矩阵论

矩阵论的知识点

1. 线性空间的相关内容，包括线性空间的定义及其性质，线性子空间；
2. 内积空间的相关内容，包括欧氏空间 ；
3. 线性变换的相关内容，包括最小多项式理论 ；
4. 范数理论及其应用的相关内容，包括向量范数，矩阵范数以及范数应用 ；
5. 矩阵分析及其应用的相关内容，包括向量和矩阵极限、微分和积分 、方阵级数理论、方阵级数理论的应用等；
6. 矩阵分解的相关内容，包括最大秩分解和矩阵分解的应用 ；
7. 广义逆矩阵及其应用的相关内容，包括基本定义和相关应用；
8. 特征值的估计及广义特征值的相关内容，包括特征值的估计及广义特征值和应用。

矩阵论的意义和作用

矩阵论是数学的一个重要分支，它在数学及各种工程学科中具有广泛的应用。矩阵论不仅是一门独立的学科，而且是一种强大的工具，对于解决复杂问题和推动多个学科的发展具有重要意义。

其应用领域包括：工程问题、统计学、优化问题、量子力学、控制理论等。

矩阵论的意义和作用

工程问题：矩阵理论在工程领域中发挥着重要作用，特别是在电路分析、结构力学、信号处理等方面。矩阵的线性代数性质可以用于解决复杂的电路网络分析问题，以及结构力学中的静力学和动力学问题。此外，信号处理中的滤波器设计、图像处理等也离不开矩阵理论的应用。

统计学：在统计学中，矩阵理论被用于多元统计分析、协方差矩阵估计、主成分分析等。通过矩阵的特征值和特征向量，可以对数据进行降维和特征提取，从而帮助更好地理解数据分布和相关性。

优化问题：矩阵理论在优化问题中有广泛应用，特别是线性规划和凸优化。矩阵的迹、行列式、二次型等性质被广泛用于构建目标函数和约束条件，进而优化各种实际问题。

量子力学：矩阵理论在量子力学中起着重要的作用，特别是在量子态表示和算符运算中。量子力学中的态矢量、密度矩阵、算符都可以用矩阵进行表示和计算。

控制理论：控制理论中的状态空间模型和控制器设计都涉及到矩阵理论。矩阵的特征值和特征向量在控制系统的稳定性分析和模型转换中有重要应用。

此外：矩阵论的应用还扩展到计算机科学、经济学、生物学等多个学科和领域。例如，计算机科学中的三维动画制作需要用到矩阵；经济学中的某些模型构建也可能涉及到矩阵运算；生物学中的某些复杂系统的建模和分析也可能利用到矩阵理论的方法。

第一部分 矩阵论

§1 线性空间和线性变换

§2 方阵的相似化简

§3 矩阵分解及其应用

§1.1 线性空间

一、线性空间的概念

二、线性空间的基与维数

三、坐标

四、基变换与坐标变换

五、子空间

§1.1 线性空间

一、线性空间的概念

定义　设 V 是一非空集，F 是数域(常用实数域 R 或复数域 C).

对 V 中任意两个元 α,β,

定义一个加法运算, 记为"＋"：

$$\alpha+\beta\in V(\text{称为 } \alpha \text{ 与 } \beta \text{ 的和});$$

定义一个数乘运算:

$$k\alpha\in V, k\in F(\text{称为 } k \text{ 与 } \alpha \text{ 的数积}).$$

这两种运算(也称为 V 的线性运算)满足下列八条规则:

(1) 对任意$\alpha,\beta\in V$, 有 $\alpha+\beta=\beta+\alpha$;

(2) 对任意$\alpha,\beta,\gamma\in V$,有 $(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$;

(3) 存在零元$0\in V$,使得对任意$\alpha\in V$, 都有 $\alpha+0=\alpha$;

(4) 对任意$\alpha\in V$,存在$-\alpha\in V$使得 $\alpha+(-\alpha)=0$;

(5) 对任意的$k\in F$ 和任意$\alpha,\beta\in V$,有 $k(\alpha+\beta)=k\alpha+k\beta$;

(6) 对任意$\alpha\in V$和任意的$k,l\in F$, 有 $(k+l)\alpha=k\alpha+l\alpha$;

(7) 对任意$\alpha\in V$和任意的$k,l\in F$, 有 $k(l\alpha)=(kl)\alpha$;

(8) F中的数 1，使得对任意$\alpha\in V$, 有 $1\alpha=\alpha$.

