数值分析

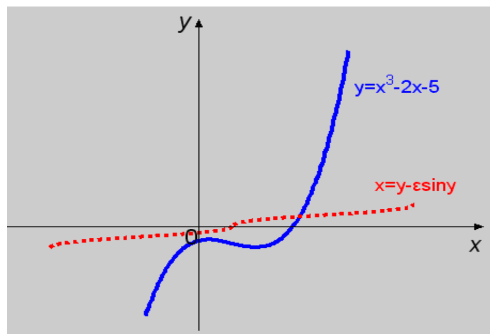
第五章　函数的插值
与最佳平方逼近

§5 函数的插值与最佳平方逼近

§ 5. 0 引言

众所周知，反映自然规律的数量关系的函数有三种表示方法：

- **解析表达式**　　$f(x)=x^3-2x-5$　　$x=y-\varepsilon\sin y$
- **图象法**
- **表格法**



x	y
0.924	-0.008513725
0.928	-0.003822324
0.932	0.000343434
0.936	0.005532443
0.940	0.012976643

插值法是广泛应用于理论研究和生产实践的重要数值方法，它是 用简单函数(特别是多项式或分段多项式) 为各种离散数据建立连续模型；为各种非有理函数提供好的逼近方法。

为什么要学习插值理论?

- 许多数据都是用表格法给出的(如观测和实验而得到的函数数据表格)，可是，从一个只提供离散的函数值去进行理论分析和进行设计，是极不方便的, 甚至是不可能的。因此需要设法去寻找与已知函数值相符，并且形式简单的插值函数(或近似函数)。
- 另外一种情况是，函数表达式完全给定，但其形式不适宜计算机使用，因为计算机只能执行算术和逻辑操作，因此涉及连续变量问题的计算都需要经过离散化以后才能进行。如数值积分方法、数值微分方法、差分方程以及有限元法等，都必须直接或间接地应用到插值理论和方法。

总之，许多数据都是用表格给出的；数据要利用计算机或应用理论作分析与计算。

◆ 多项式插值问题的一般提法

当精确函数 $y = f(x)$ 非常复杂或未知时，在一系列节点 $x_0 \dots x_n$ 处测得函数值

$$y_0 = f(x_0), \dots, y_n = f(x_n),$$

由此构造一个简单易算的近似函数

$p(x) \approx f(x)$，满足条件: $p(x_i) = f(x_i)\ (i = 0, \dots, n)$。

这里的 $p(x)$ 称为 $f(x)$ 的插值函数。

最常用的插值函数是 …?

代数多项式、三角多项式、有理分式…

插值函数 $p(x)$ 作为 $f(x)$ 的近似，可以选自不同类型的函数，如 $p(x)$ 为代数多项式、三角多项式、有理分式；其函数性态可以是光滑的、亦可以是分段光滑的。

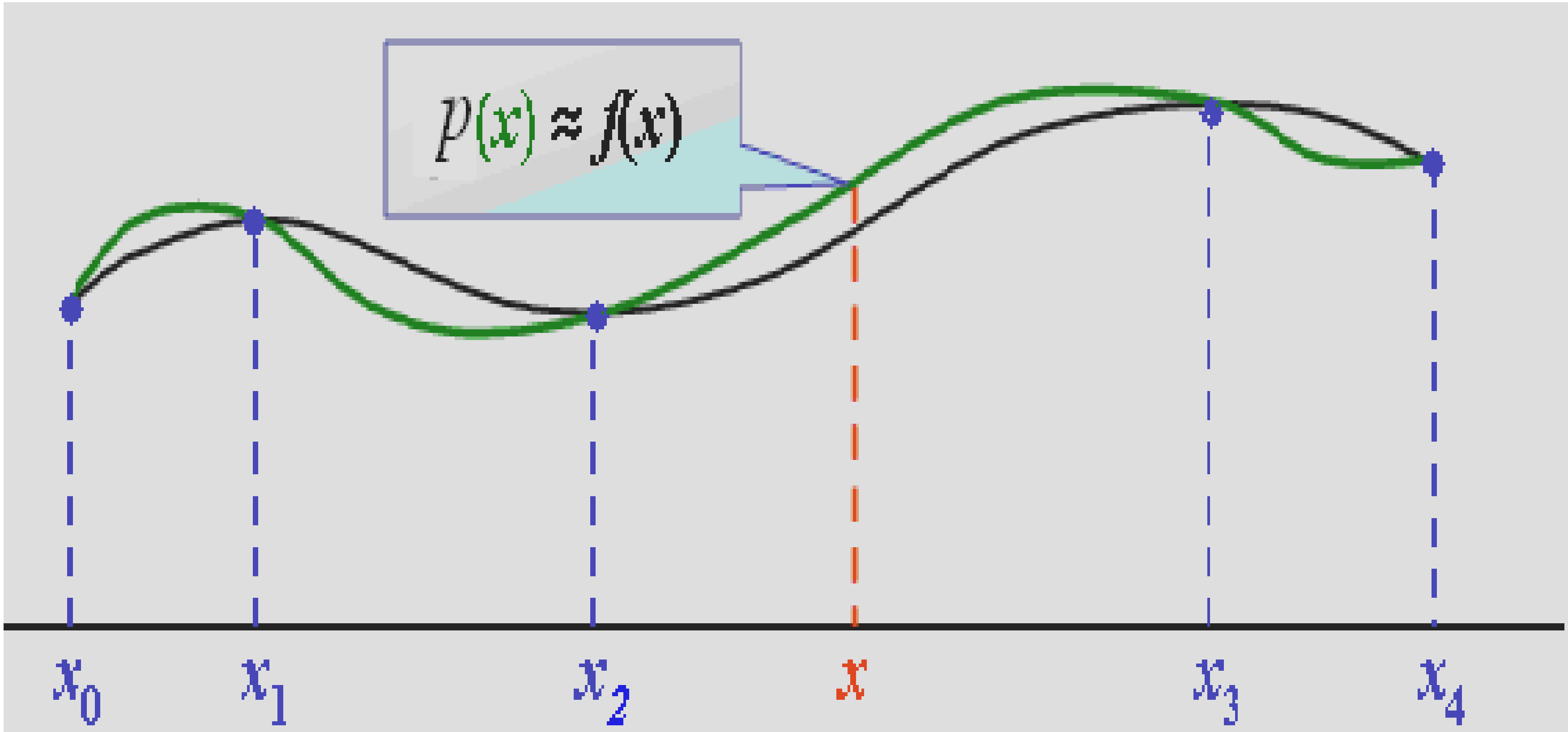
其中，代数多项式类的插值函数占有重要地位：

(a) 结构简单、计算机容易处理、任何多项式的导数和积分也易确定，并且仍是多项式。

(b) 著名的 Weierstrass 逼近定理(定义在闭区间上的任何连续函数 $f(x)$, 存在代数多项式 $p(x)$ 一致逼近 $f(x)$, 并达到所要求的精度)。

因此，我们主要考虑代数多项式的插值问题。

- **基本概念**



x_0 , x_1, … , x_n 插值节点,

函数 $P(x)$ 称为函数 $y=f(x)$ 的插值函数,
区间 $[a, b]$ 称为插值区间。

例题： 已知函数 $f(x)$ 有如下数据:

x	0	1	2
y	0	1	1
y'	0	1	

求 $f(x)$ 的插值多项式 $p(x)$,

并求 $f(x)$ 在 $x = 0.5$ 处的近似值。

解：

x	0	1	2
y	0	1	1
y'	0	1	

设多项式为

$$P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4$$

其中，$a_0, a_1, \cdots, a_4$ 为待定系数.

由给定的条件有:

$$P(0)=a_0=0=f(0)$$

$$P(1)=a_0+a_1+a_2+a_3+a_4=1=f(1)$$

$$P(2)=a_0+2a_1+4a_2+8a_3+16a_4=1=f(2)$$

$$P'(0)=a_1=0=f'(0)$$

$$P'(1)=a_1+2a_2+3a_3+4a_4=1=f'(1)$$

联立上式得:

$$a_0=0 \quad a_1=0 \quad a_2=\frac{9}{4} \quad a_3=-\frac{3}{2} \quad a_4=\frac{1}{4}$$

$$P(x)=\frac{9}{4}x^2-\frac{3}{2}x^3+\frac{1}{4}x^4$$

$$f(0.5)\approx P(0.5)=0.3906$$

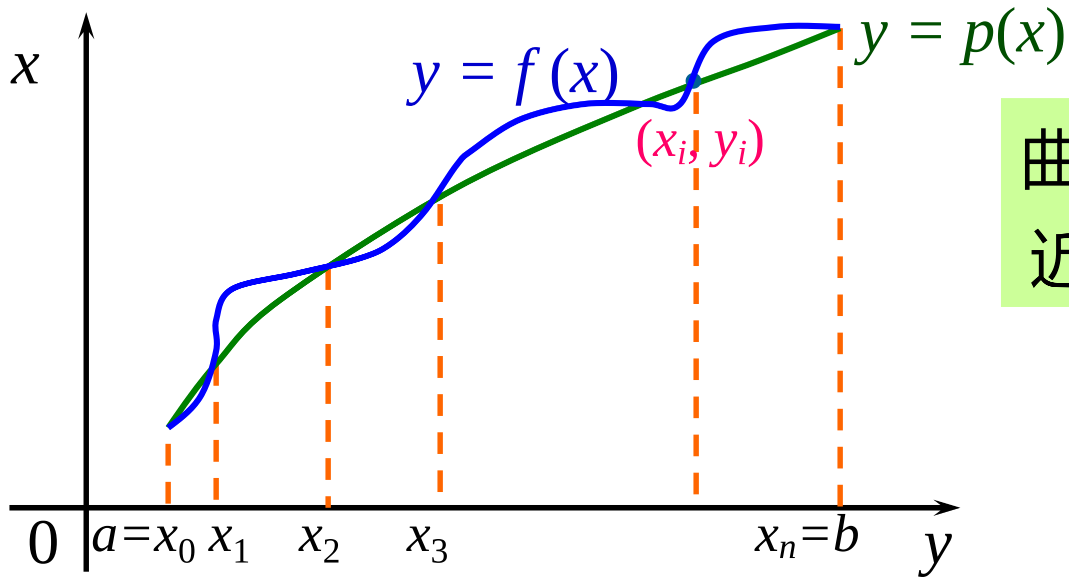
插值的几何意义

从几何上看，插值就是求一条曲线 $y = P(x)$

使其通过给定的 $n+1$ 个点 (x_i, y_i)，$(i = 0, 1, \cdots, n)$

并且与已知曲线 $y = f(x)$ 有一定的近似度。

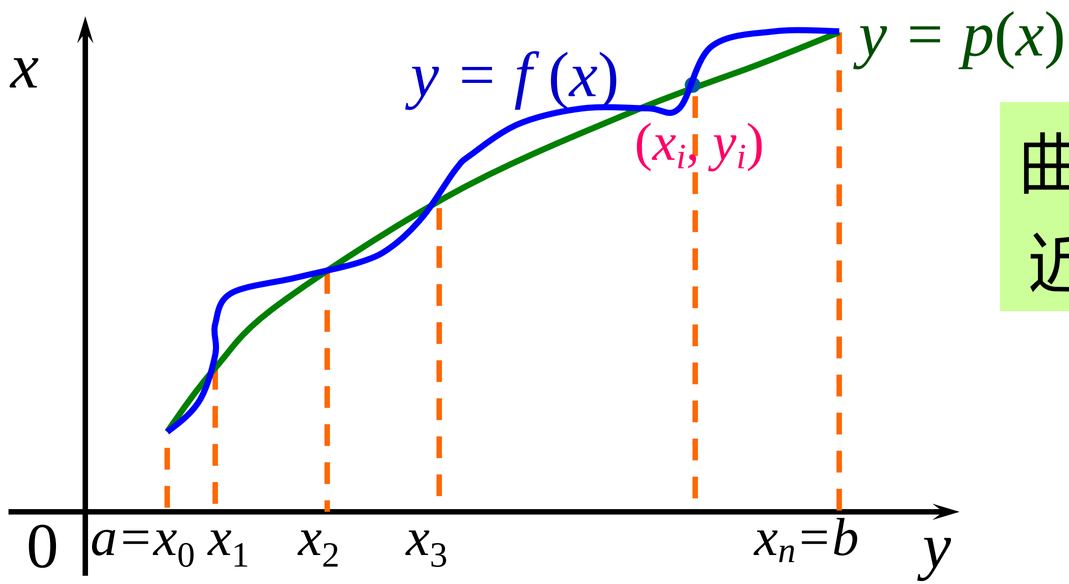
从几何上看



曲线 $P(x)$

近似 $f(x)$

插值方法的研究问题



曲线 $P(x)$ 近似 $f(x)$

(1) 满足插值条件的$P(x)$是否存在唯一?

