§5.4 函数的最佳平方逼近

- 1 内积空间
- 2 最小二乘拟合
- 3 正交多项式
- 4 最佳平方逼近
- 5 用正交函数作最佳平方逼近

§5.4 函数逼近

/* Approximation Theory */

逼近误差的度量常用标准有：

- $\|f(x)-y(x)\|_\infty = \max\limits_{a\le x\le b}|f(x)-y(x)|$

一致逼近

/* uniform Approximation */

- $\|f(x)-y(x)\|_2^2 = \int_a^b \rho(x)\,[f(x)-y(x)]^2 dx$

平方逼近

/* Least_Squares Approximation */

➢ 1 内积空间 /* Inner product space */

定义 设在区间(a, b)上非负函数$\rho(x)$，满足条件：

1） $\int_a^b |x|^n \rho(x)dx$ 存在$(n=0,1,\ldots)$，

2） 对非负的连续函数 $g(x)$，若$\int_a^b g(x)\rho(x)dx = 0$.

则在(a, b)上 $g(x) \equiv 0$ ，$\rho(x)$就称为区间(a, b)上的权函数。

常见的权函数

(1) $\rho(x) = 1, x \in [a, b]$;

(2) $\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, x \in (-1,1)$;

(3) $\rho(x) = e^{-x}, x \in [0, +\infty)$;

(4) $\rho(x) = e^{-x^2}, x \in (-\infty, +\infty)$.

➢ 1 内积空间 /* Inner product space */

定义 设 $f(x), g(x) \in C[a,b]$, $\rho(x)$ 是[a, b]上的权函数，积分

$$(f, g) = \int_a^b \rho(x) f(x) g(x) dx$$

称为函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在[a, b]上的内积。

四条公理:

1）$(f, g) = (g, f)$

2）$(cf, g) = c(f, g)$, c为常数

3）$(f_1 + f_2, g) = (f_1, g) + (f_2, g)$

4）$(f, f) \geq 0$ ，当且仅当 $f = 0$ 时 $(f, f) = 0$

设$\vec{f}, \vec{g}$是R^n中的向量，则

$$\vec{f} = (f_1, f_2, \cdots, f_n)^T, \vec{g} = (g_1, g_2, \cdots, g_n)^T$$

其内积定义是 $(\vec{f}, \vec{g}) = \sum_{k=1}^n f_k g_k$

向量 $\vec{f} \in R^n$ 的模（范数）定义为$\| \vec{f} \|_2 = (\sum_{k=1}^n f_k^2)^{\frac{1}{2}}$

将它推广到任何内积空间中。

➢ 1 内积空间 /* Inner product space */

满足内积定义的函数空间称为内积空间。因此，连续函数空间 $C[a,b]$ 上定义了内积就形成一个内积空间。

定义 $f(x) \in C[a,b]$，量

$$\| f \|_2 = \sqrt{\int_a^b \rho(x) f^2(x)dx} = \sqrt{(f,f)}$$

称为$f(x)$的欧氏范数。

➢ 1 内积空间 /* Inner product space */

定理 对任何 $f, g \in C[a,b]$，下列结论成立

（1） $|(f,g)| \le \|f\|_2 \|g\|_2$

此式称为柯西—许瓦兹（Cauchy-Schwarz）不等式

（2） $\|f+g\|_2 \le \|f\|_2 + \|g\|_2$ （三角不等式）

（3） $\|f+g\|_2^2 + \|f-g\|_2^2 = 2(\|f\|_2^2 + \|g\|_2^2)$ （平行四边形定律）

证明1. 若 $g=0$，则柯西-许瓦兹（Cauchy-Schwarz）不等式显然成立，现考虑 $g \ne 0$，对任何实数 λ，有

$$0 \le (f+\lambda g, f+\lambda g) = (f,f) + 2\lambda (f,g) + \lambda^2 (g,g)$$

现取 $\lambda = -\dfrac{(f,g)}{\|g\|_2^2}$，代入上式得

$$\|f\|_2^2 - 2\frac{|(f,g)|^2}{\|g\|_2^2} + \frac{|(f,g)|^2}{\|g\|_2^2} \ge 0$$

即 $|(f,g)|^2 \le \|f\|_2^2 \|g\|_2^2$，两边开平方即得(1).■

➢ 1 内积空间 /* Inner product space */

定理 对任何 $f, g \in C[a,b]$，下列结论成立

（1） $|(f, g)| \leq \|f\|_2 \|g\|_2$

此式称为柯西—许瓦兹（Cauchy-Schwarz）不等式

（2） $\|f+g\|_2 \leq \|f\|_2 + \|g\|_2$ （三角不等式）

（3） $\|f+g\|_2^2 + \|f-g\|_2^2 = 2(\|f\|_2^2 + \|g\|_2^2)$ （平行四边形定律）

证明2： 利用（1）考虑

$$\|f+g\|_2^2 = (f+g, f+g) = (f, f) + 2(f, g) + (g, g)$$

$$\leq \|f\|_2^2 + 2|(f, g)| + \|g\|_2^2 \leq \|f\|_2^2 + 2\|f\|_2 \|g\|_2 + \|g\|_2^2$$

$$= (\|f\|_2 + \|g\|_2)^2$$

两边开方则得（2）.

➢ 1 内积空间 /* Inner product space */

定理 对任何 $f, g \in C[a,b]$，下列结论成立

(1) $|(f,\ g)| \le \|f\|_2\|g\|_2$

此式称为柯西—许瓦兹（Cauchy-Schwarz）不等式

(2) $\|f+g\|_2 \le \|f\|_2+\|g\|_2$ （三角不等式）

(3) $\|f+g\|_2^2 + \|f-g\|_2^2 = 2(\|f\|_2^2+\|g\|_2^2)$ （平行四边形法则）

证明3： 平行四边形法则可直接计算得

$$\|f+g\|_2^2+\|f-g\|_2^2=(f+g,f+g)+(f-g,f-g)$$

$$=(f,f)+2(f,g)+(g,g)+(f,f)-2(f,g)+(g,g)$$

$$=2[(f,f)+(g,g)]=2(\|f\|_2^2+\|g\|_2^2)$$ 证毕

➢ 1 内积空间 /* Inner product space */

定义 若 $f(x), g(x) \in C[a,b]$，满足

$$(f, g) = \int_a^b \rho(x) f(x) g(x) dx = 0$$

则称 f 与 g 在 $[a, b]$ 上带权 $\rho(x)$ 正交。

若函数族

$$\varphi_0(x), \varphi_1(x), \cdots, \varphi_n(x), \cdots$$

满足关系

$$(\varphi_j, \varphi_k) = \int_a^b \rho(x) \varphi_j(x) \varphi_k(x) dx = \begin{cases} 0, & j \neq k \\ A_k > 0, & j = k \end{cases}$$

就称 $\{\varphi_k\}$ 是 $[a, b]$ 上带权 $\rho(x)$ 的正交函数族；

若 $A_k \equiv 1$，就称之为标准正交函数族。

➢ 1 内积空间 /* Inner product space */

在 R^n 空间中任一向量都可用它的一组线性无关的基表示，对内积空间的任一元素$f(x) \in C[a, b]$也同样可用线性无关的基表示.

