第四章　矩阵分解及其应用

Matrix Decomposition And Its Application

§4 矩阵分解及其应用

一、矩阵的三角分解

二、矩阵的满秩分解

三、矩阵的正交三角分解

四、矩阵的奇异值分解

五、矩阵的Moore-Penrose广义逆

矩阵分解概述

矩阵分解两种常见的形式

- 矩阵的和: $A = A_1 + A_2 + \cdots + A_k$
- 矩阵的乘积: $A = A_1 A_2 \cdots A_m$

矩阵分解的原则与意义:

- 实际应用的需要
- 显示原矩阵的某些特性
- 矩阵化简的方法与矩阵技术

理论上的需要
计算上的需要

主要技巧:

① 各种标准型的理论和计算方法

② 矩阵的分块运算和初等变换

常见的矩阵标准型与分解

常见的标准型

- 等价标准型 $A_{m\times n} = P_{m\times m}\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Q_{n\times n}$ 或相抵标准型
- 相似标准型 $A_{n\times n} = PJ_A P^{-1}$
- 合同标准型 $A_{n\times n} = P\Lambda P^T$ $A^T = A$

4.1 矩阵的三角分解（triangular decomposition）

定义 设 $A \in F^{n\times n}$.

LR分解 $A = LR$: L下三角形矩阵, R上三角形矩阵;

LDR分解 $A = LDR$: L, R分别是主对角线元素为1的下三角形和上三角形矩阵, D为对角矩阵.

基本性质

LR: $|A| = |LR| = \prod_{i=1}^{n} l_{ii} r_{ii}$. $|A_k| = |L_k R_k| = \prod_{i=1}^{k} l_{ii} r_{ii}$.

LDR: $|A| = |LDR| = |D| = \prod_{i=1}^{n} d_i$. $|L_k D_k R_k| = \prod_{i=1}^{k} d_i$.

如果 $A_n = L_n R_n = \begin{bmatrix} L_k & O \\ * & * \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_k & * \\ O & * \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_k R_k & * \\ * & * \end{bmatrix}$,

那么 $A_k = L_k R_k,\ 1 \le k \le n$.（$LR$和$LDR$分解均可继承）

4.1 矩阵的三角分解（triangular decomposition）

方阵LR和LDR分解的$Gauss$-消元法

例1 求 $A=\begin{bmatrix}2&2&3\\4&7&7\\-2&4&5\end{bmatrix}$ 的 LR 和 LDR 分解.

解 $(A|I)=\left[\begin{array}{ccc|ccc}2&2&3&1&0&0\\4&7&7&0&1&0\\-2&4&5&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow[r_3+r_1]{r_2-2r_1}\left[\begin{array}{ccc|ccc}2&2&3&1&0&0\\0&3&1&-2&1&0\\0&6&8&1&0&1\end{array}\right]\xrightarrow{r_3-2r_2}\left[\begin{array}{ccc|ccc}2&2&3&1&0&0\\0&3&1&-2&1&0\\0&0&6&5&-2&1\end{array}\right]$

$R=\begin{bmatrix}2&2&3\\0&3&1\\0&0&6\end{bmatrix}, P=\begin{bmatrix}1&0&0\\-2&1&0\\5&-2&1\end{bmatrix}$, 取 $L=P^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0\\2&1&0\\-1&2&1\end{bmatrix}$ 有 $A=LR$.

结论: 如果矩阵 A 能用除两行互换以外的初等行变换化为上三角阵, 则 A 有 LR 分解.

方阵LR和LDR分解的*Gauss*-消元法

例1 求 $A=\begin{bmatrix}2&2&3\\4&7&7\\-2&4&5\end{bmatrix}$的 LR 和 LDR 分解.

解 进一步, 由 $A=LR=\begin{bmatrix}1&0&0\\2&1&0\\-1&2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&2&3\\0&3&1\\0&0&6\end{bmatrix}$,

可得 LDR 分解:

$$A=\underbrace{\begin{bmatrix}1&0&0\\2&1&0\\-1&2&1\end{bmatrix}}_{L}\underbrace{\begin{bmatrix}2&0&0\\0&3&0\\0&0&6\end{bmatrix}}_{D}\underbrace{\begin{bmatrix}1&1&3/2\\0&1&1/3\\0&0&1\end{bmatrix}}_{R}. \blacksquare$$

*是否任意上三角矩阵 R 都可类似分解为 DR 的形式? ✗

一、矩阵的三角分解（LDR分解的唯一性）

定理 方阵 $A \in F^{n\times n}$ 有唯一 LDR 分解的充要条件是 A 的顺序主子式 $|A_k| \neq 0,\ k = 1,2,\cdots,n-1.$

证明 当 $n=1$ 时，$A = (a) = (1)(a)(1) = L_1 D_1 R_1$.

