参数估计

第一节　参数估计的意义和种类

一、参数估计问题

二、未知参数的估计量和估计值

三、参数估计的种类

一、 参数估计问题

数理统计的基本问题是根据样本提供的信息，对总体的分布以及分布的某些数字特征作出推断。这个问题中的一类是总体分布的类型为已知，而它的某些参数为未知，根据所得样本对这些参数作出推断，这类问题称为参数估计。如：

已知显象管的使用寿命服从指数分布，但参数θ未知，现抽样得样本$X_1, X_2, \ldots, X_n$， 依据理论用样本来估计参数θ. 这就是参数估计问题.

二、 未知参数的估计量和估计值

设有一个总体X，其分布函数为 $F(x,\theta)$，其中 θ 为未知参数 (θ 也可以是未知向量).现从该总体抽样，得样本$X_1, X_2, \ldots, X_n$， 样本值$x_1, x_2, \ldots, x_n$.

若构造出适当的统计量 $g(X_1,X_2,\ldots X_n)$ 来估计θ，则称 $g(X_1,X_2,\ldots X_n)$为θ 的估计量, 将样本值$x_1, x_2, \ldots, x_n$ 代入，则称 $g(x_1,x_2,\ldots x_n)$ 为 θ 的估计值.

三、 参数估计的种类

参数估计的种类

点估计：

估计未知参数的值

区间估计

估计未知参数的取值范围，并使此范围包含未知参数真值的概率为给定的值.

例如：我们要估计某队男生的平均身高.

且假定身高服从正态分布 $N(\mu, 0.1^2)$

现从该总体选取容量为5的样本，我们的任务是要根据选出的样本值（5个数）求出总体均值μ的估计值.

而全部信息就由这5个数组成 .

设这5个数是: 1.65 1.67 1.68 1.78 1.69

若估计μ为1.68， 这是点估计.

若估计μ在区间（1.57, 1.84）内， 这是区间估计.

第二节　　点估计的求法

一、矩估计法

二、极大似然估计法

一. 矩估计法

理论依据：（辛钦大数定律及其推论）

记总体k阶矩为 $\mu_k = E(X^k)$

样本k阶矩为 $A_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k$

则样本 k 阶矩 A_k 依概率收敛于总体 k 阶矩 μ_k .

方法:

用样本 k 阶矩 $A_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k$ 估计总体 k 阶矩 $\mu_k = E(X^k)$, 建立含有待估参数的方程, 从而解出待估参数.

步骤：

设总体的分布函数的形式已知，待估参数为

$\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_k$， 总体的前 k 阶矩存在.

（1）求出总体的前 k 阶矩，一般是这 k 个参数的函

函数,记为：

$$E(X^r) = \mu_r(\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_k), \quad r = 1,2,\cdots,k$$

样本 $X_1, X_2, \ldots, X_n$的前 k 阶矩记为

$$A_r = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^r, \quad r = 1,2,\cdots,k$$

（2）令 $\mu_r(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^r \qquad r = 1,2,\cdots,k$

这是含未知参数 $\theta_1,\theta_2, \ldots,\theta_k$ 的k个方程构成的方程组,

（3）解此方程组，得 k 个统计量:

$$\left.\begin{aligned}&\hat{\theta}_1 = \hat{\theta}_1(X_1, X_2,\cdots, X_n)\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\&\hat{\theta}_k = \hat{\theta}_k(X_1, X_2,\cdots, X_n)\end{aligned}\right\}$$

称为未知参数 $\theta_1, \ldots,\theta_k$ 的**矩估计量**

代入样本值，得 k 个数：

$$\left.\begin{aligned}\hat{\theta}_1 &= \hat{\theta}_1(x_1, x_2, \cdots, x_n) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \hat{\theta}_k &= \hat{\theta}_k(x_1, x_2, \cdots, x_n)\end{aligned}\right\}$$

称为未知参数 $\theta_1, \ldots, \theta_k$ 的矩估计值

例1.设总体 $X \sim B(m, p)$, 其中p 未知， $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 为总体的样本, 求p 的矩估计量.

解:

$$E(X) = mp$$

样本矩

总体矩

令 $\overline{X} = mp.$

得 $\hat{p} = \overline{X} / m.$

例2.设总体X的概率密度为 $f(x)=\frac{1}{2\sigma}e^{-\frac{|x|}{\sigma}}$

X_1，…，X_n为样本，求参数σ的矩估计.

解： $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}x\cdot\frac{1}{2\sigma}e^{-\frac{|x|}{\sigma}}dx=0$

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2\cdot\frac{1}{2\sigma}e^{-\frac{|x|}{\sigma}}dx=\int_0^{+\infty}x^2\cdot\frac{1}{\sigma}e^{-\frac{x}{\sigma}}dx$$

$$=\int_0^{+\infty}(-x^2)de^{-\frac{x}{\sigma}}=(-x^2)e^{-\frac{x}{\sigma}}\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}2xe^{-\frac{x}{\sigma}}dx$$

$$=2\int_0^{+\infty}(-x)d\sigma e^{-\frac{x}{\sigma}}=2\sigma\int_0^{+\infty}e^{-\frac{x}{\sigma}}dx=2\sigma^2$$

令

$$A_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 = 2\sigma^2$$

总体矩

样本矩

得

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2}$$

例3. 设$X_1, X_2, \ldots X_n$是取自总体X的一个样本

$$X \sim f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\theta} e^{-(x-\mu)/\theta}, & x \ge \mu \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \quad \theta, \mu \text{为未知参数}$$

其中$\theta>0$, 求θ，μ的矩估计.