例如 三角函数族 $1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \cdots,$

就是在区间 $[-\pi, \pi]$上的正交函数族，因为

$$(1,1)=\int_{-\pi}^{\pi} 1^2 dx = 2\pi$$

$$(\sin kx, \sin kx)=\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 kx dx=\pi, (\cos kx, \cos kx)=\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 kx dx=\pi$$

$(k=1, 2, \cdots)$

而对 $j \neq k$ 时

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos jx dx=0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \sin jx ds=0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \sin jx dx=0 \ ■$$

➢ 1 内积空间 /* Inner product space */

定义 线性无关/* linearly independent */函数族{ $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$, … , $\varphi_n(x)$, … } 满足条件：其中任意函数的线性组合

$\boldsymbol{a_0\varphi_0(x)+a_1\varphi_1(x)+\cdots+a_{n-1}\varphi_{n-1}(x)=0}$ 对任意 $x\in[a, b]$成立当且仅当$\boldsymbol{a_0=a_1=\cdots=a_{n-1}=0}$时成立，则称在[$a$, b]上是线性无关的，若函数族$\{\varphi_k\}(k=0,1,\cdots)$中的任何有限个 φ_k 线性无关，则称 $\{\varphi_k\}$ 为线性无关函数族。

例如：$\mathbf{1}, x, \cdots, x^n, \cdots$ 就是[a, b]上线性无关函数族.

若$\varphi_0(x),\cdots,\varphi_{n-1}(x)$ 是$C[a,b]$ 中的线性无关函数，且$a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}$是任意实数，则

$$s(x)=a_0\varphi_0(x)+a_1\varphi_1(x)+\cdots+a_{n-1}\varphi_{n-1}(x)$$

的全体是 $C[a,b]$ 中的一个子集，记作 $\Phi=span\{\varphi_0, \varphi_1, \cdots, \varphi_{n-1}\}$

判断函数族$\{\phi_k\}$ $(k=0,\ 1,\cdots,\ n-1)$线性无关的充要条件

定理 $\varphi_0(x),\varphi_1(x),\cdots,\varphi_{n-1}(x)$ 在$[a,b]$上线性无关的充要条件是它的克莱姆Cramer行列式$G_{n-1}\neq 0$，其中

$$G_{n-1}=G(\varphi_0\ \varphi_1,\cdots,\varphi_{n-1})=\begin{vmatrix}(\varphi_0,\varphi_0) & (\varphi_0,\varphi_1) & \cdots & (\varphi_0,\varphi_{n-1})\\ (\varphi_1,\varphi_0) & (\varphi_1,\varphi_1) & \cdots & (\varphi_1,\varphi_{n-1})\\ \cdots\cdots & & \cdots & \\ (\varphi_{n-1},\varphi_0) & (\varphi_{n-1},\varphi_1) & \cdots & (\varphi_{n-1},\varphi_{n-1})\end{vmatrix}$$

证 (反证法)

$\Rightarrow$ 假设$G_{n-1}=0$，则齐次线性方程组

$$\sum_{k=0}^{n-1}\beta_k(\varphi_k,\varphi_j)=0,\quad j=0,1,\cdots n-1.$$

有非零解$(\beta_0,\beta_1,\cdots\beta_{n-1})^T$ 其中$\beta_0,\beta_1,\cdots\beta_{n-1}$不全为零

$$令\psi(x)=\sum_{k=0}^{n-1}\beta_k\varphi_k(x)$$

则有$(\psi,\phi_j)=\sum_{k=0}^{n-1}\beta_k(\phi_k,\phi_j)=0,\quad j=0,1,\cdots,n-1.$

β_j不全为0

$\psi(x)=\sum_{k=0}^{n-1}\beta_k\varphi_k(x)$

因而有

$$(\psi,\psi)=\sum_{j=0}^{n-1}\beta_j(\psi,\varphi_j)=0. \Longrightarrow \psi(x)\equiv 0,\quad a\le x\le b.$$

这与 $\varphi_0(x),\varphi_1(x),\cdots\varphi_{n-1}(x)$ 在$[a,b]$上线性无关矛盾。

$\Longleftarrow$ 若函数系$\{\varphi_i\}(i=0,1,\cdots,n-1)$. 线性相关，则由定义可知有不全为0的数值 $a_0,a_1,\cdots a_{n-1}$. 使得

$$\sum_{i=0}^{n-1}a_i\varphi_i=0.$$

于是将此式两边乘以$\rho\varphi_0,\rho\varphi_1,\cdots,\rho\varphi_{n-1}$. 之后再积分，便得到方程组

$$\sum_{i=0}^{n-1}a_i(\varphi_i,\varphi_j)=0.(j=0,1,\cdots n-1).$$

既然上面的齐次方程组有非零解$(a_0,a_1,\cdots a_{n-1})$. 故其系数行列式的值一定为0; 亦即 $G_{n-1}=0$ 这与 $G_{n-1}\neq 0$ 矛盾。■

➢ 2 最小二乘拟合 /*Discrete L-S approximating */

已知 $x_1 \ldots x_N$; $y_1 \ldots y_N$，求一个简单易算的近似函数 $P(x) \approx f(x)$。

但是 ① N 很大;

② y_i 本身是测量值，不准确，即 $y_i \neq f(x_i)$

这时没必要取 $P(x_i) = y_i$，而要使 $P(x_i) - y_i$ 总体上尽可能小。

常见做法:

- 使 $\max\limits_{1 \le i \le N} |P(x_i) - y_i|$ 最小 /* minimax problem */
- 使 $\sum\limits_{i=1}^{N} |P(x_i) - y_i|$ 最小
- 使 $\sum\limits_{i=1}^{N} |P(x_i) - y_i|^2$ 最小 /* Least-Squares method */

