第三部分　数理统计

第3章　假设检验

第3章　假设检验

第一节 假设检验的基本概念

一、假设检验问题的提出

二、显著性检验的推理方法和基本步骤

三、两类错误

一、假设检验问题的提出

假设检验是统计推断中的重要内容。它是在总体分布未知或虽知其分布类型但含有未知参数的时候，提出有关总体分布或分布中某些未知参数的假设。

然后根据样本所提供的信息，推断假设是否合理，并作出接受或拒绝所提出假设的决定。

例1. 某炼铁厂生产的生铁含硅量X服从正态分布$N(0.005,0.032)$。现改变原料,并从改变原料后的生产记录中随机地抽取 $n=25$ 的样本，算得平均含硅量 $\bar{x}=0.0067$，均方差 σ 没有改变，问改变原料后生铁含硅量的均值有无显著变化?

此实例的问题是:

根据抽样结果推断假设“$\mu=0.005$”是否为真。

实例2. 某电话交换台在一分钟内得到的呼唤次数统计的记录如下:

呼唤次数	0	1	2	3	4	5	6	≥ 7
频　数	8	16	17	10	6	2	1	0

试检验电话呼唤次数 X 是否服从泊松分布?

此实例的问题是:

根据抽样的结果来推断假设“总体服从泊松分布”是否为真。

假设检验的种类

假设检验的种类

参数假设检验:

总体分布已知，对未知参数提出的假设进行检验.

非参数假设检验:

总体分布未知，对总体分布形式或类型的假设进行检验.

在假设检验问题中，把要检验的假设称为原假设(零假设或基本假设)，记为 H_0 ，把原假设的对立面称为备择假设或对立假设，记为H_1 。原假设 H_0和备择假设 H_1两者中必有且仅有一个为真。

二、显著性检验的推理方法和基本步骤

实例. 某厂生产的螺钉, 按标准, 平均强度应为$68mm$, 实际生产的强度X 服从$N(\mu, 3.6^2)$, 现从整批螺钉中取容量 $n = 36$ 的样本, 其均值为 $\bar{x} = 68.5$, 问这批螺钉是否符合要求?

若$\mu = 68$, 则认为这批螺钉符合要求,否则认为不符合要求.

为此提出如下假设:

原假设 $H_0 : \mu = 68$, **备择假设** $H_1 : \mu \neq 68$

若原假设 H_0 **正确, 则** $\overline{X} \sim N(68, 3.6^2/36)$

因而 $E(\overline{X}) = 68$, $\overline{X}$ **偏离68不应该太远，标准化后，**

$\left|\dfrac{\overline{X}-68}{3.6/6}\right|$**应较集中在零的周围. 或者**$\left|\dfrac{\overline{X}-68}{3.6/6}\right|$**取较大值应是小概率事件.**

根据小概率原理，小概率事件在一次试验中是几乎不发生的.

实例. 某厂生产的螺钉, 按标准, 平均强度应为$68mm$, 实际生产的强度X 服从$N(\mu, 3.6^2)$, 现从整批螺钉中取容量 $n=36$ 的样本, 其均值为 $\bar{x}=68.5$, 问这批螺钉是否符合要求?

那么，概率小到什么程度才能算作“小概率事件”呢?

此小概率记为α，一般取为0.1，0.05，0.01等.

为此, 可以确定一个常数c, 使得 $P\{\left|\frac{\bar{X}-68}{3.6/6}\right|>c\}=\alpha$

然后，计算 $|u|=\left|\frac{\bar{x}-68}{3.6/6}\right|$,

若 $|u|>c$, **即一次试验小概率事件就发生了,可以认为原假设不合理，拒绝原假设H_0而接受备择假设H_1.**

否则，接受原假设H_0而拒绝备择假设H_1.

此时，称区间$W=\{\left|\frac{\bar{X}-68}{3.6/6}\right|>c\}$**为$H_0$的拒绝域.**

实例. 某厂生产的螺钉, 按标准, 平均强度应为$68mm$, 实际生产的强度X 服从$N(\quad ,3.62\ )$, 现从整批螺钉中取容量 $n=36$ 的样本, 其均值为 $\bar{x}=68.5$, 问这批螺钉是否符合要求?

现取 $\alpha=0.05$ ， 原假设为真时,

$$U=\frac{\overline{X}-68}{3.6/6}\sim N(0,1).$$

(称 U 为检验统计量)

$$P\{|U|>z_{\frac{\alpha}{2}}\}=\alpha.$$

所以 $c=z_{\frac{\alpha}{2}}=z_{0.025}=1.96$

$$\bar{x}=68.5,\qquad |u|=\left|\frac{68.5-68}{3.6/6}\right|=0.8333<c,$$

因为小概率事件没发生, 所以, 接受原假设H_0,

认为这批螺钉是符合要求的. ■

由此例可见：

1. 假设检验的理论依据：实际推断原理（小概率原理）

小概率事件在一次试验中几乎是不可能发生的

2. 假设检验是概率意义下的反证法. 即：

首先假定原假设H_0成立，依照事先给定的概率α（称为显著性水平），构造一个小概率事件。

然后根据抽样的结果，观察此小概率事件是否发生。若此小概率事件发生了，则认为原假设是不真的，从而作出拒绝H_0的判断。否则，就接受H_0。

3. 不否定H_0并不是肯定H_0一定对，而只是说差异还不够显著，还没有达到足以否定H_0的程度.