解:

$$E(X) = \int_{\mu}^{+\infty} x \cdot \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x-\mu}{\theta}} dx \quad = \int_{\mu}^{+\infty} (-x) \cdot d e^{-\frac{x-\mu}{\theta}}$$

$$= (-x)\ e^{-\frac{x-\mu}{\theta}} \Big|_{\mu}^{+\infty} + \int_{\mu}^{+\infty} e^{-\frac{x-\mu}{\theta}} dx \quad = \mu - \theta e^{-\frac{x-\mu}{\theta}} \Big|_{\mu}^{+\infty}$$

$$= \mu + \theta$$

$$E(X^2)=\int_{\mu}^{+\infty}x^2\cdot\frac{1}{\theta}e^{-\frac{x-\mu}{\theta}}dx$$

$$=\int_{\mu}^{+\infty}(-x^2)\cdot de^{-\frac{x-\mu}{\theta}} \quad =(-x^2)\ e^{-\frac{x-\mu}{\theta}}\Big|_{\mu}^{+\infty}+\int_{\mu}^{+\infty}2xe^{-\frac{x-\mu}{\theta}}dx$$

$$=\mu^2+2\theta\int_{\mu}^{+\infty}x\cdot\frac{1}{\theta}e^{-\frac{x-\mu}{\theta}}dx \quad =\mu^2+2\theta E(X)$$

$$=\mu^2+2\mu\theta+2\theta^2$$

令

$$\begin{cases} \overline{X} = \mu + \theta, \\ \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 = \mu^2 + 2\mu\theta + 2\theta^2 \end{cases}$$

用样本矩估计总体矩

解得

$$\begin{cases} \hat{\mu} = \overline{X} - \sqrt{\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^{\,2} - \overline{X}^{\,2}} \\ \hat{\theta} = \sqrt{\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^{\,2} - \overline{X}^{\,2}} \end{cases}$$

例4.设从某灯泡厂某天生产的灯泡中随机抽取10只灯泡，测得其寿命为(单位:小时)

1050， 1100， 1080， 1120， 1200，1250， 1040，

1130， 1300， 1200，试用矩法估计该厂这天生产的灯泡的平均寿命及寿命分布的方差.

解:

$$\hat{\mu} = \overline{x} = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} x_i = 1147(h)$$

$$\hat{\sigma}^2 = B_2 = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10}(x_i - \overline{x})^2 = 6821(h^2).$$

二、 极大似然估计法

引例: 有两个外形相同的箱子,各装100个球，一箱中有99个白球1个红球，一箱中有1个白球99个红球。现从两箱中任取一箱, 并从箱中任取一球,结果所取得的球是白球.问: 所取的球来自哪一箱?

答: 第一箱.

即：在一次试验中，概率最大的事件最有可能发生.

极大似然估计法的理论依据:（极大似然原理）

一般说，若事件A发生的概率与参数$\theta\in\Theta$有关，θ取值不同，P(A)也不同。则应记事件A发生的概率为$P(A|\theta)$.若一次试验，事件A发生了，可认为此时的θ值应是在Θ中使$P(A|\theta)$ 达到最大的那一个。这就是**极大似然原理**.

似然函数:

$X_1,X_2,\ldots X_n$是取自总体X的样本，$x_1, x_2, \cdots x_n$是样本值.

1. X是离散型总体，其分布律为:

$$P\{X=x\}=p(x,\theta_1,\theta_2,\cdots\theta_k)$$

其中 $\theta_1,\theta_2,\cdots\theta_k$ 为未知待估参数,

则样本的联合分布律为:

$$P\{X_1=x_1,X_2=x_2,\cdots,X_n=x_n\}$$

$$=p(x_1,\theta_1,\theta_2,\cdots\theta_k)p(x_2,\theta_1,\theta_2,\cdots\theta_k)\cdots p(x_n,\theta_1,\theta_2,\cdots\theta_k)$$

$$=\prod_{i=1}^{n}p(x_i,\theta_1,\theta_2,\cdots\theta_k)$$

记 $$L(\theta_1,\theta_2,\cdots\theta_k)=\prod_{i=1}^{n}p(x_i,\theta_1,\theta_2,\cdots\theta_k)$$

称 $L(\theta_1,\theta_2,\cdots\theta_k)$ 为样本的似然函数.

2. X是连续型总体，其概率密度为 $f(x,\theta_1,\theta_2,\cdots\theta_k)$

则称 $$L(\theta_1,\theta_2,\cdots\theta_k)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i,\theta_1,\theta_2,\cdots\theta_k)$$

为其样本的似然函数.

似然函数 $L(\theta_1,\theta_2,\cdots\theta_k)$ 的值的大小实质上反映的是

该样本值出现的可能性大小.

极大似然估计的方法：

对于给定的样本值$x_1, x_2, \cdots, x_n$，选取 $\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_k$，使得其似然函数 $L(\theta_1, \theta_2, \cdots \theta_k)$ 达到最大值。即求

$\hat{\theta}_i = \theta_i(x_1, x_2 \cdots, x_n), i = 1, 2, \cdots, k$ 使得

$$L(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \cdots, \hat{\theta}_k) = \max L(\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_k)$$

这样得到的估计值

$$\left.\begin{aligned}\hat{\theta}_1 &= \hat{\theta}_1(x_1, x_2, \cdots, x_n) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \hat{\theta}_k &= \hat{\theta}_k(x_1, x_2, \cdots, x_n)\end{aligned}\right\}$$

称为未知参数 $\theta_1, \ldots, \theta_k$ 的**极大似然估计值**

对应的统计量

$$\left.\begin{aligned}\hat{\theta}_1 &= \hat{\theta}_1(X_1, X_2, \cdots, X_n) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \hat{\theta}_k &= \hat{\theta}_k(X_1, X_2, \cdots, X_n)\end{aligned}\right\}$$

称为未知参数$\theta_1, \ldots, \theta_k$的**极大似然估计量**

步骤：

(1) 由总体分布和所给样本，求得似然函数

$$L(\theta_1,\theta_2,\cdots\theta_k)=\prod_{i=1}^{n} f(x_i,\theta_1,\theta_2,\cdots\theta_k)$$

(2) 求似然函数 $L(\theta_1,\theta_2,\cdots\theta_k)$ 的对数函数函数

$$\ln L(\theta_1,\theta_2,\cdots\theta_k)=\ln\prod_{i=1}^{n} f(x_i,\theta_1,\theta_2,\cdots\theta_k)$$

(化积商为和差，而 $\ln L(\theta_1,\theta_2,\cdots\theta_k)$ 和 $L(\theta_1,\theta_2,\cdots\theta_k)$

同时取得最大值)