➢ 2 最小二乘拟合

问题一般的提法是：对于给定的数据 $(x_i, y_i)(i=1,2,\cdots,N)$，选取线性无关的函数族 $\varphi_0,\varphi_1,\cdots,\varphi_m$ 及权函数 $\omega(x)$，要求在函数类 $\Phi=Span\{\varphi_0,\varphi_1,\cdots,\varphi_m\}$ 中寻找一个函数

$$\varphi^*(x)=a_0^*\varphi_0+a_1^*\varphi_1+\cdots+a_m^*\varphi_m \quad (m<N)$$

，使

$$\boxed{I=\sum_{i=1}^{N}\omega(x_i)[y_i-\varphi(x_i)]^2}$$

达到极小，显然上式是 $m+1$ 个变量 $a_0,a_1,\cdots,a_m$ 的二次函数

$$I(a_0,a_1,\cdots,a_m)=\sum_{i=1}^{N}\omega(x_i)[y_i-\sum_{k=0}^{m}a_k\varphi_k(x_i)]^2$$

由多元函数极值的必要条件，有

$$\frac{1}{2}\frac{\partial I}{\partial a_j}=\sum_{i=1}^{N}\omega(x_i)\varphi_j(x_i)[y_i-\sum_{k=0}^{m}a_k\varphi_k(x_i)]=0 \qquad (j=0,1,\cdots,m)$$

引入内积

$$(f,g)=\sum_{i=1}^{N}\omega(x_i)f(x_i)g(x_i)$$

/*discrete type */

方程组 $\sum_{i=1}^{N}\omega(x_i)\varphi_j(x_i)[y_i-\sum_{k=0}^{m}a_k\varphi_k(x_i)]=0\ \ (j=0,1,\cdots,m)$ 可以表示为

$$a_0(\varphi_j,\varphi_0)+a_1(\varphi_j,\varphi_1)+\cdots+a_m(\varphi_j,\varphi_m)=(\varphi_j,y)\quad (j=0,1,\cdots,m)$$

即有

$$\begin{bmatrix}(\varphi_0,\varphi_0) & (\varphi_0,\varphi_1) & \cdots & (\varphi_0,\varphi_m)\\ (\varphi_1,\varphi_0) & (\varphi_1,\varphi_1) & \cdots & (\varphi_1,\varphi_m)\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ (\varphi_m,\varphi_0) & (\varphi_m,\varphi_1) & \cdots & (\varphi_m,\varphi_m)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_0\\ a_1\\ \vdots\\ a_m\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(\varphi_0,y)\\ (\varphi_1,y)\\ \vdots\\ (\varphi_m,y)\end{bmatrix}$$

这个方程组称为法方程或正规方程组，若用 $\{\varphi_0,\varphi_1,\cdots,\varphi_m\}$ 构成 $N\times(m+1)$ 的矩阵A，即

$$(\varphi_j,\varphi_k)=\sum_{i=1}^{N}\omega(x_i)\varphi_j(x_i)\varphi_k(x_i)$$

$$(\varphi_j,y)=\sum_{i=1}^{N}\omega(x_i)\varphi_j(x_i)y_i$$

又引入向量 $\alpha=(a_0,a_1,\cdots,a_m)^T$， $Y=(y_1,y_2,\cdots,y_N)^T$，权w=I

则法方程组可写成以下矩阵形式：

$$\mathbf{A}^T\mathbf{A}\alpha=\mathbf{A}^T\mathbf{Y}$$

由于 $\varphi_0,\varphi_1,\cdots,\varphi_m$ 线性无关，可知法方程存在唯一解

$$a_0=a_0^*,a_1=a_1^*,\cdots,a_m=a_m^*$$

从而得到函数

$$\varphi^*(x)=a_0^*\varphi_0+a_1^*\varphi_1+\cdots+a_m^*\varphi_m$$

类似连续型的证明，可知 $\varphi^*(x)$ 使 / 取最小值。

最小平方误差为

$$\delta^2=\|y-\varphi^*\|_2^2=(y-\varphi^*,y-\varphi^*)=\|y\|_2^2-\sum_{j=0}^{m}a_j^*(\varphi_j,y)$$

➢ 最小二乘拟合多项式 /* L-S approximating polynomials */

若取 $\varphi_0 = 1, \varphi_1 = x, \cdots, \varphi_m = x^m$，即取 $\{1, x, \cdots, x^m\}$ 为基函数的代数多项式拟合时，相应的法方程组就是

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{N}\omega_i & \sum_{i=1}^{N}\omega_i x_i & \cdots & \sum_{i=1}^{N}\omega_i x_i^m \\ \sum_{i=1}^{N}\omega_i x_i & \sum_{i=1}^{N}\omega_i x_i^2 & \cdots & \sum_{i=1}^{N}\omega_i x_i^{m+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sum_{i=1}^{N}\omega_i x_i^m & \sum_{i=1}^{N}\omega_i x_i^{m+1} & \cdots & \sum_{i=1}^{N}\omega_i x_i^{2m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{N}\omega_i y_i \\ \sum_{i=1}^{N}\omega_i x_i y_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{N}\omega_i x_i^m y_i \end{bmatrix}$$

求出法方程组的解 $a_0, a_1, \cdots, a_m$，就可得到拟合多项式

$$\varphi(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m$$

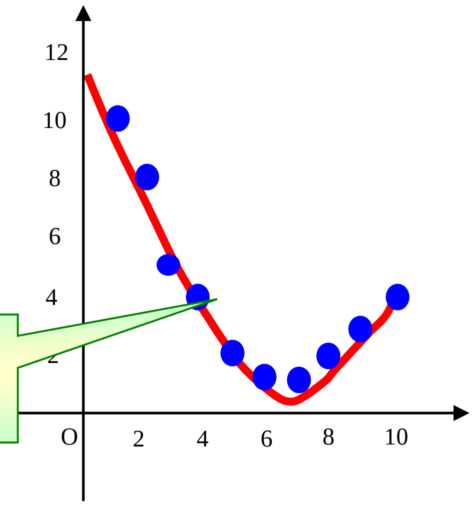
例: 设有一组数据为表中第（2），（3）两列所示，求一代数多项式拟合这组数据

（1）	（2）	（3）	（4）	（5）	（6）	（7）	（8）
i	x_i	y_i	$x_i y_i$	x_i^2	$x_i^2 y_i$	x_i^3	x_i^4
1	1	10	10	1	10	1	1
2	3	5	15	9	45	1	81
3	4	4	16	16	64	27	256
4	5	2	10	25	50	81	625
5	6	1	6	36	36	64	1296
6	7	1	7	49	49	256	2401
7	8	2	16	64	128	125	4096
8	9	3	27	81	243	625	6561
9	10	4	40	100	400	216	10000
$\sum_{i=1}^{9}$	53	32	147	381	1025	1296	25317

解 通常可按下列步骤求解：

（1）绘草图

由已知数据描出粗略的图形从图看出近似为一条抛物线



$(x_i\,, y_i)\,,\ i = 1, 2, \ldots, m$

（2）造型

从草图可设拟合曲线为

$$y = \varphi(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

（3）建立包含未知数的正规方程组，为此列表算出以下各数值

$$\sum_{i=1}^{9} x_i, \sum_{i=1}^{9} x_i^2, \sum_{i=1}^{9} x_i^3, \sum_{i=1}^{9} x_i^4, \sum_{i=1}^{9} y_i, \sum_{i=1}^{9} x_i y_i, \sum_{i=1}^{9} x_i^2 y_i$$