假设检验的一般步骤：

(1) 根据实际问题的要求，充分考虑和利用已知的背景知识，提出原假设 H_0 及备择假设 H_1；

(2) **给定显著性水平 α，选取检验统计量，并确定其分布；**

(3) 由 $P\{拒绝H_0|H_0为真\}=\alpha$ 确定 H_0 的拒绝域的形式；

(4) 由样本值求得检验统计量的观察值，若观察值在拒绝域内，则拒绝原假设 H_0，否则接受原假设 H_0.

三、两类错误

假设检验的两类错误

第一类错误（弃真错误）：

原假设H_0为真，但拒绝了原假设H_0.

第二类错误（取伪错误）：

原假设H_0不真，但接受了原假设H_0.

记 $P\{$拒绝$H_0|H_0$为真$\}=\alpha$, $P\{$接受$H_0|H_0$不真$\}=\beta$.

显然，显著性水平α为犯第一类错误的概率.

任何检验方法都不能完全排除犯错误的可能性.

理想的检验方法应使犯两类错误的概率都很小，但在样本容量固定时，一类错误概率的减少必会导致另一类错误概率的增加.

处理原则：

控制犯第一类错误的概率α，然后,若有必要,通过增大样本容量的方法来减少犯第二类错误的概率β.

注： 关于原假设与备择假设的选取

H_0与H_1地位应平等,但在控制犯第一类错误的概率 α 的原则下,使得采取拒绝H_0的决策变得较慎重,即H_0 得到特别的保护.

因而通常把有把握的、有经验的结论作为原假设, 或者尽可能使后果严重的错误成为第一类错误.

第二节 正态总体的假设检验

一、单一正态总体均值 μ 的假设检验

二、单一正态总体方差σ^2的假设检验

三、两个正态总体均值的假设检验

四、两个正态总体方差的假设检验

一、单一正态总体均值 μ 的假设检验

设总体$X \sim N(\mu, \sigma^2)$. $X_1, X_2, \cdots, X_n$是取自X的样本，

样本均值 $\overline{X}$，样本方差 S^2

1. 已知 $\sigma^2 = \sigma_0^2$ 时，总体均值 μ 的假设检验

(1) μ 的双边检验：

原假设 $H_0: \mu = \mu_0$， **备择假设** $H_1: \mu \neq \mu_0$

取检验统计量： $U = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma_0 / \sqrt{n}}$

则拒绝域为： $W = \{|U| \geq z_{\alpha/2}\}$

1．已知$\sigma^2=\sigma_0^2$时，总体均值μ的假设检验(双边检验)

推导：当H_0为真时，$U=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$

此时，因为$\bar{X}$是μ_0的无偏估计量，$|\bar{X}-\mu_0|$不应太大.

$P\{$拒绝$H_0|H_0$为真$\}$ $=P(\left|\overline{X}-\mu_0\right|\ge k\mid\mu=\mu_0)$

$$=P\{\frac{|\overline{X}-\mu_0|}{\sigma_0/\sqrt{n}}\ge\frac{k}{\sigma_0/\sqrt{n}}\}=P\{|U|\ge\frac{k}{\sigma_0/\sqrt{n}}\}=\alpha$$

所以 $\dfrac{k}{\sigma_0/\sqrt{n}}=z_{\alpha/2}$，　　即：$P\{|U|\ge z_{\alpha/2}\}=\alpha$

由此知，拒绝域为：$W=\{|U|\ge z_{\alpha/2}\}$

统计中把拒绝域在某个区间的两侧的检验称为**双边检验**

(区间$(-z_{\alpha/2},\ z_{\alpha/2})$的两侧)

1．已知$\sigma^2=\sigma_0^2$时，总体均值μ的假设检验(单边检验)

(2) μ的单边检验:

(a) 原假设 $H_0:\mu\le\mu_0$， 备择假设 $H_1:\mu>\mu_0$

检验统计量: $$U=\frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}}$$

拒绝域为: $$W=\{U\ge z_\alpha\}$$

(b) 原假设 $H_0:\mu\ge\mu_0$， 备择假设 $H_1:\mu<\mu_0$

检验统计量: $$U=\frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}}$$

拒绝域为: $$W=\{U\le -z_\alpha\}$$

统计中把拒绝域在某个区间的某一侧的检验称为单边检验.

服从正态分布的U统计量来进行检验，也称为U检验法（或正态检验法）。

U 检验法 (σ_0^2已知)

类型	原假设 H_0	备择假设 H_1	检验统计量	拒绝域
双边检验	$\mu = \mu_0$	$\mu \neq \mu_0$	$U = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma_0 / \sqrt{n}}$	$\lvert U \rvert \geq z_{\frac{\alpha}{2}}$
单边检验	$\mu \leq \mu_0$	$\mu > \mu_0$		$U \geq z_\alpha$
	$\mu \geq \mu_0$	$\mu < \mu_0$		$U \leq -z_\alpha$

2. σ^2未知时，总体均值μ的假设检验

T 检验法 (σ^2 未知)

类型	原假设 H_0	备择假设 H_1	检验统计量	拒绝域
双边检验	$\mu = \mu_0$	$\mu \neq \mu_0$	$T = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{S / \sqrt{n}}$	$\lvert T \rvert \geq t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$
单边检验	$\mu \leq \mu_0$	$\mu > \mu_0$		$T \geq t_{\alpha}(n-1)$
	$\mu \geq \mu_0$	$\mu < \mu_0$		$T \leq -t_{\alpha}(n-1)$

例1. 设某次考试的考生成绩服从正态分布，从中随机地抽取36位考生的成绩，算得平均成绩为66.5分，标准差为15分，问在显著性水平0.05下，是否可以认为在这次考试中全体考生的平均成绩为70分?

