§3.3　方阵函数及其计算

§ 3.3 方阵函数及其计算

一、矩阵函数的定义与性质

定义 **设** $f(z)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ 是复变量 z 的解析函数, **收敛半径为** R. 如果 $A\in C^{n\times n}$ 的谱半径 $\rho(A)<R$, **则记** $f(A)\triangleq\sum_{k=0}^{\infty} a_k A^k$, **称为矩阵** A **的矩阵函数.**

例 $\forall A\in C^{n\times n}$ 若满足 $\rho(A)<1$, **则**

$$(I-A)^{-1}=\sum_{k=0}^{\infty} A^k;$$

$$\ln(I+A)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}A^k.$$

§ 3.3 方阵函数及其计算

一、矩阵函数的定义与性质

例 对 $\forall A \in C^{n\times n}$, 有

$$e^A = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} A^k, \rho(A) < +\infty.$$

$$\sin A = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} A^{2k+1}, \rho(A) < +\infty.$$

$$\cos A = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} A^{2k}, \rho(A) < +\infty.$$

$$ln(I+A) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} A^k, \rho(A) < 1.$$

$$(I-A)^{-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} A^k, \rho(A) < 1.$$

$$(I-A)^{-2} = \sum_{k=0}^{+\infty} (k+1) A^k, \rho(A) < 1.$$

此外，如果 $AB = BA$,则

$$e^A e^B = e^B e^A = e^{A+B};$$

$$\sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B.$$

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} t^k A^k.$$

§ 3.3 方阵函数及其计算

二、矩阵函数的求法 —给定解析函数 $f(z)$ 和方阵 A，如何求 $f(A)$?

1. Jordan标准型法

定理 设 $f(z)$是复变量的解析函数, $A \in C^{n\times n}$ 有 Jordan 标准型 $A = PJP^{-1} = P\text{diag}(J_1, J_2, \cdots, J_m)P^{-1}$，则

$$\boxed{f(A) = P\text{diag}\big(f(J_1), f(J_2), \cdots, f(J_m)\big)P^{-1},}$$

其中，$f(J_i)$ 有形式

$$f(J_i) = \begin{bmatrix} f(\lambda_i) & f'(\lambda_i) & \frac{f''(\lambda_i)}{2!} & \cdots & \frac{f^{(n_i-1)}(\lambda_i)}{(n_i-1)!} \\ & f(\lambda_i) & f'(\lambda_i) & \ddots & \vdots \\ & & f(\lambda_i) & \ddots & \frac{f''(\lambda_i)}{2!} \\ & & & \ddots & f'(\lambda_i) \\ & & & & f(\lambda_i) \end{bmatrix}_{n_i\times n_i}.$$

§ 3.3 方阵函数及其计算

二、矩阵函数的求法 —**给定解析函数** $f(z)$ **和方阵** A，**如何求** $f(A)$?

1. Jordan标准型法

定理 **设** $f(z)$是复变量的解析函数, $A \in C^{n\times n}$ **有** Jordan **标准型** $A = PJP^{-1} = P\mathrm{diag}(J_1, J_2, \cdots, J_m)P^{-1}$, **则**

$$\boxed{f(A) = P\mathrm{diag}\big(f(J_1), f(J_2), \cdots, f(J_m)\big)P^{-1}.}$$

推论 **若** A 的特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$, 则 $f(A)$ 的特征值为

$$f(\lambda_1), f(\lambda_2), \cdots, f(\lambda_n).$$

§ 3.3 方阵函数及其计算

例1 **对矩阵** $A=\begin{bmatrix}2&0&0\\1&1&1\\1&-1&3\end{bmatrix}$，计算 e^{A} 和 $\sin A$.

解 **由** $A=PJP^{-1}$, **其中** $J=\left[\begin{array}{cc|c}2&1&0\\0&2&0\\\hline 0&0&2\end{array}\right]$, $P=\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&0\\1&0&-1\end{bmatrix}$, **有**

$$f(A)=P\begin{bmatrix}f(J_1)&\\&f(J_2)\end{bmatrix}P^{-1}=P\left[\begin{array}{cc|c}f(2)&f'(2)&0\\0&f(2)&0\\\hline 0&0&f(2)\end{array}\right]P^{-1}.$$

对 $f(z)=e^{z}$, $f(2)=e^{2}$, $f'(2)=e^{2}$;

对 $f(z)=\sin z$, $f(2)=\sin 2$, $f'(2)=\cos 2$. ■

二、矩阵函数的求法 —给定解析函数 $f(z)$ 和方阵 A，如何求 $f(A)$？

2. 最小多项式法

定理 设 n 阶矩阵 $A \in C^{n\times n}$ 的最小多项式为

$$m_A(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)^{n_1}(\lambda-\lambda_2)^{n_2}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{n_s},$$

其中, λ_i 为 A 的所有互异特征值, $\sum_{i=1}^{s} n_i = m \le n$.