(2) 若满足插值条件的$P(x)$存在，如何构造$P(x)$?

(3) 如何估计用$P(x)$近似替代 $f(x)$ 产生的误差?

§ 5.1 多项式插值

求 n 次多项式 $\boldsymbol{P_n(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n}$

使得: $p_n(x_i) = y_i, i = 0, 1, \cdots, n$ ← 插值条件

条件：无重合节点，即 $\boldsymbol{i \neq j \Rightarrow x_i \neq x_j}$

根据插值条件，有：

$$
\begin{cases}
P(x_0) = a_0 + a_1 x_0 + \cdots + a_n x_0^n = y_0 \\
P(x_1) = a_0 + a_1 x_1 + \cdots + a_n x_1^n = y_1 \\
\qquad \vdots \\
P(x_n) = a_0 + a_1 x_n + \cdots + a_n x_n^n = y_n
\end{cases}
$$

其系数矩阵的行列式为

$$
V_n(x_0, x_1, \cdots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}
$$

Vandermonde行列式

注意到插值节点 $x_i(i=0,1,2,\cdots,n)$ 两两相异，而

$$V_n(x_0,x_1,\cdots,x_n)=\prod_{0\le i<j\le n}(x_j-x_i)\neq 0$$

故方程组(1)有惟一解 $a_0,a_1,\cdots a_n$.

于是满足插值条件的多项式存在且惟一。 $\blacksquare$

定理

存在惟一性

由 $n+1$ 个不同插值节点 $x_0,x_1,\cdots,x_n$

可以惟一确定一个 n 次多项式

$$P_n(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$$

满足插值条件 $P_n(x_i)=y_i$

惟一性的另外一种证明方法

插值多项式的惟一性定理_另一种证明方法

已知插值条件且次数不高于 n 的插值多项式是惟一的。

证：设 $p(x)$和 $q(x)$是两个次数不高于 n 且都经过插值样点的多项式，

即， $p(x_i)=q(x_i)=y_i$ ， $i=0, 1, 2, \ldots, n$

从而多项式 $p(x)-q(x)$ 有 $n+1$ 个零点 $x_0, x_1, \ldots, x_n$,

但由于 $p(x)$和 $q(x)$ 均为次数不超过 n 的多项式，

所以，

$p(x)-q(x)$亦为次数不高于 n 的多项式，

于是与 n 次多项式只有 n 个零点的代数基本定理矛盾.

故 $p(x)\equiv q(x)$ ■

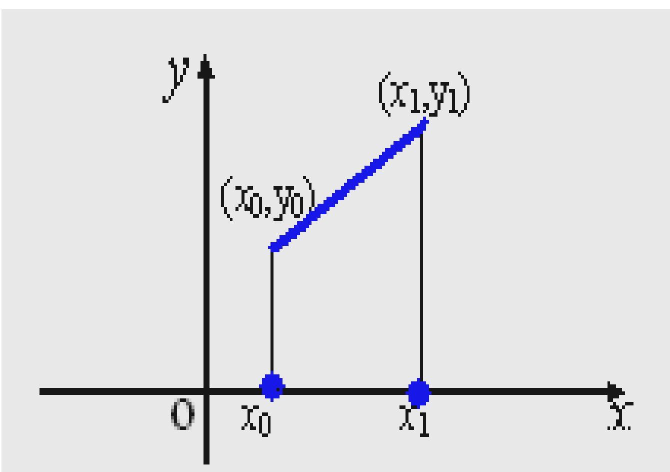
§ 5. 1 插值多项式

1. 构造线性插值基函数的方法:

$n = 1$ 已知 x_0 , x_1 ; y_0 , y_1 ， 求 $L_1(x) = a_0 + a_1 x$ 使得

$$L_1(x_0) = y_0\ ,\quad L_1(x_1) = y_1$$

可见 $L_1(x)$ 是过 (x_0, y_0) 和 (x_1, y_1) 两点的直线。

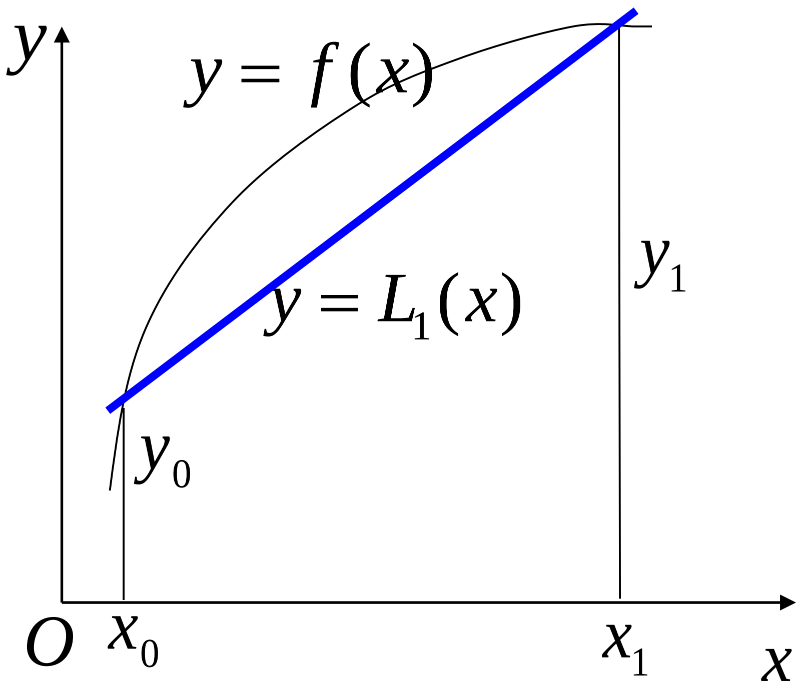


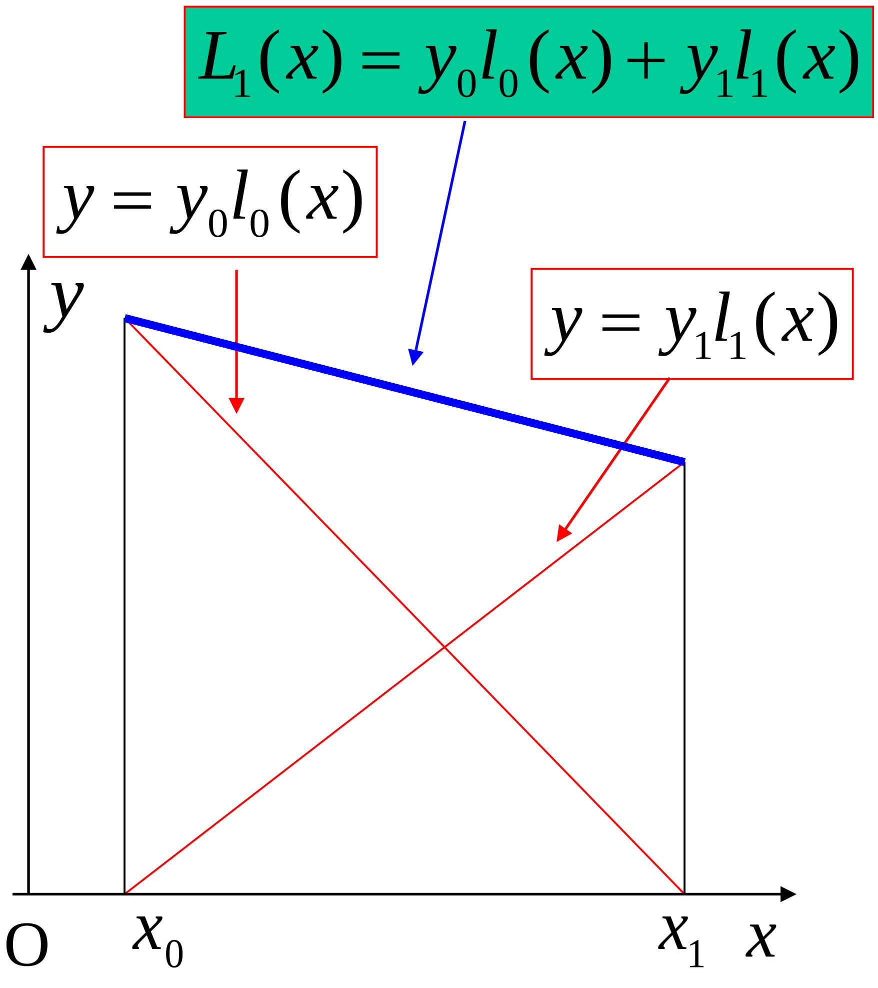
$$L_1(x) = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0)$$

$$= \underbrace{\frac{x - x_1}{x_0 - x_1}}_{l_0(x)} y_0 + \underbrace{\frac{x - x_0}{x_1 - x_0}}_{l_1(x)} y_1 = \sum_{i=0}^{1} l_i(x) y_i$$

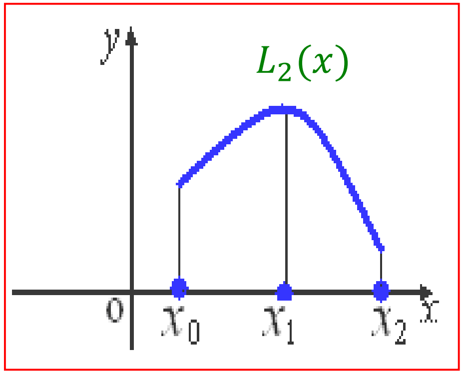
线性插值基函数

线性插值与其基函数示意图





$n=2$ 已知 $\begin{array}{c|}x_0,x_1,x_2\\ \hline y_0,y_1,y_2\end{array}$，求 $L_2(x)$.

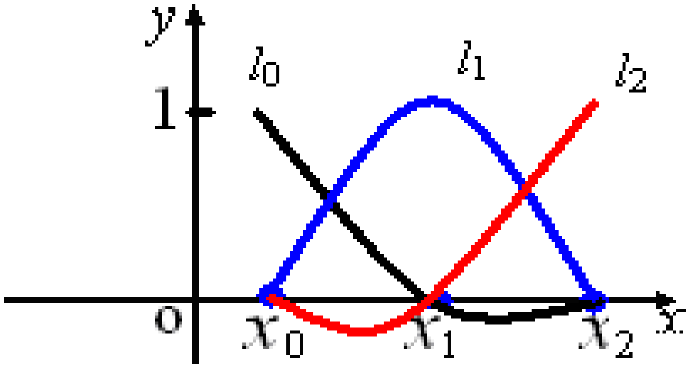


分析： $L_2(x_0)=y_0 \quad L_2(x_1)=y_1 \quad L_2(x_2)=y_2$

显然, $L_2(x)$是过$(x_0,y_0),(x_1,y_1),(x_2,y_2)$ 三点的一条抛物线。

仿照线性插值基函数的构造方法，令

$$\begin{cases} l_0(x)=\dfrac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} \\ l_1(x)=\dfrac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} \\ l_2(x)=\dfrac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} \end{cases}$$

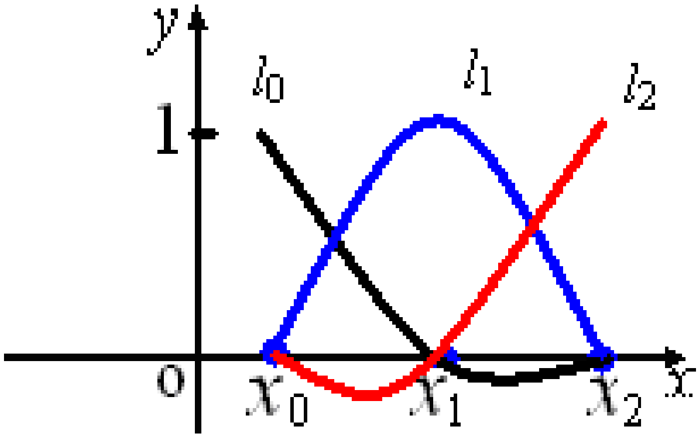


抛物线基函数

称其为抛物线插值基函数(如上右图所示)。

抛物线插值基函数

$$\begin{cases} l_0(x) = \dfrac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} \\ l_1(x) = \dfrac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} \\ l_2(x) = \dfrac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} \end{cases}$$



抛物线基函数

于是

$$L_2(x) = l_0(x)y_0 + l_1(x)y_1 + l_2(x)y_2$$

$$= \sum_{i=0}^{2} l_i(x)y_i$$

➢ 一般情形

希望找到 $l_i(x)$，$i = 0, \ldots, n$ 使得 $l_i(x_j) = \delta_{ij}$；

然后令 $L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k)\, l_k(x)$，则显然有 $L_n(x_i) = y_i$。

每个 l_i 有 n 个根 $x_0, \ldots, x_i, \ldots, x_n$

令 $l_k(x) = A(x-x_0)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n)$,

由 $l_k(x_k) = 1$，得:

$$A = \frac{1}{(x_k-x_0)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)} \quad k = 0, 1, \cdots, n.$$

$$\boxed{l_k(x) = \frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n)}{(x_k-x_0)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)}} \quad \boxed{,\quad k = 0, 1, \cdots, n.}$$

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k)\, l_k(x)$$

定理 （Lagrange）插值多项式

设 $y=f(x)$ 函数表 $(x_i, f(x_i))(i=0,1,\ldots,n)$ $(x_i \neq x_j,\ i\neq j)$，
则满足插值条件的多项式 $L_n(x_i)=f(x_i)$，$(i=0,1,\ldots,n)$.

$$L_n(x)=\sum_{i=0}^{n} f(x_i) l_i(x)$$

其中，

$$l_i(x)=\prod_{\substack{0\le j\le n\\ j\neq i}} \frac{x-x_j}{x_i-x_j},\ i=0,1,\cdots,n\cdot$$

说明：

(1) 利用上述公式编写程序代码；

(2) $L_n(x)$的次数可以小于n .