解：原假设 $H_0: \mu = 70$，　备择假设 $H_1: \mu \neq 70$

检验统计量：$T = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}$

拒绝域：$W = \{|T| \geq t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\}$

n=36，α=0.05，　$t_{\alpha/2}(n-1) = t_{0.025}(35) = 2.0301$

$$W = \{|T| \geq t_{\alpha/2}(n-1)\} = \{|T| \geq 2.0301\}$$

$$|t| = \frac{|\overline{x} - \mu_0|}{s/\sqrt{n}} = \frac{|66.5 - 70|}{15/\sqrt{36}} = 1.4 < 2.0301$$

因为 $t \notin W$ 所以接受H_0，在显著性水平0.05下，

可以认为在这次考试中全体考生的平均成绩为70分。■

例2. 一台机床加工轴的椭圆度 X （mm)服从正态分布$N(0.095, 0.02^2)$。机床经调整后随机取20根测量其椭圆度，算得 $\bar{x} = 0.088$mm 。已知总体方差不变，问调整后机床加工轴的椭圆度的均值有无显著降低？$(\alpha = 0.05)$

解: $\bar{x} = 0.088 < 0.095$

原假设$H_0: \mu \geq 0.095$，备择假设$H_1: \mu < 0.095$

由 $\sigma^2 = 0.02^2$ 知，检验统计量为 $U = \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma_0 / \sqrt{n}}$

拒绝域： $W = \{U \leq -z_\alpha\}$

$n=20$，$\alpha=0.05$， $z_\alpha = z_{0.05} = 1.645$ $W = \{U \leq -z_\alpha\} = \{U \leq -1.645\}$

$$u = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma_0 / \sqrt{n}} = \frac{0.088 - 0.095}{0.02 / \sqrt{20}} = -1.5652 \geq -1.645$$

因为 $u \notin W$， 所以接受H_0，

在显著性水平0.05下，认为调整后机床加工轴的椭圆度的均值无显著降低. ∎

例3. 某种电子元件，要求使用寿命不得低于1000 小时。现从一批这种元件中随机抽取25 件，测其寿命，算得其平均寿命950小时，设该元件的寿命$X\sim N(\mu,100^2)$，在显著性水平0.05下,确定这批元件是否合格?

解: $\bar{x} = 950 < 1000$

原假设 $H_0: \mu \geq 1000$，　备择假设 $H_1: \mu < 1000$

由$\sigma^2 = 100^2$知，检验统计量为 $U = \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma_0 / \sqrt{n}}$

拒绝域：　$W = \{U \leq -z_\alpha\}$

$n=25$，$\alpha=0.05$，　$z_\alpha = z_{0.05} = 1.645$

$W = \{U \leq -z_\alpha\} = \{U \leq -1.645\}$

$$u = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma_0 / \sqrt{n}} = \frac{950 - 1000}{100 / \sqrt{25}} = -2.5 < -1.645$$

因为 $u \in W$　所以拒绝H_0，

在显著性水平0.05下，认为这批元件不合格.

二、单一正态总体方差σ^2的假设检验

1. 已知 $\mu=\mu_0$ 时，总体方差σ^2的假设检验

χ^2 检验法

类型	原假设 H_0	备择假设 H_1	检验统计量	拒绝域
双边检验	$\sigma^2=\sigma_0^2$	$\sigma^2\neq\sigma_0^2$	$\chi^2=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i-\mu_0}{\sigma_0}\right)^2$	$\chi^2\le\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)$ $\chi^2\ge\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n)$
单边检验	$\sigma^2\le\sigma_0^2$	$\sigma^2>\sigma_0^2$		$\chi^2\ge\chi^2_{\alpha}(n)$
	$\sigma^2\ge\sigma_0^2$	$\sigma^2<\sigma_0^2$		$\chi^2\le\chi^2_{1-\alpha}(n)$

推导（双边检验情形）：

当H_0为真时，$\chi^2=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i-\mu_0}{\sigma_0}\right)^2 \sim \chi^2(n)$

此时，因为 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\frac{X_i-\mu_0}{\sigma_0})^2$ 是σ^2的无偏估计量，

拒绝域应表现为 $\chi^2=\sum_{i=1}^{n}(\frac{X_i-\mu_0}{\sigma_0})^2$ 偏小或偏大，

$P\{$拒绝$H_0|H_0$为真$\}$

$$= P\{\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\sigma_0^2} \le \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)\} + P\{\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\sigma_0^2} \ge \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n)\} = \alpha$$

所以拒绝域为：$W=\{\chi^2 \le \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n), \chi^2 \ge \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n)\}$

2. μ未知时，总体方差σ^2的假设检验

χ^2 检验法

类型	原假设 H_0	备择假设 H_1	检验统计量	拒绝域
双边检验	$\sigma^2 = \sigma_0^2$	$\sigma^2 \neq \sigma_0^2$	$\chi^2 = \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$	$\chi^2 \leq \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$ $\chi^2 \geq \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$
单边检验	$\sigma^2 \leq \sigma_0^2$	$\sigma^2 > \sigma_0^2$		$\chi^2 \geq \chi^2_{\alpha}(n-1)$
	$\sigma^2 \geq \sigma_0^2$	$\sigma^2 < \sigma_0^2$		$\chi^2 \leq \chi^2_{1-\alpha}(n-1)$

例4. 在生产线上随机地取10只电阻测得电阻值（单位：欧姆）如下：

114.2，91.9，107.5，89.1，87.2，87.6，95.8 ，98.4，94.6，85.4

设电阻的电阻值总体服从正态分布，问在显著性水平α=0.1下方差与60是否有显著差异?

