华中科技大学研究生课程考试试卷

课程名称：<u>应用高等工程数学</u>　课程类别 ☑公共课 □专业课　考核形式 ☑开卷 □闭卷

学生类别：________考试时间：<u>2020</u>年<u>12</u>月<u>2</u>日________

学号：____________ 姓名：____________院系：____________

一、填空（每小题 3 分，共 24 分）

1、 向量 $(2,3,4)^{\mathrm{T}}$ 在给定的一组基 $\alpha_1=(0,0,1)^{\mathrm{T}}$，$\alpha_2=(1,1,0)^{\mathrm{T}}$，$\alpha_3=(1,0,0)^{\mathrm{T}}$ 下的坐标为 ________。

2、 设$\{a_1,a_2,a_3\}$是V^3的一个基，V^3上的线性变换T将a_1,a_2,a_3分别映为

$a_1+2a_2+a_3$，$-a_3$，$2a_1-a_2$，则T在这个基下的矩阵是$B=$________。

3、已知方阵A的特征多项式为$f(\lambda)=(\lambda-1)^2(\lambda-2)^4$，最小多项式为$m(\lambda)=(\lambda-1)(\lambda-2)^2$，则$A$所有可能的 Jordan 标准型为__________。（Jordan 块的排列顺序不同视为同一种 Jordan 标准型）

4、 在计算积分$I_n=\int_0^1\frac{x^n}{x+5}\mathrm{d}x$时，有两种递推算法：（A）$I_n=\frac{1}{n}-5I_{n-1}$；（B）$I_{n-1}=\frac{1}{5}(\frac{1}{n}-I_n)$，其中算法（ ）是稳定的。

5、 若插值型求积公式 $I=\int_{-1}^{2}f(x)\,dx\approx A_1f(x_1)+A_2f(0)$ 有 2 次代数精度，节点$x_1=$______。

6、 对于初值问题 $\begin{cases}y'(x)=f(x,y)\\ y(0)=y_0\end{cases}$，

算法 $\tilde{y}_{n+1}=y_n+hf(x_n,y_n),\ y_{n+1}=y_n+h[\frac{1}{3}f(x_n,y_n)+\frac{2}{3}f(x_{n+1},\tilde{y}_{n+1})]$

为显式还是隐式公式____？单步法还是多步法____？整体截断误差为_____阶。

7、已知 $x=\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}$，$A=\begin{pmatrix}1&-2&3\\-5&0&-2\\1&4&1\end{pmatrix}$，则 $\|x\|_1=$ ____，$\|A\|_1=$ ____，$\|Ax\|_1$ ____ $\|A\|_1\cdot\|x\|_1$（填≤或≥）。

8、使用迭代公式 $x_{k+1}=e^{-2x_k}+\frac{1}{2}$ 求解方程 $e^{-2x}-x+\frac{1}{2}=0$，对任意初值 $x_0\in[1/2,\ 1]$，以上迭代公式是否收敛_____。（其中 $e\approx 2.71828\cdots$）

二、（8 分）已知 $A=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$，求 $g(A)=A^5-4A^4+4A^3+A-I$。

三、（10 分）设 $A=\begin{pmatrix}1&1&2\\0&2&1\\0&1&2\end{pmatrix}$，求可逆矩阵 P 和 Jordan 矩阵 J，使 $P^{-1}AP=J$。

四、（10 分）已知函数 $f(x)$ 满足 $f(0)=4, f(2)=0, f'(0)=4, f'(2)=0$，试求 $f(x)$ 的三次插值多项式 $H_3(x)$ 并算出 $f(1)$ 的近似值 $H_3(1)$。

五、（8 分）给定一组数据 $x_1=0, x_2=1, x_3=2; y_1=1, y_2=2, y_3=4$，并定义内积 $(f,g)=\sum_{i=1}^{3}f(x_i)g(x_i)$，定义 $\varphi_0(x)=1, \varphi_1(x)=x$。

（1）求 $(\varphi_0,\varphi_0),(\varphi_0,\varphi_1),(\varphi_1,\varphi_1)$；

（2）用一次多项式对这组数据进行最小二乘拟合（即求一次多项式 φ 使 $\sum_{i=1}^{3}(\varphi(x_i)-y_i)^2$ 最小）。

六、（10 分）

（1）写出首项系数为一的 2 次勒让德多项式；

（2）使用两点的高斯-勒让德求积公式计算$\int_0^1 (x-\frac{1}{2})^4\, dx$；

（3）直接积分计算$\int_0^1 (x-\frac{1}{2})^4\, dx$，比较与上述结果是否相同，并解释其原因。

七、（10 分）对于初值问题 $\begin{cases} y'(x) = -20y \\ y(0) = y_0 \end{cases}$

（1）使用格式 $y_{n+1} = y_n + h[\frac{1}{2}f(x_n, y_n) + \frac{1}{2}f(x_{n+1}, y_n + hf(x_n, y_n))]$ 进行计算，假设 $y_0 = 1, h = 0.05$，求出 y_4；

（2）如果要使上述格式稳定，求步长h的取值范围。

八、（10 分）对于线性方程组 $\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 = 2 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 = 2 \\ x_2 + 4x_3 = 4 \end{cases}$

（1）使用一种矩阵分解的方法求解方程组；

（2）写出此方程组对应的 Jacobi 迭代格式和 Gauss-Seidel 迭代格式；

（3）使用 Jacobi 迭代格式时是否收敛，说明原因。

九、（10 分）对于非线性方程 $x^5 - 5x^4 + 9x^3 - 7x^2 + 2x = 0$,

（1）写出牛顿法的迭代公式；

（2）说明牛顿法在根$x^* =1$ 附近线性收敛；

（3）对以上的牛顿法进行改进，使改进后的迭代法在根$x^* =1$ 附近至少平方收敛。