构造插值多项式的方法：

(1) 先求插值基函数.

(2) 构造插值多项式.

以下的问题：如何分析插值的余项?

例题　　已知连续函数 $f(x)$ 的函数表如下：

x	-1	0	1	2
$f(x)$	-2	-2	1	2

求方程 $f(x)=0$ 在 $(-1, 2)$ 内的近似根。

例题　　已知连续函数 $f(x)$ 的函数表如下：

x	-1	0	1	2
$f(x)$	-2	-2	1	2

求方程 $f(x)=0$ 在 $(-1, 2)$ 内的近似根。

解：利用Lagrange插值法有

$$L_3(x) = \frac{(x-0)(x-1)(x-2)}{(-1-0)(-1-1)(-1-2)} \bullet (-2) + \frac{(x+1)(x-1)(x-2)}{(0+1)(0-1)(0-2)} \bullet (-2)$$

$$+ \frac{(x+1)(x-0)(x-2)}{(1+1)(1-0)(1-2)} \bullet (1) + \frac{(x+1)(x-0)(x-1)}{(2+1)(2-0)(2-1)} \bullet (2)$$

$$= \frac{1}{6}[-5x^3 + 9x^2 + 14x - 12]$$

解方程 $-5\boldsymbol{x}^3 + 9\boldsymbol{x}^2 + 14\boldsymbol{x} - 12 = 0$

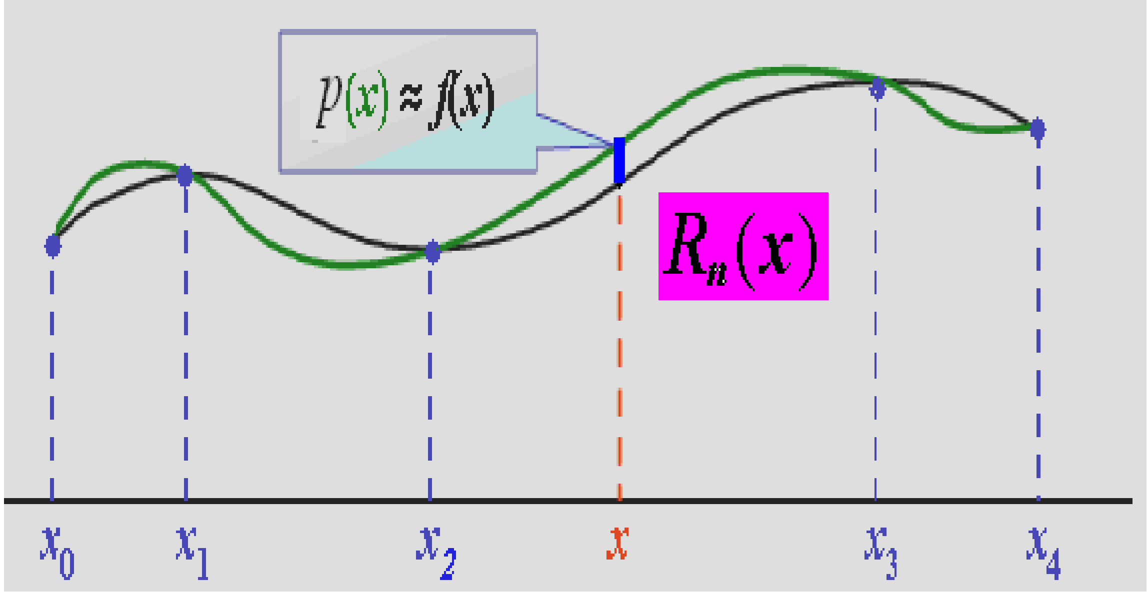
取初值 $x = 0.5$，利用牛顿法求解可得 $f(x)$ 在$(-1, 2)$内的近似根为 0.67433。

➢ Lagrange插值法插值余项

设节点 $a \le x_0 < x_1 < \cdots < x_n \le b$ ，且 f 满足条件 $f \in C^n[a,b]$ ，

$f^{(n+1)}$在$[a\,,\,b]$内存在, 考察截断误差:

$$R_n(x) = f(x) - L_n(x)$$



➢ Lagrange插值法的插值余项

设节点 $a \le x_0 < x_1 < \cdots < x_n \le b$ ，且 f 满足条件 $f \in C^n[a,b]$,

$f^{(n+1)}$在$[a\,,\,b]$内存在，截断误差(或插值余项):

$$\boxed{R_n(x) = f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x) \quad , \ \xi \in (a,b)}$$

其中,

$$w_{n+1}(x) = (x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n)$$

➢ Lagrange插值法的插值余项定理

设节点 $a \le x_0 < x_1 < \cdots < x_n \le b$ ， 且 f 满足条件 $f \in C^n[a,b]$,

$f^{(n+1)}$在$[a\,,b]$内存在，截断误差(或插值余项):

$$R_n(x) = f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x) \qquad , \ \xi \in (a,b)$$

证明：由已知条件得到:

$$R_n(x_k) = 0,\ k = 0,1,\cdots,n$$

于是有:

$$R_n(x) = k(x)(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n) = k(x)\omega_{n+1}(x)$$

其中 $k(x)$ 是与 x 有关的待定函数。

任意固定 $x \neq x_i \ \ (i = 0, \ldots, n)$, 考察

$$\varphi(t) = f(t) - L_n(t) - k(x)(t - x_0)(t - x_1)\cdots(t - x_n)$$

根据插值条件及余项定义，可知

$\varphi(t)$ 在点 $x_0, x_1, \cdots, x_n, x$ 处均为零，

故 $\varphi(t)$ 在 $x_0,x_1,\cdots,x_n,x$ 上有 n+2 个零点，根据 *Roll* 定理

$\varphi'(t)$ 在 $\varphi(t)$ 的每两个零点间至少有一个零点，故 $\varphi'(t)$

在 $x_0,x_1,\cdots,x_n,x$ 内至少有 n+1 个零点，对 $\varphi'(t)$ 再用*Roll* 定理，

可知 $[a,b]$ 在 $x_0,x_1,\cdots,x_n,x$ 内至少有 n 个零点，依此类推，

$\phi^{(n+1)}(t)$ 在 $x_0,x_1,\cdots,x_n,x$ 内至少有一个零点，记为$\xi \in (a,b)$

使得: $\varphi'(t)$

$$k(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!},\ \xi \in (a,b)$$

➢ 说明事项：

由于 ξ 是不能确定，因此我们并不能确定误差的大小

但如能求出 $\max\limits_{a<x<b}\left|f^{(n+1)}(x)\right| = M_{n+1}$ ，那么用 $f(x)$逼近 $L_n(x)$

的截断误差限是：

$$\left|R_n(x)\right| \le \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}\left|\omega_{n+1}(x)\right|$$

当 $n = 1$时，

$$R_1(x) = \frac{1}{2}f''(\xi)\omega_2(x) = \frac{1}{2}f''(\xi)(x-x_0)(x-x_1), \xi \in [x_0, x_1]$$

当 $n = 2$时，

$$R_2(x) = \frac{1}{6}f'''(\xi)\omega_3(x) = \frac{1}{6}f'''(\xi)(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2),$$