解： 原假设 $H_0:\sigma^2=60$，　　备择假设 $H_1:\sigma^2\neq 60$

检验统计量：　$$\chi^2=\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$$

拒绝域：　$$W=\{\chi^2\le\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1),\ \chi^2\ge\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\}$$

n=10 ，α=0.1，　$\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)=\chi^2_{0.95}(9)=3.325$

$\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)=\chi^2_{0.05}(9)=16.919$　　$W=\{\chi^2\le 3.325,\ \chi^2\ge 16.919\}$

$s^2=87.6823$　　$$\chi^2=\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}=\frac{9\times 87.6823}{60}=13.15235$$

因为　$\chi^2\notin W$　所以接受H_0，

即在显著性水平α=0.1下，认为方差与60无显著差异.

例5. 某种导线，要求其电阻的标准差不得超过0.005欧姆，今在生产的一批导线中取样本9根，测得s=0.007欧姆.设总体服从正态分布，参数均未知，问在显著性水平α=0.05下，能否认为这批导线的标准差显著地偏大?

解: $s^2 = 0.007^2 > 0.005^2$

原假设$H_0: \sigma^2 \le 0.005^2$，备择假设 $H_1: \sigma^2 > 0.005^2$

检验统计量： $\chi^2 = \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$

拒绝域： $W = \{\chi^2 \ge \chi^2_\alpha(n-1)\}$

n=9，α=0.05， $\chi^2_\alpha(n-1) = \chi^2_{0.05}(8) = 15.507$

$W = \{\chi^2 \ge 15.507\}$

$$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \frac{8\times 0.007^2}{0.005^2} = 15.68 \quad \ge 15.507$$

因为 $\chi^2 \in W$ 所以拒绝H_0，

即在显著性水平α=0.05下，认为这批导线的标准差显著地偏大.

三、两个正态总体均值的假设检验

$X_1, X_2, \cdots, X_{n_1}$ 为取自总体 $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ 的样本,

$Y_1, Y_2, \cdots, Y_{n_2}$ 为取自总体 $N(\mu_2, \sigma_2^2)$ 的样本,

且两总体相互独立。

$\overline{X}, S_1^2$; $\overline{Y}, S_2^2$ 分别表示两样本的样本均值与样本方差

1. 已知σ_1^2，σ_2^2 时，总体均值的假设检验

U 检验法

类型	原假设 H_0	备择假设 H_1	检验统计量	拒绝域
双边检验	$\mu_1=\mu_2$	$\mu_1 \neq \mu_2$	$U=\dfrac{\bar{X}-\bar{Y}}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}}$	$\lvert U \rvert \geq z_{\frac{\alpha}{2}}$
单边检验	$\mu_1 \leq \mu_2$	$\mu_1 > \mu_2$		$U \geq z_\alpha$
	$\mu_1 \geq \mu_2$	$\mu_1 < \mu_2$		$U \leq -z_\alpha$

2. σ_1^2, σ_2^2未知，但$\sigma_1^2=\sigma_2^2$ 时，总体均值的假设检验

T 检验法

类型	原假设 H_0	备择假设 H_1	检验统计量	拒绝域
双边检验	$\mu_1=\mu_2$	$\mu_1\neq\mu_2$	$T=\dfrac{(\overline{X}-\overline{Y})}{\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}\cdot S_w}$ $S_w^2=\dfrac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}$	$\lvert T\rvert\geq t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1+n_2-2)$
单边检验	$\mu_1\leq\mu_2$	$\mu_1>\mu_2$		$T\geq t_{\alpha}(n_1+n_2-2)$
	$\mu_1\geq\mu_2$	$\mu_1<\mu_2$		$T\leq -t_{\alpha}(n_1+n_2-2)$

例6.测得两批小学生的身高（单位：厘米）为：

第一批：140，138，143，142，144，137，141

第二批：135，140，142，136，138，140.

设这两个相互独立的总体都服从正态分布，且方差相同，试判断这两批学生的平均身高是否相等（α=0.10）。

解： 原假设 $H_0: \mu_1 = \mu_2$， 备择假设 $H_1: \mu_1 \neq \mu_2$，

检验统计量：
$$T = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} \sqrt{\frac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}}}$$

拒绝域：
$$W = \{|T| \geq t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1+n_2-2)\}$$

$$n_1 = 7, \quad \bar{x} = 140.7143, \quad s_1^2 = 6.5714,$$

$$n_2 = 6, \quad \bar{y} = 138.5 \quad s_2^2 = 7.1$$

$$\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} = \sqrt{\frac{1}{7} + \frac{1}{6}} = 0.5563$$

$$\sqrt{\frac{(n_1-1)s_1^2 + (n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2}} = \sqrt{\frac{6 \times 6.5714 + 5 \times 7.1}{11}} = 2.6099$$

α=0.10 $\quad t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1+n_2-2) = t_{0.05}(11) = 1.7989$

$$W = \{|T| \geq t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1+n_2-2)\} = \{|T| \geq 1.7989\}$$

例6.测得两批小学生的身高（单位：厘米）为：

第一批：140，138，143，142，144，137，141

第二批：135，140，142，136，138，140.

设这两个相互独立的总体都服从正态分布，且方差相同，试判断这两批学生的平均身高是否相等（α=0.10）。

解:

$$t=\frac{\bar{x}-\bar{y}}{\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}\sqrt{\frac{(n_1-1)s_1^2+(n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2}}}$$

$$=\frac{140.7143-138.5}{0.5563\times 2.6099}=1.5251 \quad <1.7989$$

因为 $t\notin W$ 所以接受H_0，

认为这两批学生的平均身高是相等的.

