，且 φ 连续，则由 $\lim\limits_{k\to\infty} x_{k+1} = \lim\limits_{k\to\infty} \varphi(x_k)$ 可知 $x^*=\varphi(x^*)$，即 x^* 是 φ 的不动点，也就是 $f=0$ 的根。

迭代法是一种逐次逼近法，其基本思想是将隐式方程归结为一组显式的计算公式，就是说，迭代过程实质上是一个逐步显示化的过程。

例 设 $f(x) = x^3 + 4x^2 - 10 = 0$ **(此方程在[1, 2]中有唯一根)，用不同的方法将它变换成等价的方程。**

解:

(1) $x = \varphi_1(x) = x - x^3 - 4x^2 + 10$

(2) $x = \varphi_2(x) = \left(\frac{10}{x} - 4x\right)^{\frac{1}{2}}$

(3) $x = \varphi_3(x) = \frac{1}{2}(10 - x^3)^{\frac{1}{2}}$

(4) $x = \varphi_4(x) = \left(\frac{10}{4 + x}\right)^{\frac{1}{2}}$

(5) $x = \varphi_5(x) = x - \frac{x^3 + 4x^2 - 10}{3x^2 + 8x}$

对所选取的 $\varphi_i(x)$ $(i = 1, 2, 3, 4, 5)$ **取初始近似值** $x_0 = 1.5$**，迭代法计算结果列入下表：**

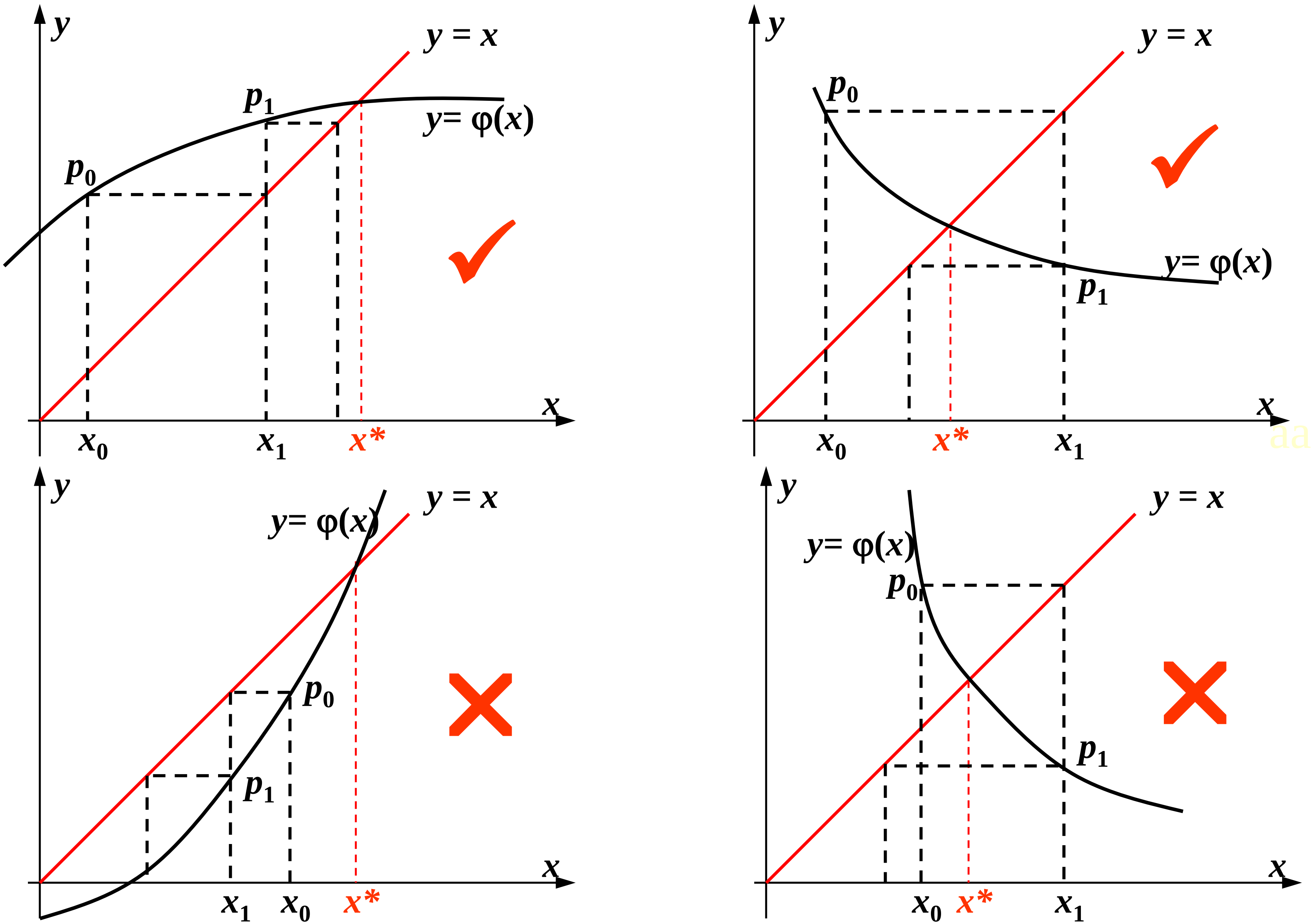
k	（1）	（2）	（3）	（4）	（5）
0	1.5	1.5	1.5	1.5	1.5
1	−0.875	0.8165	1.28695377	1.34839973	1.37333333
2	6.732	2.9969	1.40254080	1.36737631	1.36526201
3	−469.4	$(-8.65)^{1/2}$	1.34545838	1.36495701	1.36523001
4	1.03×10^{8}		1.37517025	1.36526475	
5			1.36009419	1.36522559	
6			1.36784697	1.36523058	
7			1.36388700	1.36522994	
8			1.36591673	1.36523002	
9			1.36487822	1.36523001	
10			1.36541006		
11			1.36522368		
12			1.36523024		
13			1.36522998		
14			1.36523001		