(3) 解方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \ln L(\theta_1,\theta_2,\cdots\theta_k)}{\partial \theta_1}=0 \\ \dfrac{\partial \ln L(\theta_1,\theta_2,\cdots\theta_k)}{\partial \theta_2}=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{\partial \ln L(\theta_1,\theta_2,\cdots\theta_k)}{\partial \theta_k}=0 \end{cases}$$

(4) 得末知参数$\theta_1, \dots, \theta_k$的极大似然估计值

$$\begin{cases} \hat{\theta}_1 = \hat{\theta}_1(x_1, x_2, \cdots, x_n) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \hat{\theta}_k = \hat{\theta}_k(x_1, x_2, \cdots, x_n) \end{cases}$$

及其对应的极大似然估计量

$$\begin{cases} \hat{\theta}_1 = \hat{\theta}_1(X_1, X_2, \cdots, X_n) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \hat{\theta}_k = \hat{\theta}_k(X_1, X_2, \cdots, X_n) \end{cases}$$

例5. 设总体X服从参数为 $\lambda(\lambda>0)$ 的泊松分布，求参数λ的极大似然估计量

解：设 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 为从总体X中随机抽取的样本，样本观察值为 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$

由X服从泊松分布，得X的分布律为

$$p(x;\lambda)=P(X=x)=\frac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda}, x=0,1,\cdots$$

似然函数为

$$L(\lambda)=\prod_{i=1}^{n}\frac{\lambda^{x_i}}{x_i!}e^{-\lambda}=e^{-n\lambda}\cdot\frac{\lambda^{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i}}{x_1!x_2!\ldots x_n!}$$

两边取对数，得

$$InL(\lambda)=-n\lambda+(\sum_{i=1}^{n}x_i)In\lambda-\sum_{i=1}^{n}Inx_i!$$

对λ求导，并令其为0，

$$\frac{d\ln L(\lambda)}{d\lambda}=-n+\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{\lambda}=0$$

得 $$\hat{\lambda}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i=\overline{x}$$

所以参数λ的极大似然估计量为：

$$\hat{\lambda}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i=\overline{X}$$

例6. 设总体X的概率密度为

$$f(x,\lambda)=\begin{cases}\lambda a x^{a-1}e^{-\lambda x^{a}} & x\geq 0\\ 0 & x<0\end{cases}$$

，其中$\lambda>0$为待估参数，$a>0$是已知常数，$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是取自总体X 的样本值，求参数λ的极大似然估计值.

解：$$L(\lambda)=\prod_{i=1}^{n} f(x_i,\lambda)$$

$$=\prod_{i=1}^{n} \lambda a x_i^{a-1} e^{-\lambda x_i^a}=\lambda^n a^n\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{a-1} e^{-\lambda\sum_{i=1}^{n} x_i^a}$$

两边取对数，得

$$\ln L(\lambda)$$

$$=n\ln\lambda+n\ln a+(a-1)\ln\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)-\lambda\sum_{i=1}^{n} x_i^a$$

对λ求导,并令其为0,

$$\frac{d\ln L(\lambda)}{d\lambda} = \frac{n}{\lambda} - \sum_{i=1}^{n} x_i^a = 0$$

得

$$\hat{\lambda} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} x_i^a}$$

这就是λ的极大似然估计值.

例7. 设总体X的分布律

X	0	1	2	3
P	θ^2	$2\theta(1-\theta)$	θ^2	$1-2\theta$

其中θ $(0<\theta<\frac{1}{2})$是未知参数，3，1，3，0，3，1，2，3，是来自总体X的样本观察值,求参数θ的极大似然估计值.

解：

$$L(\theta)=(1-2\theta)\cdot 2\theta\ \ (1-\theta)\cdot(1-2\theta)\cdot\theta^2$$

$$\cdot(1-2\theta)\cdot 2\theta\ \ (1-\theta)\cdot\theta^2\cdot(1-2\theta)$$

$$=4\theta^6(1-2\theta)^4(1-\theta)^2$$

两边取对数，得

$$\ln L(\theta)=\ln 4+6\ln\theta+4\ln(1-2\theta)+2\ln(1-\theta)$$

对 θ 求导，并令其为 0，

$$\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta} = \frac{6}{\theta} - \frac{8}{1-2\theta} - \frac{2}{1-\theta} = 0$$

得 $\theta = \frac{7+\sqrt{13}}{12}$ 和 $\theta = \frac{7-\sqrt{13}}{12}$

因为 $\theta = \frac{7+\sqrt{13}}{12} > \frac{1}{2}$， 不合题意，

所以θ的极大似然估计值为 $\theta = \frac{7-\sqrt{13}}{12}$

关于极大似然估计的两点说明：

1.可证明极大似然估计具有下述性质：

设θ 的函数g=g(θ)是Θ 上的实值函数,且有唯一反函数．如果$\hat{\theta}$ 是θ的极大似然估计，则g($\hat{\theta}$)也是g(θ)的极大似然估计.

此性质称为**极大似然估计的不变性**

例8. 设X_1 X_2，…，X_n为取自参数为θ的指数分布总体的样本，a>0为一给定实数。求p=P{X<a}的极大似然估计

解： 由总体X服从参数为θ的指数分布知，X 的概率密度和分布函数分别为

$$f(x,\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}} & x>0\\ 0 & \text{其它}\end{cases},\quad F(x,\theta)=\begin{cases}1-e^{-\frac{x}{\theta}} & x>0\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n} f(x_i,\theta) = \prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\theta}e^{-\frac{x_i}{\theta}}$$

$$=\frac{1}{\theta^n}e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{\theta}}$$

两边取对数，得

$$\ln L(\theta) = -n\ln\theta - \frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{\theta}$$

对θ求导，并令其为0，

$$\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=-\frac{n}{\theta}+\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{\theta^2}=0$$

得θ的极大似然估计值为

$$\hat{\theta}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}=\overline{x}$$

因为

$$p = P\{X < a\} = F(a) = 1 - e^{-\frac{a}{\theta}}$$

所以，p=P{X<a}的极大似然估计值为

$$\hat{p} = 1 - e^{-\frac{n}{\sum_{i=1}^{n} x_i} a}$$

2、当似然函数不是可微函数时，须用极大似然原理来求待估参数的极大似然估计.