例7.某校从经常参加体育锻炼的男生中随机地选出50名，测得平均身高174.34cm，从不经常参加体育锻炼的男生中随机地选出50名，测得平均身高172.42cm，统计资料表明两种男生的身高都服从正态分布，其标准差分别为5.35cm和6.11cm，问该校经常参加体育锻炼的男生是否比不经常参加体育锻炼的男生平均身高要高些？（α=0.05）

解: $\bar{x} = 174.34$，$\bar{y} = 172.42$，$\bar{x} > \bar{y}$，

原假设 $H_0: \mu_1 \le \mu_2$，　　备择假设 $H_1: \mu_1 > \mu_2$，

$\sigma_1^2 = 5.35^2$，　$\sigma_2^2 = 6.11^2$，

检验统计量:
$$U = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

拒绝域:
$$W = \{U \ge z_\alpha\}$$

例7.某校从经常参加体育锻炼的男生中随机地选出50名，测得平均身高174.34cm，从不经常参加体育锻炼的男生中随机地选出50名，测得平均身高172.42cm，统计资料表明两种男生的身高都服从正态分布，其标准差分别为5.35cm和6.11cm，问该校经常参加体育锻炼的男生是否比不经常参加体育锻炼的男生平均身高要高些？ （α=0.05 ）

解: $\alpha = 0.05$, $z_{\alpha} = z_{0.05} = 1.645$

$$W = \{U \geq z_{\alpha}\} = \{U \geq 1.645\}$$

$$u = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} = \frac{174.34 - 172.42}{\sqrt{\frac{5.35^2}{50} + \frac{6.11^2}{50}}} = 1.6717 \quad > 1.645$$

因为 $u \in W$ 所以拒绝H_0，

认为该校经常参加体育锻炼的男生比不经常参加体育锻炼的男生平均身高要高些.

四、两个正态总体方差的假设检验

1．已知 μ_1，μ_2 时，总体方差的假设检验

F 检验法

类型	原假设 H_0	备择假设 H_1	检验统计量	拒绝域
双边检验	$\sigma_1^2=\sigma_2^2$	$\sigma_1^2\neq\sigma_2^2$	$F=\dfrac{\frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\mu_1)^2}{\frac{1}{n_2}\sum_{i=1}^{n_2}(Y_i-\mu_2)^2}$	$F\le F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1,\ n_2)$ $F\ge F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1,\ n_2)$
单边检验	$\sigma_1^2\le\sigma_2^2$	$\sigma_1^2>\sigma_2^2$		$F\ge F_{\alpha}(n_1,\ n_2)$
	$\sigma_1^2\ge\sigma_2^2$	$\sigma_1^2<\sigma_2^2$		$F\le F_{1-\alpha}(n_1,\ n_2)$

2. μ_1，μ_2 未知时，总体方差的假设检验

F 检验法

类型	原假设 H_0	备择假设 H_1	检验统计量	拒绝域
双边检验	$\sigma_1^2 = \sigma_2^2$	$\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$	$F = \dfrac{S_1^2}{S_2^2}$	$F \le F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,\ n_2-1)$ $F \ge F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,\ n_2-1)$
单边检验	$\sigma_1^2 \le \sigma_2^2$	$\sigma_1^2 > \sigma_2^2$		$F \ge F_{\alpha}(n_1-1,\ n_2-1)$
	$\sigma_1^2 \ge \sigma_2^2$	$\sigma_1^2 < \sigma_2^2$		$F \le F_{1-\alpha}(n_1-1,\ n_2-1)$

例8.设两家银行储户的年存款余额均服从正态分布，经市场调查，分别抽取容量为21和16的样本，得样本均值分别为650元和800元，样本方差分别为80^2和70^2，能否认为第二家银行储户的平均年存款余额显著高于第一家银行储户的平均年存款余额。（α=0.10）

解:（1）先检验两家银行储户的年存款余额的方差有无显著性差异。

原假设 H_0: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$　　备择假设 H_1: $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$

检验统计量:
$$F = \frac{S_1^2}{S_2^2}$$

拒绝域:

$$W = \{F \le F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1 - 1,\ n_2 - 1),\ F \ge F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1 - 1,\ n_2 - 1)\}$$

例8.设两家银行储户的年存款余额均服从正态分布，经市场调查，分别抽取容量为21和16的样本，得样本均值分别为650元和800元，样本方差分别为80^2和70^2，能否认为第二家银行储户的平均年存款余额显著高于第一家银行储户的平均年存款余额。 （α=0.10）

解: α=0.10 $\quad n_1=21, n_2=16$

$$F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,\ n_2-1)=F_{0.05}(20,15)=2.33$$

$$F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,\ n_2-1)=\frac{1}{F_{\frac{\alpha}{2}}(n_2-1,\ n_1-1)}=\frac{1}{F_{0.05}(15,20)}=\frac{1}{2.20}=0.4545$$

$$W=\{F\le F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,\ n_2-1),\ F\ge F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,\ n_2-1)\}$$
$$=\{F\le 0.4545,\ \ F\ge 2.33\}$$

$$s_1^2=80^2, s_2^2=70^2 \qquad f=\frac{s_1^2}{s_2^2}=\frac{80^2}{70^2}=1.3061$$

因为 $f\notin W$ 所以接受H_0，

认为两家银行储户的年存款余额的方差无显著性差异.