迭代过程发散

迭代过程中出现负数开方，发散

迭代过程收敛

➢ 迭代过程的收敛性


y
y = x
p1
p0
y= φ(x)
x
x0
x1
x*
y
y = x
p0
y= φ(x)
p1
x
x0
x*
x1
y
y = x
y= φ(x)
p0
p1
x
x1
x0
x*
y
y = x
y= φ(x)
p0
p1
x
x0
x*
x1

需要讨论如下问题：

1）如何选取合适的迭代函数 $\varphi(x)$？

2）迭代函数 $\varphi(x)$ 应满足什么条件，序列 $\{x_k\}$ 收敛?

3）怎样加速序列 $\{x_k\}$ 的收敛?

定理 考虑方程 $x = \varphi(x)$, $\varphi(x)\in C[a, b]$，若

（I） 当 $x\in[a, b]$ 时， $\varphi(x)\in[a, b]$；

（II） $\exists\ 0 \le L < 1$ 使得 $|\varphi'(x)| \le L < 1$ 对 $\forall\ x\in[a, b]$ 成立。

则任取 $x_0\in[a, b]$，由 $x_{k+1} = \varphi(x_k)$ 得到的序列 $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ 收敛于$\varphi(x)$ 在$[a, b]$上的唯一不动点。并且有误差估计式：

① $$|x^*-x_k| \le \frac{1}{1-L}|x_{k+1}-x_k|$$

② $$|x^*-x_k| \le \frac{L^k}{1-L}|x_1-x_0| \qquad (k = 1, 2, \ldots)$$

且存在极限 $$\lim_{k\to\infty}\frac{x^*-x_{k+1}}{x^*-x_k} = \varphi'(x^*)$$

证明： ① $\varphi(x)$ 在$[a, b]$上存在不动点?

令 $f(x)=\varphi(x)-x$ $\quad\because\ a\le\varphi(x)\le b$

$\therefore\ f(a)=\varphi(a)-a\ge 0,\ \ f(b)=\varphi(b)-b\le 0$

$\Rightarrow f(x)$ 有根 ✓

② 不动点唯一?

反证：若不然，设还有 $\tilde{x}=\varphi(\tilde{x})$，则

$x^*-\tilde{x}=\varphi(x^*)-\varphi(\tilde{x})=\varphi'(\xi)(x^*-\tilde{x})$, ξ 在 x^* 和$\tilde{x}$ 之间。

$\Rightarrow\ (x^*-\tilde{x})(1-\varphi'(\xi))=0$ 而 $|\varphi'(\xi)|<1$ $\quad\therefore\ x^*=\tilde{x}$ ✓

③ 当$k\to\infty$ 时，x_k 收敛到 x^* ?

$$|x^*-x_k|=|\varphi(x^*)-\varphi(x_{k-1})|=|\varphi'(\xi_{k-1})|\cdot|x^*-x_{k-1}|$$

$$\le L|x^*-x_{k-1}|\le\ldots\ldots\le L^k|x^*-x_0|\to 0$$ ✓

④ $|x^*-x_k| \le \dfrac{1}{1-L}|x_{k+1}-x_k|$?

$$|x_{k+1}-x_k| \ge |x^*-x_k| - |x^*-x_{k+1}| \ge |x^*-x_k| - L|x^*-x_k| \checkmark$$

⑤ $|x^*-x_k| \le \dfrac{L^k}{1-L}|x_1-x_0|$?

$$|x_{k+1}-x_k| = |\varphi(x_k)-\varphi(x_{k-1})| = |\varphi'(\xi_k)(x_k-x_{k-1})|$$

$$\le L|x_k-x_{k-1}| \le \ldots\ldots \le L^k|x_1-x_0| \checkmark$$

⑥ $\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{x^*-x_{k+1}}{x^*-x_k} = \varphi'(x^*)$?

$$\lim_{k\to\infty}\frac{x^*-x_{k+1}}{x^*-x_k} = \lim_{k\to\infty}\frac{\varphi'(\xi_k)(x^*-x_k)}{x^*-x_k} = \varphi'(x^*) \checkmark$$

例 求方程 $f(x)=x^3-x-1=0$ 在 $x=1.5$ 附近的根，若将方程改写为 $x=x^3-1$ ，建立迭代公式 $x_{k+1}=x_k^3-1$ 是发散的，这是因为 $\varphi'(x)=(x^3-1)'=3x^2$

当 $x>0.7$ 时，均有 $|\varphi'(x)|>1$

例 考察迭代过程（a）$x_{k+1}=\varphi_3(x_k)=\frac{1}{2}(10-x_k^3)^{1/2}$ 和（b）$x_{k+1}=\varphi_4(x_k)=(\frac{10}{4+x_k})^{\frac{1}{2}}$ 的收敛性，当 $|x_k-x^*|<10^{-5}$ 时，确定（b）中迭代次数 k。

