

华中科技大学研究生课程考试试卷

课程名称: 应用高等工程数学 课程类别 ☒ 公共课 ☐ 专业课 考核形式 ☐ 开卷 ☒ 闭卷

学生类别 _____ 考试日期 2021-12-22 学生所在院系 _____

学号 _____ 姓名 _____ 任课教师 _____

一、填空 (每小题 3 分, 共 24 分)

1、 \mathbb{R}^4 中的两个子空间 $W_1 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4)^T \mid x_1 = x_2 = 0\}$, $W_2 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4)^T \mid x_3 = x_4\}$, 则 W_1 的维数为____, W_2 的维数为____, $W_1 \cap W_2$ 的维数为_____。

2、设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, 则 $A^5 - 2A^4 - 3A^3 + A^2 - A - 4I =$ _____。

3、方阵 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ 的最小多项式为_____。

4、在计算机上求解方程 $x^2 + (10^{15} + 1)x + 10^{15} = 0$ 时, 考虑以下两种算法: (A) $x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, x_2 = \frac{c}{a \cdot x_1}$; (B) $x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, x_1 = \frac{c}{a \cdot x_2}$, 其中 $a = 1, b = 10^{15} + 1, c = 10^{15}$, 则两种算法中更好的算法是()。

5、对于区间 $[0, 1]$ 上带权函数 $\rho = 1$ 的两点 Gauss 型求积公式

$$I = \int_0^1 f(x) dx \approx A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2),$$

求积节点 $x_1 =$ ____, $x_2 =$ _____。

6、对于初值问题 $\begin{cases} y'(x) = -10y \\ y(0) = y_0 \end{cases}$, 考虑递推公式 $y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}[f(x_n, y_n) +$

$f(x_{n+1}, y_{n+1})]$, 步长取 $h = 0.2$ 时算法是否收敛_____。

7、对线性方程组

$$\begin{cases} 3x_1 - ax_2 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 = 1 \\ -2x_3 = 9 \end{cases}$$

使用 Jacobi 迭代法求解, 当 $a = 2$ 时是否收敛____, 当 $a = -5$ 时是否收敛____, 当 $a = 7$ 时是否收敛_____。

8、使用迭代公式 $x_{k+1} = x_k - 2 \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$ 求解方程 $f(x) = (x-1)^2 \sin(\pi x) = 0$ 在 $x = 1$ 处的根时, 收敛阶数为_____。

二、(8 分) 已知 R^3 中的两个基:

$$B_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

(1)、求 B_1 到 B_2 的基变换矩阵;

(2)、求在 B_1, B_2 下有相同坐标的所有向量。

三、(10 分) 设 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ -5 & 6 & 1 \end{pmatrix}$, 求可逆矩阵 P 和 Jordan 矩阵 J , 使 $P^{-1}AP = J$ 。

四、(10 分)

(1)、求二次多项式 $f(x)$ 使得 $f(0) = 1, f(1) = -1, f(2) = -1$ 。

(2)、试说明存在无穷多个三次多项式 $g(x)$ 使得 $g(0) = 1, g(1) = -1, g(2) = -1$ 。

(3)、求三次多项式 $g(x)$ 使得 $g(0) = 1, g(1) = -1, g(2) = -1, g'(0) = 1$ 。

五、（8 分）求出不超过二次的多项式 $P_2(x)$ 使 $\int_{-1}^1 (x^3 - P_2(x))^2 dx$ 的值达到最小（即 $P_2(x)$ 为 x^3 在 $(-1,1)$ 上的二次最佳平方逼近），并求出此最小值。

六、（10 分）

（1）、使用梯形公式计算积分 $\int_0^1 x^2 e^x dx$ ，并利用 $[a,b]$ 区间上梯形公式的误差公式 $R[f] = -\frac{f''(\xi)}{12}(b-a)^3$ 估计截断误差绝对值的一个具体上界（结果中若含有 e ，可以保留不需算出）；

（2）、若使用复化梯形公式计算积分 $\int_0^1 x^2 e^x dx$ ，要求截断误差绝对值不超过 $\frac{7e}{3} * 10^{-4}$ ，需要取多少个节点？

七、（10 分）对于初值问题 $\begin{cases} y'(x) = f(x, y) \\ y(a) = y_0 \end{cases}$ ，考虑使用递推公式

$$y_{n+1} = \frac{1}{2}y_n + \frac{1}{2}y_{n-1} + h[af(x_n, y_n)] \text{ 求解。}$$

（1）、若 $a = 1, h = 0.5, x_0 = 0, x_n = x_0 + nh, f(x, y) = 2xy, y_0 = 2, y_1 = 4$ ，利用此递推公式求出 y_2 与 y_3 的值。

（2）、若要使得此递推公式有尽可能高的局部截断误差精度，则 a 应取何值？

八、（10 分）对于线性方程组
$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 4 \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 5 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 6 \end{cases}$$

（1）、使用 LU 分解法求解方程组；

（2）、若求解线性方程组代入系数时出现误差，变为实际

$$\text{求解线性方程组 } \begin{cases} 2.002x_1 + 2.003x_2 + 2x_3 = 4 \\ 2.001x_1 + 3x_2 + 3.002x_3 = 5 \\ 2x_1 + 3.001x_2 + 4x_3 = 6 \end{cases}, \text{ 已知解的相对误差有近似}$$

估计 $\frac{\|\delta x\|_1}{\|x\|_1} \approx \text{cond}_1(A) \frac{\|\delta A\|_1}{\|A\|_1}$ ，其中 $\text{cond}_1(A)$ 为原系数矩阵在 1 范数下的条件

数，请估计此时解的相对误差 $\frac{\|\delta x\|_1}{\|x\|_1}$ 。

九、（10 分）对于非线性方程 $f(x) = (e^x - 1)x^2(x - 1) = 0$ ，

(1)、证明当初值 x_0 在根 $x^* = 1$ 附近时, 迭代公式 $x_{k+1} = \ln \left(\frac{e^{x_k} + x_k - 1}{x_k} \right)$ 所得 数列将收敛到 $x^* = 1$;

(2)、此方程的牛顿迭代公式在根 $x^* = 0$ 附近是否二阶收敛? 若不是二阶收敛, 试将牛顿迭代法进行改进使其在根 $x^* = 0$ 附近二阶收敛。