(充分性) 假设定理对所有 $n-1$ 阶矩阵成立，下证 n 阶.

将 n 阶矩阵 A 分块：$A = \begin{pmatrix} A_{n-1} & \tau_n \\ u_n^T & a_{nn} \end{pmatrix}$.

由待定系数法，设

$$A = \underbrace{\boxed{\begin{pmatrix} A_{n-1} & \tau_n \\ u_n^T & a_{nn} \end{pmatrix}}}_{\text{已知}} = \underbrace{\begin{pmatrix} L_{n-1} & 0 \\ l_n^T & 1 \end{pmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{pmatrix} D_{n-1} & 0 \\ 0 & d_n \end{pmatrix}}_{D} \underbrace{\begin{pmatrix} V_{n-1} & v_n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{R}$$

一、矩阵的三角分解（LDR分解的唯一性）

定理 方阵 $A \in F^{n\times n}$ 有唯一 LDR 分解的充要条件是 A 的顺序主子式 $|A_k| \neq 0,\ k = 1,2,\cdots,n-1.$

证明
(充分性)

$$A = \begin{pmatrix} A_{n-1} & \tau_n \\ u_n^T & a_{nn} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} L_{n-1} & 0 \\ l_n^T & 1 \end{pmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{pmatrix} D_{n-1} & 0 \\ 0 & d_n \end{pmatrix}}_{D} \underbrace{\begin{pmatrix} V_{n-1} & v_n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{R}$$

则比较两边，有

$$A_{n-1} = L_{n-1}D_{n-1}V_{n-1} \quad (1)$$
$$\tau_n = L_{n-1}D_{n-1}v_n \quad (2)$$
$$u_n^T = l_n^T D_{n-1}V_{n-1} \quad (3)$$
$$a_{nn} = l_n^T D_{n-1}v_n + d_n \quad (4)$$

注意到(1)式由归纳假设得到唯一的 $L_{n-1}, D_{n-1}, V_{n-1}$，

且由$|A_{n-1}| \neq 0, L_{n-1}, D_{n-1}, V_{n-1}$均可逆，

故由(2)、(3)式解方程组得唯一解v_n, l_n^T，

再由第(4)式得唯一解 d_n.

一、矩阵的三角分解（*LDR*分解的唯一性）

定理 方阵 $A \in F^{n\times n}$ 有唯一 *LDR* 分解的充要条件是

A 的顺序主子式 $|A_k| \neq 0,\ k = 1,2,\cdots,n-1.$

证明 设 A 有惟一*LDR*分解

(必要性)

$$A = \begin{pmatrix} A_{n-1} & \tau_n \\ u_n^T & a_{nn} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} L_{n-1} & 0 \\ l_n^T & 1 \end{pmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{pmatrix} D_{n-1} & 0 \\ 0 & d_n \end{pmatrix}}_{D} \underbrace{\begin{pmatrix} V_{n-1} & v_n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{R}$$

则比较两边，有

$$A_{n-1} = L_{n-1}D_{n-1}V_{n-1} \quad (1)$$
$$\tau_n = L_{n-1}D_{n-1}v_n \quad (2)$$
$$u_n^T = l_n^T D_{n-1}V_{n-1} \quad (3)$$
$$a_{nn} = l_n^T D_{n-1}v_n + d_n \quad (4)$$

由分解的唯一性，（2）式的解唯一，

故 $|L_{n-1}D_{n-1}| \neq 0$,

从而由（1）式 $|A_{n-1}| = |D_{n-1}| \neq 0.$

又由（1）式, A_{n-1}的分解唯一, 故 $|A_{n-2}| \neq 0.$

从而 $|A_k| \neq 0,\ k = 1,2,\cdots,n-1.$

至于 D 的结构与 A 的顺序主子式的关系,

由 $|A_k| = |D_k| = \Pi_{i=1}^{k} d_i,\ \ k = 1,2,\cdots,n,$ 易得.