由表的最后一行的数值可得正规方程组

$$\begin{cases} 9a_0 + 53a_1 + 381a_2 = 32 \\ 53a_0 + 381a_1 + 3017a_2 = 147 \\ 381a_0 + 3017a_1 + 25317a_2 = 1025 \end{cases}$$

（4）求解正规方程组得

$$a_0 = 13.45966,\quad a_1 = -3.60531,\quad a_2 = 0.26757$$

故所求的二次拟合多项式为 $y = \varphi(x) = 13.45966 - 3.60531x + 0.26757x^2$

例：用 $y=a_0+a_1x+a_2x^2$ 来拟合

x	1	2	3	4
y	4	10	18	26

, $\omega=1$

解：$\varphi_0(x)=1$，$\varphi_1(x)=x$，$\varphi_2(x)=x^2$

$$(\varphi_0,\varphi_0)=\sum_{i=1}^{4}1\cdot 1=4 \qquad (\varphi_1,\varphi_2)=\sum_{i=1}^{4}x_i\cdot x_i^2=100$$

$$(\varphi_0,\varphi_1)=\sum_{i=1}^{4}1\cdot x_i=10 \qquad (\varphi_1,\varphi_1)=\sum_{i=1}^{4}x_i^2=30$$

$$(\varphi_0,\varphi_2)=\sum_{i=1}^{4}1\cdot x_i^2=30 \qquad (\varphi_2,\varphi_2)=\sum_{i=1}^{4}x_i^4=354$$

$$(\varphi_0,y)=\sum_{i=1}^{4}1\cdot y_i=58 \qquad (\varphi_1,y)=182 \qquad (\varphi_2,y)=622$$

$$\begin{pmatrix}4 & 10 & 30\\ 10 & 30 & 100\\ 30 & 100 & 354\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_0\\ a_1\\ a_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}58\\ 182\\ 622\end{pmatrix} \Rightarrow a_0=-\frac{3}{2},\ a_1=\frac{49}{10},\ a_2=\frac{1}{2}$$

$$y=P(x)=\frac{1}{2}x^2+\frac{49}{10}x-\frac{3}{2}$$

$$\|B\|_\infty=484,\quad \|B^{-1}\|_\infty=\frac{63}{4} \Rightarrow cond(B)_\infty=7623$$

例 试分别用二次和三次多项式以最小二乘拟合表中的数据，并比较优劣。

x_i	-2	-1	0	1	2
y_i	-0.1	0.1	0.4	0.9	1.6

解：设二次拟合函数为

$$y(x) = a_1 + a_2 x + a_3 x^2$$

利用法方程 $A^T A a = A^T Y$

其中 $\varphi_0(x) = 1, \varphi_1(x) = x, \varphi_2(x) = x^2, \quad a = (a_1, a_2, a_3)^T$

$$Y = (-0.1, 0.1, 0.4, 0.9, 1.6)^T$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \qquad A^T A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 10 \\ 0 & 10 & 0 \\ 10 & 0 & 34 \end{bmatrix} \qquad A^T Y = \begin{bmatrix} 2.9 \\ 4.2 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 & 10 \\ 0 & 10 & 0 \\ 10 & 0 & 34 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.9 \\ 4.2 \\ 7 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{aligned} a_1 &= 0.4086, \\ a_2 &= 0.42, \\ a_3 &= 0.0857 \end{aligned}$$

故所求得二次多项式为

$$y(x)=0.4086+0.42x+0.0857x^2$$

误差平方和

$$\sigma_2=Y^T(Y-Aa)=0.00116$$

同样可以求得三次多项式为

$$y(x)=0.4086+0.39167x+0.0857x^2+0.00833x^3$$

误差平方和为

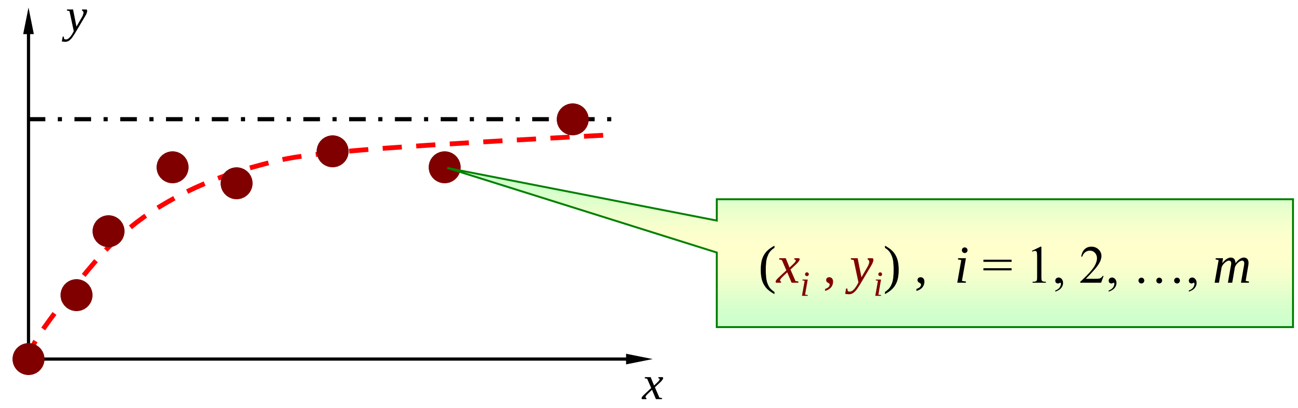
$$\sigma_3=Y^T(Y-Aa)=0.000194$$

显然三次多项式的精度要好些。

$$\sigma=(Y-Aa)^T(Y-Aa)=Y^T(Y-Aa)$$

因$a^TA^TAa-a^TA^TY=a^T(A^TAa-A^TY)=0$

例:



方案一：设 $y \approx P(x) = \dfrac{x}{ax + b}$

求 a 和 b 使得 $\varphi(a,b) = \sum_{i=1}^{m} \left(\dfrac{x_i}{ax_i + b} - y_i\right)^2$ 最小。

线性化 /* linearization */：令 $\boldsymbol{Y} = \dfrac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{y}}$, $\boldsymbol{X} = \dfrac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{x}}$，则

