第二章 方阵的相似化简

§ 2.1 特征多项式

对于复数域上 n 阶方阵 $A=[a_{ij}]$，它的特征多项式

$$\det(\lambda I_n - A)=\begin{vmatrix} \lambda-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda-a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda-a_{nn} \end{vmatrix}$$

是 λ 的 n 次多项式.

$$\det(\lambda I_n - A) = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix}$$

§ 2.1 特征多项式

$$f(\lambda) \triangleq det(\lambda I_n - A) = \lambda^n + b_1\lambda^{n-1} + \cdots + b_{n-1}\lambda + b_n.$$

这个多项式在复数域有 n 个根 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$(重根按重数计算).

故$f(\lambda)$又可表示为

$$f(\lambda) \triangleq det(\lambda I_n - A) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\cdots(\lambda - \lambda_n).$$

注:

(1) $\operatorname{tr} A = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn} = -b_1;$

(2) $\det A = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdots \lambda_n = (-1)^n b_n.$

说明,方阵 A 的迹 ***trA*** (即 A 的对角线元素之和)等于 A 的所有特征值(可以相重)的和. A 的行列式的值$|A|$等于所有特征值的乘积.

§2.1 特征多项式

定义方阵 A 的多项式为

$$p(A) = a_m A^m + a_{m-1} A^{m-1} + \cdots + a_0 I,$$

把它看作是多项式

$$p(t) = a_m t^m + a_{m-1} t^{m-1} + \cdots + a_0$$

中代换 t 为 A 的结果, 记为 $p(A)$, 它是与 A 同阶的方阵.

例如: $g(t)=t^2-3t+4,\ h(t)=t^2-3t+2$

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 2\end{bmatrix}.$$

则有

$$g(A)=A^2-3A+4I=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix},$$

$$h(A)=A^2-3A+2I=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}.\ \blacksquare$$

例如：设 $p(t), q(t)$ 是两个多项式,它们的乘积

$$h(t) = p(t)q(t)$$

仍是一个多项式.

由于 $p(t)q(t) = q(t)p(t)$, 所以有

$$h(A) = p(A)q(A) = q(A)p(A),$$

即 $p(A)$ 与 $q(A)$ 可以互换.

§ 2.1 特征多项式

定理 设 n 阶方阵 A 的 n 特征值是 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$,相应的特征向量分别为 $\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2,\cdots,\boldsymbol{X}_n$,而 $g(t)$ 是一多项式, 那么 $g(A)$的 n 个特征值是$g(\lambda_1),g(\lambda_2),\cdots,g(\lambda_n)$,且 $\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2,\cdots,\boldsymbol{X}_n$分别是相应的特征向量.

证 不妨设 $g(t)=a_{\boldsymbol{m}}t^m+a_{\boldsymbol{m-1}}t^{m-1}+\cdots+a_{\boldsymbol{0}}$,

由于

$$A\boldsymbol{X}_i=\lambda_i\boldsymbol{X}_i,A^2\boldsymbol{X}_i=A(A\boldsymbol{X}_i)=\lambda_i(A\boldsymbol{X}_i)=\lambda_i^2\boldsymbol{X}_i,\cdots,A^m\boldsymbol{X}_i=\lambda_i^m\boldsymbol{X}_i$$

故

$$\begin{aligned}g(A)\boldsymbol{X}_i&=(a_{\boldsymbol{m}}A^m+a_{\boldsymbol{m-1}}A^{m-1}+\cdots+a_{\boldsymbol{0}}I)\boldsymbol{X}_i\\&=(a_{\boldsymbol{m}}\lambda_i^m+a_{\boldsymbol{m-1}}\lambda_i^{m-1}+\cdots+a_{\boldsymbol{0}})\boldsymbol{X}_i=g(\lambda_i)\boldsymbol{X}_i,1\le i\le n,\end{aligned}$$

所以 $g(\lambda_i)$是$g(A)$ 的特征值， $\boldsymbol{X}_i$是相应的特征向量. ■

§ 2.1 特征多项式

方阵$A\neq 0$称为**幂零矩阵**, 如果存在正整数k， 使$A^k=0$.