解 对于迭代过程（b），迭代函数 $\varphi_4(x)=(\frac{10}{4+x})^{\frac{1}{2}}$ 于是

$$|\varphi'_4(x)|=\left|\frac{-5}{\sqrt{10}(4+x)^{3/2}}\right|\le\frac{5}{\sqrt{10}(5)^{3/2}}<0.15$$

因此，迭代函数 $\varphi_4(x)$ 在[1, 2]上满足定理条件，故迭代过程（b）收敛。

由 $|x^*-x_k|\le\frac{L^k}{1-L}|x_1-x_0|<\varepsilon$ （ ε 为给定精度要求）

迭代次数 k 应取

$$k>\frac{\lg\varepsilon-\lg\frac{|x_1-x_0|}{1-L}}{\lg L}$$

由要求$|x_k - x^*| < 10^{-5}$，应用上述公式，其中$x_1 = 1.3439973$，

$L_4 = 0.15$　　$x_0 = 1.5$，则有

$$k > \frac{\lg 10^{-5} - \lg \dfrac{1.5 - 1.3439973}{0.85}}{\lg 0.15} = 6.97$$

于是，推得所要求迭代次数 $k = 7$。

对于迭代过程（a），迭代函数$\varphi_3(x) = \frac{1}{2}(10 - x^3)^{1/2}$

于是

$$\varphi'_3(x) = -\frac{3}{4}\frac{x^2}{\sqrt{10 - x^3}} < 0$$

注意到$|\varphi'_3(2)| \approx 2.12$，所以在[1, 2]上，定理中条件2)不满足。但当$x \in [1, 1.5]$有$|\varphi'_3(x)| \le |\varphi'_3(1.5)| < 0.66 = L_3$迭代函数 $\varphi_3(x)$在[1, 1.5]上满足定理的条件2，故迭代过程当初值限制在[1, 1.5]上时，迭代过程收敛。

注 此题中 $L_4 < L_3$，可知迭代过程（b）比迭代过程（a）收敛快。

定理条件非必要条件，可将$[a, b]$缩小，定义**局部收敛性**：若在 x^* 的某δ领域 $R = \{ x \mid |x - x^*| \le \delta \}$ 有 $\varphi \in C^1[a, b]$ 且 $|\varphi'(x^*)| < 1$，则由$\forall x_0 \in R$ 开始的迭代收敛。即**调整初值可得到收敛的结果。**

定义 存在x^*的某个邻域$R : |x - x^*| \le \delta$，使迭代过程 $x_{k+1} = \varphi(x_k)$对于任意初值 $x_0 \in R$ 均收敛，则称迭代过程 $x_{k+1} = \varphi(x_k)$在根 x^*邻近具有局部收敛性。

定理 设x^*为方程$x = \varphi(x)$的根，$\varphi'(x)$在 x^* 的邻近连续，且 $|\varphi'(x^*)| < 1$ 则迭代过程 $x_{k+1} = \varphi(x_k)$ 具有局部收敛性。

➤ 迭代法的收敛速度

定义 设迭代 $x_{k+1} = \varphi(x_k)$ 收敛到 $\varphi(x)$ 的不动点 x^*。

设 $e_k = x_k - x^*$，若 $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{|e_{k+1}|}{|e_k|^p} = C > 0$，则称该迭代为 p 阶收敛，其中 C 称为渐近误差常数。/* $\{x_k\}$ converges to x^* of order p, with asymptotic error constant $C > 0$ */ 当 $p = 1$ 时称作线性收敛，当 $p = 2$ 时称作平方收敛。

定理 设 x^* 为 $x = \varphi(x)$ 的不动点，若 $\varphi \in C^p(R(x^*))$，$p \ge 2$；$\varphi'(x^*) = \ldots = \varphi^{(p-1)}(x^*) = 0$，且 $\varphi^{(p)}(x^*) \ne 0$，则 $x_{k+1} = \varphi(x_k)$ 在 $R(x^*)$ 内 p 阶收敛。

证明： $$x_{k+1} = \varphi(x_k) = \underset{\overset{\|}{x^*}}{\varphi(x^*)} + \varphi'(x^*)(x_k - x^*) + \cdots + \frac{\varphi^{(p)}(\xi_k)}{p!}(x_k - x^*)^p$$

$$\frac{\varphi^{(p)}(\xi_k)}{p!} \xrightarrow{k \to \infty} C$$

§ 3迭代过程的加速/* accelerating convergence */

➢埃特金（Aitken）算法

设$\{x_k\}$是一个线性收敛序列，其极限为 x^*，误差 $e_k = x^* - x_k$即

$$\lim_{k\to\infty}\frac{|e_{k+1}|}{|e_k|} = c \qquad (0 < c < 1)$$

因此，当k充分大时有

$$\frac{x^* - x_{k+1}}{x^* - x_{k+2}} \approx \frac{x^* - x_k}{x^* - x_{k+1}}$$

由此得

$$x^* \approx x_{k+1} - \frac{(x_{k+2} - x_{k+1})^2}{x_{k+2} - 2x_{k+1} + x_k} = x_k - \frac{(x_{k+1} - x_k)^2}{x_k - 2x_{k+1} + x_{k+2}}$$