$Y \approx a + bX$ 就是个线性问题

将(x_i, y_i)化为(X_i, Y_i)后易解 a 和b。

方案二：设 $y \approx P(x) = a e^{-b/x}$ $\quad (a > 0,\ b > 0)$

线性化：由 $\ln y \approx \ln a - \dfrac{b}{x}$ 可做变换

$$Y = \ln y,\quad X = \frac{1}{x},\quad A = \ln a,\quad B = -b$$

$$Y \approx A + BX$$ 就是个线性问题

将(x_i, y_i)化为(X_i, Y_i)后易解 A 和B

$$\Longrightarrow \quad \boldsymbol{a = e^{A},\ b = -B,\ P(x) = a e^{-b/x}}$$

➢ 3 正交多项式/* Orthogonal Polynomials */

定义 首项系数 $a_k \neq 0$ 的n次多项式 $g_n(x)$，满足

$$\int_a^b \rho(x)g_j(x)g_k(x)dx = \begin{cases} 0, & j \neq k \\ A_k > 0, & j = k \end{cases} \quad (j,k = 0, 1, \cdots)$$

就称多项式序列 $g_0(x), g_1(x), \cdots\cdots$ 在$[a, b]$上带权 $\rho(x)$ 正交，并称 $g_n(x)$ 是$[a, b]$上带权$\rho(x)$ 的n次正交多项式。

定理 设 $g_i(x)(i = 0,1,\cdots)$是 i 次多项式，则多项式系$\{g_i(x)\}$ 是$[a, b]$上带权 $\rho(x)$ 的正交多项式的充分必要条件是对任何次数不超过 $i-1$的多项式 $P(x)$，都有$\int_a^b \rho(x)P(x)g_i(x)dx = 0$，$(i = 0, 1, \cdots)$即$g_i(x)$与任何次数不超过 $i-1$ 的多项式 $P(x)$ 在$[a, b]$上带权$\rho(x)$的正交。

3 正交多项式/* Orthogonal Polynomials */

正交多项式的性质

设 $\{g_k(x)\}$ 为$[a, b]$上的正交多项式序列，其中 $g_k(x)$ 为 k 次正交多项式，则具有下列基本性质。

- 性质1 $g_k(x)$ 是线性无关的。
- 性质2 $g_k(x)$ 的 k个零点都是实的、相异的（即单重的），且全部在区间（a, b）内部。
- 性质3 最高项系数为1的正交多项式 $\{g_k(x)\}$中任何相邻三个多项式 $g_{k-1}(x), g_k(x), g_{k+1}(x)$ 存在如下的三项递推关系：

$$g_{k+1}(x)=(x-a_{k+1})g_k(x)-b_k g_{k-1}(x) \qquad (k=0,1,2,3,\cdots)$$

其中 a_k, b_k 都是与 x 无关的常数，且

$$\begin{cases} a_{k+1}=\dfrac{(xg_k, g_k)}{(g_k, g_k)}, \quad b_0=0, \quad b_k=\dfrac{(g_k, g_k)}{(g_{k-1}, g_{k-1})}, k=1,2,\cdots \end{cases}$$

勒让德*Legendre*\多项式

当区间为 $[-1, 1]$ ，权函数 $\rho(x) \equiv 1$ 时，由 $\{1, x, \cdots, x^n, \cdots\}$ 正交化得到的多项式就称为Legendre多项式，并用 $P_0(x), P_1(x), \cdots, P_n(x), \cdots$ 表示，

$$P_0(x) = 1$$

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\{(x^2-1)^n\} \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

由于 $(x^2-1)^n$ 是 $2n$ 次多项式，求 n 阶导数后得

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}(2n)(2n-1)\cdots(n+1)x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$$

$$a_n = \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2}$$

$$\tilde{P}_n(x) = \frac{n!}{(2n)!}\frac{d^n}{dx^n}[(x^2-1)^n]$$

最高项系数为1的勒让德多项式

勒让德多项式有下述几个重要性质:

性质1 正交性

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)dx = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \dfrac{2}{2n+1} & m = n \end{cases}$$

性质2 奇偶性

$$P_n(-x) = (-1)^n P_n(x)$$

性质3 在所有最高项系数为1的 n次多项式中，勒让德多项式 $\tilde{P}_n(x)$ 在 $[-1, 1]$上与零的平方误差最小。

性质4 $P_n(x)$在区间$[-1, 1]$内有 n 个不同的实零点。

性质5 递推性 当 $n\geq 1$ 时，有

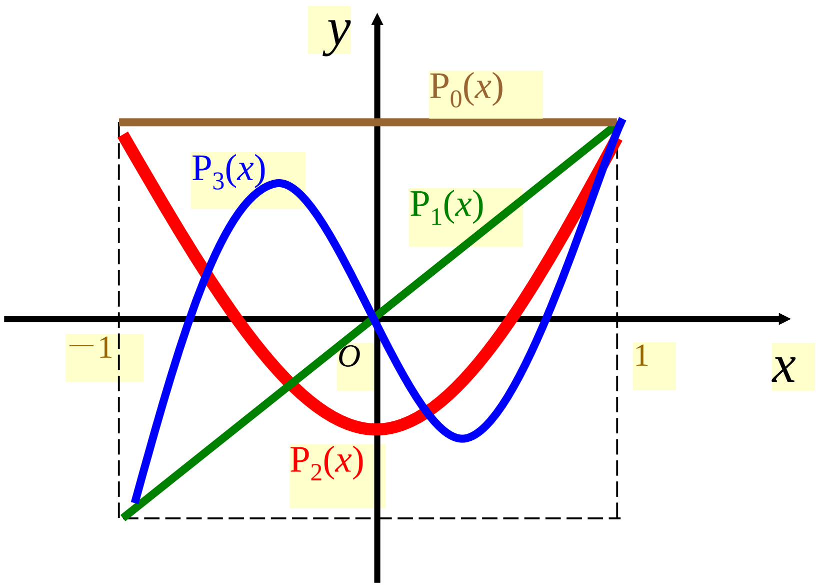
$$(n+1)P_{n+1}(x)=(2n+1)xP_n(x)-nP_{n-1}(x),(n=1,2,\cdots)$$

由 $P_0(x)=1,\ P_1(x)=x$ ，利用递推关系就可推出

$$P_2(x)=\frac{1}{2}(3x^2-1),\qquad P_3(x)=\frac{1}{2}(5x^3-3x)$$

$$P_4(x)=\frac{1}{8}(35x^4-30x^2+3),\quad \cdots$$

在$[-1,1]$ 上的图形如下：



切比雪夫*Chebyshev*\多项式

当区间为 $[-1,1]$，权函数 $\rho(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 时,由序列 $\{1,x,\cdots,x^n,\cdots\}$ 正交化得到的正交多项式就是Chebyshev多项式，它可表为

$$T_n(x)=\cos(n\arccos x) \qquad |x|\le 1$$

若令 $x=\cos\theta$，则 $T_n(x)=\cos n\theta,\quad 0\le\theta\le\pi$.