例9. 设 $X \sim U(a,b)$, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 是 X 的一个样本值, 求 a , b 的极大似然估计值与极大似然估计量.

解： 由$X \sim U(a,b)$知，X 的密度函数为

$$f(x;a,b)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a<x<b\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

似然函数为

$$L(a,b)=\prod_{i=1}^{n} f(x_i,a,b) = \begin{cases} \dfrac{1}{(b-a)^n} & a < x_i < b \\ 0 & 其它 \end{cases}$$

似然函数只有当 $a < x_i < b,\ i = 1,2,\ldots,n$ 时才能获得最大值, 且 a 越大, b 越小, L（a，b）越大.

令 $x_{\min} = \min\{x_1, x_2,\ldots, x_n\}$

$x_{\max} = \max\{x_1, x_2,\ldots, x_n\}$

取 $\hat{a} = x_{min},\ \hat{b} = x_{max}$

则对满足 $a \le x_{\min} \le x_{\max} \le b$ 的一切 $a < b$,

都有 $$\frac{1}{(b-a)^n} \le \frac{1}{(x_{max} - x_{min})^n}$$

故 $\hat{a} = x_{\min},\ \hat{b} = x_{\max}$ 是 a, b 的极大似然估计值.

$$\hat{a} = X_{min} = min\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$$

$$\hat{b} = X_{max} = max\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$$

分别是 a, b 的极大似然估计量.

例10. 设总体X的概率密度为

$$f(x,\theta)=\begin{cases}(\theta+1)\ x^{\theta} & 0<x<1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

，其中 $\theta>-1$

为待估参数，$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是取自总体X 的样本值，

求参数 θ 的矩估计值和极大似然估计值.

解： **（1）矩估计**

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_0^1 x(\theta+1)x^{\theta}dx = \frac{\theta+1}{\theta+2}$$

令 $\bar{x}=\dfrac{\theta+1}{\theta+2}$

得θ的矩估计值：

$$\hat{\theta}=\frac{2\bar{x}-1}{1-\bar{x}}$$

(2）极大似然估计

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n} f(x_i,\theta)=\prod_{i=1}^{n}(\theta+1)\ x_i^{\theta}$$

$$=(\theta+1)^n(\prod_{i=1}^{n} x_i)^{\theta}$$

两边取对数，得

$$\ln L(\theta)=n\ln(\theta+1)+\theta\ln\prod_{i=1}^{n} x_i$$

对θ求导，并令其为0，

$$\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=\frac{n}{\theta+1}+\ln\prod_{i=1}^{n}x_i=0$$

得θ的极大似然估计值：

$$\hat{\theta}=-1-\frac{n}{\ln\prod_{i=1}^{n}x_i}=-1-\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln x_i}$$

通过例10可见，对同一个待估参数，用不同的方法进行点估计，可能得到不同的估计量.这样就有必要判断哪一个估计量更好，这就是下一节要讲的内容：

评价估计量优良性的标准

第三节　估计量的评选标准

一、无偏性

二、有效性

三、一致性

一、无偏性

由于未知参数θ的估计量 $\hat{\theta}=\hat{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 是随机变量，每次抽样后得到的θ的估计值不一定与真值θ 相吻合，其误差为 $\hat{\theta}-\theta$, 我们自然希望平均误差为零，即$E(\hat{\theta}-\theta)=0$, 也就是说$E(\hat{\theta})=\theta$，这就提出了**无偏性**的衡量标准。

定义:

设 $\hat{\theta}$ 是未知参数θ的估计量，若 $E(\hat{\theta})=\theta$， 则称 $\hat{\theta}$ 是θ的无偏估计量.

例1.设总体X的 k 阶矩 $\mu_k=E(X^k)(k\geq 1)$ 存在，

$X_2,\cdots,X_n$ 是总体X的一个样本，试证明：不论总体X服从什么分布，样本的 k 阶矩 $A_k=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^k$ 是总体 k 阶矩 μ_k 的无偏估计.

证明：

由于X_1，X_2，…,X_n和总体X同分布，因而

$$E(X_i^k)=\mu_k \quad i=1,2,\cdots,n$$

$$E(A_k) = E(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^k) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(X_i^k) = \frac{1}{n}\cdot n\cdot\mu_k = \mu_k$$

所以样本的 k 阶矩 $A_k=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^k$ 是总体 k 阶矩

$\mu_k = E(X^k)$ 的无偏估计

例2. 设总体X的期望与方差存在, X 的样本为

$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ $(n > 1)$. 证明

(1) $B_2 = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$ 不是 D(X)的无偏估量;

(2) $S^2 = \dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$ 是 D(X)的无偏估计量.

证明: 先证明 $\boxed{\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2 - \overline{X}^2}$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i^2-2X_i\overline{X}+\overline{X}^2)$$

$$=\frac{1}{n}(\sum_{i=1}^{n}X_i^2-2\overline{X}\sum_{i=1}^{n}X_i+n\overline{X}^2)$$

$$=\frac{1}{n}(\sum_{i=1}^{n}X_i^2-2n\overline{X}^2+n\overline{X}^2)$$

$$=\frac{1}{n}(\sum_{i=1}^{n}X_i^2-n\overline{X}^2)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2-\overline{X}^2$$

所以 $$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2-\overline{X}^2$$

$$E(X_i) = E(X) = \mu\ ,\ \ D(X_i) = D(X) = \sigma^2$$

$$E(\overline{X}) = E(X) = \mu\ ,\ \ D(\overline{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$$

因而

$$E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(X_i^2) - E(\overline{X}^2)$$

$$= (\sigma^2 + \mu^2) - (\frac{\sigma^2}{n} + \mu^2) = \frac{n-1}{n}\sigma^2 \neq \sigma^2$$

所以$B_2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$ 不是 D(X)的无偏估计量;

$$\frac{n}{n-1}B_2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2=S^2$$

$$E(S^2)=E(\frac{n}{n-1}B_2)=\frac{n}{n-1}E(B_2)=\sigma^2$$

所以 $S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$ 是 D(X)的无偏估计量.

例3. 已知泊松总体 $\pi(\lambda)$，验证样本方差 S^2

是λ的无偏估计，并对于任一值 α $(0 \le \alpha \le 1)$,

$\alpha \overline{X} + (1-\alpha)S^2$ 也是λ的无偏估计.

