§ 2.2 Jordan标准形

一、Jordan矩阵

定义：称形如 $J(\lambda)=\begin{bmatrix}\lambda & 1 & & \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda\end{bmatrix}_{r\times r}$

的$r(r\geq 1)$阶方阵为一个r阶Jordan块.

注：确定一个Jordan块只需确定：1. 特征值 λ; 2. 阶数 r.

例如： $[2]$ $\begin{bmatrix}2 & 1\\ 0 & 2\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$

§ 2.2 Jordan标准形

一、Jordan矩阵

定义：称形如 $J(\lambda)=\begin{bmatrix}\lambda & 1 & & \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda\end{bmatrix}_{r\times r}$

的$r(r\geq 1)$阶方阵为一个r阶Jordan块.

注：确定一个Jordan块只需确定：1. 特征值 λ; 2. 阶数 r.

例如：$\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 2\end{bmatrix}$ ✗ $\begin{bmatrix}4 & 1 & 0\\ 0 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{bmatrix}$ ✗

§ 2.2 Jordan标准形

一、Jordan矩阵

由若干个Jordan块$J_i(\lambda_i)$构成的准对角形矩阵

$$J_A = \begin{bmatrix} J_1(\lambda_1) & & & \\ & J_2(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_s(\lambda_s) \end{bmatrix}$$

称为**Jordan矩阵**.

§ 2.2 Jordan标准形

一、Jordan矩阵

例如,

$$J_A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} J_1(5) & & \\ & J_2(2) & \\ & & J_3(2) \end{pmatrix}$$

是一个 5 阶 Jordan 矩阵.

Jordan矩阵特点

1. 是准对角矩阵;
2. 是上三角矩阵;
3. 对角线元素即为其特征值, 次对角线元素为1或0;
4. 对角矩阵也是Jordan矩阵.

§ 2.2 Jordan标准形

一、Jordan矩阵

定理：在复数域上, 任何 n 阶方阵 A 都相似于一个 Jordan矩阵 J_A, 即存在可逆矩阵 P, 使得

$$P^{-1}AP = J_A = \begin{bmatrix} J_1(\lambda_1) & & & \\ & J_2(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_s(\lambda_s) \end{bmatrix},$$

其中, 每个 $J_i(\lambda_i)$ 是一个 n_i 阶以 λ_i 为特征值的 **Jordan矩阵, 满足 $\sum_{i=1}^{s} n_i = n$. 若不计较 Jordan 矩阵中Jordan 块的排列次序, 方阵 A 的 Jordan 标准型** J_A **是唯一的.**

§2.2 Jordan标准形

二、Jordan标准形的求法

给定 n 阶方阵 A, 下面分析它的Jordan标准型 J_A 和对应的可逆矩阵 P 的结构, 使得 $P^{-1}AP = J_A$.

首先, J_A 和 A 有相同的特征值. 故设 A 的特征多项式为

$$f(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{k_1}(\lambda - \lambda_2)^{k_2} \cdots (\lambda - \lambda_s)^{k_s},$$

其中, λ_i 为互异特征值, 重数为 k_i, $\sum k_i = n$. 则 J_A 有形式

$$J_A = \begin{bmatrix} J_1(\lambda_1) & & & \\ & J_2(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_s(\lambda_s) \end{bmatrix},$$

其中, $J_i(\lambda_i)$ 为 k_i 阶 **Jordan** 矩阵.

§2.2 Jordan标准形

二、Jordan标准型的求法

给定 n 阶方阵 A, 下面分析它的Jordan标准型 J_A 和对应的可逆矩阵 P 的结构, 使得 $P^{-1}AP = J_A$.

将 P 按 J_A 的结构分块, $P = (P_1, P_2, \cdots, P_s)$, 即 P_i 分别为 $n \times k_i$ 阶矩阵, 于是 $AP = PJ_A$ 有分块矩阵表示

$$A(P_1, P_2, \cdots, P_s) = (P_1, P_2, \cdots, P_s)\begin{bmatrix} J_1(\lambda_1) & & & \\ & J_2(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_s(\lambda_s) \end{bmatrix},$$

因此, $\boldsymbol{AP_i = P_i J_i(\lambda_i)}$, $i = 1,2,\cdots,s$.
下面分析每个 **Jordan** 矩阵 $J_i(\lambda_i)$ 中 **Jordan** 块的结构及其对应的 P_i.

二、Jordan标准型的求法

给定 n 阶方阵 A, 下面分析它的Jordan标准型 J_A 和对应的可逆矩阵 P 的结构, 使得 $P^{-1}AP = J_A$.

