一、　　填空题（每题 2 分，选做 10 题）

1. 设V_1, V_2是线性空间V的两个子空间，维数分别为n_1和n_2。若 $\dim(V_1 \cap V_2) = m$, 则$\dim(V_1 + V_2) =$ ________________。

2. 取$P_2(t)$的一组基向量$\{1, t, (3t^2-1)/2\}$，则 $2t^2 - t + 1$ 在这组基下的坐标为 ______________。

3. 矩阵A的某个特征值λ_i的代数重数为n_i, 几何重数为m_i, 则A的 Jordan 标准型中λ_i对应的子 Jordan 阵的 Jordan 块个数为____________________。

4. 若矩阵A的特征多项式为$(t-1)^2(t-2)^3$，最小多项式为$(t-1)(t-2)^2$，则该矩阵的 Jordan 标准型为 ____________________。

5. 已知$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, 则$\|A\|_2 =$ ______, $cond(A)_2$=______；

6. 给定 3 个互不相同的节点x_0, x_1, x_2, 所得到的 Lagrange 基函数为$l_0(x)$, $l_1(x)$, $l_2(x)$, 化简$\sum_{i=0}^{2}(x_i^2 - 2x_i + 3)l_i(0) =$ ____。

7. 设$\{\phi_i(x)\}_{i=0}^{\infty}$是区间$[0, 1]$上权函数$\rho(x) = x$的正交多项式族，且$\phi_i(x)$为最高项系数为 1 的$i$次多项式，则$\phi_2(x) =$ ________________________。

8. $\sin x$在$[0, \frac{\pi}{2}]$上的一次最佳平方逼近多项式为________________。

9. 用显示欧拉法求解$y' = -20y$, $y(0) = y_0$, 问步长取$h = 0.2$ 是否稳定_______________________。

10. 求解方程$\ln x - \cos x = 0$ 的牛顿迭代格式为 ___________________，若收敛则其收敛速度为 阶。

11. 设有方程组 $A_{m\times n}x = b$，其中 $r(A) = r = r(A|b) < n$，给出具某种意义的解________________________________。

12. 给出衡量函数逼近效果的某两个标准 ____。

13. 统计学发展史上的三大事件是指____，
____。

14. 设$(X_1, \ldots X_n)$, $(Y_1, \ldots, Y_m)$, $\overline{X}, \overline{Y}, S_X^2, S_Y^2$分别为两个独立正态总体$X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$, $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$的样本，

样本均值，样本方差。要求利用$\overline{X},\overline{Y},S_X^2,S_Y^2$的全部信息构造的统计量的一个可能统计分布为____________________。

15. 贝叶斯统计推断的一个基本特征是____。

16. 指出矩阵论、数值计算方法、数理统计中具异曲同工之效的各自某一问题，并给出体现这三个问题共同理念的某一古代传说或诗词典故____，

____。

二、 解答题（每题 10 分，选做 8 题）

1. （两小题任选一题）

(1) 设$A=\begin{pmatrix}1&-2&0&0\\0&1&0&0\\2&0&1&-2\\0&2&0&1\end{pmatrix}$，求可逆矩阵$P$和 Jordan 标准型$J$使得$A=PJP^{-1}$。

(2) 在$\mathbb{R}^{2\times2}$中，设$P=\begin{pmatrix}1&0\\2&1\end{pmatrix}$, 定义线性变换$T:TX=PXP^{-1},X\in\mathbb{R}^{2\times2}$。求$T$的特征值和对应的特征向量。

2. 设$A_1=\begin{pmatrix}1&-1&2\\2&1&-1\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}$, $A_2=\begin{pmatrix}-1&2&0\\1&-1&1\\1&0&1\\1&1&7\end{pmatrix}$, 又设$V_1=\{y\in\mathbb{R}^4:y=A_1x,\forall x\in\mathbb{R}^3\}$, $V_2=\{y\in\mathbb{R}^4:y=A_2x,\forall x\in\mathbb{R}^3\}$, 求$V_1+V_2$的一组基。