称 V 为 F上的**线性空间**(或向量空间), 记为$V(F)$; V 中的元称为**向量**. 当 F 为实数域 R 时称为实线性空间, 当 F 为复数域 C时称为复线性空间.

§ 1.1 线性空间

例1：设 $a_i \in F, 0 \leq i \leq m, t$ 为变量, 则

$$P(t) = a_m t^m + a_{m-1} t^{m-1} + \cdots + a_1 t + a_0$$

称为 F 上的一个**多项式**.

当 $a_m \neq 0$时, $P(t)$ 称为 m 次多项式, $a_m t^m$ 称为 $P(t)$首项.

特别, 当 $a_m = 1$时, 则称 $P(t)$为 m 次首一多项式.

系数全都是零的多项式称为**零多项式**, 记为 0。

零多项式是惟一不定义次数的多项式, 它与**零次多项式**是有本质区别的.

§ 1.1 线性空间

例1： 设 $a_i \in F, 0 \le i \le m, t$ 为变量, 则

$$P(t) = a_m t^m + a_{m-1} t^{m-1} + \cdots + a_1 t + a_0$$

称为 F 上的一个**多项式**.

实数域 R 上的多项式全体, 按通常意义的多项式加法及数与多项式乘法, 构成实线性空间, 记为 $P(t)$.

如果只考虑次数不大于 n 的多项式全体, 再添加零多项式所成的集, 则对于通常意义的多项式加法及数与多项式乘法也构成一个实线性空间, 以 $\boldsymbol{P_n(t)}$ 表之.

例2 在正实数集 R_+ 中定义加法和数乘运算为

$$a \oplus b = ab, \quad k \circ a = a^k$$

其中 $a, b \in R_+, k \in R$.

为了区别于常规加法和数乘, 这里我们用"$\oplus$"表示加法, "$\circ$"表示数乘. 则 R_+ 是实线性空间.

证明: 事实上, 不难验证 R_+ 对这两种运算是封闭的, 即

$a \oplus b \in R_+, \quad k \circ a \in R_+,$

并且满足规则(1)、(2)和(5)—(8).

又 $1 \in R_+$, 且对任意 $a \in R_+$ 有 $a \oplus 1 = a$ 和 $a \oplus 1/a = 1$

而 $1/a \in R_+$, 因此, 规则(3)、(4)也是满足的,

并且 R_+ 中的零元是 1, a 的负元是 $1/a$. ∎

线性空间的简单性质:

1. 零元是唯一的.
2. 对任意 $\alpha \in V$其负元是唯一的.从而可以定义 V 中两个元 α, β 的减法(记为"$-$")为 $\alpha - \beta = \alpha + (-\beta)$
3. 对任意 $\alpha \in V$ 有 $0\alpha = 0$, $(-1)\alpha = -\alpha$;
   对任意的 $k \in F$,有 $k0 = 0$.

线性组合

定义 若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m \in V(F), k_1,k_2,\cdots,k_m \in F$,有

$$\beta = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_m\alpha_m = \sum_{i=1}^{m} k_i\alpha_i \in V(F),$$

称 β 为向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$的一个**线性组合**,

或称 β 可由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$**线性表出**.

线性相关和线性无关

定义 V 中向量组 $\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m\}\,(m\geq 1)$ 称为**线性相关**的,

如果存在一组不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$,使

$$\sum_{i=1}^{m} k_i\alpha_i = 0.$$

若仅当 $k_1 = k_2 = \cdots = k_m = 0$ 时,上式才成立,

则称此向量组**线性无关**.

线性相关与线性无关的一些结论

1. 当$m \geq 2$时, 向量组$\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m\}$线性相关的充要条件是, 其中至少有一个向量$\alpha_i (1 \leq i \leq m)$可由组中其余向量线性表出.
2. 若某向量组线性无关, 则它的任一部分向量组必线性无关; 若某向量组中有一个部分向量组线性相关, 则该向量组必线性相关.
3. 单个零向量是线性相关的; 单个非零向量是线性无关的.

二、线性空间的基与维数

定义 如果在线性空间 V 中能够找到无限多个线性无关的向量，则称 V 为**无限维**的；而若在 V 中只能够找到有限多个线性无关的向量，则称 V 为**有限维**的，称最大线性无关向量的个数为 V 的**维数**，记为 $\boldsymbol{dimV}$.