不妨考虑第一个, $AP_1 = P_1 J_1(\lambda_1)$. $J_1(\lambda_1)$的结构形式为

$$J_1(\lambda_1) = \begin{bmatrix} J_{11}(\lambda_1) & & & \\ & J_{12}(\lambda_1) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{1t}(\lambda_1) \end{bmatrix},$$

其中, $J_{1i}(\lambda_1)$为Jordan块, 阶数n_i和为k_1,且Jordan块的个数t取决于矩阵A关于λ_1的线性无关的特征向量的个数:

$$t = \dim V_{\lambda_1}.$$

下面仍需确认每个 Jordan 块 $J_{1i}(\lambda_1)$ 的阶数 n_i 和 P_1.

将 P_1 按 $J_1(\lambda_1)$的分块方式分块: $P_1 = \left(P_1^{(1)}, P_1^{(2)}, \cdots, P_1^{(t)}\right)$.

§ 2.2 Jordan标准形

二、Jordan标准型的求法

给定 n 阶方阵 A, 下面分析它的Jordan标准型 J_A 和对应的可逆矩阵 P 的结构, 使得 $P^{-1}AP=J_A$.

不妨考虑第一个，$AP_1^{(1)}=P_1^{(1)}J_{11}(\lambda_1)$. $J_{11}(\lambda_1)$的结构形式为

$$J_{11}(\lambda_1)=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 1 & & \\ & \lambda_1 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_1\end{bmatrix}_{n_1\times n_1}.$$

设$P_1^{(1)}=(\alpha_1,\beta_2,\beta_3,\cdots,\beta_{n_1})$，此即

$$A(\alpha_1,\beta_2,\beta_3,\cdots,\beta_{n_1})=(\alpha_1,\beta_2,\beta_3,\cdots,\beta_{n_1})\begin{bmatrix}\lambda_1 & 1 & & \\ & \lambda_1 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_1\end{bmatrix}_{n_1\times n_1}.$$

§ 2.2 Jordan标准形

二、Jordan标准型的求法

给定 n 阶方阵 A, 下面分析它的Jordan标准型 J_A 和对应的可逆矩阵 P 的结构, 使得 $P^{-1}AP=J_A$.

$$A(\alpha_1,\beta_2,\beta_3,\cdots,\beta_{n_1})=(\alpha_1,\beta_2,\beta_3,\cdots,\beta_{n_1})\begin{bmatrix}\lambda_1 & 1 & & \\ & \lambda_1 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_1\end{bmatrix}_{n_1\times n_1}$$

$$\Updownarrow$$

$$\textbf{(1)}\quad\begin{cases}(A-\lambda_1 I)\alpha_1=0,\\ (A-\lambda_1 I)\beta_2=\alpha_1,\\ (A-\lambda_1 I)\beta_3=\beta_2,\\ \quad\vdots\\ (A-\lambda_1 I)\beta_{n_1}=\beta_{n_1-1}.\end{cases}$$

Jordan链

α_1 为特征向量,
β_i 为广义特征向量.

§2.2 Jordan标准形

二、Jordan标准型的求法

给定n阶方阵A，求其Jordan标准型J_A和可逆矩阵P，使得

$$P^{-1}AP = J_A.$$

第一步：

求A的特征多项式$f(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{k_1}(\lambda - \lambda_2)^{k_2}\cdots(\lambda - \lambda_s)^{k_s}$，

其中，λ_i为互异特征值，其代数重数k_i决定了λ_i对应的Jordan矩阵$J_i(\lambda_i)$的阶数为k_i；

第二步：

对每个λ_i，求出相应的线性无关的特征向量$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{t_i}$.

该λ_i的几何重数$\dim V_{\lambda_i} = t_i$决定了$J_i(\lambda_i)$中有t_i个Jordan块；

二、Jordan标准型的求法

给定n阶方阵A, 求其Jordan标准型J_A和可逆矩阵P, 使得
$$P^{-1}AP = J_A.$$

第三步：

若 $t_i = k_i$, 则 Jordan 矩阵 $J_i(\lambda_i)$ 为对角阵;

若$\dim V_{\lambda_i} = t_i < k_i$, 则在$V_{\lambda_i}$中选择适当的线性无关特征向量$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{t_i}$, 并依次对每个$\alpha_j$由(1)式求 Jordan 链 $\left\{\alpha_j, \beta_2, \beta_3, \cdots, \beta_{n_j}\right\}$, 链条长度即为Jordan块$J_{ij}(\lambda_i)$的阶数, 该 Jordan 块即可确定;

第四步：

所有 Jordan 链按列排成矩阵 P, 必有 $P^{-1}AP = J_A$.