$$\xi \in [x_0, x_2]$$

➢ **特别要注意的是：**

当 $f(x)$ 为任一个次数$\leq n$ 的多项式时，$\boldsymbol{f^{(n+1)}(x) \equiv 0}$ ，可知，

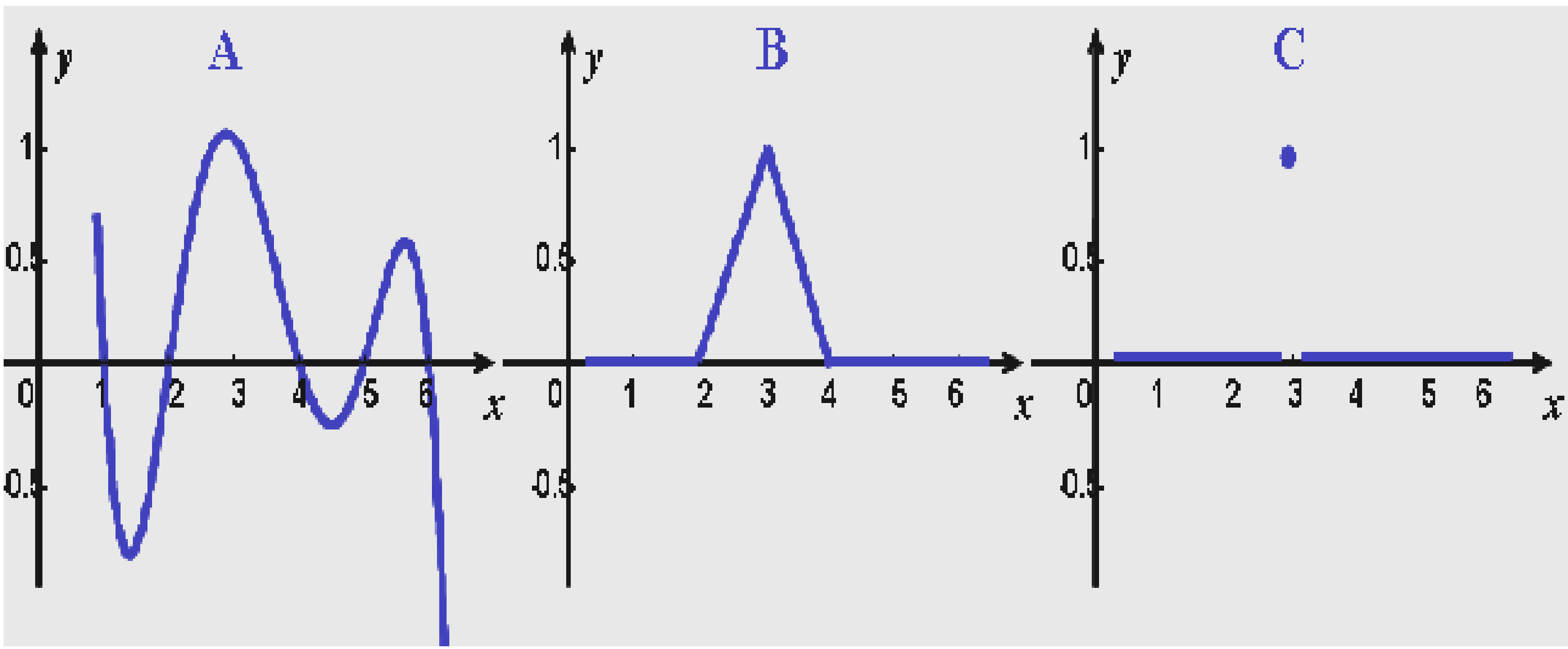
$$\boldsymbol{R_n(x) \equiv 0}$$

即插值多项式对于次数$\leq n$ 的多项式是精确的。

问题

给定 $x_i = i+1$，$i = 0, 1, 2, 3, 4, 5.$

下面哪个是 $l_2(x)$ **的图像?**



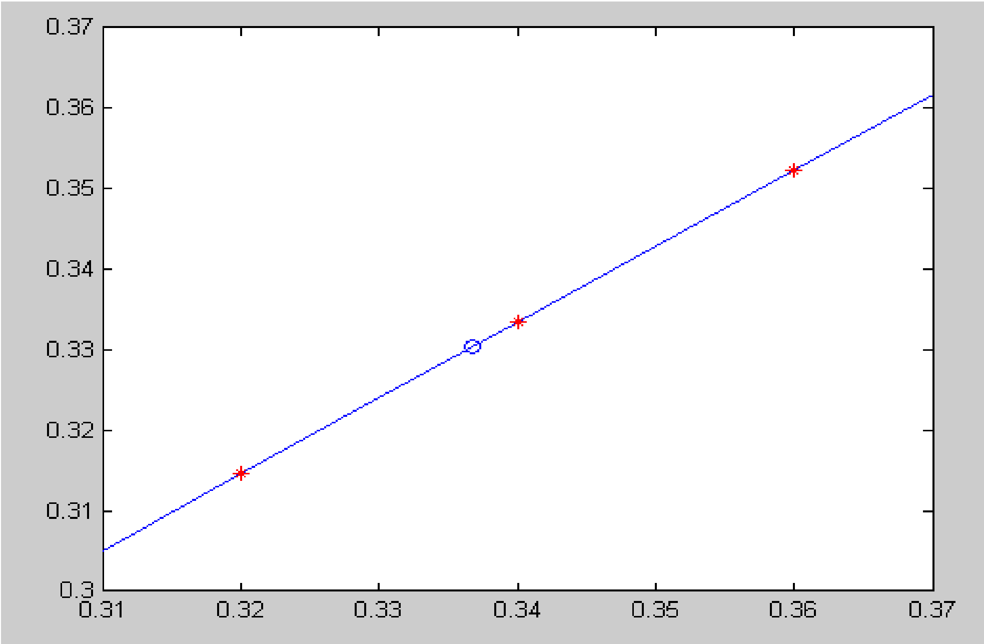
算例1

已知 $\sin 0.32 = 0.314567$ ，$\sin 0.34 = 0.333487$

$\sin 0.36 = 0.352274$ ，

用线性插值及抛物线插值计算 $\sin 0.3367$

的值并估计截断误差。



算例1

已知 $\sin 0.32 = 0.314567$ ，$\sin 0.34 = 0.333487$

$\sin 0.36 = 0.352274$ ，

用线性插值及抛物线插值计算 $\sin 0.3367$

的值并估计截断误差。

解： $Sin(0.3367)$ 精确值：0.33037 41915 5563

$x_0 = 0.32 \quad y_0 = 0.314567$

$x_1 = 0.34 \quad y_1 = 0.333487$

$x_2 = 0.36 \quad y_2 = 0.352274$

线性插值时取

$$x_0 = 0.32,\ x_1 = 0.34$$

$$\sin 0.3367 \approx L_1(0.3367)$$

$$= 0.314567\frac{0.3367-0.32}{0.34-0.32} + 0.333487\frac{0.3367-0.34}{0.32-0.34}$$

$$= 0.330365$$

其截断误差为: $$\left|R_1(x)\right| = \frac{M_2}{2}\left|(x-x_0)(x-x_1)\right|,$$

其中, $$M_2 = \max_{x_0 \le x \le x_1}\left|f''(\xi)\right|$$

因为 $$f(x) = \sin x,\ f''(x) = -\sin x$$

可取 $$M_2 = \max_{x_0 \le x \le x_1}\left|\sin x\right| = \sin x_1 \le 0.3335$$

于是: $$\left|R_1(0.3367)\right| = \left|\sin 0.3367 - L_1(0.3367)\right|$$

$$\le \frac{1}{2} \times 0.3335 \times 0.0167 \times 0.0033 \le 0.92 \times 10^{-5}$$

$Sin(0.3367)$ 精确值：0.33037 41915 5563

用抛物线插值时，取所有节点，得到

$$\sin 0.3367 \approx L_2(0.3367)$$

$$= 0.314567\frac{(0.3367-0.34)(0.3367-0.36)}{(0.32-0.34)(0.32-0.36)} + 0.333487\frac{(0.3367-0.32)(0.3367-0.36)}{(0.34-0.32)(0.34-0.36)}$$

$$+0.352274\frac{(0.3367-0.32)(0.3367-0.34)}{(0.36-0.32)(0.36-0.34)}$$

$$= 0.314567\times\frac{0.7689\times10^{-4}}{0.0008} + 0.333487\times\frac{3.89\times10^{-4}}{0.0004} + 0.352274\frac{-0.5511\times10^{-4}}{0.0008}$$

$$= 0.330374$$

余项讨论：
$$|R_2(x)| = \frac{M_3}{6}|(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)|,$$

其中：
$$M_2 = \max_{x_0\le x\le x_1}|f'''(x)| = \cos x_0 \le 0.828$$

$$|R_2(0.3367)| = |\sin 0.3367 - L_2(0.3367)|$$

$$\le \frac{1}{6}\times0.828\times0.0167\times0.033\times0.0233$$

$$< 0.178\times10^{-6}$$

算例

利用 100，121 的开方计算 $\sqrt{115}$.

解： 由于:

x	100	121
$\sqrt{x}$	10	11

利用Lagrange插值法有

$$L_1(x)=\frac{x-121}{100-121}\cdot 10+\frac{x-100}{121-100}\cdot 11$$

于是,
$$\sqrt{115}\approx L_1(115)=\frac{115-121}{100-121}\cdot 10+\frac{115-100}{121-100}\cdot 11$$
$$=10.71428$$

$\sqrt{115}$ 的精确值为 10.72380529…,

因此, 近似值 10.71428 有3 位有效数字.

```
x = [0   0.5     1.0     1.5     2.0     2.5     3.0];
y = [0   0.4794  0.8415  0.9975  0.9093  0.5985  0.1411];
[f,f0] = m_NA_lagrangeInterp(x,y,1.6);  % 计算输出的拉格朗日插值多项式.
f
f0
```

```
function [f,f0] = m_NA_lagrangeInterp(x,y,x0)
%   求已知数据点的 lagrange 插值多项式;
%   x    已知数据点的 x 坐标向量;
%   y    已知数据点的 y 坐标向量;
%   x0   插值点的 x 坐标;
%   f    求得的 lagrange 插值多项式 ;
%   f0   x0处的插值.

syms t;

if(length(x) == length(y))
    NLen = length(x);
else
    disp('x和y的维数不相等! ');
    return;
end                                   % 检错

f = 0.0;
for(i = 1:NLen)
    yp = y(i);
    for(j = 1:i-1)
        yp = yp*(t-x(j))/(x(i)-x(j));
    end;
    for(j = i+1:NLen)
        yp = yp*(t-x(j))/(x(i)-x(j));
    end;                                        % 计算拉格朗日基函数

    f = f + yp;                               % 计算拉格朗日插值函数
    simplify(f);                              % 化简
end
f
if(nargin == 3)
  f = collect(f);                               % 将插值多项式展开
  fp = subs(f,'t',x0);                          % 计算插值点的函数值
  f0 = vpa(fp,10);                              % 将插值多项式的系数化成6位精度的小数
else
  f = collect(f);                               % 将插值多项式展开
end
```

差商

- Lagrange 插值虽然易算，但若要增加一个节点时，

  全部基函数 $l_i(x)$ 都需重新算过。

由线性代数的知识可知：任何一个n次多项式都可以表示成

$$1,\quad x-x_0,\quad (x-x_0)(x-x_1),\cdots,\quad (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})$$

共 $n+1$ 个线性无关的多项式的线性组合。

那么，是否可以将这 $n+1$ 个多项式作为插值基函数呢?

- 寻求如下形式的插值多项式：

$$P_n(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)(x-x_1)+\cdots$$
$$+a_n(x-x_0)\cdots(x-x_{n-1})$$

其中的 a_i 为待定系数，由插值条件确定.

设插值多项式$P(x)$具有如下形式:

$$P(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \cdots + a_n(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1})$$

$P(x)$应满足插值条件: $P(x_i) = f_i \,, i = 0, 1, \cdots, n$

有: $P(x_0) = f_0 = a_0$

$$a_0 = f_0$$

$$P(x_1) = f_1 = a_0 + a_1(x_1 - x_0)$$

$$a_1 = \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0}$$

$$P(x_2) = f_2 = a_0 + a_1(x_2 - x_0) + a_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)$$

$$a_2 = \frac{\dfrac{f_2 - f_0}{x_2 - x_0} - \dfrac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_1}$$

再继续下去,待定系数的形式将更复杂,为此引入 差商 的概念.

➢ 差商的概念

定义 记函数 $f(x)$ 在 x_i 的值 $f[x_i]=f(x_i)$，

称 $f[x_i]$ 为 $f(x)$ 关于 x_i 的零阶差商。

从零阶差商出发，归纳地定义各阶差商:

定义 称 $$f[x_i,x_{i+1}]=\frac{f[x_{i+1}]-f[x_i]}{x_{i+1}-x_i}$$

为函数 $f(x)$ 关于点 x_i,x_{i+1} 的一阶差商.

一般地， $f(x)$ 关于 $x_i,x_{i+1},\cdots,x_{i+k}$ 的 k 阶差商:

$$f[x_i,x_{i+1},\cdots,x_{i+k}]=\frac{f[x_{i+1},x_{i+2},\cdots,x_{i+k}]-f[x_i,x_{i+1},\cdots,x_{i+k-1}]}{x_{i+k}-x_i}$$

➢ n 阶差商的概念

一般地， $f(x)$ 关于 $x_0, x_1, \cdots, x_n$ 的 n 阶差商:

$$f[x_0, x_1, \cdots, x_n] = \frac{f[x_1, x_2, \cdots, x_n] - f[x_0, x_1, \cdots, x_{n-1}]}{x_n - x_0}$$

差商的基本性质

性质1：差商可表示为函数值的线性组合，即：

$$f[x_0, x_1, \cdots, x_n] = \sum_{j=0}^{n} \frac{f(x_j)}{(x_j - x_0)\cdots(x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1})\cdots(x_j - x_n)}$$

可用归纳法证明

性质2：差商关于所含节点是对称的，即：

$$f[x_0, x_1, \cdots, x_n] = f[x_1, x_0, \cdots, x_n] = \cdots = f[x_n, x_{n-1}, \cdots, x_0]$$

差商的基本性质

性质3：

$$f[x_0,\cdots,x_{i-1},x_m]=\frac{f[x_1,\cdots,x_{i-2},x_m]-f[x_0,x_1,\cdots,x_{i-1}]}{x_m-x_{i-1}}$$

性质4：设 $f(x)$ 在 $[a,b]$存在 n 阶导数，且 $x_j\in[a,b]$

则 $\exists\xi\in(a,b)$ ，使得:

$$f[x_0,x_1,\cdots,x_n]=\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}$$

➤ 差商的计算-差商表

x_i	$f(x_i)$	一阶差商	二阶差商	三阶差商	四阶差商
x_0	$f(x_0)$				
x_1	$f(x_1)$	$f[x_0,x_1]$			
x_2	$f(x_2)$	$f[x_1,x_2]$	$f[x_0,x_1,x_2]$		
x_3	$f(x_3)$	$f[x_2,x_3]$	$f[x_1,x_2,x_3]$	$f[x_0,x_1,x_2,x_3]$	
x_4	$f(x_4)$	$f[x_3,x_4]$	$f[x_2,x_3,x_4]$	$f[x_1,x_2,x_3,x_4]$	$f[x_0,x_1,x_2,x_3,x_4]$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

算例 已知

x_i	1	2	4	7
$f(x_i)$	0	2	15	12

计算三阶差商 $f[1,2,4,7]$

解：列表计算

x_i	$f(x_i)$	一阶差商	二阶差商	三阶差商
1	0			
2	2	2		
4	15	13/2	3/2	
7	12	-1	-3/2	-1/2

$$f[1,2,4,7]=-1/2$$

➢ 牛顿插值公式

根据差商的定义，把x看成$[a,b]$上的一点，可得：

$$f(x) = f(x_0) + f[x, x_0](x - x_0)$$

$$f[x, x_0] = f[x_0, x_1] + f[x, x_0, x_1](x - x_1)$$

$$f[x, x_0, \cdots, x_{n-1}] = f[x_0, x_1, \cdots, x_n] + f[x, x_0, x_1, \cdots, x_n](x - x_n)$$

4.4 牛顿插值公式

根据差商的定义，把 x 看成$[a,b]$上的一点，可得:

$$f(x)=f(x_0)+f[x,x_0](x-x_0)$$

$$f[x,x_0]=f[x_0,x_1]+f[x,x_0,x_1](x-x_1)$$

$$\vdots$$

$$f[x,x_0,\cdots,x_{n-1}]=f[x_0,x_1,\cdots,x_n]+f[x,x_0,x_1,\cdots,x_n](x-x_n)$$

$$f(x)=f(x_0)+f[x_0,x_1](x-x_0)$$

把后一式代入前一式

$$+f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1)+\cdots$$

$$+f[x_0,x_1,\cdots,x_n](x-x_0)\cdots(x-x_{n-1})$$

$$+f[x,x_0,x_1,\cdots,x_n]\omega_{n+1}(x)=N_n(x)+R_n(x)$$

其中 $$N_n(x) = f(x_0) + f[x_0,x_1](x-x_0) + f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1) + \cdots + f[x_0,x_1,\cdots,x_n](x-x_0)\cdots(x-x_{n-1})$$

$$R_n(x) = f(x) - N_n(x) = f[x,x_0,x_1,\cdots,x_n]\omega_{n+1}(x) = \frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)\cdots(x-x_n)$$

显然 $N_n(x)$ 满足插值条件，且次数不超过 n ，它就是插值多项式，其系数为：

$$a_i = f[x_0,x_1,\cdots,x_i], \quad i = 0,1,\cdots,n$$

我们称 $N_n(x)$ 为牛顿插值多项式.