$dimV = n$ 的线性空间称为 **n 维线性空间**，记为 $\boldsymbol{V^n}$.

二、线性空间的基与维数

例如：1. 多项式 $P(t)$ 是无限维的.

因为对于任意的正整数 N, 都有 N 个线性无关的“向量”（多项式）$1, t, \cdots, t^{N-1}$.

2. $P_n(t)$是 $n+1$ 维线性空间.

因为任一次数不大于 n 的多项式和零多项式都可由 $n+1$ 个线性无关的多项式 $1, t, \cdots, t^n$ 线性表出.

二、线性空间的基与维数

定义 V^n 中给定顺序的 n 个线性无关向量 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 所成的向量组称为 V^n 的一个**基**(或基底), 记为 $B = \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$. B 中的向量 $\alpha_i\ (1 \leq i \leq n)$称为第 i 个基向量.

定理 设 B 是 V^n 的一个基，则 V 中任一向量都可由 B 唯一表示.

证： 由于 V^n 中 $n+1$个向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,\zeta$ 必线性相关,

所以存在不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_{n+1}$,

使 $\sum_{i=1}^{n} k_i\alpha_i + k_{n+1}\zeta = 0.$

如果 $k_{n+1}=0$, 则上式为 $\sum_{i=1}^{n} k_i\alpha_i = 0.$

但 $\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}$ **线性无关, 故有** $k_i=0, 1\le i\le n.$

这与$k_1,k_2,\cdots,k_{n+1}$不全为零矛盾. 因此$k_{n+1}\neq 0$,

从而有$\zeta = -\frac{1}{k_{n+1}}\sum_{i=1}^{n} k_i\alpha_i = \sum_{i=1}^{n}\left(-\frac{k_i}{k_{n+1}}\right)\alpha_i$

即 ζ 可由 B 线性表出.

定理 设 B 是 V^n 的一个基，则 V 中任一向量都可由 B 唯一表示。

再证唯一性

设有 $\zeta = \sum_{i=1}^{n} x_i\alpha_i$ 和 $\zeta = \sum_{i=1}^{n} y_i\alpha_i$

则得 $\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)\alpha_i = 0$,

从而由 $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$ 是线性无关的, 推出

$$x_i = y_i, i = 1,2,\cdots,n. \qquad \blacksquare$$

三、坐标

定理　设 B 是 V^n 的一个基，则 V 中任一向量都可由B唯一表示。

定理表明, 在 V^n 中取定一个基 B , 那么对任意 $\zeta \in V^n$，存在唯一的一组数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$,使 $\zeta = \sum_{i=1}^{n} x_i \alpha_i$.

$$\zeta = [\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \mathcal{B} X \quad ,$$

$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 所组成的矩阵 $[\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n]$ 仍记为 B.

$X = [x_1, x_2, \cdots, x_n]^T$称为 ζ 在基 B 下的**坐标向量**(或**坐标**),

$x_i (1 \le i \le n)$称为 ζ 在 B 下的第 i 个坐标.

例3 在$P_2(t)$中取基$B=\{1,t,t^2\}$，则多项式$P(t)=2t^2-t+1$在B下的坐标向量是$[1\ \ -1\ \ 2]^T$,

因为 $2t^2-t+1=[1\ \ t\ \ t^2]\begin{bmatrix}1\\-1\\2\end{bmatrix}$.

若另取一个基 $B_1=\{t+1,t+2,t^2\}$,

则由$2t^2-t+1=-3\cdot(t+1)+2\cdot(t+2)+2\cdot t^2=B_1\begin{bmatrix}-3\\2\\2\end{bmatrix}$.

知, $P(t)$在B_1下的坐标向量是 $[-3\ \ 2\ \ 2]^T$. ■

例4 $R^{n\times n}$ **中的任何可逆矩阵**P**，其** n **个列向量**$P_1, P_2, \cdots, P_n \in R^n$ **构成**R^n**的基.**

即 R^n 中任意向量 y 都可以由 P 的 n 个列向量线性表出.

注：由R^n(或C^n)的一个基所排列成的 n 阶方阵是可逆的.

