§3 矩阵分析及其应用

一、向量范数和矩阵范数

二、矩阵序列与矩阵级数

三、方阵函数及其计算

§ 3.1 向量范数(Vector Norm)

一、向量范数的概念

考虑数域 F 上的线性空间$V(F)$.

定义 若$V(F)$ 上的实值映射 $\|\cdot\|: \alpha \mapsto \|\alpha\|$ 满足

1. 正定性: $\|\alpha\| \geq 0$ 且 $\|\alpha\| = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$;
2. 齐次性: $\|k\alpha\| = |k| \|\alpha\|, \quad \forall k \in F, \quad \alpha \in V$;
3. 三角不等式: $\|\alpha \pm \beta\| \leq \|\alpha\| + \|\beta\|$,

则称 $\|\cdot\|$ 为$V(F)$ 的一个范数,
称 $(V(F); \|\cdot\|)$ 为赋范线性空间 (Normed Space).

注 内积空间$\left(V^n(F); (\cdot,\cdot)\right)$ 都可定义范数

$$\|\alpha\| = \sqrt{(\alpha, \alpha)}, \qquad \forall \alpha \in V^n(F),$$

称为由该内积诱导的范数或与内积$(\cdot,\cdot)$相容的范数.

§ 3.1 向量范数(Vector Norm)

一、向量范数的概念

例 C^n 上的 p-范数

对任意 $p \in (0,\infty)$，C^n 上的 p-范数定义为

$$\| X \|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \qquad \forall X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in C^n.$$

Examples

$$\| X \|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| ; \qquad \| X \|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{(X,X)} ;$$

$$\| X \|_\infty = \max_{i=1,2,\cdots,n} |x_i| .$$

§ 3.1 向量范数(Vector Norm)

例 计算向量 $X=(1 \quad -2 \quad 3)^T$ 的各种范数

解:

$$\|X\|_1 = |1| + |-2| + |3| = 6$$

$$\|X\|_\infty = \max(|1|, |-2|, |3|) = 3$$

$$\|X\|_2 = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 3^2} = \sqrt{14}$$

$$\|X\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|;\ \|X\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}};\ \|X\|_\infty = \max_{i=1,2,\cdots,n} |x_i|$$

§ 3.1 向量范数(Vector Norm)

例 设$x \in R^n$(或$x \in C^n$)，则$\|x\|_1, \|x\|_2, \|x\|_\infty$是$R^n$上(或$C^n$上)的向量范数。

Cauchy不等式：$(\sum_{i=1}^n x_i y_i)^2 \le \sum_{i=1}^n x_i^2 \sum_{i=1}^n y_i^2$

证明： 只验证三角不等式，以“2”范数为例.

即对 $\forall x, y \in R^n$, 有$||x+y||_2 \le ||x||_2 + ||y||_2$.

事实上，$||x+y||_2^2 = (x+y, x+y) = (x,x) + (y,y) + 2(x,y)$

由柯西不等式 $|(x,y)| \le ||x||_2 \cdot ||y||_2$,则

$$||x+y||_2^2 \le ||x||_2^2 + 2||x||_2||y||_2 + ||y||_2^2 = (||x||_2 + ||y||_2)^2$$

$$\Rightarrow ||x+y||_2 \le ||x||_2 + ||y||_2. \blacksquare$$

注： 证“1”范数时，用 $\sum_{i=1}^n |x_i + y_i| \le \sum_{i=1}^n |x_i| + \sum_{i=1}^n |y_i|$.

§ 3.1 向量范数(Vector Norm)

一、向量范数的概念

例 向量的坐标范数

设 $V^n(F) = Span\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}, \forall\alpha \in V^n(F)$,

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)X, \qquad X \in F^n.$$

则可通过坐标空间 F^n 上的范数定义 $V^n(F)$上的范数:

$$\| \alpha \| \triangleq \| X \|_{F^n}.$$

Example

$$\| \alpha \| \triangleq \| X \|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|, \qquad \forall\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)X.$$

§ 3.1 向量范数(Vector Norm)