算例 已知$f(x)$的函数表，求 4 次牛顿插值多项式，并求$f(0.596)$.

x	$f(x)$
0.40	0.41075
0.55	0.57815
0.65	0.69675
0.80	0.88811
0.90	1.02652
1.05	1.25382

算例 已知$f(x)$的函数表，求 4 次牛顿插值多项式，并求 $f(0.596)$.

解：列表计算

0.40	0.41075					
0.55	0.57815	1.11600				
0.65	0.69675	1.18600	0.28000			
0.80	0.88811	1.27573	0.35893	0.19733		
0.90	1.02652	1.38410	0.43348	0.21300	0.03134	
1.05	1.25382	1.51533	0.52493	0.22863	0.03126	−0.00012

从表中可以看到 5 阶差商几乎为0，故取4次插值多项式即可，

于是：
$$N_4(x)=0.41075+1.166(x-0.4)+0.28(x-0.4)(x-0.55)$$
$$+0.19733(x-0.4)(x-0.55)(x-0.65)$$
$$+0.03134(x-0.4)(x-0.55)(x-0.65)(x-0.8)$$
$$f(0.596)\approx N_4(0.596)=0.63192$$

算例 已知 $f(x)$ 的函数表，求4 次牛顿插值多项式，并求 $f(0.596)$.

解：列表计算

0.40	0.41075					
0.55	0.57815	1.11600				
0.65	0.69675	1.18600	0.28000			
0.80	0.88811	1.27573	0.35893	0.19733		
0.90	1.02652	1.38410	0.43348	0.21300	0.03134	
1.05	1.25382	1.51533	0.52493	0.22863	0.03126	−0.00012

$$N_4(x)=0.41075+1.166(x-0.4)+0.28(x-0.4)(x-0.55)$$
$$+0.19733(x-0.4)(x-0.55)(x-0.65)$$
$$+0.03134(x-0.4)(x-0.55)(x-0.65)(x-0.8)$$
$$f(0.596)\approx N_4(0.596)=0.63192$$

截断误差为：$\left|R_4(x)\right|\approx\left|f[x_0,\cdots,x_4]\omega_5(0.596)\right|\leq 3.63\times 10^{-9}$

```matlab
x = [0.4    0.5 0.6 0.7];
y = [0.38942 0.47943 0.56464 0.64422];
[f,f0] = m_NA_newtonDiffInterp(x,y,0.57891);  % 计算输出的 newton 均差插值多项式.

%x = [1 2   3   4   5   6];
%y = [0 0.6931  1.0986  1.3863  1.6094  1.7918];
%[f,f0] = m_NA_newtonDiffInterp(x,y,1.5);  % 计算输出的 newton 均差插值多项式.
f
f0
```

```matlab
function [f,f0] = m_NA_newtonDiffInterp(x,y,x0)
%   求已知数据点的均差形式的牛顿插值多项式
%   x   已知数据点的 x 坐标向量;
%   y   已知数据点的 y 坐标向量;
%   x0  插值点的 x 坐标;
%   f   求得的均差形式的 newton 插值多项式;
%   f0  x0 处的插值.
syms t;

if(length(x) == length(y))
    nLen = length(x);
    c(1:nLen) = 0.0;
else
    disp(' x 和 y 的维数不相等! ');
    return;
end

f = y(1);
a = 0;
yp = 1;

for(i = 1: nLen-1)
    for(j = i+1: nLen)
        a(j) = (y(j)-y(i))/(x(j)-x(i));
    end
    c(i) = a(i+1);
    yp = yp*(t-x(i));
    f = f + c(i)*yp;
    simplify(f);    % 化简
    y = a;
end
f

if(nargin == 3)
  f = collect(f);   % 将插值多项式展开
  fp = subs(f,'t',x0);  % 计算插值点的函数值
  f0 = vpa(fp,10);  % 将插值多项式的系数化成6位精度的小数
else
  f = collect(f);   % 将插值多项式展开
end
```

Newton插值和Lagrange插值比较

一、$L_n(x)$ 和$N_n(x)$ 均是 n 次多项式,且均满足插值条件:

$$L_n(x_i) = N_n(x_i) = f(x_i),\ \ i = 0,1,\cdots,n$$

由多项式的唯一性, $L_n(x) \equiv N_n(x)$

因而,两个公式的余项是相等的,即

$$\boxed{f[x, x_0, x_1, \cdots, x_n] w_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} w_{n+1}(x)}$$

二、当插值多项式从 n-1 次增加到 n 次时,

- 拉格朗日型插值必须重新计算所有的基本插值多项式;
- 而对于牛顿型插值,只需用表格再计算一个 n 阶差商,

然后加上一项即可。

5.2 分段插值公式

在区间 $[a, b]$ 上用插值多项式 P 逼近函数 f 时，f 和 P 在每个节点上的差异(理论上)应该为零。

自然，我们期望在一切中间点上也能很好地逼近 f，并且当插值点增加时这种逼近效果应该越来越好。

但上述的期望不可能实现的。当认识到这一点时，在数学界曾引起强烈的震动。

20 世纪初，Runge 就给出了一个等距节点插值多项式 $L_n(x)$ 不收敛到 $f(x)$ 的例子。

Runge 现象

设函数 $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}, x\in[-5,5]$ ，

在该区间 $[-5,5]$ 上取 $n+1$ 个等距节点, 构造 $f(x)$ 的 n 次

拉格朗日插值多项式为

$$x_i=-5+10\frac{i}{n}\quad(i=0,1,\cdots,n)$$

$$L_n(x)=\sum_{i=0}^{n}\left[\frac{1}{1+x_i^2}\cdot\prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n}\frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)}\right]\qquad n=2,4,6,8,20$$

其 matlab 的 runge-lagrange.m 文件及相关图形如下.

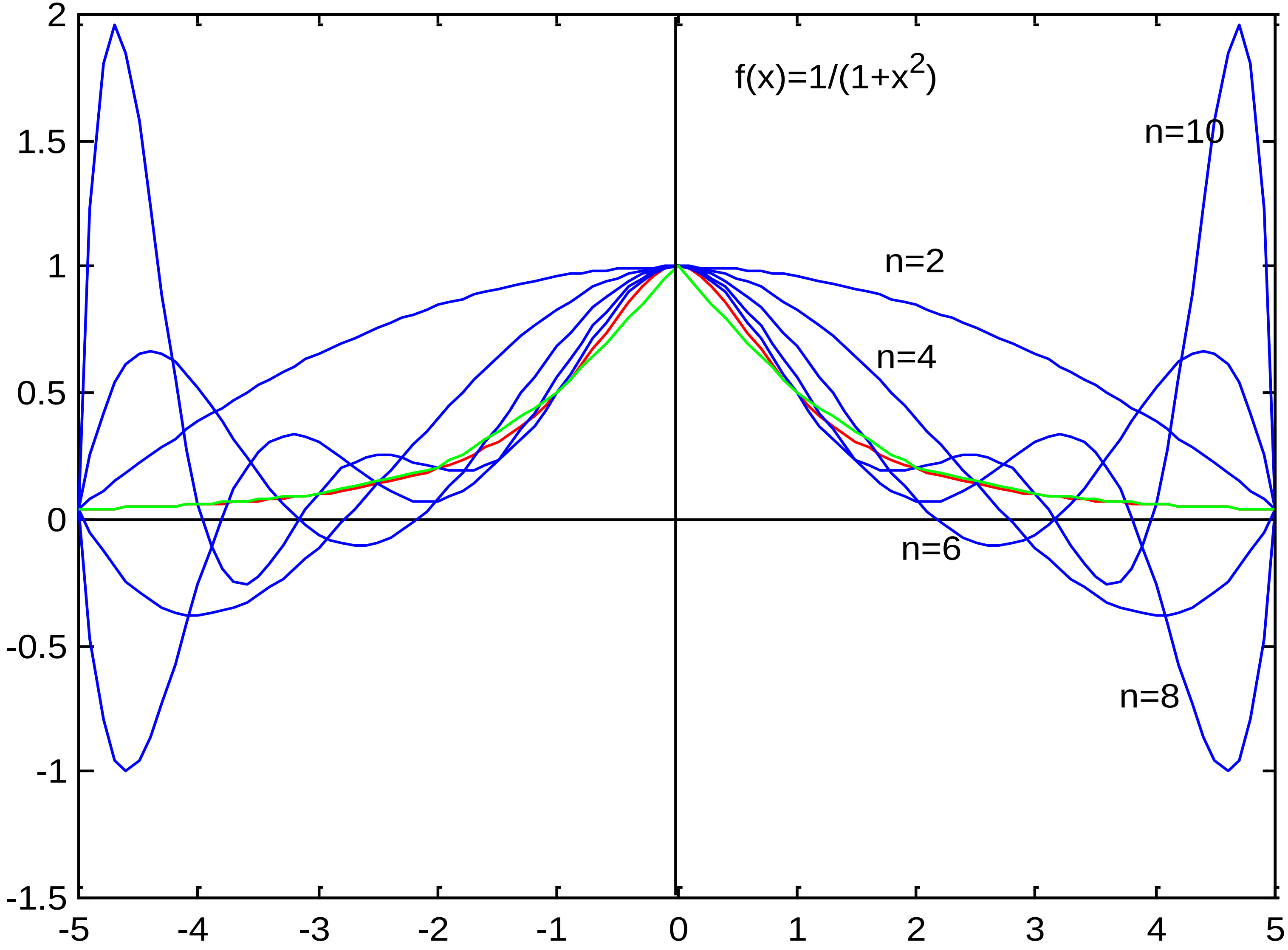
```
% lagrange.m
function y=lagrange (x0,y0,x)
n=length(x0);m=length(x);
for i=1:m
   z=x(i);s=0;
   for k=1:n
      L=1;
      for j=1:n
         if j~=k
            L=L*(z-x0(j))/(x0(k)-x0(j));
         end
      end
      s=s+L*y0(k);
   end
   y(i)=s;
end
y;
```

Lagrange插值多项式求插值的Matlab程序.

比较不同的插值多项式次数对插值的影响

```
%Compare_Runge.m
x=-5:0.1:5;   z=0*x;   y=1./(1+x.^2);
plot(x,z,'k',x,y,'r')
axis([-5 5 -1.5 2]);   pause;  hold on
for n=2:2:20
   x0=linspace(-5,5,n+1);   y0=1./(1+x0.^2);
   x=-5:0.1:5;  y1=lagrange (x0,y0,x);
   plot(x,y1);    pause
end
y2=1./(1+x0.^2); y=interp1(x0,y2,x);
plot (x,y,'k'); hold off
gtext('n=2'); gtext('n=4'); gtext('n=6')
gtext('n=8'); gtext('n=10')
gtext('f(x)=1/(1+x^2)')
```

不同次数的Lagrange插值多项式的比较图



Runge现象

令 $x_{n-1/2}=\frac{1}{2}(x_{n-1}+x_n)$，则 $x_{n-1/2}=5-\frac{5}{n}$ ，$n=2,4,\cdots,20$

下表列出了 $L_n(x_{n-1/2})$和 $R(x_{n-1/2})$的值。

n	$f(x_{n-1/2})$	$L_n(x_{n-1/2})$	$R(x_{n-1/2})$
2	0.137931	0.759615	−0.621684
4	0.066390	−0.356826	0.423216
6	0.054463	0.607879	−0.553416
8	0.049651	−0.831017	0.880668
10	0.047059	1.578721	−1.531662
12	0.045440	−2.755000	2.800440
14	0.044334	5.332743	−5.288409
16	0.043530	−10.173867	10.217397
18	0.042920	20.123671	−20.080751
20	0.042440	−39.952449	39.994889

n	$f(x_{n-1/2})$	$L_n(x_{n-1/2})$	$R(x_{n-1/2})$
2	0.137931	0.759615	−0.621684
4	0.066390	−0.356826	0.423216
6	0.054463	0.607879	−0.553416
8	0.049651	−0.831017	0.880668
10	0.047059	1.578721	−1.531662
12	0.045440	−2.755000	2.800440
14	0.044334	5.332743	−5.288409
16	0.043530	−10.173867	10.217397
18	0.042920	20.123671	−20.080751
20	0.042440	−39.952449	39.994889

结果表明，随着n的增加，$R(x_{n-1/2})$的绝对值几乎成倍地增加，这说明当 $n\to\infty$时 L_n 在$[-5,5]$上不收敛。

Runge证明了，存在一个常数 $c\approx 3.63$，使得当 $|x|\le c$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty} L_n(x)=f(x)$；而当$|x|>c$ 时 $\{L_n(x)\}$ 发散。

说明: 并不是插值多项式的次数越高，插值效果越好，精度也不一定是随次数的提高而升高，这种现象在上个世纪初由Runge发现，故称为Runge现象.