容易验证$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & \\ & 0 & 1 \\ & & 0 \end{bmatrix}$是幂零矩阵.

因为

$$A^2=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ & 0 & 0 \\ & & 0 \end{bmatrix}, A^3=0.$$

幂零矩阵的特征值必是0.

事实上, 设 λ_0是幂零矩阵 A 的特征值， X_0是相应的特征向量,

则由上述定理知

$$0=A^kX_0=\lambda_0^kX_0,\qquad X_0\neq 0$$

故 $\lambda_0^k=0$, 即 $\lambda_0=0$. ■

定理 (Sylverster) 设A是$m\times n$矩阵, B是$n\times m$矩阵$(m\geq n)$, 方阵AB，BA 的特征多项式分别为$f_{AB}(\lambda), f_{BA}(\lambda)$，则有

$$f_{AB}(\lambda)=\lambda^{m-n}f_{BA}(\lambda).$$

证 设$rankA=r$，则存在m阶可逆矩阵P和n阶可逆矩阵Q，使

$$PAQ=\begin{array}{cc}\begin{bmatrix} I_r & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix} & \begin{array}{l}\}\,r\\ \}\,m-r\end{array}\\ \begin{array}{cc} \underbrace{\quad}_{r} & \underbrace{\quad}_{n-r}\end{array} & \end{array}$$

因而

$$PABP^{-1}=PAQQ^{-1}BP^{-1}$$

$$=\begin{bmatrix} I_r & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix} G_{11} & G_{12}\\ G_{21} & G_{22}\end{bmatrix}=\begin{array}{cc}\begin{bmatrix} G_{11} & G_{12}\\ 0 & 0\end{bmatrix} & \begin{array}{l}\}r\\ \}m-r,\end{array}\\ \begin{array}{cc} \underbrace{\quad}_{r} & \underbrace{\quad}_{m-r}\end{array} & \end{array}$$

其中：$Q^{-1}BP^{-1}=\begin{bmatrix} G_{11} & G_{12}\\ G_{21} & G_{22}\end{bmatrix}$

同理可得

$$Q^{-1}BAQ = Q^{-1}BP^{-1}PAQ$$
$$= \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} G_{11} & 0 \\ G_{21} & 0 \end{bmatrix} & \begin{matrix} \}r \\ \}n-r. \end{matrix} \\ \begin{matrix} \underbrace{\quad}_{r} & \underbrace{\quad}_{n-r} \end{matrix} & \end{array}$$

于是

$$f_{AB}(\lambda) = det(\lambda I_m - AB)$$
$$= det(\lambda I_m - PABP^{-1}) = \lambda^{m-r} det(\lambda I_r - G_{11}),$$
$$f_{BA}(\lambda) = det(\lambda I_n - BA)$$
$$= det(\lambda I_n - Q^{-1}BAQ) = \lambda^{n-r} det(\lambda I_r - G_{11}).$$

比较上述两式便得: $f_{AB}(\lambda) = \lambda^{m-n} f_{BA}(\lambda)$.■

定理表明，m阶方阵AB与n阶方阵BA的非零特征值是相同的，

特别，若$m = n$，则 AB 与 BA 的特征值相同.

§ 2.1 特征多项式

例1 求镜像变换的Householder矩阵$H = I_n - 2\omega\omega^T$ $(|\omega| = 1)$的特征值及它的迹和行列式. (p64)

解 令$A = 2\omega, B = \omega^T$,

则 $AB = 2\omega\omega^T, BA = 2\omega^T\omega = 2$

故$det(\lambda I_n - H) = det[(\lambda - 1)I_n + 2\omega\omega^T]$

$$= (\lambda - 1)^{n-1} det(\lambda - 1 + 2\omega^T\omega) = (\lambda - 1)^{n-1}(\lambda + 1).$$

因而$\lambda = 1$是H 的$n-1$重特征值, $\lambda=-1$是单重特征值.