（2）再检验第二家银行储户的平均年存款余额是否显著高于第一家银行储户的平均年存款余额。

$\bar{x} = 650$， $\bar{y} = 800$， $\bar{x} < \bar{y}$，

原假设 $H_0: \mu_1 \geq \mu_2$， 备择假设 $H_1: \mu_1 < \mu_2$，

检验统计量：
$$T = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}\sqrt{\frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}}}$$

拒绝域：
$$W = \{T \leq -t_\alpha(n_1 + n_2 - 2)\}$$

$$n_1 = 21, \qquad \bar{x} = 650 \qquad s_1^2 = 80^2,$$

$$n_2 = 16, \qquad \bar{y} = 800 \qquad s_2^2 = 70^2$$

α=0.10 $\qquad t_\alpha(n_1 + n_2 - 2) = t_{0.10}(35) = 1.3062$

$$W = \{T \le -t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1 + n_2 - 2)\} = \{T \le -1.3062\}$$

$$\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} = \sqrt{\frac{1}{21} + \frac{1}{16}} = 0.3318$$

$$\sqrt{\frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}} = \sqrt{\frac{20 \times 80^2 + 15 \times 70^2}{35}} = 75.8758$$

$$t=\frac{\bar{x}-\bar{y}}{\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}\sqrt{\frac{(n_1-1)s_1^2+(n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2}}}$$

$$=\frac{650-800}{0.3318\times 75.8758}=-5.9582 \quad <-1.3062$$

因为 $t\in W$ 所以拒绝H_0，

认为第二家银行储户的平均年存款余额显著高于第一家银行储户的平均年存款余额。

第三节 (0-1) 总体参数 p 的大样本检验

在实际问题中，经常会遇到要对（0-1）总体中参数 p 进行检验的问题。这时，一般是抽取大容量（$n>30$）的样本，利用中心极限定理，对参数 p 进行假设检验.

下面先用此方法对双边检验进行假设检验，然后推广到单边检验。

已知总体X 服从（0-1）分布，其分布律为

$$f(x;\ p) = p^{x}(1-p)^{1-x},\quad x = 0,1$$

则 $E(X) = p,\quad D(X) = p(1-p)$

现抽取容量为n（n>30）的样本$X_1, X_2, \ldots, X_n$，样本均值为$\overline{X}$，

对参数 p 的双边检验：

原假设 $H_0: p = p_0$， 备择假设 $H_1: p \neq p_0$

当原假设 H_0: $p = p_0$ 为真时，由独立同分布中心极限定理可知：

$$U = \frac{\overline{X} - p_0}{\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}} \overset{\text{近似}}{\sim} N(0,1)$$

因为 $\bar{X}$是 p 的达到方差界的无偏估计，所以U的

值应较集中在零附近，而 H_0: $p = p_0$ 的拒绝域应体现

为 |U| 偏大。即拒绝域应形如： $W = \{|U| \geq K\}$

设显著性水平为α，由

$$U = \frac{\overline{X} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} \overset{\text{近似}}{\sim} N(0,1)$$

得： $K = z_{\alpha/2}$， $W = \{|U| \geq z_{\alpha/2}\}$

U 检验法

类型	原假设 H_0	备择假设 H_1	检验统计量	拒绝域
双边检验	$p=p_0$	$p\neq p_0$	$U=\dfrac{\bar{X}-p_0}{\sqrt{\dfrac{p_0(1-p_0)}{n}}}$	$\lvert U\rvert \geq z_{\frac{\alpha}{2}}$
单边检验	$p\leq p_0$	$p>p_0$		$U\geq z_\alpha$
	$p\geq p_0$	$p<p_0$		$U\leq -z_\alpha$

例1. 某药厂在广告上声称该药品对某种疾病的治愈率为80%，一家医院对这种药品临床使用120例，治愈85人，问该药品的广告是否真实(α=0.02)?

解： 由于n=120为大样本，设随机变量X为

$$X=\begin{cases}1 & \text{抽查一位服用该药品的病人发现疾病被治愈}\\ 0 & \text{抽查一位服用该药品的病人发现疾病未被治愈}\end{cases}$$

则X~（0-1）分布.

原假设$H_0: p=80\%$，备择假设$H_1: p\neq 80\%$

检验统计量为$U=\dfrac{\overline{X}-p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)/n}}$ 拒绝域：$W=\{|U|\geq z_{\alpha/2}\}$

α=0.02， $z_{\alpha/2}=z_{0.01}=2.33$ $W=\{|U|\geq z_{\alpha/2}\}=\{|U|\geq 2.33\}$

$$\bar{x}=\frac{85}{120}=0.7083 \quad |u|=\frac{|\bar{x}-p_0|}{\sqrt{p(1-p)/n}}=\frac{|0.7083-0.8|}{\sqrt{\dfrac{0.8\times 0.2}{120}}}=2.5113>2.33$$

因为$u\in W$所以拒绝H_0，认为该药品的广告不真实.

例2. 若在猜硬币正反面的游戏中，某人在100次试猜中共猜中 60次，是否可以认为此人有诀窍？(α=0.05)

解： 由于n=100为大样本，设随机变量X为

$$X=\begin{cases}1 & \text{此人在一次试猜中猜中}\\ 0 & \text{此人在一次试猜中没猜中}\end{cases}$$

则X~（0-1）分布.