证明： 由总体为 $\pi(\lambda)$ 知：$E(X) = \lambda$, $D(X) = \lambda$

由上例可知： $E(S^2) = D(X) = \lambda$

所以样本方差 S^2 是λ的无偏估计

又 $E(\overline{X}) = E(X) = \lambda,$ 则

$$E[\alpha\overline{X} + (1-\alpha)S^2]$$

$$= \alpha E(\overline{X}) + (1-\alpha)E(S^2)$$

$$= \alpha\lambda + (1-\alpha)\lambda = \lambda$$

所以 $\alpha\overline{X} + (1-\alpha)S^2$ 也是λ的无偏估计.

由上例我们可知，一个未知参数有时会有多个无偏估计，这就又产生了一个问题：哪一个无偏估计量更优呢?

设 $\hat{\theta}_1$ 和 $\hat{\theta}_2$ 都是θ的无偏估计量，即两个估计量 $\hat{\theta}_1$ 和 $\hat{\theta}_2$ 都围绕着θ波动，我们自然选择波动幅度小的那一个，这就有了**有效性**的衡量标准.

二、有效性

定义 设$\hat{\theta}_1 = \theta_1(X_1, X_2, \cdots, X_n)$

$$\hat{\theta}_2 = \theta_2(X_1, X_2, \cdots, X_n)$$

都是总体参数θ的无偏估计量, 且

$$D(\hat{\theta}_1) < D(\hat{\theta}_2)$$

则称$\hat{\theta}_1$比$\hat{\theta}_2$更有效.

例4.已知总体的数学期望μ 和方差σ^2都存在，X_1，X_2，X_3是总体的样本.设

$$g_1 = \frac{1}{3}X_1 + \frac{1}{3}X_2 + \frac{1}{3}X_3, \quad g_2 = \frac{1}{2}X_1 + \frac{1}{3}X_2 + \frac{1}{6}X_3$$

（1）证明g_1和g_2都是μ 的无偏估计

（2）试判断g_1和g_2哪一个更有效?

解:

(1) $E(g_1)=E(\frac{1}{3}X_1+\frac{1}{3}X_2+\frac{1}{3}X_3)$

$=\frac{1}{3}E(X_1)+\frac{1}{3}E(X_2)+\frac{1}{3}E(X_3)$

$=\frac{1}{3}\mu+\frac{1}{3}\mu+\frac{1}{3}\mu=\mu$

$E(g_2)=E(\frac{1}{2}X_1+\frac{1}{3}X_2+\frac{1}{6}X_3)$

$=\frac{1}{2}E(X_1)+\frac{1}{3}E(X_2)+\frac{1}{6}E(X_3)$

$=\frac{1}{2}\mu+\frac{1}{3}\mu+\frac{1}{6}\mu=\mu$

所以，g_1和g_2都是μ的无偏估计

(2)

$$D(g_1)=D(\frac{1}{3}X_1+\frac{1}{3}X_2+\frac{1}{3}X_3)=\frac{1}{9}D(X_1)+\frac{1}{9}D(X_2)+\frac{1}{9}D(X_3)$$

$$=\frac{1}{9}\sigma^2+\frac{1}{9}\sigma^2+\frac{1}{9}\sigma^2 \quad =\frac{\sigma^2}{3}$$

$$D(g_2)=D(\frac{1}{2}X_1+\frac{1}{3}X_2+\frac{1}{6}X_3) \ =\frac{1}{4}D(X_1)+\frac{1}{9}D(X_2)+\frac{1}{36}D(X_3)$$

$$=\frac{1}{4}\sigma^2+\frac{1}{9}\sigma^2+\frac{1}{36}\sigma^2 \quad =\frac{7}{18}\sigma^2$$

因为 $D(g_1)<D(g_2)$ 所以g_1较g_2更有效.

罗—克拉美（*Rao – Cramer*）不等式

若 $\hat{\theta}$ 是参数 θ 的无偏估计量, 则

$$D(\hat{\theta}) \geq \frac{1}{nE\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\ln p(X,\theta)\right]^2} = D_0(\theta)$$

其中 $p(x,\theta)$ 是 总体 X 的分布律或概率密度，称 $D_0(\theta)$ 为方差的下界.

当 $D(\hat{\theta}) = D_0(\theta)$时, 称 $\hat{\theta}$ 为θ的达到方差下界的无偏估计量, 此时称 $\hat{\theta}$ 为最有效的估计量，简称有效估计量.

例6. 设（0−1）总体中参数 p 为未知，证明

$\hat{p}=\overline{X}$ 是参数 p 的无偏、有效估计量.

证明： 因为总体X是（0−1）分布，即：

$$f(X,p)=p^{X}(1-p)^{1-X},\qquad X=0,1,$$

$$E(X)=p,\quad E(X^{2})=p,\qquad D(X)=p(1-p)$$

而 $E(\hat{p}) = E(\overline{X}) = E(X) = p$

所以 $\hat{p} = \overline{X}$ 是参数 p 的无偏估计量

且 $D(\hat{p}) = D(\overline{X}) = \dfrac{D(X)}{n} = \dfrac{p(1-p)}{n}$

又 $\ln f(X, p) = X \ln p + (1-X)\ln(1-p)$

$$\frac{\partial}{\partial p}\ln f(X, p) = \frac{X}{p} + \frac{1-X}{1-p}(-1)$$

$$E[\frac{\partial}{\partial p}\ln f(X,p)]^2 = E[\frac{X}{p} + \frac{1-X}{1-p}(-1)]^2$$

$$= E[\frac{X^2}{p^2} + \frac{(1-X)^2}{(1-p)^2} - \frac{2X(1-X)}{p(1-p)}]$$

$$= \frac{E(X^2)}{p^2} + \frac{E(1-X)^2}{(1-p)^2} - \frac{2E[X(1-X)]}{p(1-p)}$$

$$= \frac{E(X^2)}{p^2} + \frac{E(1+X^2-2X)}{(1-p)^2} - \frac{2E[X-X^2)]}{p(1-p)}$$

$$= \frac{p}{p^2} + \frac{1+p-2p}{(1-p)^2} - \frac{2(p-p)}{p(1-p)} \quad = \frac{1}{p(1-p)}$$

$$D^* = \frac{1}{nE\{[\frac{\partial}{\partial\theta}\ln f(X,\theta)]^2\}}$$

$$= \frac{p(1-p)}{n} = D(\hat{p})$$

所以 $\hat{p} = \overline{X}$ 是参数 p 的有效估计量

三、一致性

参数θ 的估计量是样本的函数，与样本容量n 有关，我们当然希望，样本容量n 越大，估计量与参数θ的真值的偏差越小.这就有了一致性的衡量标准.