四、基变换与坐标变换

定义 设$B_\alpha=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}$，$B_\beta=\{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n\}$是$V^n$的两个基，则每个$\beta_j(1\le j\le n)$都可由$B_\alpha$线性表出:

$$\beta_j=\sum_{i=1}^{n}p_{ij}\alpha_i=[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n]\begin{bmatrix}p_{1j}\\p_{2j}\\\vdots\\p_{nj}\end{bmatrix},\ j=1,2,\cdots,n.$$

将 $\beta_j,1\le j\le n$按顺序排列,并使用矩阵记号,则得

$$[\beta_1\beta_2\cdots\beta_n]=[\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n]\begin{bmatrix}p_{11}&p_{12}&\cdots&p_{1n}\\p_{21}&p_{22}&\cdots&p_{2n}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\p_{n1}&p_{n2}&\cdots&p_{nn}\end{bmatrix}.$$

四、基变换与坐标变换

简记为 $B_\beta = B_\alpha P$，其中 n 阶方阵 $P = [p_{ij}]$称为由基 B_α到 B_β 的**变换矩阵**(或**过渡矩阵**).

显然, 基变换矩阵 P 中的第 j 个列向量

$$P_j = \begin{bmatrix} p_{1j} & p_{2j} & \cdots & p_{nj} \end{bmatrix}^T$$

就是 B_β 中第 j 个基向量 β_j 在基 B_α下的坐标.

注: 基变换矩阵 P 是可逆矩阵.

例5 已知R^3的两个基是

$$B_1=\left\{\begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}\right\},\quad B_2=\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\right\},$$

求由B_1到B_2的变换矩阵P.

解 由$\begin{bmatrix}1&0&1\\0&0&1\\1&1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&1&0\\1&0&1\\1&-1&1\end{bmatrix}P$,

故 $P=\begin{bmatrix}-1&1&0\\1&0&1\\1&-1&1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1&0&1\\0&0&1\\1&1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2&-1&-1\\-1&-1&0\\2&1&2\end{bmatrix}$. ■

坐标变换公式

设 ζ 在基 B_α, B_β 下的坐标向量分别为 x, y,

即 $\zeta = B_\alpha x, \quad \zeta = B_\beta y$,

得 $\zeta = B_\alpha x = B_\beta y = B_\alpha P y$,

即 $B_\alpha(x - Py) = 0$,

从而有 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$ 或 $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{x}$.

上式表示了同一个 ζ 在不同基下坐标之间的关系,

称为**坐标变换公式.**

例11 已知 R^3 的两个基

$$B_1=\{[1\ \ 0\ \ 0]^T,[\ 0\ \ 1\ \ 0]^T,[0\ \ 0\ \ 1]^T\}$$

$$B_2=\{[-3\ \ -7\ 1]^T,[3\ \ 6\ \ 1]^T,[-2\ \ -3\ 2]^T\},$$

求在这两个基下有相同坐标的所有向量. (P10)

解 设 $\boldsymbol{X}=[x_1\ \ x_2\ \ x_3]^T$ 是所求的向量, 则 $\boldsymbol{X}$ 在标准基下的坐标显然就是 $\boldsymbol{X}$, 由题意, $\boldsymbol{X}$ 应满足关系式

$$\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix}-3 & 3 & -2\\ -7 & 6 & -3\\ 1 & 1 & 2\end{bmatrix}\boldsymbol{X},$$

即

$$\begin{bmatrix}4 & -3 & 2\\ 7 & -5 & 3\\ -1 & -1 & -1\end{bmatrix}\boldsymbol{X}=0,$$

解得 $\boldsymbol{X}=[0\quad 0\quad 0]^T$. ■

五、子空间

定义　设 W 是线性空间 V 的一个非空子集, 如果 W 关于 V 中的线性运算也构成线性空间, 则称 W 为 V 的子空间, 记为 $W \subset V$.

线性空间 V 本身及由 V 的零元构成的零空间(记为 $\{0\}$), 都是 V的子空间, 称它们为平凡子空间.

例12 给定 $A \in R^{m\times n}$，集 $N(A) = \{x \in R^n | Ax = 0\}$,

$$\boldsymbol{C}(A) = \{y \in R^m | y = Ax, x \in R^n\}$$

分别是 R^n 和 R^m 的子空间，依次称为 A 的零子空间和列子空间.