4.5.1 分段线性插值

分段线性插值特别简单，从几何上看，就是用折线逼近曲线。

定义 段线性插值的数学定义

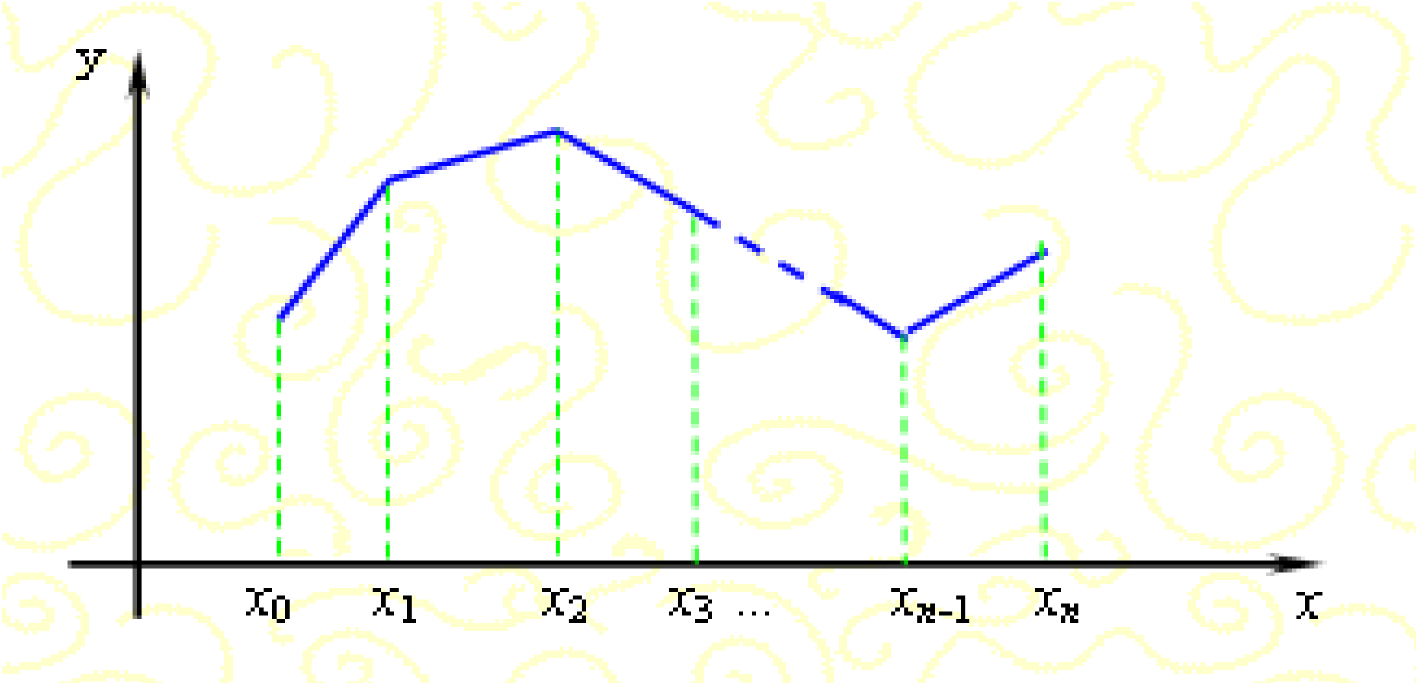
设 $f(x)$是区间$[a,b]$上的函数，在节点$a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$ 上的函数值为$f_0, f_1, \cdots, f_n$ ，

求一分段折线函数$P(x)$ 满足:

(1) $P(x_i)=f_i, i=0,1,\cdots,n$

(2) 在$[x_{i-1},x_i]$上，$P(x)$ 是一次多项式。$P(x)\in C[a,b]$

则称$P(x)$为 $[x_{i-1},x_i]$ 的分段线性插值函数。



易知, $P(x)$ 是个折线函数，在每个区间

$[x_i, x_{i+1}]$ 上, $i = 0, 1, \cdots, n-1$

有 $$p(x) = \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} y_i + \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} y_{i+1}$$

$P(x)$ 在 [a,b] 上是连续的，但其一阶导数是不连续的.

4.5.1 分段线性插值的基函数

当 $i=0$ 时,
$$l_0(x)=\begin{cases}\dfrac{x-x_1}{x_0-x_1} & x\in[x_0,x_1]\\ 0 & x\notin[x_0,x_1]\end{cases}$$

当 $i=1,2,\cdots,n-1$ 时,
$$l_i(x)=\begin{cases}\dfrac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}} & x\in[x_{i-1},x_i]\\ \dfrac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}} & x\in(x_i,x_{i+1}]\\ 0 & x\notin[x_{i-1},x_{i+1}]\end{cases}$$

当 $i=n$ 时,
$$l_n(x)=\begin{cases}0 & x\notin[x_{n-1},x_n]\\ \dfrac{x-x_{n-1}}{x_n-x_{n-1}} & x\in[x_{n-1},x_n]\end{cases}$$

显然$P(x)$是$l_i(x)$的线性组合：

$$P(x)=\sum_{i=0}^{n} f_i\, l_i(x)$$

在区间$[x_{i-1}, x_i]$上的值为：

$$P(x)=f_{i-1}\frac{x-x_i}{x_{i-1}-x_i}+f_i\frac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}} \qquad x_{i-1}\le x\le x_i$$

注意　表达式 $P(x)$ 在区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 上，只有

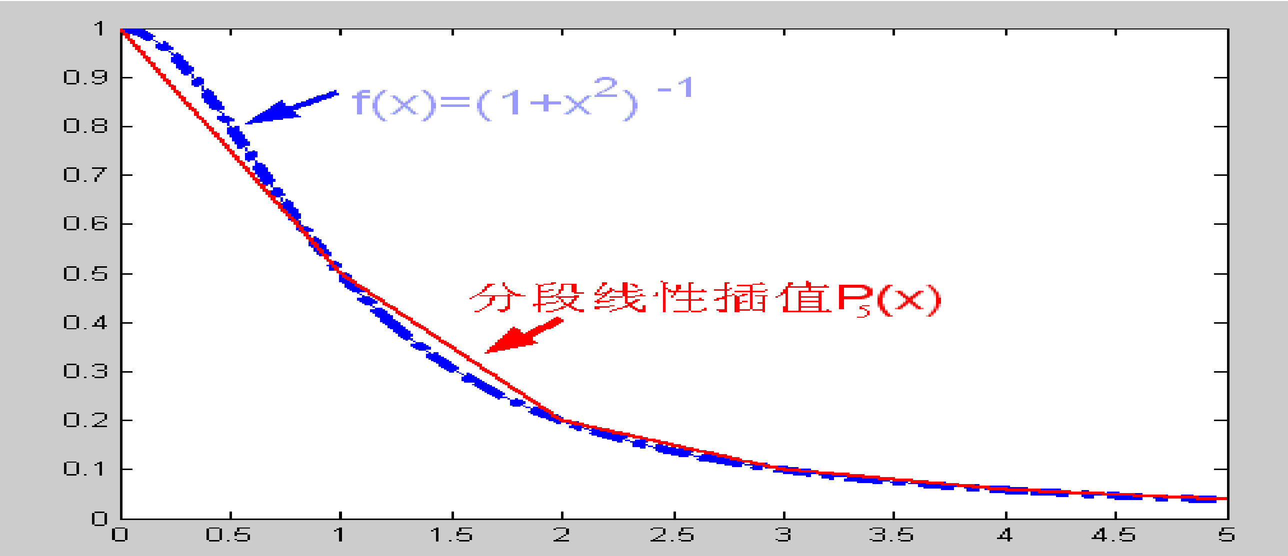
$l_{i-1}(x)$， $l_i(x)$是非零的，其它基函数均为零。即

$$P(x)=f_{i-1}\, l_{i-1}(x)+f_i\, l_i(x)$$

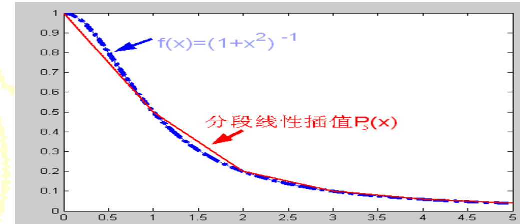
算例

已知函数 $y=f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ 在区间 $[0,5]$ 上取等距插值节点（如下表），求区间上分段线性插值函数，并利用它求出 $f(4.5)$ 近似值。

x_i	0	1	2	3	4	5
y_i	1	0.5	0.2	0.1	0.05882	0.03846



x_i	0	1	2	3	4	5
y_i	1	0.5	0.2	0.1	0.05882	0.03846



解：在每个分段区间 $[k,k+1]$

$$P(x)=\frac{x-(k+1)}{k-(k+1)}y_k+\frac{x-k}{(k+1)-k}y_{k+1}$$

$$=-y_k(x-k-1)+y_{k+1}(x-k)$$

$$P(x)=\begin{cases}-(x-1)+0.5x, & x\in[0,1]\\ -0.5(x-2)+0.2(x-1), & x\in[1,2]\\ -0.2(x-3)+0.1(x-2), & x\in[2,3]\\ -0.1(x-4)+0.05882(x-3), & x\in[3,4]\\ -0.05882(x-5)+0.03846(x-4), & x\in[4,5]\end{cases}$$

于是， $P(4.5)=-0.05882\times(4.5-5)+0.03846\times(4.5-4)=0.04864$

实际值： $f(4.5)=0.04705882352941$

当n=7 时， $P(4.5)=0.04762270321996$ ；当n=10时，$P(4.5)=0.04705882352941$

由此可见，对于光滑性要求不高的插值问题，分段线性插值的效果非常好！计算也简单！

➢ 埃尔米特 (Hermite) 插值

- ✓ 拉格朗日和牛顿均只保证函数插值;
- ✓ 实际问题有时需要导数也插值;
- ✓ 满足这种需要的插值称为埃尔米特插值.

埃尔米特插值的一般提法

埃尔米特插值的一般提法为：

设函数在节点 $x_0, x_1, \cdots, x_n$ 的函数值与导数值为：

$$f(x_i) = f_i, \quad f'(x_i) = f_i', \quad \cdots, \quad f^{(m_i-1)}(x_i) = f_i^{(m_i-1)},$$

其中 $i = 0,1,\cdots,n$ 是正整数，寻求一个次数尽可能低的多项式 $m_0, m_1, \cdots, m_n$，满足：

$H(x)$

$$H^{(k)}(x_i) = f_i^{(k)}, \quad k = 0,1,\cdots,m_i-1; \quad i = 0,1,\cdots,n$$

埃尔米特插值

算例 以如下数据构建埃尔米特插值

x	y	y'
x_0	y_0	y_0'
x_1	y_1	y_1'
x_2	y_2	y_2'
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_n	y_n	y_n'

埃尔米特插值

算例 以如下数据构建埃尔米特插值

x	y	y'
x_0	y_0	y'_0
x_1	y_1	y'_1
x_2	y_2	y'_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_n	y_n	y'_n

共有 $2n+2$个条件，可唯一确定一个次数不超过 $2n+1$ 的多项式 $H_{2n+1}(x)$，其形式为：

$$H_{2n+1}(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_{2n+1}x^{2n+1}$$

目标：求出所有的a_i，$(i=0,1,\cdots,n)$

方法：基函数法.