此时，$D = \mathrm{diag}(d_1,d_2,\cdots,d_n)$ 的元素

$d_i = \dfrac{|A_i|}{|A_{i-1}|},\ i = 1,2,\cdots,n;\ |A_0| \triangleq 1.$ ■

一、矩阵的三角分解（LR分解的存在性）

LDR分解的存在 $\Rightarrow$ LR分解存在. LR分解对应较弱的条件.

定理 设矩阵 $A \in F^{n\times n}$，$\mathrm{rank}(A) = k\ (\leq n)$, 如果 A 的前 k 阶顺序主子式均非 0, 则 A 有 LR 分解.

注：1. 不是任何矩阵都有 LR 或 LDR 分解, 如 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$;

2. A 顺序主子式不为0不是A有LR分解的必要条件, 如

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}，但\ |A_1| = 0.$$

推论 可逆矩阵 $A \in F^{n\times n}$ 有 LR 分解的充要条件是顺序主子式不为0.

（提示：$|A_k| = |L_k||U_k| \neq 0.$）

定理 若n阶矩阵 A可逆，则存在置换矩阵P，使PA的n个顺序主子式均非 0.

LR分解的应用举例：求解线性方程组 $AX = b$.

二、矩阵的满秩分解

- **定义**　对秩为 r 的矩阵 $A \in F^{m\times n}$, 若存在秩为 r 的矩阵 $B \in F^{m\times r}$, $C \in F^{r\times n}$, 使得 $A = BC$, 则称此式为 A 的满秩分解.

列满秩　行满秩

定理　任何非零矩阵 $A \in F^{m\times n}$ 都有满秩分解.

证明: 等价标准型求法（行列变换）

通过行、列初等变换可将 A 变为其等价标准型, 即

存在可逆矩阵 P, Q, 使得 $A_{m\times n} = P_{m\times m}^{-1}\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Q_{n\times n}^{-1}$,

前r列　前r行

令 $P^{-1} = (B, B_2)$, $Q^{-1} = \begin{pmatrix} C \\ C_2 \end{pmatrix}$, 得 $A = BC$.

B, C 即满足要求. 证毕. ■

二、矩阵的满秩分解

满秩分解的求法：初等变换

- 方法1：等价标准型求法(行列变换): 求两个逆矩阵!
- 方法2：阶梯型求法(行变换): 只求一个逆矩阵!

Tips $(A \mid I) \xrightarrow{\text{行初等变换}} \left(\begin{array}{c|c} C & \multirow{2}{*}{P} \\ \hdashline O & \end{array}\right) r\text{行}$, $\operatorname{rank}(C) = r = \operatorname{rank}(A)$

$$PA = \begin{pmatrix} C \\ \mathrm{O} \end{pmatrix} \Rightarrow A = P^{-1}\begin{pmatrix} C \\ \mathrm{O} \end{pmatrix}$$

$$= (B, B_2)\begin{pmatrix} C \\ \mathrm{O} \end{pmatrix} = BC.$$

二、矩阵的满秩分解

例1 用方法2求 $A=\begin{bmatrix}1&1&2\\0&2&2\\1&0&1\end{bmatrix}$ 的满秩分解.

解

$$(A\,|\,I)=\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&1&2&1&0&0\\0&2&2&0&1&0\\1&0&1&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow{r_3-r_1}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&1&2&1&0&0\\0&2&2&0&1&0\\0&-1&-1&-1&0&1\end{array}\right]\xrightarrow{r_3+\frac{1}{2}r_2}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&1&2&1&0&0\\0&2&2&0&1&0\\\hline 0&0&0&-1&1/2&1\end{array}\right]$$

令

$$C=\begin{bmatrix}1&1&2\\0&2&2\end{bmatrix},\ P=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-1&1/2&1\end{bmatrix},\ P^{-1}=\left[\begin{array}{cc|c}1&0&0\\0&1&0\\1&-1/2&1\end{array}\right],\ B=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\1&-1/2\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A=BC=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\1&-1/2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&2\\0&2&2\end{bmatrix}.\quad\blacksquare$$

二、矩阵的满秩分解

满秩分解的求法：初等变换

- 方法1：等价标准型求法(行列变换): 求两个逆矩阵!
- 方法2：阶梯型求法(行变换): 只求一个逆矩阵!
- ✓ 方法3：求列的极大线性无关组及行标准型（Hermite梯形矩阵）: 不用求逆!