于是有

$$\mathrm{tr}H=n-1+(-1)=n-2,\ \det H=-1. \ \blacksquare$$

例2 若方阵A的所有特征值的模都小于1,则方阵$I-A$是可逆的. **(p65)**

证 设 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 是A的所有特征值,且$|\lambda_i| < 1, i = 1,2,\cdots,n$,

则 $1-\lambda_1, 1-\lambda_2, \cdots, 1-\lambda_n$是$I-A$的所有特征值.

由于

$$|1-\lambda_i| \geq 1 - |\lambda_i| > 0, i = 1,2,\cdots,n,$$

所以$1-\lambda_i \neq 0$,

故$\det(I-A) = (1-\lambda_1)(1-\lambda_2)\cdots(1-\lambda_n) \neq 0$,

从而$I-A$是可逆的. ■

§ 2.1 特征多项式

定义 设A是一个n 阶方阵, $g(t)$是一多项式, 如果$g(A)=0$, 则称$g(t)$是A 的**零化多项式**.

如 $h(t)=t^2-3t+2$就是$A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 2\end{bmatrix}$的一个零化多项式.

如果$g(t)$是A的一个零化多项式,

而$h(t)$是任一多项式,

则$h(t)g(t)$是A的零化多项式, 因此方阵零化多项式不是唯一的.

那么零化多项式是否存在呢?

下述定理说明A 的零化多项式是存在的.

§ 2.1 特征多项式

定理(Cayley-Hamilton凯莱-哈密尔顿)

设n 阶方阵A 的特征多项式为

$$f(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \lambda^n + b_1\lambda^{n-1} + \cdots + b_{n-1}\lambda + b_n$$

则$f(A) = 0$, 即$\boldsymbol{A}$**的特征多项式是**$\boldsymbol{A}$**的一个零化多项式**.

证 设$B(\lambda)$是$\lambda I - A$的伴随矩阵，则有

$$B(\lambda)(\lambda I - A) = f(\lambda)I = \lambda^n I + b_1\lambda^{n-1}I + \cdots + b_n I.$$

由于方阵$B(\lambda)$的元是$\lambda I - A$的 $n-1$ 阶代数余子式,

故均是λ的次数不大于$n-1$的多项式.

由矩阵的运算性质，$B(\lambda)$可以表示成

$$B(\lambda) = \lambda^{n-1}B_0 + \lambda^{n-2}B_1 + \cdots + B_{n-1},$$

其中$B_0, B_1, \cdots, B_{n-1}$都是$n$ 阶数矩阵.

$$B(\lambda)(\lambda I-A)=f(\lambda)I=\lambda^n I+b_1\lambda^{n-1}I+\cdots+b_{n-1}\lambda I+b_n I.$$

于是

$$B(\lambda)(\lambda I-A)=(\lambda^{n-1}B_0+\lambda^{n-2}B_1+\cdots+\lambda B_{n-2}+B_{n-1})(\lambda I-A)$$

$$=\lambda^n B_0+\lambda^{n-1}(B_1-B_0A)+\cdots+\lambda(B_{n-1}-B_{n-2}A)-B_{n-1}A.$$

比较式中λ各次幂的系数,

$$\left.\begin{array}{ll}\lambda^n: & B_0=I\\ \lambda^{n-1}: & B_1-B_0A=b_1I\\ \vdots & \vdots\\ \lambda: & B_{n-1}-B_{n-2}A=b_{n-1}I\\ \lambda^0: & -B_{n-1}A=b_nI\end{array}\right\}$$

以$A^n,A^{n-1},\cdots,A,I$依次从右边乘上式中的第一式，第二式，…，第n式，第$n+1$式的两端，再把这$n+1$个式子加起来，则左端为零矩阵，右端即为$f(A)$. 因此$\boldsymbol{f(A)=0}$. ■

例3 已知$A=\begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & 1\\ 0 & -1 & 2\end{bmatrix}$,求 $g(A)=2A^5-3A^4-A^3+2A-I$.