以上式右端得出的结果作为新的改进值，记

$$\bar{x}_{k+1} = x_k - \frac{(x_{k+1} - x_k)^2}{x_k - 2x_{k+1} + x_{k+2}}$$

得到新序列$\{\bar{x}_k\}$较原序列$\{x_k\}$更快的收敛到 x^*。

可以证明 $\lim_{k\to\infty}\frac{\bar{x}_{k+1}-x^*}{x_k-x^*}=0$

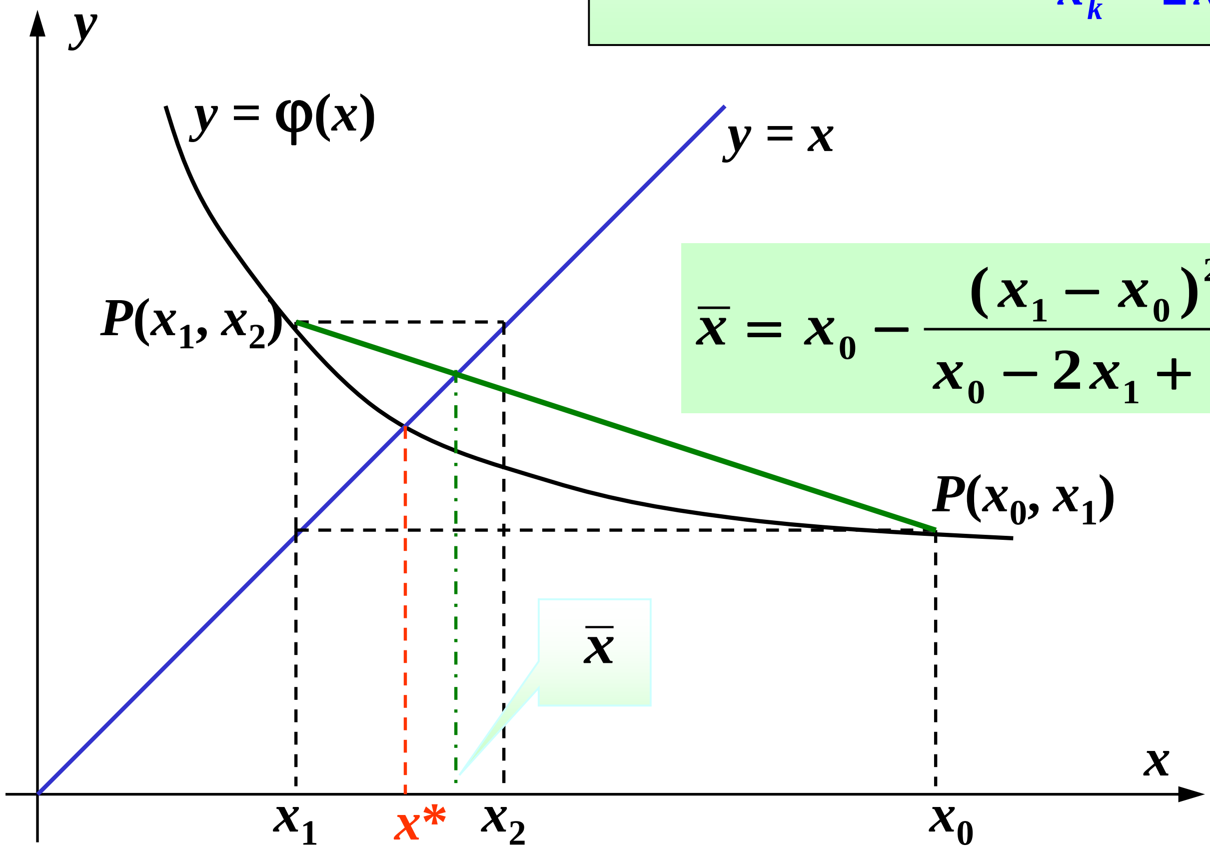
它表明序列$\{\bar{x}_{k+1}\}$的收敛速度比$\{x_k\}$的收敛速度快。

埃特金（Aitken）算法

迭代 $\bar{x}_{k+1}=\varphi(x_k)$

再迭代 $\tilde{x}_{k+1}=\varphi(\bar{x}_{k+1})$

改进 $x_{k+1}=x_k-\frac{(\bar{x}_{k+1}-x_k)^2}{x_k-2\bar{x}_{k+1}+\tilde{x}_{k+1}}$



$$\bar{x}=x_0-\frac{(x_1-x_0)^2}{x_0-2x_1+x_2}$$

斯蒂芬森（steffensen）迭代法

埃特金方法不管原序列$\{x_k\}$是怎样产生的，对$\{x_k\}$进行加速计算，得到序列$\{\bar{x}_k\}$，如果把埃特金加速技巧与不动点迭代结合，则可得到如下的迭代法：

$$y_k = \varphi(x_k), \quad z_k = \varphi(y_k)$$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{(y_k - x_k)^2}{z_k - 2y_k + x_k} \quad (k = 0, 1, \cdots) \qquad (*)$$

称为斯蒂芬森（steffensen）迭代法。它可以这样理解，我们要求$x = \varphi(x)$的根x^*，令$\varepsilon(x) = \varphi(x) - x$, $\varepsilon(x^*) = \varphi(x^*) - x^* = 0$，已知$x^*$的近似值$x_k$及$y_k$，其误差分别为

$$\varepsilon(y_k) = \varphi(y_k) - y_k = z_k - y_k$$

$$\varepsilon(x_k) = \varphi(x_k) - x_k = y_k - x_k$$

把误差 $\varepsilon(x)$“外推到零”，即过 $(x_k, \varepsilon(x_k))$ 及 $(y_k, \varepsilon(y_k))$ 两点做线性插值函数，它与 **x 轴**交点就是(*)中的 x_{k+1}，即方程

$$\varepsilon(x_k) + \frac{\varepsilon(y_k) - \varepsilon(x_k)}{y_k - x_k}(x - x_k) = 0$$