设 $f(z)$ 是复变量 z 的解析函数,

$$g(\lambda) = c_0 + c_1\lambda + \cdots + c_{m-1}\lambda^{m-1},$$

则 $f(A) = g(A)$ 的充要条件是

$$g^{(j)}(\lambda_i) = f^{(j)}(\lambda_i),\ i = 1,\cdots,s;\ j = 0,1,\cdots,n_i - 1.$$

证明 （略）

例2 $A=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 3\end{bmatrix}$, **计算** e^{A}, $\sin A$, e^{At}.

解 A **的最小多项式** $m_A(\lambda)=(\lambda-2)^2$,**考察** $g(\lambda)=c_0+c_1\lambda$.

若 $\begin{cases} f(2)=g(2)=c_0+2c_1, \\ f'(2)=g'(2)=c_1, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} c_0=f(2)-2f'(2), \\ c_1=f'(2), \end{cases}$

有 $f(A)=g(A)$.

对 $f(z)=e^{z}$, 由 $f(2)=f'(2)=e^{2}$ $\Rightarrow \begin{cases} c_0=-e^{2}, \\ c_1=e^{2}. \end{cases}$

因此, $e^{A}=-e^{2}I+e^{2}A=\cdots$.

例2 $A=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 3\end{bmatrix}$, **计算** e^{A}, $\sin A$, e^{At}.

解 A **的最小多项式** $m_A(\lambda)=(\lambda-2)^2$,**考察** $g(\lambda)=c_0+c_1\lambda$.

若 $\begin{cases} f(2)=g(2)=c_0+2c_1, \\ f'(2)=g'(2)=c_1, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} c_0=f(2)-2f'(2), \\ c_1=f'(2), \end{cases}$

有 $f(A)=g(A)$.

对 $f(z)=sinz$, 由 $\begin{matrix} f(2)=sin2 \\ f'(2)=cos2 \end{matrix}$ $\Rightarrow \begin{cases} c_0=sin2-2cos2, \\ c_1=cos2. \end{cases}$

因此, $e^{A}=(sin2-2cos2)I+cos2\cdot A=\cdots.$

§ 3.3 方阵函数及其计算

例2 $A=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 3\end{bmatrix}$ **计算** e^{A}, $\sin A$, e^{At}.

解 A **的最小多项式** $m_A(\lambda)=(\lambda-2)^2$,**考察** $g(\lambda)=c_0+c_1\lambda$.

若 $\begin{cases} f(2)=g(2)=c_0+2c_1, \\ f'(2)=g'(2)=c_1, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} c_0=f(2)-2f'(2), \\ c_1=f'(2), \end{cases}$

则 $f(A)=g(A)$.

对 $f(z)=e^{tz}$, 由 $\begin{cases} f(2)=e^{2t} \\ f'(2)=te^{2t} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_0=(1-2t)e^{2t}, \\ c_1=te^{2t}. \end{cases}$

因此, $e^{At}=(1-2t)e^{2t}I+te^{2t}A=\cdots$. ■

例3 $A=\begin{bmatrix} 17 & 0 & -25 \\ 0 & 3 & 0 \\ 9 & 0 & -13 \end{bmatrix}$ **计算** e^{At}.

解 A **的最小多项式** $m_A(\lambda)=(\lambda-3)(\lambda-2)^2$,

考察 $g(\lambda)=c_0+c_1\lambda+c_2\lambda^2$.

若 $\begin{cases} f(3)=g(3) \\ f(2)=g(2) \\ f'(2)=g'(2) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} c_0=4e^{3t}-3(1+2t)e^{2t} \\ c_1=-4e^{3t}+(4+5t)e^{2t} \\ c_2=e^{3t}-(1+t)e^{2t} \end{cases}$

对 $f(z)=e^{tz}$,

因此, $e^{At}=c_0+c_1A+c_2A^2=\begin{bmatrix} (1+15t)e^{2t} & 0 & -25te^{2t} \\ 0 & e^{3t} & 0 \\ 9te^{2t} & 0 & (1-15t)e^{2t} \end{bmatrix}$. ■