一、向量范数的概念

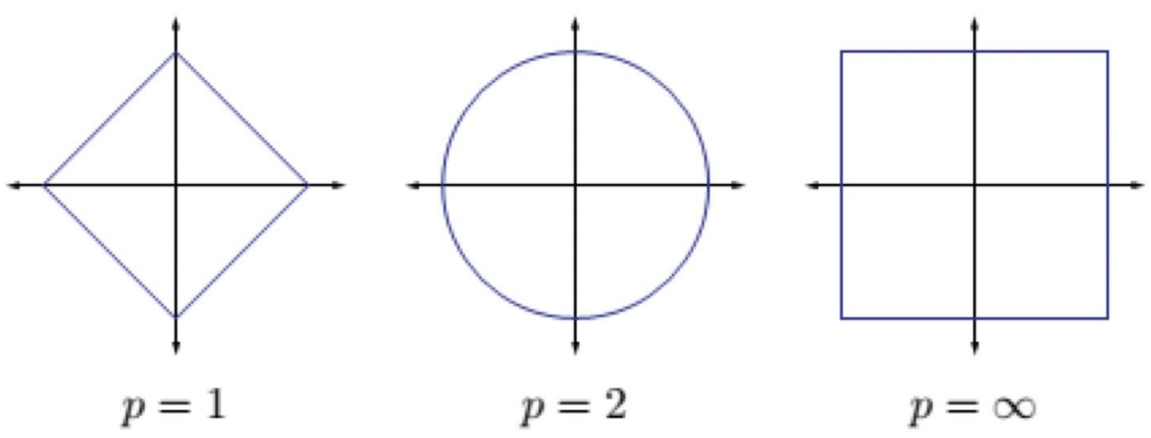
用范数可以刻画两向量间的距离: $d(\alpha,\beta) = \| \alpha - \beta \|$.

邻域(Neighborhood)

$$N(\alpha_0, r) = \{\alpha \in V^n(F): d(\alpha, \alpha_0) < r\}, \quad \alpha_0 \in V^n(F), r > 0.$$

Examples

p-范数下, R^2 中的“单位球” $N(0,1)$:



§ 3.1 向量范数(Vector Norm)

一、向量范数的概念

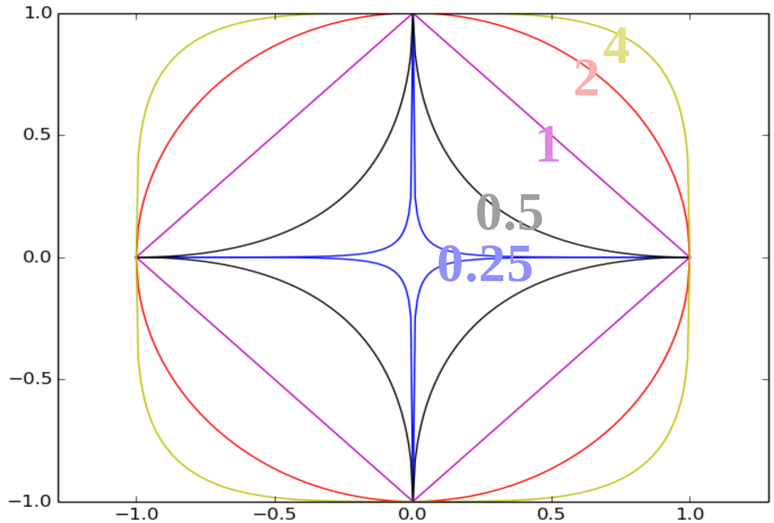
用范数可以刻画两向量间的距离: $d(\alpha, \beta) = \| \alpha - \beta \|$.

邻域(Neighborhood)

$$N(\alpha_0, r) = \{\alpha \in V^n(F) : d(\alpha, \alpha_0) < r\}, \quad \alpha_0 \in V^n(F), r > 0.$$

Examples

p-范数下, R^2 中的"单位球" $N(0,1)$:



二、向量序列的极限

用范数可以刻画两向量间的距离: $\mathrm{d}(\alpha,\beta)=\|\alpha-\beta\|$.

定义 设有向量序列 $\{\alpha^{(k)}: k=1,2,\cdots\}\subseteq(V^n(F),\|\cdot\|)$.
若存在某 $\beta\in V^n(F)$, 使得

$$\|\alpha^{(k)}-\beta\|\to 0,\ \text{当}\ k\to\infty,$$

则称向量序列 $\{\alpha^{(k)}: k=1,2,\cdots\}$ 依范数收敛于 β.
β 称为该序列的极限, 记 $\alpha^{(k)}\xrightarrow{\|\cdot\|}\beta$.