可如下构造: $H_{2n+1}(x)=\sum_{i=0}^{n} y_i \alpha_i(x)+\sum_{i=0}^{n} y_i' \beta_i(x)$

$\alpha_i(x), \beta_i(x)$ 均为 2 n+1 次插值基函数.

x	y	y'
x_0	y_0	y_0'
x_1	y_1	y_1'
x_2	y_2	y_2'
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_n	y_n	y_n'

- ✓ $\alpha_i(x_k)=\delta_{ik}, \quad \alpha_i'(x_k)=0$

  $\beta_i(x_k)=0, \quad \beta_i'(x_k)=\delta_{ik}$

- ✓ 这样 $H_{2n+1}(x)$ 可表示为:

$$H_{2n+1}(x)=\sum_{i=0}^{n}[y_i\,\alpha_i(x)+y_i'\,\beta_i(x)]$$

- ✓ 显然有:

$$H_{2n+1}(x_k)=y_k \qquad H_{2n+1}'(x_k)=y_k'$$

现在求 $\boldsymbol{\alpha}_i(x)$ 及 $\boldsymbol{\beta}_i(x)$，

令
$$\boldsymbol{\alpha}_i(x) = (ax+b)l_i^2(x)$$

其中
$$l_i(x) = \frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_0)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)}$$

从而有:

$$\boldsymbol{\alpha}_i(x_i) = (ax_i+b)l_i^2(x_i) = 1$$

由此得:
$$\boldsymbol{\alpha}_i'(x_i) = l_i'(x_i)[al_i(x_i) + 2(ax_i+b)l_i'(x_i)] = 0$$

故:

$$(ax_i+b) = 1 \qquad a + 2l_i'(x_i) = 1$$

$$a = -2l_i'(x_i)$$

$$b = 1 + 2x_i l_i'(x_i)$$

由 $l_i(x)$ 的表达式可得： $$l_i'(x_i)=\sum_{\substack{k=0\\k\neq i}}^{n}\frac{1}{x_i-x_k}$$

于是得到：

$$\boldsymbol{\alpha}_i(x)=\left(1-2(x-x_i)\sum_{\substack{k=0\\k\neq i}}^{n}\frac{1}{x_i-x_k}\right)l_i^2(x)$$

同理可得

$$\boldsymbol{\beta}_i(x)=(x-x_i)l_i^2(x)$$

算例：

已知 $\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$，$\sin\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}$，$\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

分别利用 $\sin x$ 的1次、2次 Lagrange 插值计算 $\sin 50°$

并估计误差。 精确值 $\sin 50° = 0.7660444\ldots$

解：

1. 利用x_0, x_1 计算

列表如下:

$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$

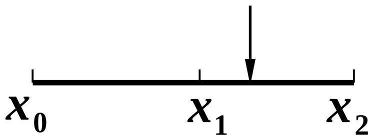
$$L_1(x)=\frac{x-\pi/4}{\pi/6-\pi/4}\times\frac{1}{2}+\frac{x-\pi/6}{\pi/4-\pi/6}\times\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\mathrm{Sin}(50^0)\approx L_1(x)=0.77614$$

$$R_1(x)=\frac{f^{(2)}(\xi_x)}{2!}(x-\frac{\pi}{6})(x-\frac{\pi}{4})$$

由 $\frac{1}{2}<\sin\xi_x<\frac{\sqrt{3}}{2}$，

$50^0=\frac{5\pi}{18}$



$$\Rightarrow\ -0.01319<R_1(\frac{5\pi}{18})<-0.00762$$

2. 利用x_0, x_1, x_2计算

$$L_2(x)=\frac{(x-\frac{\pi}{4})(x-\frac{\pi}{3})}{(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{4})(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{3})}\times\frac{1}{2}+\frac{(x-\frac{\pi}{6})(x-\frac{\pi}{3})}{(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6})(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3})}\times\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{(x-\frac{\pi}{6})(x-\frac{\pi}{4})}{(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6})(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4})}\times\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Sin}(50^0) \approx L_2(x) = 0.76543$$

$$R_2(x)=\frac{-\cos\xi_x}{3!}(x-\frac{\pi}{6})(x-\frac{\pi}{4})(x-\frac{\pi}{3}); \qquad \frac{1}{2}<\cos\xi_x<\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow \qquad 0.00044 < R_2\left(\frac{5\pi}{18}\right) < 0.00077$$

2次插值的实际误差≈ 0.00061

结论： 高次插值通常优于低次插值。

数学分析的开拓者

1. 变分法
2. 微分方程.
3. 方程论.
4. 数论.
5. 函数和无穷级数.

约瑟夫·路易斯·拉格朗日

（Joseph-Louis Lagrange ）

1735~1813

法国数学家、物理学家。他在数学、力学和天文学三个学科领域中都有历史性贡献，其中数学方面的成就最为突出。

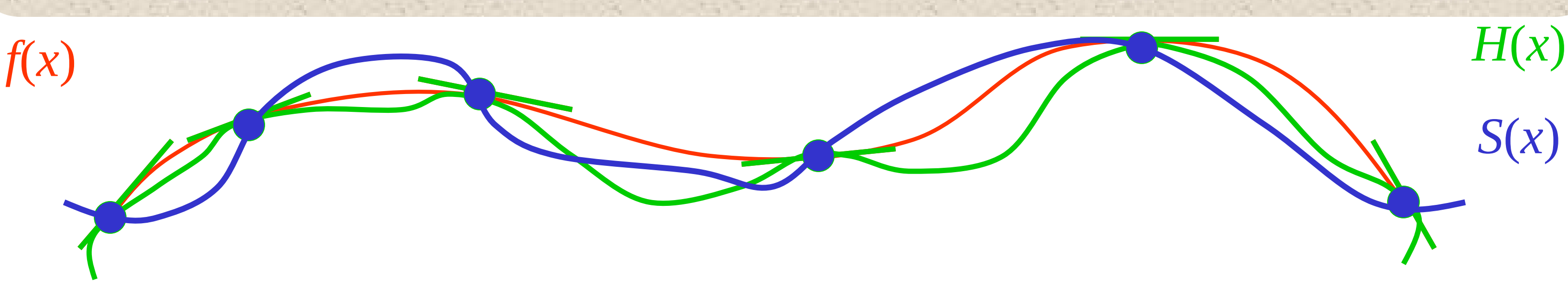
1788年出版的《分析力学》

“…我在其中阐明的方法，既不要求作图，也不要求几何的或力学的推理，而只是一些按照一致而正规的程序的代数(分析)运算．喜欢分析的人将高兴地看到，力学变成了它的一个新分支，并将感激我扩大了它的领域．”

§ 6 三次样条 /* Cubic Spline */

定义 设 $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$。三次样条函数 $S(x) \in C^2[a,b]$，且在每个 $[x_i, x_{i+1}]$ 上为三次多项式 /* cubic polynomial */。若它同时还满足 $S(x_i) = f(x_i),\ (i = 0, \dots, n)$，则称为 f 的三次样条插值函数 /* cubic spline interpolant */.

注：三次样条与分段 Hermite 插值的根本区别在于 $S(x)$ 自身光滑，不需要知道 f 的导数值（除了在2个端点可能需要）；而Hermite插值依赖于 f 在所有插值点的导数值。



➢ 构造三次样条插值函数的三弯矩法

/* method of bending moment */

在 $[x_{j-1}, x_j]$上，记 $h_j = x_j - x_{j-1}$， $S(x) = S^{[j]}(x)$ for $x \in [x_{j-1}, x_j]$

则 $S^{[j]}{}''(x)$ 为 1 次多项式，需 2 个点的值确定之。

设 $S^{[j]}{}''(x_{j-1}) = M_{j-1}$， $S^{[j]}{}''(x_j) = M_j$ 对于$x \in [x_{j-1}, x_j]$可得到

$$S^{[j]}{}''(x) = M_{j-1}\frac{x_j - x}{h_j} + M_j\frac{x - x_{j-1}}{h_j}$$

积分2次，可得 $S^{[j]}{}'(x)$ 和 $S^{[j]}(x)$：

$$S^{[j]}{}'(x) = -M_{j-1}\frac{(x_j - x)^2}{2h_j} + M_{j-1}\frac{(x - x_{j-1})^2}{2h_j} + A_j$$

$$S^{[j]}(x) = M_{j-1}\frac{(x_j - x)^3}{6h_j} + M_j\frac{(x - x_{j-1})^3}{6h_j} + A_j x + B_j$$

利用已知

$S^{[j]}(x_{j-1}) = y_{j-1}$

$S^{[j]}(x_j) = y_j$

可解

$$A_j = \frac{y_j - y_{j-1}}{h_j} - \frac{M_j - M_{j-1}}{6} h_j \qquad A_j x + B_j = (y_{j-1} - \frac{M_{j-1}}{6} h_j^2) \frac{x_j - x}{h_j} + (y_j - \frac{M_j}{6} h_j^2) \frac{x - x_{j-1}}{h_j}$$

下面解决 M_j： 利用S'在 x_j 的连续性

$$[x_{j-1}, x_j]: S^{[j]}{}'(x) = -M_{j-1}\frac{(x_j - x)^2}{2h_j} + M_j \frac{(x - x_{j-1})^2}{2h_j} + f[x_{j-1}, x_j] - \frac{M_j - M_{j-1}}{6} h_j$$

$$[x_j, x_{j+1}]: S^{[j+1]}{}'(x) = -M_j \frac{(x_{j+1} - x)^2}{2h_{j+1}} + M_{j+1} \frac{(x - x_j)^2}{2h_{j+1}} + f[x_j, x_{j+1}] - \frac{M_{j+1} - M_j}{6} h_{j+1}$$

利用$S^{[j]}{}'(x_j) = S^{[j+1]}{}'(x_j)$，合并关于$M_{j-1}$、$M_j$、$M_{j+1}$的同类项，并

记 $\lambda_j = \frac{h_{j+1}}{h_j + h_{j+1}}$，$\mu_j = 1 - \lambda_j$，$g_j = \frac{6}{h_j + h_{j+1}}(f[x_j, x_{j+1}] - f[x_{j-1}, x_j])$，整理

$6f[x_{j-1}, x_j, x_{j+1}]$

后得到： $\mu_j M_{j-1} + 2M_j + \lambda_j M_{j+1} = g_j$

$1 \le j \le n-1$

$$\begin{bmatrix} \mu_1 & 2 & \lambda_1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \mu_{n-1} & 2 & \lambda_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_0 \\ \vdots \\ M_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_{n-1} \end{bmatrix}$$

即：有$n+1$个未知数，$n-1$个方程。

还需2个边界条件 /* boundary conditions */

✍ 第1类边条件 /* clamped boundary */： $S'(a) = y_0'$， $S'(b) = y_n'$

$$[a\,,\ x_1]:\ S^{[1]}{}'(x) = -M_0\frac{(x_1-x)^2}{2h_1}+M_1\frac{(x-a)^2}{2h_1}+f[x_0,x_1]-\frac{M_1-M_0}{6}h_1$$

类似地利用$[\,x_{n-1},\ b\,]$上的 $S^{[n]}{}'(x)$ $\Rightarrow$

$$\begin{cases} 2M_0+M_1=\dfrac{6}{h_1}\left(f[x_0,x_1]-y_0'\right)=g_0 \\ M_{n-1}+2M_n=\dfrac{6}{h_n}\left(y_n'-f[x_{n-1},x_n]\right)=g_n \end{cases}$$

✍ 第2类边条件： $S''(a) = y_0'' = M_0$， $S''(b) = y_n'' = M_n$

这时：$\lambda_0 = 0$，$g_0 = 2y_0''$ ； $\mu_n = 0$，$g_n = 2y_n''$

特别地，$M_0 = M_n = 0$ 称为自由边界 /* free boundary */，对应的样条函数称为自然样条 /* Natural Spline */。

✍ 第3类边条件 /* periodic boundary */：

当 f 为周期函数时，

$y_n = y_0$， $S'(a^+) = S'(b^-)$

$\Rightarrow$ $M_0 = M_n$

$$\begin{bmatrix} 2 & \lambda_1 & & & \mu_1 \\ \mu_2 & 2 & \lambda_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \mu_{n-1} & 2 & \lambda_{n-1} \\ \lambda_n & & & \mu_n & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} M_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ M_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} g_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ g_n \end{bmatrix}$$

注： ☞ 另有三转角法得到样条函数，即设 $S^{[j]\prime}(x_j) = m_j$，则易知$[x_{j-1}, x_j]$上的$S^{[j]}(x)$ 就是Hermite函数。再利用S''的连续性，可导出关于m_j的方程组，加上边界条件即可解。

☞ Cubic Spline 由boundary conditions 唯一确定。

☞ 收敛性：若 $f \in C[a,b]$，且 $\dfrac{\max h_i}{\min h_i} \le C < \infty$ ，则

$$S(x) \xrightarrow{\text{一致}} f(x) \quad as \quad \max h_i \to 0$$

即:提高精度只须增加节点, 而无须提高样条阶数。

☞ 稳定性：只要边条件保证 $|\mu_0|, |\lambda_0|, |\mu_n|, |\lambda_n| < 2$，则方程组系数阵为SDD阵，保证数值稳定。