定义 设 $\hat{\theta}=\hat{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 是总体参数θ的估计量.

若对于任意的$\theta \in \Theta$，当$n \to \infty$时，$\hat{\theta}$ 依概率收敛于θ，

即对于任意正数ε，有 $\lim_{n\to\infty} P(|\hat{\theta}-\theta| \geq \varepsilon)=0$

则称 $\hat{\theta}$ 是总体参数θ 的一致(或相合)估计量.

一致性是对一个估计量的基本要求，若估计量不具有一致性，那么不论将样本容量 n 取得多么大，都不能将θ估计得足够准确，这样的估计量是不可取的.

例7. 设总体X服从参数为 θ 的指数分布，

证明 $\overline{X}$ 是 θ 的无偏、有效、一致估计量.

证明： 由总体X服从参数为 θ 的指数分布可知：

$$f(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}} & x>0,\\ 0 & x\le 0\end{cases}$$

$$E(\overline{X})=E(X)=\theta$$

$$D(\overline{X})=\frac{D(X)}{n}=\frac{\theta^2}{n}$$

而 $\ln f(x,\theta) = -\ln\theta - \dfrac{x}{\theta}$

$$\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\ln f(x,\theta)\right]^2 = \left[-\frac{1}{\theta}+\frac{x}{\theta^2}\right]^2 = \left[\frac{x-\theta}{\theta^2}\right]^2 = \frac{(x-\theta)^2}{\theta^4}$$

$$E\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\ln f(X,\theta)\right]^2 = E\left[\frac{(X-\theta)^2}{\theta^4}\right] = \frac{1}{\theta^4}E\left(X-\theta\right)^2$$

$$= \frac{1}{\theta^4}D\left(X\right) = \frac{1}{\theta^2}$$

$$\frac{1}{nE\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\ln f(X,\theta)\right]^2} = \frac{\theta^2}{n} = D(\overline{X})$$

故$\overline{X}$是θ的有效无偏估计量.

又由辛钦大数定律可知:

$$\lim_{n\to\infty} P\{|\overline{X}-\mu|<\varepsilon\} = \lim_{n\to\infty} P\{|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \mu|<\varepsilon\} = 1$$

所以$\overline{X}$ 是θ的无偏、有效、一致估计量.

关于一致性的两个常用结论

1. 样本 k 阶矩是总体 k 阶矩的一致估计量.

由大数定律证明

2. 设 $\hat{\theta}$ 是 θ 的无偏估计量且 $\lim\limits_{n\to\infty} D(\hat{\theta}) = 0$

则 $\hat{\theta}$ 是 θ 的一致估计量.

用契比雪夫不等式证明

一般，矩估计法得到的估计量为一致估计量.

我们已讲了参数的点估计以及评价估计量优良性的标准，参数的点估计是用一个确定的值去估计未知的参数. 但是，估计值与参数真值的误差有多大？估计值的可靠性有多大？这些问题在点估计中是无法回答的。这就需要引入区间估计. 也就是下一节要讲的内容 .

第四节 区间估计

引言：点估计是由样本求出未知参数θ的一个估计值$\hat{\theta}$，而区间估计则要由样本给出参数θ的一个估计范围，并指出该区间包含θ的可靠程度。

假设$(X_1,\cdots,X_n)$是总体X的一个样本，区间估计的方法是给出两个统计量

$$\hat{\theta}_1 = \hat{\theta}_1(X_1,\cdots,X_n), \hat{\theta}_2 = \hat{\theta}_2(X_1,\cdots,X_n)$$

使区间$[\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2]$以一定的可靠程度盖住$\theta$。

置信区间
置信度

定义：设总体X的分布函数$F(x;\theta)$含有一个未知参数θ，对给定的值$\alpha\ (0<\alpha<1)$，

如果有两个统计量$\theta_1=\theta_1(X_1,\cdots,X_n)$，$\theta_2=\theta_2(X_1,\cdots,X_n)$，

使得：

$$P\left\{\theta_1(X_1,\cdots,X_n)\le\theta\le\theta_2(X_1,\cdots,X_n)\right\}\ge 1-\alpha \qquad \forall\theta\in\Theta \qquad (7-1)$$

则称随机区间(θ_1,θ_2)是θ的双侧$1-\alpha$置信区间；称$1-\alpha$为置信度；

θ_1和θ_2分别称为双侧置信下限和双侧置信上限。

单侧置信区间

在以上定义中，若将$(7-1)$式改为：

$$P\left\{\theta_1\left(X_1,\cdots,X_n\right)\le\theta\right\}\ge 1-\alpha,\quad \forall\theta\in\Theta \qquad (7-2)$$

则称$\theta_1\left(X_1,\cdots,X_n\right)$为$\theta$的单侧置信下限。

随机区间$\left(\theta_1,+\infty\right)$是$\theta$的置信度为$1-\alpha$的单侧置信区间。

又若将$(7-2)$式改为：

$$P\left\{\theta\le\theta_2\left(X_1,\cdots,X_n\right)\right\}\ge 1-\alpha,\quad \forall\theta\in\Theta \qquad (7-3)$$

则称$\theta_2\left(X_1,\cdots,X_n\right)$为$\theta$的单侧置信上限。

随机区间$\left(-\infty,\theta_2\right)$是$\theta$的置信度为$1-\alpha$的单侧置信区间。

正态总体均值方差的区间估计

(一) 单个正态总体$N(\mu,\sigma^2)$的情形

$X_1,X_2,\cdots,X_n$来自$N(\mu,\sigma^2)$, $\bar{X}$和S^2分别为样本均值和方差,置信度为$1-\alpha$

1. 均值μ的置信区间

(1) σ^2已知时

$\bar{X}$是μ的无偏估计，由 $\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$

有$P\left\{\left|\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right| < Z_{\alpha/2}\right\} = 1-\alpha$