二、向量序列的极限

Example

取 $\alpha^{(k)}=\left(\frac{1}{k},\ \frac{1}{k+1}+1,\ \frac{1}{k+2}+2\right)^T\in R^3,\ \beta=(0,1,2)^T$, 则

$$\|\alpha^{(k)}-\beta\|_1=\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}\to 0,$$

故 $\alpha^{(k)}\xrightarrow{\|\cdot\|_1}\beta$. ■

三、向量范数的连续性与等价性

定义(补) 称($V^n(F), \|\cdot\|$)上的向量函数(映射, 泛函) $f: V^n(F) \to R$ 是连续的, 如果

$$\alpha^{(k)} \xrightarrow{\|\cdot\|} \beta \implies f\left(\alpha^{(k)}\right) \xrightarrow{|\cdot|} f(\beta).$$

引理 $V^n(F)$上的任意范数$\|\cdot\|$是连续函数:

$$\alpha^{(k)} \xrightarrow{\|\cdot\|} \beta \implies \|\alpha^{(k)}\| \xrightarrow{|\cdot|} \|\beta\|.$$

证明

$$\left|\|\alpha^{(k)}\| - \|\beta\|\right| \le \|\alpha^{(k)} - \beta\| \to 0. \quad \blacksquare$$

三、向量范数的连续性与等价性

定义 设 $\|\cdot\|^{(1)}, \|\cdot\|^{(2)}$ 是 $V^n(F)$ 上的两种范数. 如果存在正数 c_1, c_2, 使得

$$c_1 \| \alpha \|^{(2)} \le \| \alpha \|^{(1)} \le c_2 \| \alpha \|^{(2)}, \quad \forall \alpha \in V^n(F),$$

则称这两个范数是等价的.

含义: $\| \alpha^{(k)} - \beta \|^{(1)} \to 0 \Leftrightarrow \| \alpha^{(k)} - \beta \|^{(2)} \to 0.$

定理 有限维空间 $V^n(F)$ 上的任意两范数都是等价的.

§ 3.1 向量范数(Vector Norm)

三、向量范数的连续性与等价性

定理 $\forall x, \boldsymbol{y} \in R^n$，有

(1) $||x||_\infty \le ||x||_2 \le \sqrt{n}||x||_\infty$

(2) $||x||_2 \le ||x||_1 \le \sqrt{n}||x||_2$

(3) $||x||_\infty \le ||x||_1 \le n||x||_\infty$

注： R^n上一切范数都等价

证明（1）

记$x = (x_1, \cdots, x_{\boldsymbol{n}})^{\boldsymbol{T}}$, $||x||_\infty = \max\limits_{1\le i\le n}|x_i| \equiv |x_j|$,

于是有:

$(a)\ ||x||_\infty^2 = |x_j|^2 \le \sum_{i=1}^n |x_i|^2 = ||x||_2^2 \quad \Rightarrow ||x||_\infty \le ||x||_2$

$(b)\ ||x||_2^2 = \sum_{i=1}^n |x_i|^2 \le \sum_{i=1}^n |x_j|^2 = n|x_j|^2 = n||x||_\infty^2$

$\Rightarrow \|x\|_2 \le \sqrt{n}\|x\|_\infty$ ■

§ 3.1 向量范数(Vector Norm)

定理 $\lim\limits_{k\to\infty} X^{(k)} = X^* \Leftrightarrow \left\| X^{(k)} - X^* \right\| \to 0 \; (k \to \infty)$

证 显然， $\lim\limits_{k\to\infty} X^{(k)} = X^* \Leftrightarrow \left\| X^{(k)} - X^* \right\|_\infty \to 0 \; (k \to \infty)$

而对于R^n上任一种范数$\|\bullet\|$，由范数的等价性，

存在常数$C_{1,}C_2 > 0$ 使

$$C_1 \left\| X^{(k)} - X^* \right\|_\infty \le \left\| X^{(k)} - X^* \right\| \le C_2 \left\| X^{(k)} - X^* \right\|_\infty$$

于是有

$$\left\| X^{(k)} - X^* \right\|_\infty \to 0 \Leftrightarrow \left\| X^{(k)} - X^* \right\| \to 0 \quad (k \to 0) \; ■$$