的解

$$x = x_k - \frac{\varepsilon(x_k)}{\varepsilon(y_k) - \varepsilon(x_k)}(y_k - x_k) = x_k - \frac{(y_k - x_k)^2}{z_k - 2y_k + x_k} = x_{k+1}$$

实际上（*）是将不动点迭代法计算两步合并成一步得到的，可将它写成另一种不动点迭代

$$x_{k+1} = \psi(x_k) \quad (k = 0, 1, \cdots)$$

其中

$$\psi(x) = x - \frac{[\varphi(x) - x]^2}{\varphi(\varphi(x)) - 2\varphi(x) + x}$$

对不动点迭代 $x_{k+1} = \psi(x_k) \quad (k = 0, 1, \cdots)$ 有以下局部收敛性定理。

定理 若x^*为迭代函数$\psi(x)$的不动点，则x^*为$\varphi(x)$的不动点。反之，若x^*为$\varphi(x)$的不动点，设$\varphi''(x)$存在，$\varphi'(x^*)\neq 1$

则x^*是$\psi(x)$的不动点，且steffensen迭代法是2阶收敛的。

例: 用斯蒂芬森迭代法求解方程 $f(x)=x^3-x-1=0$ 。

解: 前例中已指出下列迭代 $x_{k+1}=x_k^3-1$ 是发散的，现用斯蒂芬森加速法计算，取 $\varphi(x)=x^3-1$，计算结果列入下表中。

k	x_k	y_k	z_k
0	1.5	2.37500	12.3965
1	1.41629	1.84092	5.23888
2	1.35565	1.49140	2.31728
3	1.32895	1.34710	1.4435
4	1.32480	1.32518	1.32714
5	1.32472		

计算表明它是收敛的，这说明即使迭代法不收敛，用斯蒂芬森加速法仍可能收敛。至于原来已收敛的迭代法，由定理可知它可达到2阶收敛。更进一步还可知若为p阶收敛，则斯蒂芬森加速法为$p+1$阶收敛。

例: 求方程 $3x^2 - e^x = 0$ 在[3,4]中的解。

解：由方程得 $e^x = 3x^2$，取对数得

$$x = \ln 3x^2 = 2\ln x + \ln 3 = \varphi(x)$$

若构造迭代法

$$x_{k+1} = 2\ln x_k + \ln 3$$

由于 $\varphi'(x) = \frac{2}{x}, |\max_{3\le x\le 4} \varphi'(x)| \le \frac{2}{3} < 1$，且当 $x \in [3,4]$ 时，$\varphi(x) \in [3,4]$，

故知此迭代法收敛，若取 $x_0 = 3.5$ 迭代16次得 $x_{16} = 3.73307$，有

六位有效数字。

若用斯蒂芬森加速法进行加速，计算结果列入表中：

k	x_k	y_k	z_k
0	3.5	3.60414	3.66202
1	3.73444	3.73381	3.73347
2	3.73307		

§ 4 牛顿法 /* Newton - Raphson Method */

原理：将非线性方程线性化

—— Taylor 展开 /* Taylor's expansion */

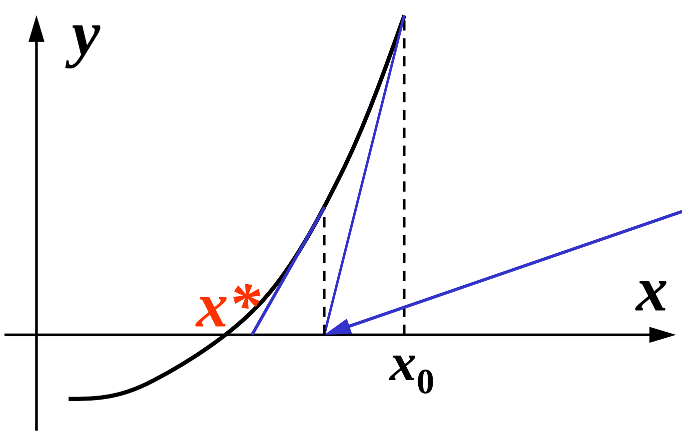
取 $x_0 \approx x^*$，将 $f(x)$ 在 x_0 做一阶Taylor展开：

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(\xi)}{2!}(x - x_0)^2, \quad \xi \text{ 在 } x_0 \text{ 和 } x \text{ 之间。}$$

将 $(x^* - x_0)^2$ 看成高阶小量，则有：

$$0 = f(x^*) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x^* - x_0) \quad \Rightarrow \quad x^* \approx x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$



只要 $f \in C^1$，每一步迭代都有 $f'(x_k) \neq 0$，而且 $\lim_{k\to\infty} x_k = x^*$，则 x^*就是 f 的根。

现在令 $\varphi(x) = x + h(x) f(x)$, $h(x)$ 为待定函数，但 $h(x^*) \neq 0$，则

$$f(x) = 0 \xleftrightarrow{\text{等价}} x = \varphi(x) = x + h(x) f(x)$$

x^*是根

由构造过程知Newton迭代法至少有二阶的收敛速度。

用条件 $\varphi'(x^*) = 0$ 确定 $h(x)$，由

$$\varphi'(x^*) = 1 + h'(x^*) f(x^*) + h(x^*) f'(x^*)$$
$$= 1 + h(x^*) f'(x^*) = 0$$

$$h(x^*) = \frac{-1}{f'(x^*)}$$

$\varphi'(x^*) = 0$

故可取 $h(x) = \dfrac{-1}{f'(x)}$,于是 $\varphi(x)$ 被确定为 $\varphi(x) = x - f(x)/f'(x)$