二、Jordan标准型的求法

例如 求 $A=\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ 的Jordan标准型及该可逆矩阵 P.

解 $|\lambda I-A|=(\lambda-1)^3$, 又解 $(A-I)X=0$ 得基础解系

$$\alpha_1=(1,1,0)^T, \qquad \alpha_2=(1,0,1)^T.$$

即 $\dim V_{\lambda=1}=2$, 故Jordan标准型包含两个Jordan块:

$$J_A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

下面求可逆矩阵 P.

§ 2.2 Jordan标准形

二、Jordan标准型的求法

例如 求 $A=\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ 的Jordan标准型及该可逆矩阵 P.

解 取 $\alpha_1=(1,1,0)^T$, 解 $(A-I)\beta=\alpha_1$,其增广矩阵

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \beta \text{ 无解.}$$

取 $\alpha_2=(1,0,1)^T$, 解 $(A-I)\beta=\alpha_2$,其增广矩阵

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \beta \text{ 亦无解!}$$

α_1,α_2均不能产生所需的 Jordan 链!

二、Jordan标准型的求法

例如 求 $A=\begin{bmatrix}2 & -1 & -1\\ 2 & -1 & -2\\ -1 & 1 & 2\end{bmatrix}$ 的Jordan标准型及该可逆矩阵 P.

解 (待定系数法) 令 $\alpha=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2$, 解 $(A-I)\beta=\alpha$.

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & -1 & k_1+k_2\\ 2 & -2 & -2 & k_1\\ -1 & 1 & 1 & k_2\end{array}\right)\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & -1 & k_1+k_2\\ 0 & 0 & 0 & k_1+2k_2\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

故可取 $k_1=2, k_2=-1$, 即取 $\alpha=(1,2,-1)^T$, 解得

$\beta=(1,0,0)^T$. 任意非零解 β 均可

令 $P=(\alpha_1,\alpha,\beta)=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 0\\ 0 & -1 & 0\end{bmatrix}$, 即有 $P^{-1}AP=J_A$. ■

例如 将矩阵A化为Jordan矩阵。

$$A=\begin{bmatrix}3 & 4 & 0 & 0\\ -1 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & -1 & 0\end{bmatrix} \qquad J_A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \quad or \quad \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

解 1. $|\lambda I-A|=(\lambda-1)^4=0$, 得四重根 $\lambda=1$.

2. 解方程 $(I-A)X=0$, 得通解

$$X=l_1(-2,1,0,0)^T+l_2(0,0,-1,1)^T.$$

知有两个Jordan块！ $\Leftarrow t=4-r(I-A)=2$

$\alpha_1=(-2,1,0,0)^T\Rightarrow\beta_1=(-1,0,0,0)^T$; (可推知$J_A$)！

$\alpha_2=(0,0,-1,1)^T\Rightarrow\beta_2=(0,0,-1,0)^T,\Rightarrow P=(\alpha_1,\beta_1,\alpha_2,\beta_2).$

§ 2.2 Jordan标准形

二、Jordan标准型的求法

例如 求 $A=\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ 的Jordan标准型及该可逆矩阵 P.

思考

若线性空间 $V^3(F)$上的线性变换T在基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$下的矩阵为 A，如何求空间的一组基 ξ_1,ξ_2,ξ_3，使得 T 在此基下矩阵为Jordan矩阵?

Tips $T(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)A$

$$=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)PJ_AP^{-1};$$

$$T(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)PJ_A.$$

$$(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)P.$$

二、Jordan标准型的求法

例如　证明对任意方阵 $A \in C^{n\times n}$，A 相似于 A^T.

Tips　$P^{-1}AP = J_A$,　　$P^TA^T(P^T)^{-1} = J_A^T$.

从而 $A \sim A^T \Leftrightarrow J_A \sim J_A^T$.

因此, 只需证明每个 Jordan 块 $J_i(\lambda_i) \sim J_i(\lambda_i)^T$:

取逆(反)向单位矩阵 $S = \begin{bmatrix} & & & 1 \\ & & 1 & \\ & \iddots & & \\ 1 & & & \end{bmatrix}$, 即有

$S^{-1} = S$, $S^{-1}J_i(\lambda_i)S = J_i(\lambda)^T$. ■