即$P\left\{\bar{X}-\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}Z_{\alpha/2} < \mu < \bar{X}+\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}Z_{\alpha/2}\right\} = 1-\alpha$

置信区间为：$\boxed{\left(\bar{X}-\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}Z_{\alpha/2}, \bar{X}+\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}Z_{\alpha/2}\right)}$

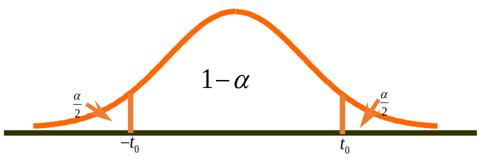
思考题：

均值μ的置信度1-α的置信下限是什么呢?

答案: $\bar{X}-\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}z_\alpha$

(2) σ^2未知时

由 $\dfrac{\bar{X}-\mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \sim t(n-1)$



$$有P\left\{-t_{\alpha/2}(n-1) < \frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} < t_{\alpha/2}(n-1)\right\} = 1-\alpha$$

$$即P\left\{\bar{X}-\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1) < \mu < \bar{X}+\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1)\right\} = 1-\alpha$$

置信区间为： $\boxed{\left(\bar{X}-\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1), \bar{X}+\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1)\right)}$

2. 方差σ^2的置信区间

设μ未知

由 $$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$$

有$$P\left\{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1) < \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} < \chi^2_{\alpha/2}(n-1)\right\} = 1-\alpha$$

即$$P\left\{\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)} < \sigma^2 < \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right\} = 1-\alpha$$

置信区间为: $$\boxed{\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}, \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right)}$$

思考题:

方差σ^2的置信度1-α的置信上限是什么?

答案:

$$\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha}(n-1)}.$$

例10：设某种植物的高度$X\,(cm)$服从正态分布$N\left(\mu,\sigma^2\right)$,

随机选取36棵,其平均高度为$15cm$. 就以下两种情形,

求μ的95%双侧置信区间：

$(1)\ \sigma^2=16$;　　　　$(2)\ \sigma^2$未知,$S^2=16$;

解：$(1)\ n=36,\ \bar{X}=15,\ \sigma=4$

$$由P\left\{\bar{X}-1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}<\mu<\bar{X}+1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right\}=0.95$$

$$得：\bar{X}-1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=15-\frac{1.96\times 4}{\sqrt{36}}=13.693$$

$$\bar{X}+1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=15+\frac{1.96\times 4}{\sqrt{36}}=16.307$$

μ的置信区间为$\left(13.693,16.307\right)$

$(2)\ n=36, \bar{X}=15, S^2=16$

$$\text{由} P\left\{\bar{X}-t_{0.025}\times\frac{S}{\sqrt{n}}\le\mu\le\bar{X}+t_{0.025}\times\frac{S}{\sqrt{n}}\right\}=1-0.05$$

查表得：$t_{0.025}(35)=2.0301$

$$\text{又：}15-\frac{2.0301\times 4}{6}=13.647, 15+\frac{2.0301\times 4}{6}=16.353$$

μ的置信区间为$(13.647, 16.353)$

? 求置信度为99%时(1)(2)两种情况下μ的置信区间

?答案：(1) $(13.333, 16.667)$

(2) $(13.184, 16.815)$

比较(1)(2)两种情形下μ的置信区间：

σ^2已知，$\sigma^2=16$，置信区间：$(13.693, 16.307)$ 区间短 精度高

σ^2未知，$S^2=16$，置信区间：$(13.647, 16.353)$ 区间长 精度低

但第二种情形更实用，因为多数时候，σ^2未知

用t分布求μ的置信区间只依赖于样本数据及统计量$\bar{X}, S, n$

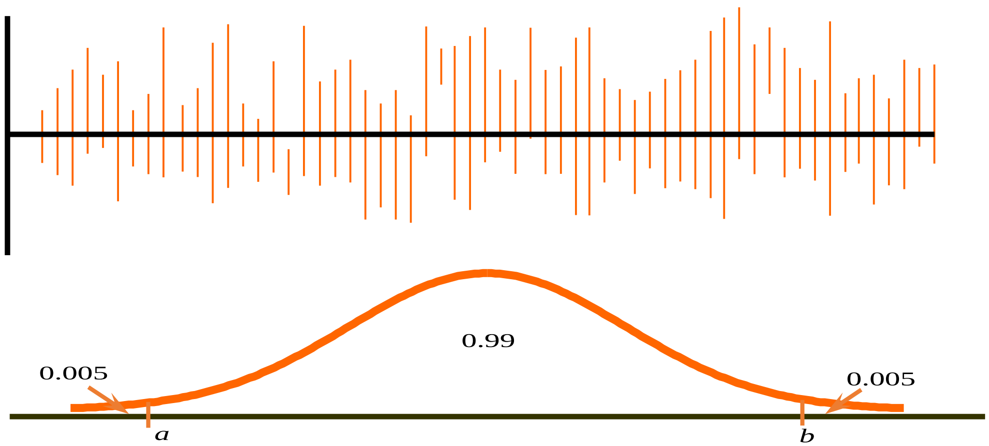
置信区间的含义：

若反复抽样多次，每个样本值确定一个区间$(\underline{\theta},\bar{\theta})$，每个这样的区间或者包含$\theta$的真值，或者不包含$\theta$的真值。(见下图)

在例10中，

当$\alpha=0.05$，即置信水平为95%时，20个区间中只有大约1个不包含μ值；

当$\alpha=0.01$，即置信水平为99%时，100个区间中将有99个包含μ值；



例11：一个园艺科学家正在培养一个新品种的苹果,这种苹果除了口感好和颜色鲜艳以外,另一个重要特征是单个重量差异不大。为了评估新苹果,她随机挑选了25个测试重量(单位：克),其样本方差为$S^2=4.25$.试求σ^2的置信度为95%和的99%的置信区间。