Chebyshev多项式有以下重要性质:

性质1 Chebyshev多项式 $\{T_n(x)\}$ 在区间 $[-1,1]$ 上带权 $\rho(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 正交，且

$$\int_{-1}^{1}\frac{T_n(x)T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx=\begin{cases}0, & n\neq m\\ \dfrac{\pi}{2}, & n=m\neq 0\\ \pi, & n=m=0\end{cases}$$

性质2 递推关系

$$\begin{cases} T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x) \qquad (n=1,2,\cdots), \\ T_0(x) = 1, \\ T_1(x) = x. \end{cases}$$

性质3 $T_{2k}(x)$ 只含 x 的偶次方，$T_{2k+1}(x)$ 只含 x 的奇次方，这性质由递推关系可直接得到。

性质4 $T_n(x)$ 在区间 $[-1,1]$ 上有 n 个零点

$$x_k = \cos\frac{2k+1}{2n}\pi, \quad k = 0, 1, \cdots, n-1$$

由递推关系可得

$T_0(x) = 1,$ $\qquad T_1(x) = x,$

$T_2(x) = 2x^2 - 1,$ $\qquad T_3(x) = 4x^3 - 3x,$

$T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1,$ $\qquad T_5(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x.$

➢ 4 函数的最佳平方逼近/* Least_Squares Approximation */

设函数 $f(x)\in C[a,b]$，用n次多项式$s(x)=\sum_{k=0}^{n}a_k x^k$ 作最佳平方逼近，就是要求得以$a_0^*, a_1^*, \cdots, a_n^*$为系数的多项式

$$s^*(x)=\sum_{k=0}^{n}a_k^* x^k$$

使

$$\|f(x)-s^*(x)\|_2^2=\int_a^b[f(x)-s^*(x)]^2dx=\min_{s(x)\in H_n}\|f(x)-s(x)\|_2^2$$

推广到一般的情况，就是对于给定的权函数$\rho(x)$，要求得 $a_k^* \quad (k=0,1,\cdots,n)$使

$$\|f(x)-s^*(x)\|_2^2=\int_a^b\rho(x)[f(x)-s^*(x)]^2dx=\min_{s(x)\in H_n}\|f(x)-s(x)\|_2^2$$

n 次多项式 $s(x)=\sum_{k=0}^{n}a_k x^k$，以 $1, x,\cdots, x^n$为基函数所作的线性组合构成的一类函数。进一步推广可将 x^k 改为一般的线性无关的连续函数 $\varphi_k(x)$ 以 $\varphi_0,\varphi_1,\cdots,\varphi_n$ 为线性组合$s(x)=\sum_{k=0}^{n}a_k\varphi_k(x)$ 的全体构成 $C[a,b]$的子空间 Φ，即 $\Phi=span\{\varphi_0,\varphi_1,\cdots,\varphi_n\}$

最佳平方逼近的提法可叙述为：求 $a_k^*\quad(k=0,1,\cdots,n)$ 使

$$\|f(x)-s^*(x)\|_2^2=\left\|f(x)-\sum_{k=0}^{n}a_k^*\varphi_k(x)\right\|_2^2=\min_{s(s)\in\Phi}\|f(x)-s(x)\|_2^2$$

称 $s^*(x)=\sum_{k=0}^{n}a_k^*\varphi_k(x)$ 为 $f(x)\in C[a,b]$ 在子集 $\Phi\subset C[a,b]$ 中的最佳平方逼近函数，为了求得 $s^*(x)$，这个问题等价于关于

$a_0,a_1,\cdots,a_n$ 的多元函数

$$I(a_0,a_1,\cdots,a_n)=\int_a^b\rho(x)[f(x)-\sum_{k=0}^{n}a_k\varphi_k(x)]^2dx$$

的最小值问题。

为了确定参数 $a_k\quad(k=0,1,\cdots,n)$，由多元函数极值存在的必要条件，有

$$\frac{\partial I}{\partial a_k}=0\quad(k=0,1,\cdots,n)$$

$$\frac{\partial I}{\partial a_k}=2\int_a^b \rho(x)\left[\sum_{j=0}^{n} a_j\varphi_j(x)-f(x)\right]\varphi_k(x)dx=0$$

$$(k=0,1,\cdots,n)$$

即有 $$\sum_{j=0}^{n}(\varphi_j,\varphi_k)a_j=(f,\varphi_k),\quad (k=0,1,\cdots,n)$$

这是关于未知数$a_0,a_1,\cdots,a_n$ 的线性代数方程组，称为法方程，由于$\varphi_0,\varphi_1,\cdots,\varphi_n$线性无关，故系数行列式 $G(\varphi_0,\varphi_1,\cdots,\varphi_n)\neq 0$，于是方程组有唯一解 $a_k=a_k^*\ (k=0,1,\cdots,n)$从而得到

$$s^*(x)=a_0^*\varphi_0(x)+\cdots+a_n^*\varphi_n(x)$$

下证$s^*(x)$ 是所求解，即对任何 $s(x)\in\Phi$ ，有

$$\int_a^b \rho(x)[f(x)-s^*(x)]^2dx\le\int_a^b \rho(x)[f(x)-s(x)]^2dx$$

$$\begin{bmatrix}(\varphi_0,\varphi_0) & (\varphi_0,\varphi_1) & \cdots & (\varphi_0,\varphi_n)\\(\varphi_1,\varphi_0) & (\varphi_1,\varphi_1) & \cdots & (\varphi_1,\varphi_n)\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\(\varphi_n,\varphi_0) & (\varphi_n,\varphi_1) & \cdots & (\varphi_n,\varphi_n)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_0\\a_1\\ \vdots\\a_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(\varphi_0,f)\\(\varphi_1,f)\\ \vdots\\(\varphi_n,f)\end{bmatrix}$$

为此只要考虑

$$D=\int_a^b \rho(x)[f(x)-s(x)]^2dx-\int_a^b \rho(x)[f(x)-s^*(x)]^2dx \geq 0$$

$$=\int_a^b \rho(x)[s(x)-s^*(x)]^2dx+2\int_a^b \rho(x)[s^*(x)-s(x)][f(x)-s^*(x)]dx \geq 0$$

这就证明了$s^*(x)$是$f(x)$在Φ 中的最佳平方逼近函数。

如果令$\delta=f(x)-s^*(x)$，由法方程易知$(f-s^*,s^*)=0$ 则平方误差为：

$$\|\delta\|_2^2=(f-s^*,f-s^*)=(f,f)-(s^*,f)$$

$$=\|f\|_2^2-\sum_{k=0}^{n}a_k^*(\varphi_k,f)$$

若取 $\varphi(x)=x^k,\ \rho(x)\equiv 1,\ f(x)\in C[0,1]$， 要在$H_n$中求$n$次最佳平方逼近多项式 $s^*(x)=a_0^*+a_1^*x+\cdots+a_n^*x^n$

这时

$$(\varphi_j,\varphi_k)=\int_0^1 x^{k+j}dx=\frac{1}{k+j+1}$$

$$(f,\varphi_k)=\int_0^1 x^k f(x)dx=d_k$$

于是法方程组的系数矩阵为

$$\mathbf{H}=\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n+2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n+2} & \cdots & \frac{1}{2n+1} \end{bmatrix}$$

Hilbert阵!