例. 已知数据表

x_i	1	2	4	5
y_i	1	3	4	2

求满足自然边界条件 $S''(1) = S''(5) = 0$ 的三次样条函数 $S(x)$,并计算 $f(3)$ 的近似值。

解: 作差商表

i	x_i	y_i	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$
0	1	1		
1	2	3	2	
2	4	4	0.5	-0.5
3	5	2	-2	-0.83333

由自然边界条件得，$M_0 = M_3 = 0$，故有

$$\begin{bmatrix} 2 & \lambda_1 \\ u_2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ -4.99998 \end{bmatrix}$$

其中

$$\lambda_1 = \frac{h_2}{h_1 + h_2} = \frac{2}{1+2} = 0.66666 \qquad u_2 = \frac{h_2}{h_2 + h_3} = \frac{2}{2+1} = 0.66666$$

解此方程组得

$$M_1 = -0.750001 \qquad M_2 = -0.249999$$

可以求得

$$S(x) = -0.750001 \times \frac{(4-x)^3}{12} - 2.249999 \times \frac{(x-2)^3}{12}$$
$$+3.500001 \times \frac{4-x}{2} + 5.499999 \times \frac{x-2}{2}$$

在上式中，令 $x = 3$,得

$$f(3) \approx S(3) = 4.25000$$

Sketch of the Algorithm: Cubic Spline

① 计算 μ_j，λ_j，g_j；

② 计算 M_j (追赶法等)；

③ 找到 x 所在区间 (即找到相应的 j)；

④ 由该区间上的 $S^{[j]}(x)$ 算出 $f(x)$ 的近似值。

插值法小结

- Lagrange : 给出 $y_0 \dots y_n$，选基函数 $l_i(x)$，其次数为节点数 -1。
- Newton $\equiv L_n(x)$，只是形式不同；节点等距或渐增节点时方便处理。
- Hermite： 带导数插值条件。
- Spline：分段低次, 自身光滑, f 的导数只在边界给出。

➢ 5.3 曲线拟合的最小二乘法

➢ 拟合问题的数学提法

通过观测、测量或试验得到某一函数在 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的函数值为 $y_1, y_2, \cdots, y_n$。

我们可以用插值的方法对这一函数进行近似。而插值方法要求所得到的

注意：插值多项式必须经过已知的这 n 个插值结点.

✓ 在 n 比较大的情况下，插值多项式往往是高次多项式，这也就容易出现振荡现象；

✓ 虽然在插值结点上没有误差，但在插值结点之外插值误差变得很大，从“整体”上看，插值逼近效果将变得“很差”。

于是，我们采用曲线拟合的方法。

因此，没必要取 $P(x_i)=y_i$，

而要使 $|P(x_i)-y_i|$ 总体上尽可能小。

- 常见做法：

（1） 使 $\max\limits_{1\le i\le m}|P(x_i)-y_i|$ 最小；

（2） 使 $\sum\limits_{i=1}^{m}|P(x_i)-y_i|$ 最小；

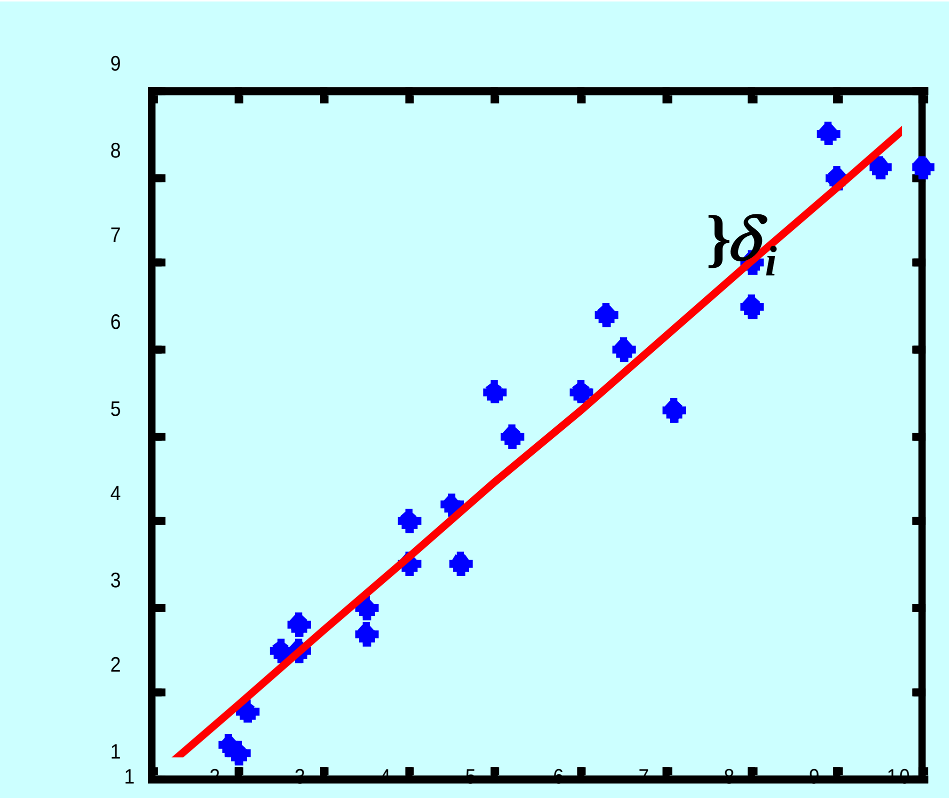
（3） 使 $\sum\limits_{i=1}^{m}(P(x_i)-y_i)^2$ 最小；

最小二乘法

1　直线拟合（一次函数）

$$\min F(a_0,a_1)=\sum_{i=1}^{n}\big((a_0+a_1x_i)-y_i\big)^2$$

即 求 a_0，a_1，使误差平方和取最小值.



$$y=f(x)=a_0+a_1x$$

注意:

直线应该与所有点靠得比较近

所有点应该尽量靠近直线

x_i 点误差：

$$(a_0+a_1x_i)-y_i$$

误差向量： $i=1,2,\ldots,n$

残差尽量小　$\boldsymbol{\delta}=[\delta_1,\ \delta_2,\cdots,\ \delta_i,\cdots,\ \delta_n]$

1 直线拟合（一次函数）

$$\min F(a_0,a_1)=\sum_{i=1}^{n}\left((a_0+a_1x_i)-y_i\right)^2$$

即 求 a_0，a_1，使误差平方和取最小值!

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial a_0}=2\sum_{i=1}^{n}\left((a_0+a_1x_i)-y_i\right)\cdot 1=0\\[2ex]\dfrac{\partial F}{\partial a_1}=2\sum_{i=1}^{n}\left((a_0+a_1x_i)-y_i\right)\cdot x_i=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}n\,a_0+\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)a_1=\sum_{i=1}^{n}y_i\\[2ex]\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)a_0+\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)a_1=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i\end{cases}$$

$$\begin{pmatrix}n & \sum_{i=1}^{n}x_i\\ \sum_{i=1}^{n}x_i & \sum_{i=1}^{n}x_i^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_0\\ a_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sum_{i=1}^{n}y_i\\ \sum_{i=1}^{n}x_iy_i\end{pmatrix}$$

解出 a_0 , a_1

$$\boxed{y=a_0+a_1x}$$

实例 某种纤维的强度 y 与其拉伸倍数 x 的关系如下表:

实验数据: 12个纤维样品

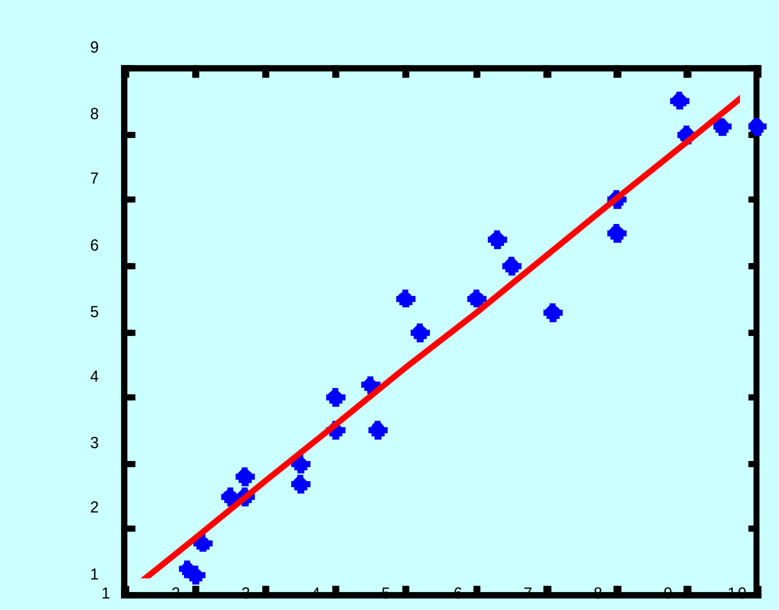
编 号	拉伸倍数 x_i	强 度 y_i	编 号	拉伸倍数 x_i	强 度 y_i
1	1.9	1.4	13	5	5.5
2	2	1.3	14	5.2	5
3	2.1	1.8	15	6	5.5
4	2.5	2.5	16	6.3	6.4
5	2.7	2.8	17	6.5	6
6	2.7	2.5	18	7.1	5.3
7	3.5	3	19	8	6.5
8	3.5	2.7	20	8	7
9	4	4	21	8.9	8.5
10	4	3.5	22	9	8
11	4.5	4.2	23	9.5	8.1
12	4.6	3.5	24	10	8.1

解:

$$\begin{pmatrix} 24 & 127.5 \\ 127.5 & 829.61 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 113.1 \\ 731.6 \end{pmatrix}$$

$$a_0 = 0.1505, \qquad a_1 = 0.8587$$

$\underbrace{y = 0.1505 + 0.8587\,x}$ 即为最小二乘解



其中平方误差为:

$$\|\delta\|_2^2 = 5.6615$$

多项式拟合的最小二乘法

$\boxed{m \text{ 次多项式}}$

已知: $(x_i, y_i), \quad i = 1, 2, \cdots, n$

求: $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_m x^m = \sum_{j=0}^{m} a_j x^j$

使 $\|\boldsymbol{\delta}\|_2^2 = \sum_{i=1}^{n} \delta_i^2$ 取极小。

分析:

即 $$\min \ F(a_0, a_1, \ldots, a_m) = \sum_{i=1}^{n} \Big(\underbrace{(\sum_{j=0}^{m} a_j x_i^j) - y_i}_{\delta_i} \Big)^2$$

类似地 ⇨ $m+1$ 元函数求极值

$$\frac{\partial F}{\partial a_k} = \sum_{i=1}^{n} 2\left(\sum_{j=0}^{m} a_j x_i^j - y_i \right) \cdot x^k = 0 \qquad k = 0,\ 1,\ \ldots ,\ m$$

得 $$\sum_{j=0}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{k+j}\right) a_j = \sum_{i=1}^{n} y_i x_i^k, \quad k = 0,1,\cdots,m$$

法方程组

即 $$\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} 1 & \sum_{i=1}^{n} x_i & \cdots & \sum_{i=1}^{n} x_i^m \\ \sum_{i=0}^{n} x_i & \sum_{i=0}^{n} x_i^2 & \cdots & \sum_{i=1}^{n} x_i^{m+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sum_{i=1}^{n} x_i^m & \sum_{i=1}^{n} x_i^{m+1} & \cdots & \sum_{i=1}^{n} x_i^{2m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} y_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{n} x_i^m y_i \end{pmatrix}$$

解出 $a_0, a_1, \ldots, a_m$ 得:

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_m x^m$$

算例

用最小二乘法求一个形如 $y=a+bx^2$的经验公式，

使与下列数据相拟合:

x	19	25	31	38	44
y	19.0	32.3	49.0	73.3	97.8

解：

$$\begin{pmatrix} 5 & \sum_{i=1}^{5} x_i^2 \\ \sum_{i=1}^{5} x_i^2 & \sum_{i=1}^{5} x_i^4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{5} y_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i^2 y_i \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 5327 \\ 5327 & 7277699 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 271.4 \\ 369321.5 \end{pmatrix}$$

得:

$$a = 0.972577$$

$$b = 0.050035$$

y=0.972577+0.050035x^2

思考题

已知 (x_i, y_i)，$i = 1, 2, \ldots, m$，如下表

x	x_1	x_2	$\cdots$	x_m
y	y_1	y_2	$\cdots$	y_m

如何构造拟合曲线?

$$P(x) = \frac{x}{ax+b}$$