若有诀窍，则 猜中的概率 p 应大于1/2.

$$\bar{x}=\frac{60}{100}=0.6>\frac{1}{2}$$

原假设 $H_0: p \le \frac{1}{2}$，　备择假设 $H_1: p>\frac{1}{2}$

检验统计量为 $U=\dfrac{\bar{X}-p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)/n}}$　拒绝域：$W=\{U \ge z_\alpha\}$

α=0.05，　$z_\alpha = z_{0.05} = 1.645$　$W=\{U \ge z_\alpha\}=\{U \ge 1.645\}$

$$u=\frac{\bar{x}-p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)/n}}=\frac{0.6-0.5}{\sqrt{\dfrac{0.5\times 0.5}{100}}}=2>1.645$$

因为$u \in W$ 所以拒绝H_0，可以认为此人猜硬币有某种诀窍。

第四节　分布函数的拟合优度检验

前面几节中讨论了总体分布形式已知时关于总体参数的假设检验。但在许多实际问题中并不能预先知道总体分布的形式。这时，就需要根据样本提供的信息，对总体的分布作出假设，并对此假设进行检验。本节我们将介绍由英国统计学家卡尔·皮尔逊提出的χ^2拟合优度检验法。

χ^2 拟合优度检验法的基本原理和步骤：

1. 提出原假设 H_0：总体 X 的分布函数为 $F(x)$

备择假设 H_1：总体 X 的分布函不是 $F(x)$

说明： (1) 备择假设可以不必写出.

(2) 若X是离散型总体，原假设相当于：

H_0：总体 X 的分布律为：$P\{X=x_i\}=p_i, i=1,2,\cdots\cdots$

若X是连续型总体，原假设相当于：

H_0：总体 X 的概率密度为 $f(x)$.

(3) 若在原假设 H_0 下，总体分布的形式已知，但有 r 个参数未知，这时需要用极大似然估计法先估计这 r 个参数.

2. 将 x 轴分成K个互不重迭的小区间：

$$(-\infty,\ b_1),[b_1,\ b_2),\cdots,[b_{K-1},+\infty)$$

3. 计算样本的n个观察值落入以上每个区间的个数，记为 f_i（$i=1,2,\cdots\cdots,K$），称其为**实际频数**. 所有实际频数之和 $f_1+f_2+\ldots+f_k$ 等于样本容量n.

4. 在原假设H_0为真时，计算总体落入每个区间的概率 $P_i=F(b_i)-F(b_{i-1})$（$i=1,2,\cdots\cdots,K$），于是np_i就是落入第i个区间的样本值的**理论频数**.

f_i-nP_i 反映了实际频数与理论频数的差异.

当原假设H_0为真，样本容量又充分大时，两者的差异应不会太大，皮尔逊由此引进统计量：

$$\chi^2=\sum_{i=1}^{k}\frac{(f_i-nP_i)^2}{nP_i}$$

定理（皮尔逊）若 n 充分大，H_0为真时，不论 H_0中的分布属于什么类型，统计量

$$\chi^2=\sum_{i=1}^{k}\frac{(f_i-nP_i)^2}{nP_i}$$

总是近似服从自由度为 K-r-1 的χ^2分布，即

$$\chi^2=\sum_{i=1}^{k}\frac{(f_i-nP_i)^2}{nP_i}\sim\chi^2(K-r-1)$$

其中 r 是分布中被估计的参数的个数.

5.检验统计量：$\chi^2=\sum_{i=1}^{k}\frac{(f_i-nP_i)^2}{nP_i}$

拒绝域： $W=\{\chi^2\geq\chi^2_{\alpha}(K-r-1)\}$

注： χ^2拟合优度检验法是在n充分大的条件下得到的，

所以在使用时必须注意 n 要足够大及 np_i 不能太小，

根据实际经验，要求 $n\geq50$，理论频数$np_i\geq4$ ，

否则要适当合并区间以满足这个要求。

例1.某个城市在某一时期内共发生交通事故600次，按不同颜色小汽车分类如下

汽车颜色	红	棕	黄	白	灰	蓝
事故次数	75	125	70	80	135	115

问：交通事故是否与汽车的颜色有关? $(\alpha = 0.05)$

分析：

如果交通事故的发生与汽车的颜色无关，则每种颜色的小汽车发生交通事故的可能性是一样的.

解： **原假设** $H_0: P_i = P\{X = x_i\} = \dfrac{1}{6} \qquad (i = 1,2,\cdots,6)$

检验统计量： $\chi^2 = \sum_{i=1}^{6} \dfrac{(f_i - nP_i)^2}{nP_i}$

拒绝域： $W = \{\chi^2 \geq \chi^2_\alpha(k - r - 1)\}$

$$K = 6, \quad r = 0, \quad \alpha = 0.05,$$

$$\chi^2_\alpha(k - r - 1) = \chi^2_{0.05}(5) = 11.071$$

$$W = \{\chi^2 \geq 11.071\}$$

列表计算

汽车颜色	f_i	P_i	nP_i	$f_i - nP_i$	$\frac{(f_i - nP_i)^2}{nP_i}$
红	75	1/6	100	-25	6.25
棕	125	1/6	100	25	6.25
黄	70	1/6	100	30	9
白	80	1/6	100	-20	4
灰	135	1/6	100	35	12.25
蓝	115	1/6	100	15	2.25
$\sum$	n=600				40

$\chi^2 = 40 \quad > 11.071$ 因为 $\chi^2 \in W$

所以拒绝H_0，认为交通事故与汽车的颜色有关.