例13 设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ ($r \geq 1$) 是 V 的 r 个向量，它们所有可能的线性组合所成的集

$$Span\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r\} = \{\alpha | \alpha = \sum_{i=1}^{r} k_i \alpha_i\},$$

是 V 的一个子空间，称为 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_r$ 张成的子空间。

例14 $R^{n\times n}$ 中所有对称矩阵组成的集 $F = \{A \in R^{n\times n} | A^T = A\}$ 是 $R^{n\times n}$ 的一个子空间.

对于 $m \times n$ 复数矩阵 A, 定义 A^H (也记为 A^*)为 A 的共轭转置

$$A^H = \overline{A}^T = \overline{A^T}.$$

例如, 设 $A = \begin{bmatrix} 2+i & 3i & -1-2i \\ -5 & 2-i & 1+i \end{bmatrix} \in C^{2\times 3}$

则 $A^H = \begin{bmatrix} 2-i & -3i & -1+2i \\ -5 & 2+i & 1-i \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 2-i & -5 \\ -3i & 2+i \\ -1+2i & 1-i \end{bmatrix} \in C^{3\times 2}.$

当 $A \in C^{n\times n}$(即 A 为 n 阶复数方阵), 并且 $A^H = A$ 时,

则称 A为**Hermite**矩阵.

§ 1.1 线性空间

定理　设 W 是 V^n 的一个 r 维子空间，$\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r\}$是 W 的一个基，则这 r 个向量必可扩充为 V^n 的基.

证　若 $r=n$，则定理已成立。

若 $r<n$，则 V^n 必存在一个向量 α_{r+1} 不能由 $\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r\}$ 线性表出，从而 $\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{r+1}\}$ 线性无关。如果 $r+1=n$ 则定理已成立，否则继续这个过程。由于n是一个确定的正整数，所以在 $n-r$ 步后必找到 $n-r$ 个向量 $\alpha_{r+1},\cdots,\alpha_n$,

使 $\{\alpha_1,\cdots\alpha_r;\alpha_{r+1},\cdots,\alpha_n\}$为 V^n 的基。■

说明在 V^n 中一定可以找到 $n-r$ 个向量 $\alpha_{r+1},\cdots,\alpha_n$,使 $\{\alpha_1,\cdots\alpha_r;\alpha_{r+1},\cdots,\alpha_n\}$是 V^n 的一个基。

五、子空间

定义 设 W_1, W_2 是 V 的两个子空间，则

$$W_1 \cap W_2 = \{\xi \in V | \xi \in W_1 \text{及} \xi \in W_2\},$$

$$W_1 + W_2 = \{\xi \in V | \xi = \xi_1 + \xi_2, \xi_1 \in W_1, \xi_2 \in W_2\},$$

分别称为 W_1 与 W_2 的**交**，W_1 与 W_2 的**和**.

定理 设 W_1, W_2 是 V 的两个子空间，则

$$\dim(W_1 + W_2) + \dim(W_1 \cap W_2) = \dim W_1 + \dim W_2.$$

证 设 $\dim W_1 = n_1, \dim W_2 = n_2, \dim(W_1 \cap W_2) = r,$

又 $\{\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_r\}$ 是 $W_1 \cap W_2$ 的一个基。

由于 $(W_1 \cap W_2) \subset W_i (i = 1,2)$

所以 $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r\}$ 可扩充为 W_1 的基：

$$\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r; \beta_1, \beta_2, \cdots \beta_{n_1-r}\} \qquad \textbf{(1)}$$

又可扩充为 W_2 的基：$\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r; \delta_1, \delta_2, \cdots \delta_{n_2-r}\}$ **(2)**

我们证明向量组

$$\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r; \beta_1, \beta_2, \cdots \beta_{n_1-r}; \delta_1, \delta_2, \cdots \delta_{n_2-r}\} \qquad \textbf{(3)}$$

是 $W_1 + W_2$ 的一个基，从而维数公式成立。

据和空间 W_1+W_2 的定义，其中任何一向量 ξ 都可以表示为 W_1 中的向量 ξ_1 与 W_2 中的向量 ξ_2 之和，而ξ_1可由基 $\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r;\beta_1,\beta_2,\cdots\beta_{n_1-r}\}$线性表出, 又$\xi_2$可由基 $\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r;\delta_1,\delta_2,\cdots\delta_{n_2-r}\}$线性表出，故$\xi=\xi_1+\xi_2$可由向量组$\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r;\beta_1,\beta_2,\cdots\beta_{n_1-r};\delta_1,\delta_2,\cdots\delta_{n_2-r}\}$线性表出。