由此得出下面的特殊的简单迭代法

$$x_{k+1} = x_k - f(x_k)/f'(x_k) \quad k = 0, 1, \cdots,$$

----称为Newton迭代法

定理（局部收敛性）设 $f \in C^2[a, b]$，若 x^* 为 $f(x)$ 在$[a, b]$上的根，且 $f'(x^*) \neq 0$，则存在 x^* 的邻域 $R(x^*)$ 使得任取初值 $x_0 \in R(x^*)$，Newton's Method产生的序列$\{x_k\}$收敛到x^*，且满足

$$\lim_{k\to\infty} \frac{x^* - x_{k+1}}{(x^* - x_k)^2} = -\frac{f''(x^*)}{2f'(x^*)}$$

解非线性方程 $f(x) = 0$ 的牛顿法，是一种将非线性方程线性化方法。它是解代数方程和超越方程的有效方法之一。牛顿方法在单根附近具有较高的收敛速度， 而且牛顿方法不仅可以用来求实根，还可用来求 $f(x) = 0$ 代数方程的复根，同时还可推广用来解非线性方程组。

证明： Newton's Method 事实上是一种特殊的不动点迭代

其中 $\varphi(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$，则

$$|\varphi'(x^*)| = \left|\frac{f''(x^*) f(x^*)}{f'^2(x^*)}\right| = 0 < 1 \quad \Rightarrow \text{ 收敛 } \checkmark$$

由 Taylor 展开：

$$0 = f(x^*) = f(x_k) + f'(x_k)(x^* - x_k) + \frac{f''(\xi_k)}{2!}(x^* - x_k)^2$$

$$\Rightarrow \quad x^* = \underbrace{x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}}_{x_{k+1}} - \frac{f''(\xi_k)}{2!\, f'(x_k)}(x^* - x_k)^2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x^* - x_{k+1}}{(x^* - x_k)^2} = -\frac{f''(\xi_k)}{2 f'(x_k)}$$

只要 $f'(x^*) \neq 0$，则令 $k \to \infty$ 可得结论。 ∎

在单根 /*simple root */ 附近收敛快

例 用牛顿法解方程 $xe^{x}-1=0$

$$x_{k+1}=x_k-\frac{x_k-e^{-x_k}}{1+x_k}$$

取迭代值 $x_0=0.5$，迭代结果列于表中。

k	0	1	2	3
x_k	0.5	0.57102	.056716	0.56714

所给方程实际上是方程 $x=e^{-x}$ 的等价形式。

若用迭代格式 $x_{k+1}=e^{-x_k}$

进行计算，迭代到同一精度要迭代17次，

可见牛顿法收敛速度是很快的。

例 利用Newton迭代法计算$\sqrt{2}$的近似值。

解 $\sqrt{2}$可视为 $f(x)=x^2-2=0$的正根, 而 $f'(x)=2x$

则Newton迭代公式为:

$$x_{k+1}=x_k-\frac{x_k^2-2}{2x_k}=\frac{1}{2}x_k+\frac{1}{x_k}\qquad k=1,2,\cdots$$