解：置信度为95%时

$$P\left\{\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-0.025}} \le \sigma^2 \le \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{0.025}}\right\}=1-0.05$$

查表得：$\chi^2_{0.975}(24)=39.4, \chi^2_{0.025}(24)=12.4;$

又：$\frac{(25-1)\times 4.25}{39.4}=2.59, \frac{(25-1)\times 4.25}{12.4}=8.23$

σ^2的置信区间为$(2.59, 8.23)$

置信度为99%时,

$\chi^2_{0.995}(24)=45.6,$

$\chi^2_{0.005}(24)=9.89,$

$$\frac{(25-1)\times 4.25}{45.6}=2.24,$$

$$\frac{(25-1)\times 4.25}{9.89}=10.31$$

σ^2的置信区间为$(2.24, 10.31)$

(二) 两个正态总体$N\left(\mu_1,\sigma_1^2\right), N\left(\mu_2,\sigma_2^2\right)$的情形

$X_1, X_2, \cdots, X_{n_1}$来自$N\left(\mu_1,\sigma_1^2\right)$, $Y_1, Y_2, \cdots, Y_{n_2}$来自$N\left(\mu_2,\sigma_2^2\right)$,

$\bar{X}=\frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1} X_i, \bar{Y}=\frac{1}{n_2}\sum_{j=1}^{n_2} Y_j$, S_1^2和S_2^2分别为第一,二个总体的样本方差,置信度为$1-\alpha$.

1. $\mu_1-\mu_2$的置信区间

(1) σ_1^2, σ_2^2已知时

由 $\bar{X}-\bar{Y} \sim N\left(\mu_1-\mu_2, \frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}\right)$

有 $\frac{\left(\bar{X}-\bar{Y}\right)-\left(\mu_1-\mu_2\right)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0,1)$

置信区间为: $\left[\left(\bar{X}-\bar{Y}\right) \pm Z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right]$

$(2)\ \sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2,\sigma^2$未知

此时由第六章定理6.8, $\dfrac{\left(\bar{X}-\bar{Y}\right)-\left(\mu_1-\mu_2\right)}{S_w\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}}\sim t\left(n_1+n_2-2\right)$

置信区间为： $\left[\left(\bar{X}-\bar{Y}\right)\pm t_{\frac{\alpha}{2}}\left(n_1+n_2-2\right)S_w\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}\right]$

其中 $S_w^2=\dfrac{\left(n_1-1\right)S_1^2+\left(n_2-1\right)S_2^2}{n_1+n_2-2},S_w=\sqrt{S_w^2}$

2. $\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$的置信区间

设μ_1,μ_2未知

由 $\dfrac{S_1^2/S_2^2}{\sigma_1^2/\sigma_2^2}\sim F(n_1-1,n_2-1)$

有 $P\left\{F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)<\dfrac{S_1^2/S_2^2}{\sigma_1^2/\sigma_2^2}<F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)\right\}=1-\alpha$

即 $P\left\{\dfrac{S_1^2}{S_2^2}\dfrac{1}{F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)}<\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}<\dfrac{S_1^2}{S_2^2}\dfrac{1}{F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)}\right\}=1-\alpha$

置信区间为： $\left[\dfrac{S_1^2}{S_2^2}\dfrac{1}{F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)},\dfrac{S_1^2}{S_2^2}\dfrac{1}{F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)}\right]$

例12：两台机床生产同一个型号的滚珠，从甲机床生产的滚珠中抽取8个，从乙机床生产的滚珠中抽取9个，测得这 些滚珠得直径(毫米)如下：

甲机床	15.0	14.8	15.2	15.4	14.9	15.1	15.2	14.8	
乙机床	15.2	15.0	14.8	15.1	14.6	14.8	15.1	14.5	15.0

设两机床生产的滚珠直径分别为X,Y,且$X\sim N\left(\mu_1,\sigma_1^2\right),Y\sim N\left(\mu_2,\sigma_2^2\right)$

(1) $\sigma_1=0.18,\sigma_2=0.24$,求$\mu_1-\mu_2$的置信度为0.90的置信区间；

(2) 若$\sigma_1=\sigma_2=\sigma$未知，求$\mu_1-\mu_2$的置信度为0.90的置信区间；

(4) 若μ_1,μ_2未知，求$\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$的置信度为0.90的置信区间；

解：$n_1=8,\ \bar{x}=15.05,\ S_1^2=0.0457$；$n_2=9,\ \bar{y}=14.9,\ S_2^2=0.0575$

(1) 当$\sigma_1=0.18,\sigma_2=0.24$时，求$\mu_1-\mu_2$的置信度为0.90的置信区间为：

$$\left(\bar{X}-\bar{Y}\pm Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right)$$

查表得：$Z_{0.05}=1.645$，从而所求区间为$(-0.018,0.318)$

(2) 当$\sigma_1=\sigma_2=\sigma$未知时，$\mu_1-\mu_2$的置信度为0.90的置信区间为：

$$\left(\bar{X}-\bar{Y}\pm t_{\alpha/2}(n_1+n_2-2)S_W\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}\right)$$

当$\mu_1-\mu_2$的置信区间包含0时，
可以认为两个总体的
均值之间没有显著差异。

$t_{0.05}(15)=1.7531,\ S_W=0.228,\ \sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}=0.486$

从而所求区间为$(-0.044,0.344)$

(3) 当μ_1,μ_2未知时，$\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$的置信度为0.90的置信区间为：

$$\left\{\frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{F_{\alpha/2}\left(n_1-1,n_2-1\right)},\frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{F_{1-\alpha/2}\left(n_1-1,n_2-1\right)}\right\}$$

由$F_{0.05}\left(7,8\right)=3.50, F_{0.95}\left(7,8\right)=\dfrac{1}{F_{0.05}\left(8,7\right)}=\dfrac{1}{3.73}=0.268$

得$\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$的置信度为0.90的置信区间为$\left(0.227, 2.965\right)$

当$\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$的置信区间包含1时，

可以认为两个总体的方差之间没有显著差异。

[说明] 置信区间包含两方面含义

1. 置信水平 2. 区间长度

- 置信水平越高，区间越大，但区间精确度差
- 置信区间越小，精确度高，但置信水平差