

矩阵论习题

1. 在 R^4 中, 求向量 x 在基 $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$ 下的坐标。设

$$\alpha_1 = [1 \ 1 \ 1 \ 1]^T, \quad \alpha_2 = [1 \ 1 \ -1 \ -1]^T, \quad \alpha_3 = [1 \ -1 \ 1 \ -1]^T,$$

$$\alpha_4 = [1 \ -1 \ -1 \ 1]^T; \quad x = [1 \ 2 \ 1 \ 1]^T.$$

2. 已知 R^3 中的两个基:

$$B_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

(1). 求 B_1 到 B_2 的基变换矩阵;

(2). 求在 B_1, B_2 下有相同坐标的所有向量。

3. 设 R^4 中的向量 $x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, x_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, x_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, x_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$ 分别张成子空

间 $w_1 = \text{span}\{x_1, x_2\}$ 和 $w_2 = \text{span}\{x_3, x_4\}$ 。求 $w_1 + w_2$ 及 $w_1 \cap w_2$ 的基和维数。

4. 设 V_1 和 V_2 分别是齐次方程组 $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0$ 和 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ 的解空间, 证明: $R^n = V_1 \oplus V_2$ 。

5. 设 $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$ 是 R^4 的一个基, $V_1 = \text{span}\{2\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1\}$, $V_2 = \text{span}\{\alpha_3 - \alpha_4, \alpha_1 + \alpha_4\}$, 证明: $R^4 = V_1 \oplus V_2$ 。

6. 设 T_1 是 V^n 到 V^m 的线性变换, T_2 是 V^m 到 V^r 的线性变换, 定义 V^n 到 V^r

的变换 $T_2 \bullet T_1$ 为

$$(T_2 \bullet T_1)\alpha = T_2(T_1\alpha), \forall \alpha \in V^n。$$

证明, $T_2 \bullet T_1$ 是线性变换。

7. 已知 R^3 的线性变换 T 在基

$$B_1 = \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

下的矩阵是

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix},$$

求 T 在基

$$B_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$$

下的矩阵。

8. V 的变换 T 称为可逆的, 如果存在 V 的变换 S , 使 $T \bullet S = S \bullet T = I$ 。这时 S 称为 T 的逆变换, 记为 T^{-1} , 证明

(1) 若线性变换 T 是可逆的, 则 T^{-1} 也是线性变换;

(2) T 的特征值一定不为零;

(3) 若 λ 是 T 的特征值, 则 $\frac{1}{\lambda}$ 是 T^{-1} 的特征值。

又若 T 在基 B 下的矩阵是 A ，那么 T^{-1} 在 B 下的矩阵是什么？

9. 设 T 是复数域上线性空间 V 的线性变换，已知 V 的基 B 和 T 在 B 下的矩阵 A 如下，求 T 的特征值和特征向量：

$$(1) \quad B = [\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3], \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix};$$

$$(2) \quad B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

10. 求下列方阵的最小多项式：

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & & \\ & 3 & 1 & \\ & & 3 & \\ & & & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 1 & & \\ -4 & -1 & & \\ & & 2 & 1 \\ & & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ -4 & -1 & -1 & 1 \\ & & 2 & 1 \\ & & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 2 & & \\ 1 & 3 & & \\ & & 4 & 1 \\ & & & 4 \end{pmatrix}.$$

11. 满足下述条件的方阵 A 是否可对角化？

(1) A 是幂零矩阵；

(2) $A^k = I (k \geq 2)$ ；

(3) $A^2 + A = 2I$.

$$12. \text{ 已知 } A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ 求 } g(A) = A^8 - 9A^6 + A^4 - 3A^3 + 4A^2 + I.$$

13. 下述的 $f(\lambda)$ ， $m(\lambda)$ 分别表示矩阵 A 的特征多项式和最小多项式，

确定 A 的可能的 $Jordan$ 标准形:

(1). $f(\lambda) = (\lambda - 2)^4 (\lambda - 3)^2$, $m(\lambda) = (\lambda - 2)^2 (\lambda - 3)^2$

(2). $f(\lambda) = (\lambda - 3)^3 (\lambda + 2)^3$, $m(\lambda) = (\lambda - 3)^2 (\lambda + 2)$

14. 求可逆矩阵 P , 使 $P^{-1}AP$ 为 $Jordan$ 矩阵, 其中:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

15. 设 V^4 是由函数 e^x , xe^x , x^2e^x , e^{2x} 张成的线性空间, 求 V^4 的线性变换 $D = \frac{d}{dx}$ 的 $Jordan$ 标准形。

16. 设 $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $f(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ e^t - 1 \end{pmatrix}$. 求微分方程组 $x'(t) = Ax(t) + f(t)$ 满足初始条件 $x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ 的解.

17. 求下列矩阵的满秩分解

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; (2) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2i & i & 1 \end{pmatrix}$.

18. 求下列矩阵的 QR 分解

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

19. 求下列矩阵的奇异值分解

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$; (2) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

20. 下列每一个矩阵的左逆、右逆、减号逆、加号逆是否存在？如果存在，各求出一个，并说明是否唯一

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}; \quad (2) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad (3) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2i & i & 1 \end{pmatrix}; \quad (4) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ i & i & 1 \end{pmatrix}.$$

21. 使用第 20 题的结果，说明下列方程组解的存在性并进行求解。

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad (2) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$(3) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2i & i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad (4) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ i & i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

22. 求线性方程组 $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 的最佳的最小二乘解。

23. 已知数据

x_i	-2	-1	0	1	2
y_i	0	1	2	1	0

试用二次多项式 $p(x) = ax^2 + bx + c$ 进行最小二乘拟合。

24. 已知数据

x_i	1	2	3	4
y_i	2	1	0	1

求形如 $y = ax + b \sin^2 \frac{\pi x}{6}$ 的最小二乘拟合曲线。