记 $\mathbf{d}=(d_0,d_1,\cdots,d_n)^T$, $\mathbf{a}=(a_0,a_1,\cdots,a_n)^T$, 则

$$H\mathbf{a}=\mathbf{d}$$

的解 $a_k=a_k^*\ \ (k=0,1,\cdots,n)$ 即为所求.

例 定义内积 $(f,g)=\int_0^1 f(x)g(x)dx$，试在 $H_1=span\{1,x\}$ 中寻求对于 $f(x)=\sqrt{x}$ 的最佳平方逼近元素 $P(x)$ 。

解 $d_0=(f,1)=\int_0^1\sqrt{x}dx=\frac{2}{3}$, $d_1=(f,x)=\int_0^1 x\sqrt{x}dx=\frac{2}{5}$

这里实际上要求的是(0, 1)上的一次最佳平方逼近多项式

例 定义内积 $(f,g)=\int_0^1 f(x)g(x)dx$ ，试在 $H_1=span\{1,x\}$ 中寻求对于 $f(x)=\sqrt{x}$ 的最佳平方逼近元素 $P(x)$ 。

解 $d_0=(f,1)=\int_0^1\sqrt{x}dx=\dfrac{2}{3},\ d_1=(f,x)=\int_0^1 x\sqrt{x}dx=\dfrac{2}{5}$

这里实际上要求的是(0, 1)上的一次最佳平方逼近多项式

得法方程组为

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{5} \end{bmatrix}$$

解得 $a_0^*=\dfrac{4}{15},a_1^*=\dfrac{12}{15}$ ，所求的最佳平方逼近元素为

$$P(x)=\frac{4}{15}+\frac{12}{15}x \qquad 0\le x\le 1$$

平方误差

$$\|\delta\|_2^2=(f,f)-\sum_{k=0}^{1}a_k^*(f,\varphi_k)=\int_0^1 xdx-\sum_{k=0}^{1}a_k^*d_k$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{4}{15}\times\frac{2}{3}-\frac{12}{15}\times\frac{2}{5}=0.002222$$

对于一般的基底 $\varphi_0,\varphi_1,\cdots,\varphi_n$ ，当 n 稍大时，计算法方程组中的(φ_k,φ_j) 以及求解法方程组的计算量都是很大的，若采用 $1,x,\cdots,x^n$ 作基底，当 $\rho(x)\equiv 1$时，虽然 $(\varphi_k,\varphi_j)=(x^k,x^j)$容易计算，但由此形成的法方程组系数矩阵当 $n\geq 4$ 时是病态矩阵，用单字长在计算机上求解法方程组，其结果往往不太可靠，如何解决?

注意看法方程

$$\begin{bmatrix} (\varphi_0,\varphi_0) & (\varphi_0,\varphi_1) & \cdots & (\varphi_0,\varphi_n) \\ (\varphi_1,\varphi_0) & (\varphi_1,\varphi_1) & \cdots & (\varphi_1,\varphi_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (\varphi_n,\varphi_0) & (\varphi_n,\varphi_1) & \cdots & (\varphi_n,\varphi_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\varphi_0,y) \\ (\varphi_1,y) \\ \vdots \\ (\varphi_n,y) \end{bmatrix}$$

若要法方程非对角线上元素为零，

$\varphi_k(k=0,1,\cdots,n)$ 应怎么取?

可采用正交基底．为此，我们先介绍正交多项式

5 用正交函数系作最佳平方逼近

/* Orthogonal Polynomails And L-S Appoximaition */

若 $\{g_k(x)\}\ (k=0,1,\cdots,n)$ 是带权 $\rho(x)$ 正交的函数系，即

$$(g_k, g_j)=\int_a^b \rho(x)g_k(x)g_j(x)dx=0 \qquad (j\neq k)$$

那么，由法方程组 $\sum_{k=0}^{n}(g_k, g_j)a_j=(f, g_j)$ 的各个方程可以独立地解得

$$a_j^*=\frac{(g_j, f)}{(g_j, g_j)} \qquad (j=0,1,\cdots,n)$$

从而得出最佳平方逼近函数

$$s^*(x)=\sum_{j=0}^{n}\frac{(g_j, f)}{(g_j, g_j)}g_j(x)$$

这里的每个 a_j^* 与 n 是无关的，因此对于函数 $f(x)\in C[a,b]$ 与正交基函数系 $g_0, g_1, \cdots$，只要按公式逐个计算出 $a_j^*\quad (j=0,1,2,\cdots)$

即可以得出一个级数

$$a_0^*g_0(x)+a_1^*g_1(x)\cdots$$

这个级数称为 $f(x)$ 对应于基函数系 $\{g_k(x)\}_0^\infty$ 的广义Fourier级数，

系数 a_k^* 称为广义Fourier系数，对任意固定的 n，其部分和 $s_n(x)=\sum_{k=0}^{n}a_k^*g_k(x)$ 称为广义多项式，就是所求的最佳平方逼近多项式。

当 $f(x)\in C[-1,1]$时,可以用勒让德多项式作基函数 $\{g_k\}=\{P_k(x)\}$,

有

$$s_n^*(x)=a_0^*P_0(x)+a_1^*P_1(x)+\cdots+a_n^*P_n(x)$$

其中

$$a_k^*=\frac{(P_k,f)}{(P_k,P_k)}=\frac{2k+1}{2}\int_{-1}^{1}f(x)P_k(x)dx \qquad (k=0,1,\cdots,n)$$