三、向量范数的连续性与等价性

推论 设 $V^n(F)=Span\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}$,向量序列有坐标表示

$$\alpha^{(k)}=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)X^{(k)},\ \ \beta=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)Y.$$ 则

Tips: 坐标范数是向量范数的一种

坐标收敛

$$\|X^{(k)}-Y\|_{F^n}\to 0 \iff \|\alpha^{(k)}-\beta\|_{V^n(F)}\to 0$$

向量收敛

范数等价

范数是坐标的连续函数(定理)

范数的连续性

$$\|\alpha^{(k)}\|_{V^n(F)}\to\|\beta\|_{V^n(F)}$$

$$\|X^{(k)}-Y\|_\infty\to 0$$

定理

$\Leftrightarrow$ 依分量收敛: $x_i^{(k)}\to y_i$,

其中, $X^{(k)}=\begin{bmatrix}x_1^{(k)}\\x_2^{(k)}\\\vdots\\x_n^{(k)}\end{bmatrix},Y=\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{bmatrix}.$

§3.1.2　矩阵范数

(Matrix Norm)

§ 3.1 矩阵范数

一、矩阵范数的概念

定义 若 $F^{n\times n}$ 上的实值映射 $\|\cdot\|: A \mapsto \| A \|$ 满足

1. 非负性: $\| A \| \geq 0$ 且 $\| A \| = 0 \Leftrightarrow A = 0$;

2. 齐次性: $\| kA \| = |k| \, \| A \|, \quad \forall k \in F, A \in F^{m\times n}$;

3. 三角不等式: $\| A \pm B \| \leq \| A \| + \| B \|$;

4. 相容性: $\| AB \| \leq \| A \| \, \| B \|$,

则称 $\|\cdot\|$ 为一个矩阵范数.

由于矩阵有乘法运算, 故在定义矩阵范数时需考虑与乘法运算的相容性.

例 $C^{n\times n}$ 上 $\| A \| = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$ 是矩阵范数.

§ 3.1 矩阵范数

一、矩阵范数的概念

定义 若 $F^{n\times n}$ 上的实值映射 $\|\cdot\|: A \mapsto \| A \|$ 满足

1. 非负性: $\| A \| \geq 0$ 且 $\| A \| = 0 \Leftrightarrow A = 0$;
2. 齐次性: $\| kA \| = |k| \, \| A \|, \quad \forall k \in F, A \in F^{m\times n}$;
3. 三角不等式: $\| A \pm B \| \leq \| A \| + \| B \|$;
4. 相容性: $\| AB \| \leq \| A \| \| B \|$,

则称 $\|\cdot\|$ 为一个矩阵范数.

例：定义$||A|| = \max\limits_{1\leq i,j\leq n}|a_{ij}|$不满足相容性。

如：$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $AB = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$,

$||AB|| = 4$ ， $||A|| \cdot ||B|| = 2 \times 1 = 2$

例5　$C^{n\times n}$上的 Frobenius 范数:

$$\| A \|_F = \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left|a_{ij}\right|^2\right)^{1/2} = [\mathrm{tr}(A^H A)]^{\frac{1}{2}}.$$

证明 只证相容性 $\| AB \|_F \le \| A \|_F \| B \|_F$.

$$\| AB \|_F^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left|\sum_k a_{ik}b_{kj}\right|^2$$

Hölder inequality, or
Cauchy-Schwartz inequality

$$\le \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left[\left(\sum_k |a_{ik}|^2\right)\left(\sum_k |b_{kj}|^2\right)\right]$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left[\sum_k |a_{ik}|^2\left(\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\left|b_{kj}\right|^2\right)\right]$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}|a_{ik}|^2\right)\left(\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\left|b_{kj}\right|^2\right)$$

$$= \| A \|_F^2 \| B \|_F^2. \ \blacksquare$$

例5　$C^{n\times n}$上的 Frobenius 范数:

$$\| A \|_F = \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2 \right)^{1/2} = [\mathrm{tr}(A^H A)]^{\frac{1}{2}}.$$

例6　设 $A \in C^{n\times n}$ 的奇异值为 $\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_r$, 则

$$\| A \|_F^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \cdots + \sigma_r^2.$$

证明　因为 $A^H A$ 的所有非零特征值为 $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \cdots, \sigma_r^2$, 故

$$\mathrm{tr}(A^H A) = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \cdots + \sigma_r^2 = \| A \|_F^2. \quad \blacksquare$$