例2. 某电话交换台，在100分钟内记录了每分钟被呼唤的次数X，设f_i为出现该 X值的频数，结果如下：

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
f_i	0	7	12	18	17	20	13	6	3	4

问总体X（电话交换台每分钟呼唤次数）服从泊松分布吗？$(\alpha = 0.05)$

解：按题意，原假设 $H_0: X \sim \pi(\lambda)$

由于λ未知，首先须用极大似然估计法，求得λ的估计值：

$$\hat{\lambda} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \bar{x} = 4.33$$

检验统计量：
$$\chi^2 = \sum_i \frac{(f_i - nP_i)^2}{nP_i}$$

拒绝域：
$$W = \{\chi^2 \geq \chi_\alpha^2(k-r-1)\}$$

列表计算：

X	f_i	P_i	nP_i	$f_i - nP_i$	$\dfrac{(f_i - nP_i)^2}{nP_i}$
≤1	7	0.0702	7.02	-0.02	0.00006
2	12	0.1234	12.34	-0.34	0.0094
3	18	0.1782	17.82	0.18	0.0018
4	17	0.1929	19.29	-2.29	0.2719
5	20	0.1670	16.70	3.30	0.6521
6	13	0.1205	12.05	0.95	0.0749
7	6	0.0746	7.46	-1.46	0.2857
≥8	7	0.0732	7.32	-0.32	0.0140
$\sum$	n=100				1.3099

$$K = 8,\quad r = 1,\quad \alpha = 0.05,\quad \chi^2_\alpha(k-r-1) = \chi^2_{0.05}(6) = 12.592$$

$$W = \{\chi^2 \geq 12.592\} \qquad \chi^2 = 1.3099 < 12.592$$

因为 $\chi^2 \notin W$ 所以接受H_0,

认为电话交换台每分钟呼唤次数X 服从泊松分布.

说明: 将n=0和n=1合并,n=8与n≥9合并是为了保证理论频数$np_i \geq 4$.

例3. 为了研究患某种疾病的21~59岁男子的血压（收缩压，单位：mm-Hg）这一总体X，抽查了100个男子，得

$\overline{x} = 126.37$， $b_2 = 17.75^2$，样本值分组如下：

序号	分组	f_i	序号	分组	f_i
1	$(-\infty, 99.5)$	5	6	$[139.5, 149.5)$	9
2	$[99.5, 109.5)$	8	7	$[149.5, 159.5)$	5
3	$[109.5, 119.5)$	22	8	$[159.5, 169.5)$	5
4	$[119.5, 129.5)$	27	9	$[169.5, +\infty)$	2
5	$[129.5, 139.5)$	17			

取 $\alpha=0.10$，检验21~59岁男子的血压（收缩压）总体X是否服从正态分布。

解： 按题意，原假设 $H_0: X \sim N(\mu, \sigma^2)$

由于μ,σ^2未知，首先须用极大似然估计法，求得其估计值：

$$\hat{\mu} = \bar{x} = 126.37, \quad \hat{\sigma}^2 = b_2 = \frac{1}{100}\sum_{i=1}^{100}(X_i - \bar{X})^2 = 17.75^2$$

检验统计量： $\chi^2 = \sum_i \frac{(f_i - nP_i)^2}{nP_i}$

拒绝域： $W = \{\chi^2 \geq \chi_\alpha^2(k - r - 1)\}$

列表计算：

H_0为真时，$X \sim N(126.37, 17.75^2)$

$$P\{X < 99.5\} = \Phi(-1.51) = 1 - \Phi(1.51)$$

$$= 1 - 0.9345 = 0.0655$$

$$P\{99.5 \leq X < 109.5\} = \Phi(-0.95) - \Phi(-1.51)$$

$$= \Phi(1.51) - \Phi(0.95) = 0.9345 - 0.8289 = 0.1056$$

$$P\{109.5 \leq X < 119.5\} = \Phi(-0.39) - \Phi(-0.95)$$

$$= \Phi(0.95) - \Phi(0.39) = 0.8289 - 0.6517 = 0.1772$$

$$P\{119.5 \le X < 129.5\} = \Phi(0.18) - \Phi(-0.39)$$

$$= \Phi(0.18) + \Phi(0.39) - 1$$

$$= 0.5714 + 0.6517 - 1 = 0.2231$$

$$P\{129.5 \le X < 139.5\} = \Phi(0.74) - \Phi(0.18)$$

$$= 0.7703 - 0.5714 = 0.1989$$

$$P\{139.5 \le X < 149.5\} = \Phi(1.30) - \Phi(0.74)$$

$$= 0.9032 - 0.7703 = 0.1329$$

$$P\{149.5 \le X < 159.5\} = \Phi(1.87) - \Phi(1.30)$$

$$= 0.9693 - 0.9032 = 0.0661$$

$$P\{X \ge 159.5\} = 1 - \Phi(1.87) = 1 - 0.9693 = 0.0307$$

列表计算:

X	分组	f_i	P_i	nP_i	$f_i - nP_i$	$\frac{(f_i - nP_i)^2}{nP_i}$
1	$(-\infty$, 99.5)	5	0.0655	6.55	-1.55	0.3668
2	[99.5,109.5)	8	0.1056	10.56	-2.56	0.6206
3	[109.5,119.5)	22	0.1772	17.72	4.28	1.0338
4	[119.5,129.5)	27	0.2231	22.31	4.69	0.9859
5	[129.5,139.5)	17	0.1989	19.89	-2.89	0.4199
6	[139.5,149.5)	9	0.1329	13.29	-4.29	1.3848
7	[149.5,159.5)	5	0.0661	6.61		
8	[159.5, $+\infty$)	7	0.0307	3.07	2.32	0.5560
$\sum$	n=100					5.3678

$$K = 7, \quad r = 2, \quad \alpha = 0.10,$$

$$\chi_{\alpha}^{2}(k - r - 1) = \chi_{0.10}^{2}(4) \quad = 7.779$$

$$W = \{\chi^{2} \geq 7.779\}$$

$$\chi^{2} = 5.3678 \quad < 7.779$$

因为 $\chi^{2} \notin W$ **所以接受H_0，**

即21~59岁男子的血压（收缩压）总体X服从正态分布。