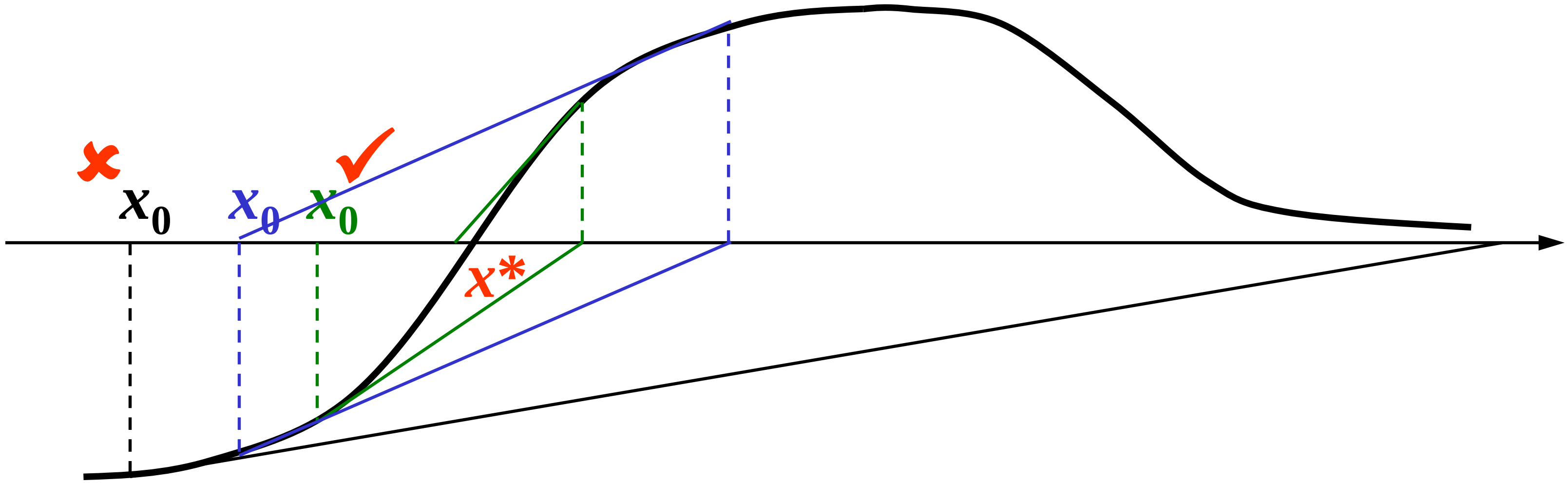
取初值 $x_0=1$,则得到

x_1 =1.500000000 x_2 =1.416666667

x_3 =1.414215686 x_4 =1.414213562

x_4 与精确根取十位有效数字完全相同。

注：Newton’s Method 收敛性依赖于x_0 的选取。



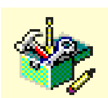
Newton法的改进

优点： Newton法收敛很快（对单根），算法简单。

缺点： 1）初值x_0不能偏离x^*太大，否则可能不收敛，

2）对重根收敛较慢，3）需要计算导数值。

针对这几点改进如下：



Newton下山法 /* Descent Method */

——Newton's Method 局部微调：

由Newton迭代法的收敛性定理知（局部收敛性），*Newton* 迭代法对初值x_0的要求是很苛刻的，在实际应用中，往往很难给出较好的初值x_0，牛顿下山法，就是在事先没有给出较好的初值情况下，求 $f(x)=0$ 根的一种修正的牛顿法。

原理：若由 x_k 得到的 x_{k+1} 不能使 $|f|$ 减小，则在 x_k 和 x_{k+1} 之间找一个更好的点 $\overline{x_{k+1}}$，使得 $\left|f(\overline{x_{k+1}})\right| < \left|f(x_k)\right|$。

x_k —— x_{k+1}

$\lambda x_{k+1} + (1-\lambda)x_k$, $\lambda \in [0, 1]$

$$\overline{x_{k+1}} = \lambda\left[x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}\right] + (1-\lambda)x_k$$

$$= x_k - \lambda\frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \quad (k = 0, 1, 2, \cdots)$$

λ 称为下山因子（一个可选择的参数）

选择因子 λ 使（即选取 $\lambda = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \cdots, \lambda \ge \varepsilon_\lambda > 0$）

$|f(x_{k+1})| < |f(x_k)|$

将下山法和牛顿法结合起来使用的方法，称为Newton下山法。

注：$\lambda = 1$ 时就是Newton’s Method 公式。

当 $\lambda = 1$ 代入效果不好时，将 λ 减半计算。

例 求方程 $x^3 - x - 1 = 0$ 在 $x = 1.5$ 附近的一个根 x^*。

解 1）用Newton法计算

Newton公式：$x_{k+1} = x_k - \dfrac{x_k^3 - x_k - 1}{3x_k^2 - 1}$

显然，当取初值 $x_0 = 1.5$ 时，计算结果如下：

k	0	1	2	3
x_k	1.5	1.34783	1.32520	1.32472

表中 x_3 的每一位数字均为有效数字。

当取初值 $x_0 = 0.6$ 时，按牛顿公式计算有 $x_1 = 17.9, x_2 = 11.9, \cdots$ 影响收敛速度，$x_1 = 17.9$，这个结果反而比 x_0 更偏离了所求的根 x^*

2）用Newton下山法计算

按Newton公式求得的迭代值 $\bar{x}_1 = 17.9$，设取下山因子 $\lambda = \dfrac{1}{32}$，由用Newton下山法计算可求得 $x_1 = \dfrac{1}{32}\bar{x}_1 + \dfrac{31}{32}x_0 = 1.140625$ 这个结果纠正了 $\bar{x}_1$ 的严重偏差 。

Algorithm: Newton's Descent Method

Find a solution to $f(x) = 0$ given an initial approximation x_0.

Input: initial approximation x_0; $f(x)$ and $f'(x)$; minimum step size of x_{min}; tolerance $TOL1$ for x ; tolerance $TOL2$ for λ ; maximum number of iterations N_{max}.

Output: approximate solution x or message of failure.

Step 1 Set $k = 1$;

Step 2 While ($k \le N_{max}$) do steps 3-10

Step 3 Set $\lambda = 1$;

Step 4 Set $x = x_0 - \lambda \dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}$; /* compute x_k */

Step 5 If $|x - x_0| < TOL1$ then Output (x); STOP; /* successful */

Step 6 If $|f(x)| < |f(x_0)|$ then $x_0 = x$; GOTO *Step 10* ; /* update x_0 */

Step 7 Set $\lambda = \lambda / 2$; /* update λ to descend */

Step 8 If $\lambda > TOL2$ then GOTO *Step 4* ; /* compute a better x_i */

Step 9 Set $x_0 = x_0 + x_{min}$; /* move forward anyway to avoid deadlock */

Step 10 Set k ++;

Step 11 Output (Method failed after N_{max} iterations); STOP. /* unsuccessful */

重根 /* multiple root */ 加速收敛法：

Q1: 若 $f'(x^*)=0$，Newton's Method 是否仍收敛?

设 x^* 是方程 $f(x)=0$的 m 重根（$m\geq 2$），$f(x)$在x^*的某邻域内有m 阶连续导数，这时 $f(x^*)=f'(x^*)=\cdots=f^{(m-1)}(x^*)=0,\ f^{(m)}(x^*)\neq 0$

由Taylor公式，得

$$f(x)=\frac{f^{(m)}(\xi_1)}{m!}(x-x^*)^m \qquad f'(x)=\frac{f^{(m)}(\xi_2)}{(m-1)!}(x-x^*)^{m-1}$$

$$f''(x)=\frac{f^{(m)}(\xi_3)}{(m-2)!}(x-x^*)^{m-2}$$

其中 ξ_1,ξ_2,ξ_3 都在 x 与 x^* 之间。由Newton法的迭代函数

$$\varphi(x)=x-f(x)/f'(x)$$

可得

$$\varphi'(x^*)=\lim_{x\to x^*}\varphi'(x)=\lim_{x\to x^*}\frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}$$

$$=\lim_{x\to x^*}\frac{(m-1)f^{(m)}(\xi_1)f^{(m)}(\xi_3)}{m[f^{(m)}(\xi_2)]^2}=1-\frac{1}{m}$$

Q2: 如何加速重根的收敛?