假设有等式

$$\sum_{i=1}^{r}k_i\alpha_i+\sum_{j=1}^{n_1-r}p_j\beta_j+\sum_{l}^{n_2-r}q_l\delta_l=0, \qquad (4)$$

令

$$\eta=\sum_{i=1}^{r}k_i\alpha_i+\sum_{j=1}^{n_1-r}p_j\beta_j=-\sum_{l=1}^{n_2-r}q_l\delta_l,$$

则上式的第一个等号关系知 $\eta \in W_1$,

而第二个等号关系给出 $\eta \in W_2$, 从而 $\eta \in W_1 \cap W_2$.

于是，η 可由 $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r\}$ 线性表出。

设 $\eta = \sum_{i=1}^{r} b_i \alpha_i$, 得

$$\sum_{i=1}^{r} b_i \alpha_i + \sum_{l=1}^{n_2-r} q_l \delta_l = 0 .$$

但

$$\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r ; \delta_1, \delta_2, \cdots \delta_{n_2-r}\}$$

线性无关，故 $b_i = 0, 1 \le i \le r ; q_l = 0, 1 \le l \le n_2 - r$.

因此 $\eta = 0$ 即 $\sum_{i=1}^{r} k_i \alpha_i + \sum_{j=1}^{n_1-r} p_j \beta_j = 0$.

$$\sum_{i=1}^{r} k_i \alpha_i + \sum_{j=1}^{n_1-r} p_j \beta_j = 0.$$

又因 $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r; \beta_1, \beta_2, \cdots \beta_{n_1-r}\}$线性无关，故

$$k_i = 0, 1 \le i \le r; p_j = 0, 1 \le j \le n_1 - r.$$

这就证明了向量组（3）是线性无关的。

综合起来，便证明了向量组

$$\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r; \beta_1, \beta_2, \cdots \beta_{n_1-r}; \delta_1, \delta_2, \cdots \delta_{n_2-r}\}$$

是 $W_1 + W_2$ 的基. ■

例15 R^4 中的两个子空间是

$$W_1 = \text{span}\{\alpha_1 = [1\ 1\ 0\ 0]^T, \alpha_2 = [0\ 1\ 1\ 0]^T\},$$

$$W_2 = \text{span}\{\alpha_3 = [0\ 0\ 1\ 1]^T, \alpha_4 = [1\ 0\ 0\ 1]^T\},$$

求$W_1 + W_2$及$W_1 \cap W_2$的基和维数。

解 $W_1 + W_2 = \text{span}\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}.$

由于$\alpha_4 = \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3$,且$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性无关，所以$W_1 + W_2$的一个基为

$$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}, \dim(W_1 + W_2) = 3.$$

维数公式给出:

$$\dim(W_1 \cap W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 + W_2) = 1.$$

为了求 $W_1 \cap W_2$的基，设 $\xi \in W_1 \cap W_2$，则由 $\xi \in W_1$知，

存在 k_1, k_2 使 $\xi = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2$，又由 $\xi \in W_2$知，

存在 k_3, k_4 使 $\xi = k_3\alpha_3 + k_4\alpha_4$

因而， k_1, k_2, k_3, k_4 应满足方程:

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 = k_3\alpha_3 + k_4\alpha_4,$$

$$\boldsymbol{k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 = k_3\alpha_3 + k_4\alpha_4}$$

即 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3(-\alpha_3) + k_4(-\alpha_4) = 0.$

用矩阵表示则为 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ k_4 \end{bmatrix} = 0$

解得 $[k_1 k_2 k_3 k_4]^T = c[1 \quad -1 \quad -1 \quad 1]^T,$

其中 c 为任意非零实数.

从而

$$\xi = c(\alpha_1 - \alpha_2) = c[1 \ 0 \ -1 \ 0]^T.$$

因此， $W_1 \cap W_2 = span\{[1 \ 0 \ -1 \ 0]^T\},$

即$[1 \ 0 \ -1 \ 0]^T$是$W_1 \cap W_2$的一个基。■

注：和空间W_1+W_2的定义仅表明，任一向量ξ可表示为$\xi_1+\xi_2, \xi_1\in W_1, \xi_2\in W_2$. 但这种表示法不一定是唯一的。

例如，设R^3的子空间

$$W_1=\operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\quad\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}\right\},\quad W_2=\operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right\},$$

那么W_1+W_2中零向量0.