则 a_k^* 是使 $\left\|f(x)-\sum_{k=0}^{n}a_kP_k(x)\right\|_2^2$ 最小的最佳平方逼近多项式。

这时的平方误差为

$$\|\delta_n\|_2^2=\int_{-1}^{1}[f(x)]^2dx-\sum_{k=0}^{n}\frac{2}{2k+1}a^{*2}$$

例 求 $f(x)=e^x$ 在 $[-1,1]$ 上的三次最佳平方逼近多项式，要求用 $\{P_0, P_1, P_2, P_3\}$ 作基函数。

解 先计算 $(P_k, f)\ (k=0,1,2,3)$

$$(P_0, f)=\int_{-1}^{1} e^x dx = e-\frac{1}{e}=2.3504 \qquad (P_1, f)=\int_{-1}^{1} xe^x dx = 2e^{-1}=0.7358$$

$$(P_2, f)=\int_{-1}^{1}\left(\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2}\right)e^x dx = e-\frac{7}{e}=0.02013$$

$$(P_3, f)=\int_{-1}^{1}\left(\frac{5}{2}x^3-\frac{3}{2}\right)e^x dx = 37\frac{1}{e}-5e=0.02013$$

$$a_0^*=\frac{(P_0, f)}{2}=1.1752, \qquad a_1^*=\frac{3}{2}(P_1, f)=1.1036$$

$$a_2^*=\frac{5}{2}(P_2, f)=0.3578, \qquad a_3^*=\frac{7}{2}(P_3, f)=0.07046$$

于是得

$$s_3^*(x)=0.9963+0.9979x+0.5367x^2+0.1761x^3$$

平方误差

$$\|\delta_3\|_2^2=\|e^x-s_3^*(x)\|_2^2=\int_{-1}^{1} e^{2x}dx-\sum_{k=0}^{3}\frac{2}{2k+1}a_k^{*2}=0.88\times 10^{-4}$$

例 求 $f(x)=\sqrt{x}$ 在区间[0,1]上的一次最佳平方逼近多项式

解 令 $x=\frac{1}{2}(1+t)$，则

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1+t}=\varphi(t), \qquad -1\le t\le 1$$

先求 $\varphi(t)$在区间 $[-1,1]$上的一次最佳平方逼近多项式 $q_1(t)$，由

$$a_0^*=\frac{1}{2}(\varphi,P_0)=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1+t}\,dt=\frac{2}{3}$$

$$a_1^*=\frac{3}{2}(\varphi,P_1)=\frac{3}{2}\int_{-1}^{1}\frac{t}{\sqrt{2}}\sqrt{1+t}\,dt=\frac{6}{15}$$

可知 $$q_1(t)=\frac{2}{3}P_0(t)+\frac{6}{15}P_1(t)=\frac{2}{3}+\frac{6}{15}t, \qquad -1\le t\le 1$$

将 $t=2x-1$代入 $q_1(t)$，就得$\sqrt{x}$ 在区间[0, 1]上的一次最佳平方逼近多项式

$$s_1^*(x)=\frac{2}{3}+\frac{6}{15}(2x-1)=\frac{4}{15}+\frac{12}{15}x$$

Algorithm: Orthogonal Polynomials Approximation

To approximate a given function by a polynomial with error bounded by a given tolerance.

Input: number of data m; $x[m]$; $y[m]$; weight $w[m]$; tolerance TOL; maximum degree of polynomial Max_n.

Output: coefficients of the approximating polynomial.

Step 1 Set $\varphi_0(x) \equiv 1$; $a_0 = (\varphi_0, y)/(\varphi_0, \varphi_0)$; $P(x) = a_0\, \varphi_0(x)$; $err = (y, y) - a_0\, (\varphi_0, y)$;

Step 2 Set $\alpha_1 = (x\varphi_0, \varphi_0)/(\varphi_0, \varphi_0)$; $\varphi_1(x) = (x - \alpha_1)\, \varphi_0(x)$;

$a_1 = (\varphi_1, y)/(\varphi_1, \varphi_1)$; $P(x)$ += $a_1\, \varphi_1(x)$; err –= $a_1\, (\varphi_1, y)$;

Step 3 Set $k = 1$;

Step 4 While (($k < Max\_n$)&&(|err|≥TOL)) do steps 5-7

Step 5 k ++;

Step 6 $\alpha_k = (x\varphi_1, \varphi_1)/(\varphi_1, \varphi_1)$; $\beta_{k-1} = (\varphi_1, \varphi_1)/(\varphi_0, \varphi_0)$;

$\varphi_2(x) = (x - \alpha_k)\, \varphi_1(x) - \beta_{k-1}\, \varphi_0(x)$; $a_k = (\varphi_2, y)/(\varphi_2, \varphi_2)$;

$P(x)$ += $a_k\, \varphi_2(x)$; err –= $a_k\, (\varphi_2, y)$;

Step 7 Set $\varphi_0(x) = \varphi_1(x)$; $\varphi_1(x) = \varphi_2(x)$;

Step 8 Output ( ); STOP.

注：
$$err = \| P - y \|^2 = (P - y, P - y) = \left(\sum_{k=0}^{n} a_k \varphi_k - y,\ \sum_{i=0}^{n} a_i \varphi_i - y\right)$$
$$= \sum_{k=0}^{n} a_k^2 (\varphi_k, \varphi_k) - 2\sum_{k=0}^{n} a_k (\varphi_k, y) + (y, y) \quad = (y, y) - \sum_{k=0}^{n} a_k (\varphi_k, y)$$

例：用 $y=c_0+c_1x+c_2x^2$ 来拟合

x	1	2	3	4
y	4	10	18	26

, $\omega\equiv 1$

解：通过正交多项式 $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \varphi_2(x)$ 求解

$$a_k=\frac{(\varphi_k, y)}{(\varphi_k, \varphi_k)}$$

设 $y=a_0\varphi_0(x)+a_1\varphi_1(x)+a_2\varphi_2(x)$

$$\varphi_0(x)=1 \qquad a_0=\frac{(\varphi_0, y)}{(\varphi_0, \varphi_0)}=\frac{29}{2}$$

$$\alpha_1=\frac{(x\varphi_0, \varphi_0)}{(\varphi_0, \varphi_0)}=\frac{5}{2} \quad \varphi_1(x)=(x-\alpha_1)\varphi_0(x)=x-\frac{5}{2} \quad a_1=\frac{(\varphi_1, y)}{(\varphi_1, \varphi_1)}=\frac{37}{5}$$

$$\alpha_2=\frac{(x\varphi_1, \varphi_1)}{(\varphi_1, \varphi_1)}=\frac{5}{2} \qquad \beta_1=\frac{(\varphi_1, \varphi_1)}{(\varphi_0, \varphi_0)}=\frac{5}{4}$$

$$\varphi_2(x)=(x-\frac{5}{2})\varphi_1(x)-\frac{5}{4}\varphi_0(x)=x^2-5x+5 \qquad a_2=\frac{(\varphi_2, y)}{(\varphi_2, \varphi_2)}=\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow\ y=\frac{29}{2}\times 1+\frac{37}{5}(x-\frac{5}{2})+\frac{1}{2}(x^2-5x+5)$$

$$=\frac{1}{2}x^2+\frac{49}{10}x-\frac{3}{2}$$

与前例结果一致。

注：手算时也可用待定系数法确定函数族。