二、诱导范数

定义 称 $F^{n\times n}$ 上的矩阵范数 $\|\cdot\|_*$ 和 F^n 上的向量范数 $\|\cdot\|$ 是相容的或协调的, 如果

$$\| Ax \| \le \| A \|_* \cdot \| x \|, \quad \forall A \in F^{n\times n},\ x \in F^n.$$

二、诱导范数

Example

矩阵 F-范数与向量 2-范数是**相容的**: 令 $Ax = y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$,

$$\| Ax \|_2^2 = \sum_{i=1,\cdots,n} |y_i|^2 = \sum_{i=1,\cdots,n} \left| \sum_{k=1,\cdots,n} a_{ik} x_k \right|^2$$

Hölder inequality, or
Cauchy-Schwartz inequality

$$\le \sum_{i=1,\cdots,n} \left(\sum_{k=1,\cdots,n} |a_{ik}|^2 \sum_{k=1,\cdots,n} |x_k|^2 \right)$$

$$= \| A \|_F^2 \| x \|_2^2. \quad \blacksquare$$

二、诱导范数

定理 设$\|\cdot\|$是F^n上的向量范数, 则$F^{n\times n}$上的矩阵范数

$$\| A \|_* = \max_{x\neq 0}\left\{\frac{\| Ax \|}{\| x \|}\right\}$$

与$\|\cdot\|$相容, 称为由$\|\cdot\|$诱导的矩阵范数或算子范数.

证明 正定性和齐次性显然. 下证三角不等式.

$$\| A+B \|_* = \max_{x\neq 0}\left\{\frac{\| (A+B)x \|}{\| x \|}\right\} \leq \max_{x\neq 0}\left\{\frac{\| Ax \| + \| Bx \|}{\| x \|}\right\}$$

$$\leq \max_{x\neq 0}\left\{\frac{\| Ax \|}{\| x \|}\right\} + \max_{x\neq 0}\left\{\frac{\| Bx \|}{\| x \|}\right\}$$

$$= \| A \|_* + \| B \|_*. \blacksquare$$

定理 设$\|\cdot\|$是F^n上的向量范数，则$F^{n\times n}$上的矩阵范数

$$\| A \|_* = \max_{x\neq 0}\left\{\frac{\| Ax \|}{\| x \|}\right\}$$

与$\|\cdot\|$相容，称为由$\|\cdot\|$诱导的矩阵范数或算子范数.

证明(续) 矩阵范数的相容性 $\| AB \|_* \leq \| A \|_* \cdot \| B \|_*$:

$$\begin{aligned}\| AB \|_* &= \max_{\substack{x\neq 0\\ Bx\neq 0}}\left\{\frac{\| ABx \|}{\| x \|}\right\}\\ &= \max_{Bx\neq 0}\left\{\frac{\| ABx \|}{\| Bx \|}\cdot\frac{\| Bx \|}{\| x \|}\right\}\\ &\leq \max_{Bx\neq 0}\left\{\frac{\| ABx \|}{\| Bx \|}\right\}\cdot\max_{Bx\neq 0}\left\{\frac{\| Bx \|}{\| x \|}\right\}\\ &\leq \max_{x\neq 0}\left\{\frac{\| Ax \|}{\| x \|}\right\}\cdot\max_{x\neq 0}\left\{\frac{\| Bx \|}{\| x \|}\right\} = \| A \|_*\cdot\| B \|_*. \blacksquare\end{aligned}$$

$\{x|Bx\neq 0\}\subseteq\{x|x\neq 0\}$

定理 设$\|\cdot\|$是F^n上的向量范数，则$F^{n\times n}$上的矩阵范数

$$\| A \|_* = \max_{x\neq 0}\left\{\frac{\| Ax \|}{\| x \|}\right\}$$

与$\|\cdot\|$相容，称为由$\|\cdot\|$诱导的矩阵范数.

证明(续) 下证与向量范数的相容性 $\| Ax \| \leq \| A \|_* \cdot \| x \|$:

$x = 0$ 时，显然成立.