3. 已知$y=f(x)$的数据如下：

x_i	1	2	3
$f(x_i)$	2	4	12
$f'(x_i)$		3	

(1) （6 分）求$f(x)$的 Hermite 插值多项式$H_3(x)$;

(2) （4 分）分别用 Simpson 公式和$H_3(x)$的积分计算$\int_1^3 f(x)dx$的数值;

4. 已知$f(x)=x\sin((x-1)^2\pi)$，用三点 **Gauss 求积**公式计算$\int_0^2 f(x)dx$。

5. 已知数据

x_i	-2	-1	0	1	2
y_i	0	1	2	1	0

求形如$f(x)=a_0+a_1\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)+a_2\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)$的函数的最小二乘拟合。

6. 设$A=\begin{pmatrix}3 & 1 & -1\\ 0 & 2 & -1\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}, b=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ -1\end{pmatrix}$，考虑线性方程$Ax=b$的求解。

(1) （4 分）分别写出 Jacobi 和 Gauss- Seidel 方法的迭代格式；

(2) （3 分）证明 Jacobi 方法迭代格式收敛；

(3) （3 分）Gauss- Seidel 方法的迭代格式是否收敛？为什么？

7. 对于下面求解常微分方程初值问题$y'(x)=f(x,y), y(0)=y_0$, 用如下格式求解：

a. $K_1=f(x_n,y_n)$;

b. $K_2=f(x_n+\frac{h}{2},y_n+\frac{h}{2}K_1)$;

c. $y_{n+1}=y_n+hK_2$.

(1) （5 分）若$f(x,y)=\lambda y$, 则该方法是否收敛？

(2) （5 分）该格式的精度是几阶？

8. 设$f(x)=x-\cos x$. 试构造迭代格式$x_{k+1}=\phi(x_k)$使得该迭代法收敛到$f(x)=0$ 的一个解。初始值x_0如何选取，才能保证该迭代格式收敛？

9. （两小题任选一题）

(1) 求解初值问题：$\frac{dX(t)}{dt}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}X(t)+X(t)\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 2\end{pmatrix}$，$X(0)=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$;

(2) 求解初值问题：$\frac{dX(t)}{dt}=AX(t)+b(t), X(0)=\begin{pmatrix}0\\ 1\\ -1\end{pmatrix}$, 其中$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 0\\ -1 & 1 & 3\end{pmatrix}, b(t)=\begin{pmatrix}e^{2t}\\ 2e^{2t}\\ -e^{2t}\end{pmatrix}$。

10. 设$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 3 & 4\\ 0 & 1 & 2 & 3\end{pmatrix}, b=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 1\end{pmatrix}$, 求$Ax=b$的极小范数解。

11. $\int_{-2h}^{2h}f(x)dx\approx A_{-1}f(-h)+A_0f(0)+A_1f(h)$, 确定$A_{-1},A_0,A_1$使其代数精度尽量高。

12. 设$(X_1,...,X_n)$为总体X的样本，X的密度函数为$f(x)=\begin{cases}\frac{2x}{\theta^2}, & 0\le x\le\theta\\ 0, & 其他\end{cases}$, 求$\theta$的矩估计$\hat{\theta}_M$及其极大似然估计$\hat{\theta}_L$。问$\hat{\theta}_M$是否为无偏估计。

13. 100 人服药病愈 60，100 人不服药病愈 50。问此药物是否有效（$\alpha=0.05$）。（$\chi^2_{0.95}(1)=3.841$, $\chi^2_{0.05}(1)=0.004$, $\chi^2_{0.975}(2)=7.378$）

14. 给出双因方差分析表，并给出相关算法。

15. 解答：

(1) （3 分）用三种方法求过$(x_1,y_1),(x_2,y_2)$的直线方程。

(2) （7 分）电容器充电，设时间X, 电压V如下表

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
V	100	75	55	40	30	20	15	10	10	5	3

求 V 关于 X 的回归方程。