Tips 设 $\mathrm{rank}(A) = r$. 若 A 的前 r 列线性无关, 则

$$A \xrightarrow{\text{行初等变换}} \begin{pmatrix} \boxed{I_r \quad S} \\ O \quad O \end{pmatrix} C, \quad PA = \begin{pmatrix} I_r & S \\ O & O \end{pmatrix}, \quad \Rightarrow A = P^{-1}\begin{pmatrix} I_r & S \\ O & O \end{pmatrix},$$

令 B 为 P^{-1} 的前 r 列排成的矩阵, 即

$$A = (B, B_2)\begin{pmatrix} I_r & S \\ O & O \end{pmatrix} = (\boxed{B}, BS) = B(I_r, S) = BC.$$

此时,令 $A = (A_1, A_2)$, 则 $\begin{cases} B = A_1 \\ C = (I_r \ \ S) \end{cases}$.

二、矩阵的满秩分解

满秩分解的求法：初等变换

- 方法1：等价标准型求法(行列变换): 求两个逆矩阵!
- 方法2：阶梯型求法(行变换): 只求一个逆矩阵!
- ✓ 方法3：求列的极大线性无关组及行标准型: 不用求逆!

Tips (续) 设 $\mathrm{rank}(A)=r$. 若 A 的前 r 列线性相关,

则可通过交换列的次序将其化为 A_*,

使得 A_* 的前 r 列线性无关: $AQ=A_*$.

因为 A_* 有满秩分解 $A_*=BC_*$,

故 $A=A_*Q^{-1}=B(C_*Q^{-1})$ 即得 A 的满秩分解.

注: 1. 由法3获得的满秩分解$A=BC$中, B矩阵由A的极大线性无关列向量组排成, C由行标准型的非0行排成.

2. 法3求满秩分解无需记录变换过程.

二、矩阵的满秩分解

例2 用方法3求例4中 $A=\begin{bmatrix}1&1&2\\0&2&2\\1&0&1\end{bmatrix}$ 的满秩分解.

解 $A=\begin{bmatrix}1&1&2\\0&2&2\\1&0&1\end{bmatrix}\xrightarrow[r_3-r_1]{r_3+\frac{1}{2}r_2}\begin{bmatrix}1&1&2\\0&2&2\\0&0&0\end{bmatrix}\xrightarrow[\frac{1}{2}r_2]{r_1-r_2}\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&0\end{bmatrix}.$ **C**

无需记录变换过程!

$$\Rightarrow B=A_1=\begin{bmatrix}1&1\\0&2\\1&0\end{bmatrix},\qquad C=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\end{bmatrix}.$$

$$\Rightarrow A=BC=\begin{bmatrix}1&1\\0&2\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\end{bmatrix}.\ \blacksquare$$

二、矩阵的满秩分解

注：行初等变换不改变列向量组的线性组合关系.

例3　用方法3求 A 的满秩分解:

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & -14 \\ 2 & -1 & 2 & -4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -2 & 2 & 10 & 25 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{变换}]{\text{行初等}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & -10 & -29 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -5 & -13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

C

$\operatorname{Rank}(A)=3.$

$$B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & -4 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}_{3\times 3} \qquad C=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & -10 & -29 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -5 & -13 \end{pmatrix}$$

则 $A=BC$ 为满秩分解. ■

注　B 必须取 A 中对应于行标准型中非零行的非零首元所在的列。

4.2 矩阵的满秩分解

设A是$m \times n$矩阵，B是$n \times s$矩阵，且$AB = 0$，证明:$rankA + rankB \leq n.$

证明: 令$rankA = r$，则存在可逆阵$\boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q}$，使

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}\begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix}\boldsymbol{Q}$$

从而由$AB = 0$有$\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{P}\begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix}\boldsymbol{QB} = \boldsymbol{0}$得$\begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix}\boldsymbol{QB} = \boldsymbol{0}$

由此可见，$\boldsymbol{QB}$的前$\boldsymbol{r}$行必为零行，故$\boldsymbol{QB}$的非零行至多$\boldsymbol{n} - \boldsymbol{r}$行，即，

$rankQB = rank\ B \leq n - r$,因而$rankA + rankB \leq n.$ ■