$x \neq 0$ 时，$\| A \|_* = \max_{y\neq 0}\left\{\frac{\| Ay \|}{\| y \|}\right\} \geq \frac{\| Ax \|}{\| x \|}$,

从而，$\| Ax \| \leq \| A \|_* \cdot \| x \|$. ■

说明： 矩阵的算子范数是矩阵范数，矩阵范数不一定是算子范数。

例： 弗罗贝尔乌斯（$Frobenius$）范数不是诱导范数。

这是因为单位矩阵I的任何诱导范数都是1，

$$\forall x \neq 0, \frac{||Ix||_v}{||x||_v} = \frac{||x||_v}{||x||_v} = 1, \text{而} ||I||_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} 1^2} = \sqrt{n} \neq 1\text{。}$$

2、以后讨论范数都是诱导范数，均是相容的，

且与它相应的向量范数也是相容的。

二、诱导范数

例 p-范数诱导的矩阵范数 (注意与向量 p-范数的区别)

$$\| A \|_1 = \max_j \left\{ \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \right\}$$

最大列和范数

$$\| A \|_\infty = \max_i \left\{ \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \right\}$$

最大行和范数

谱范数

$$\| A \|_2 = \sqrt{\lambda_{max}} = \sigma_1$$ (λ_{max} 是 $A^H A$ 的最大特征值)

Examples

1. 对 $A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 2+i \\ 2 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$, $\| A \|_1 = \max\{5, 7, \sqrt{5}+1\} = 7.$

二、诱导范数

例 p-范数诱导的矩阵范数 (注意与向量 p-范数的区别)

$$\| A \|_1 = \max_j \left\{ \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \right\}$$

最大列和范数

$$\| A \|_\infty = \max_i \left\{ \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \right\}$$

最大行和范数

谱范数

$$\| A \|_2 = \sqrt{\lambda_{max}} = \sigma_1 \quad (\lambda_{max} \text{ 是 } A^H A \text{ 的最大特征值})$$

矩阵范数公式：每个向量范数，都可相应地定义一个矩阵范数，常用的矩阵范数的计算公式由上给出。

(1) $\|A\|_\infty = \max_{x\neq 0}\frac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_\infty} = \max_{1\le i\le n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|$

证明: (1) 设 $x=(x_1,\cdots,x_n)^T$, $\|x\|_\infty = \max_{1\le i\le n}|x_i| = t$,

$$\mu = \max_{1\le i\le n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}| = \sum_{j=1}^{n}|a_{i_0 j}| \text{(其中} 1\le i_0\le n\text{)},$$

于是

$$\|Ax\|_\infty = \max_{1\le i\le n}\left|\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\right| \le \max_{1\le i\le n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|\,|x_j| \le t\max_{i}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}| = t\mu$$

对任何向量$x\neq 0$，则有

$$\frac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_\infty} \le \mu = \max_{1\le i\le n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|$$

如果能找到一向量 x_0,且$\|x_0\|_\infty = 1$,

使$\frac{\|Ax_0\|_\infty}{\|x_0\|_\infty} = \mu$，那么，定理得证。

(1) $\|A\|_\infty = \max\limits_{x\neq 0}\frac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_\infty} = \max\limits_{1\le i\le n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|$

证明:

下面来寻求x_0, 使比值等于μ. 记$x_0=(x_1,\cdots,x_n)^T$, 且使$\|x_0\|_\infty=1$,

于是

$$Ax_0 = (\sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j,\cdots,\sum_{j=1}^{n} a_{i_0j}x_j,\cdots,\sum_{j=1}^{n} a_{nj}x_j)^T,$$

则有:

$$\|Ax_0\|_\infty \le \mu,$$

由此，应选取 x_0为$x_j=\begin{cases}1, & 当a_{i_0j}\ge 0\\ -1, & 当a_{i_0j}<0\end{cases}$，则$\|x_0\|_\infty=1$,

及

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i_0j}x_j = \sum_{j=1}^{n}|a_{i_0j}| = \mu \ \text{ 或 } \ \|Ax_0\|_\infty = \mu,$$

故: $\max\limits_{x\neq 0}\frac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_\infty}=\mu$ 。■

（2）证明与（1）相似。

（3） $\| A \|_2 = \sqrt{\lambda_{max}} = \sigma_1$ (λ_{max} 是 $A^H A$ 的最大特征值)