一方面可表示为$0=0+0$，即W_1及W_2的零向量之和；

另一方面又可表示为

$$0=\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}\right\}+\left\{-\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right\}.$$

这就是说，零向量的表示不唯一。■

定义　若 W_1+W_2 中任一向量只能唯一地分解为 W_1 中的一个向量与W_2中的一个向量之和，则 W_1+W_2称为 W_1,W_2的直和，记为 $W_1 \oplus W_2$.

定理：$W_1 + W_2 = W_1 \oplus W_2$的充分必要条件是下列条件的之一满足：

① $W_1 \cap W_2 = \{0\}$

② 若 $\xi_1 + \xi_2 = 0, \xi_i \in W_i (i = 1,2)$, 则 $\xi_1 = \xi_2 = 0$;

③ $\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2$.

证　我们只证（1）. 设$W_1 \cap W_2 = \{0\}$,而$W_1 + W_2$不是直和，则$\xi \in W_1 + W_2$的分解式不唯一，即存在$\alpha_1, \alpha_2 \in W_1$和$\beta_1, \beta_2 \in W_2$，且$\alpha_1 \neq \alpha_2, \beta_1 \neq \beta_2$，使

$$\xi = \alpha_1 + \beta_1 = \alpha_2 + \beta_2.$$

因此$\alpha_1-\alpha_2=-(\beta_1-\beta_2)$.

令 $\delta=\alpha_1-\alpha_2=-(\beta_1-\beta_2)$ ，则 $\delta\neq 0$, 且$\alpha_1-\alpha_2\in W_1$,

$$-(\beta_1-\beta_2)\in W_2,\text{故 }\delta\in W_1\cap W_2.$$

这与假设矛盾。

反过来，假设W_1+W_2是直和，而$W_1\cap W_2\neq\{0\}$,

则存在非零向量 $\alpha\in W_1\cap W_2$. 又 $-\alpha\in W_1\cap W_2$, 故 W_1+W_2

的零向量既有分解式 $0=0+0$, 又有分解式 $0=\alpha+(-\alpha)$,

这与直和的假设矛盾。■

定理　设 V_1 是 V^n 的一个子空间，则必存在 V^n 的子空间 V_2，使 $V_1 \oplus V_2 = V^n$.

证　设 $\dim V_1 = r$, 且 $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_r\}$ 是 V_1 的一个基，则它可扩充为 V^n 的基

$$\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r; \alpha_{r+1}, \cdots, \alpha_n\}.$$

令

$$V_2 = span\{\alpha_{r+1}, \cdots \alpha_n\},$$

显然 V_2 即满足要求. ■

子空间的交、和及直和的概念都可以推广到多个子空间的情形。例如，s 个子空间 $W_1, W_2, \cdots, W_s$ 的和 $\sum_{i=1}^{s} W_i$ 是

$$\{\, \xi \in V \mid \xi = \sum_{i=1}^{s} \xi_i, \xi_i \in W_i \,\}.$$

如果和空间 $\sum_{i=1}^{s} W_i$ 中任一向量 ξ 的分解式

$$\xi = \sum_{i=1}^{s} \xi_i, \qquad \xi_i \in W_i.$$

是唯一的，则称它为直和，记为

$$W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_s = \bigoplus_{i=1}^{s} W_i. \quad \blacksquare$$

例5 将C看作C上的线性空间，则它是1维的，$\{1\}$是它的基. 但若把C看作R上的线性空间，则$\{1, i\}$是它的基，从而是2维的. 这一例子说明，线性空间的维数与所考虑的数域有关.

注：在V^n中取定一个基B，则V^n中的元与F^n中的向量之间是一一对应的，并且若α, β在B下的坐标分别为x, y，那么$\alpha + \beta$在B下的坐标是$x + y$，$k\alpha$在B下的坐标是kx. 因此，V^n与F^n有相同的代数结构，只是各自的元的名称不同而已. 由于F^n比V^n具体，又便于应用矩阵运算，所以一般总是把V^n上的问题通过取定一个基转化为F^n上的问题来讨论.