A2: 若把迭代函数修改为

$$\overline{\varphi}(x) = x - \frac{mf(x)}{f'(x)}$$

则有

$$\overline{\varphi}(x^*) = \lim_{x \to x^*} \overline{\varphi}(x) = \lim_{x \to x^*} [x - \frac{(x - x^*) f^{(m)}(\xi_1)}{f^{(m)}(\xi_2)}] = x^*$$

$$\overline{\varphi'}(x^*) = \lim_{x \to x^*} \overline{\varphi'}(x) = \lim_{x \to x^*} [1 - m + \frac{mf(x) f''(x)}{[f'(x)]^2}]$$

$$= 1 - m + m(1 - \frac{1}{m}) = 0$$

这两个等式说明，当 x^* 是方程$f(x)=0$的m重根时，变形的Newton法：

$$x_{k+1} = x_k - \frac{mf(x_k)}{f'(x_k)} \qquad k = 0,1,\cdots\cdots$$

不仅可以收敛于x^*,而且仍具有二阶的收敛速度。

在重根的情况下，若重数m不知道呢?

可考虑函数： $u(x)=\dfrac{f(x)}{f'(x)}$

即 将求 f 的重根转化为求另一函数的单根。

令 $u(x)=\dfrac{f(x)}{f'(x)}$**，则 f 的重根 = u 的单根。**

求解方程 $u(x)=0$ 的Newton 法迭代函数为

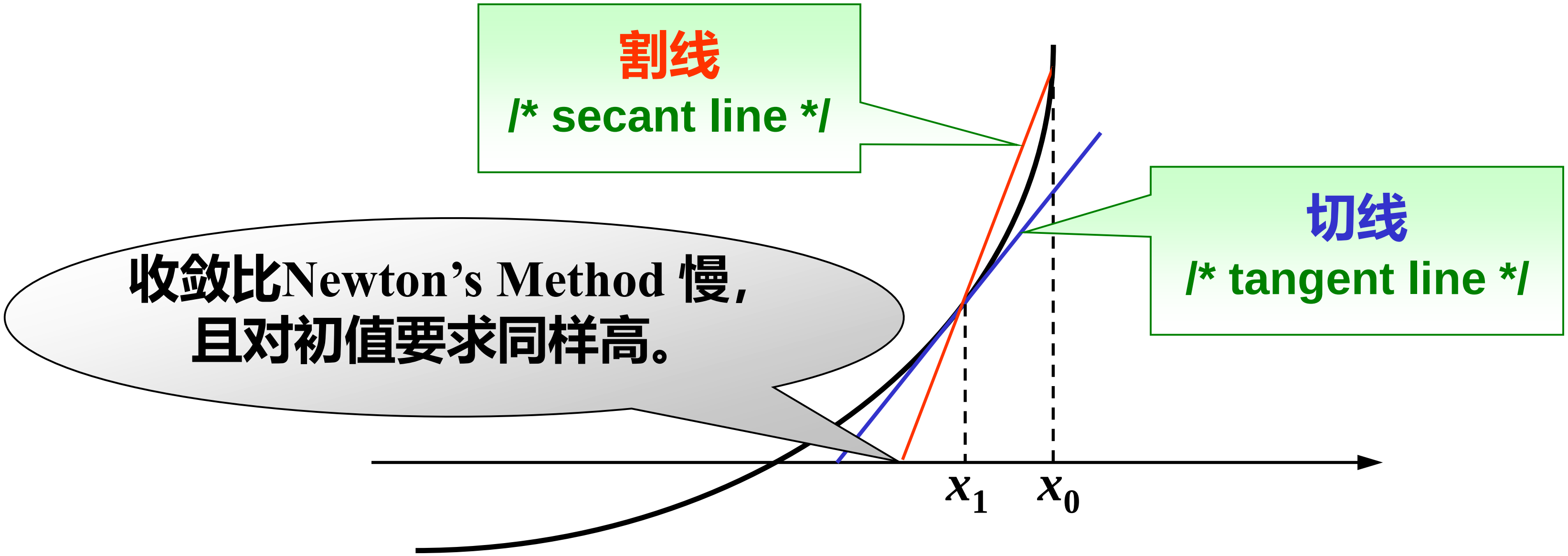
$$g(x)=x-\frac{u(x)}{u'(x)}=x-\frac{f(x)f'(x)}{[f'(x)]^2-f(x)f''(x)}$$

迭代公式为:

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)f'(x_k)}{[f'(x_k)]^2-f(x_k)f''(x_k)} \qquad (k=0,1,2,\cdots)$$

弦截法 /* Secant Method */：

Newton's Method 一步要计算 f 和 f'，相当于2个函数值，比较费时。现用 f 的值近似 f'，可少算一个函数值。



切线斜率 ≈ 割线斜率 $\Rightarrow f'(x_k) \approx \dfrac{f(x_k)-f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}$

$$\Rightarrow \quad x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)(x_k - x_{k-1})}{f(x_k)-f(x_{k-1})}$$

需要 2 个初值 x_0 和 x_1。