证明：$\forall A \in R^{n\times n}$，$(A^T A)^T = A^T A$， $A^T A$是实对称矩阵，$\forall x \neq 0$,

$$x^T(A^T A)x = (Ax)^T(Ax) = ||Ax||_2^2 \geq 0$$，因此$A^T A$是半正定的，

则$A^T A$特征值大于等于0。

特征向量两两正交， 设$u_1, u_2 \cdots u_n$是特征根$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$所对应的特征向量，

且$u_1, u_2 \cdots u_n$构成n维线性空间中一组正交基，$(u_i, u_j) = \delta_{ij}$

即 $A^T A u_i = \lambda_i u_i (i = 1.2. \cdots n)$,

$$\|A\|_2 = \max_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} = \sqrt{\lambda_{max}(A^T A)}\ . \quad \blacksquare$$

三、谱半径

谱半径/* spectral radius */：

设$A \in R^{n\times n}$的特征值为$\lambda_i (i = 1, \ldots, n)$

称$\rho(A) \equiv \max\limits_{1\le i\le n} |\lambda_i|$为$A$的谱半径。

四、特征值界

定理(1) 设$A \in R^{n\times n}$，则$\rho(A) \le ||A||$，

其中$||A||$为满足矩阵、向量相容性条件的矩阵范数（算子范数）.

证明 (1) 设λ为A的任一特征值，于是，存在$x \neq 0$，

使$Ax = \lambda x$，且$|\lambda|||x|| = ||\lambda x|| = ||Ax|| \le ||A|| \cdot ||x||$，

即$|\lambda| \le ||A||$，所以$\rho(A) \le ||A||$。■

三、特征值界 $\rho(A) \equiv \max\limits_{1\le i\le n} |\lambda_i|$

定理(2)： 设$A \in R^{n\times n}$为对称矩阵，则$||A||_2 = \rho(A)$。

证明(2)： 若λ为A的特征值，则λ^2为A^2的特征根，

又A为对称矩阵，则$A^TA = A^2$,且A^TA也是对称的，

设$\rho(A) \le |\lambda_0|$，

则λ_0是实数，λ_0^2必是A^2最大特征根，

$$||A||_2 = \sqrt{\lambda_{max}(A^TA)} = \sqrt{\lambda_{max}(A^2)} = \sqrt{\lambda_0^2} = |\lambda_0| = \rho(A)。\blacksquare$$

三、谱半径

（1）由于矩阵的2范数与谱半径有关，常称“2”范数为谱模。

（2）谱模（范数）是对称矩阵A特征值的上界。

定理 设$||\cdot||$为矩阵的算子范数，且$||A||<1$,则$I\pm A$为非奇异矩阵，且有估计

$$||(I\pm A)^{-1}||\le\frac{1}{1-||A||}$$

证明：

(1) 证$I\pm A$为非奇异阵, 用反证法。

设$I\pm A$为奇异阵,则$(I\pm A)x=0$有非零解记为x_0，

由$\pm Ax_0=x_0$得$||\pm Ax_0||=||x_0||$,而$||\pm Ax_0||=||Ax_0||$,

于是,

$$\frac{||Ax_0||}{||x_0||}=\frac{||x_0||}{||x_0||}=1,$$

$$\Rightarrow ||A||=max\frac{||Ax||}{||x||}\ge\frac{||Ax_0||}{||x_0||}=1,$$

这与假设矛盾。

定理 设$||\cdot||$为矩阵的算子范数，且$||A|| < 1$,则$I \pm A$为非奇异矩阵，且有估计

$$||(I \pm A)^{-1}|| \le \frac{1}{1-||A||}$$

证明：（2）有 $(I - A)(I - A)^{-1} = I$,

$$\Rightarrow (I - A)^{-1} - A(I - A)^{-1} = I$$

$$\Rightarrow (I - A)^{-1} = I + A(I - A)^{-1}$$

所以 $||(I - A)^{-1}|| = ||I + A(I - A)^{-1}||$

$$\le ||I|| + ||A(I - A)^{-1}||$$

$$\le 1 + ||A||\ ||(I - A)^{-1}||,$$

$$\Rightarrow (1 - ||A||)||(I - A)^{-1}|| \le 1,$$

即 $||(I - A)^{-1}|| \le \frac{1}{1-||A||}$.

同理可得 $||(I + A)^{-1}|| \le \frac{1}{1-||A||}$.

$$\boldsymbol{||(I \pm A)^{-1}|| \le \frac{1}{1-||A||}}. \quad \blacksquare$$