(P66)

解 ***A*的特征多项式**

$$f(\lambda)=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -1 & 1\\ -1 & \lambda-1 & -1\\ 0 & 1 & \lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda-2).$$

又 $g(\lambda)=2\lambda^5-3\lambda^4-\lambda^3+2\lambda-1.$

用$f(\lambda)$ 除 $g(\lambda)$得

$$g(\lambda)=(2\lambda^2+5\lambda+9)f(\lambda)+15\lambda^2-33\lambda+17.$$

例3 已知$A=\begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & 1\\ 0 & -1 & 2\end{bmatrix}$,求 $g(A)=2A^5-3A^4-A^3+2A-I$.

(P66)

解 由于$f(A)=0$, 故

$$g(A)=(2A^2+5A+9)f(A)+15A^2-33A+17$$

$$=15A^2-33A+17I$$

$$=15\begin{bmatrix}2 & 3 & -2\\ 2 & 1 & 2\\ -1 & -3 & 3\end{bmatrix}-33\begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & 1\\ 0 & -1 & 2\end{bmatrix}+17\begin{bmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & 1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}14 & 12 & 3\\ -3 & -1 & -3\\ -15 & -12 & -4\end{bmatrix}. \quad \blacksquare$$

例3 已知$A=\begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & 1\\ 0 & -1 & 2\end{bmatrix}$，求$g(A)=2A^5-3A^4-A^3+2A-I$.

(P66)

解 如果不做多项式的除法，可采用待定系数法.

$f(\lambda)=(\lambda-1)^2(\lambda-2)$. $g(\lambda)=2\lambda^5-3\lambda^4-\lambda^3+2\lambda-1$.

用$f(\lambda)$除$g(\lambda)$一般得到下述表达式

$$g(\lambda)=h(\lambda)f(\lambda)+r(\lambda) \qquad (1)$$

其中余式$r(\lambda)$是一多项式，其次数$\deg r(\lambda)<\deg f(\lambda)=3$,

因而可以设 $r(\lambda)=a\lambda^2+b\lambda+c$,

代入(1)式得 $g(\lambda)=h(\lambda)f(\lambda)+a\lambda^2+b\lambda+c$.

将特征值 $\lambda=1,\lambda=2$分别代入(1)式，则有

$$\begin{cases} a+b+c=g(1)=-1, \\ 4a+2b+c=g(2)=11. \end{cases}$$

例3 已知$A=\begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & 1\\ 0 & -1 & 2\end{bmatrix}$, 求$g(A)=2A^5-3A^4-A^3+2A-I$.

(P66)

为了得到a,b,c之间的第三个关系式，我们在(1)式两边对λ求导，

得到 $g'(\lambda)=h'(\lambda)f(\lambda)+h(\lambda)f'(\lambda)+2a\lambda+b$.

用$\lambda=1$代入，考虑到$\lambda=1$是$f(\lambda)=0$的二重根，故有

$$f(1)=f'(1)=0,$$

于是 $2a+b=g'(1)=-3$.

解线性方程组 $\begin{cases}a+b+c & =-1\\ 4a+2b+c & =11\\ 2a+b & =-3\end{cases}$

得 $a=15, b=-33, c=17$.

从而得到同样的结果 $g(A)=r(A)=15A^2-33A+17I$. ■

例4　已知$A=\begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & 1\\ 0 & -1 & 2\end{bmatrix}$, 求逆矩阵$A^{-1}$。

解　由于A 的特征多项式 $f(\lambda)=\lambda^3-4\lambda^2+5\lambda-2$

中常数项不是零，所以$det f(A)\neq 0$,故A 可逆。

又

$$f(A)=A^3-4A^2+5A-2I$$

用A^{-1}乘之, 便得A^{-1}的表示式

$$A^{-1}=\frac{1}{2}(A^2-4\mathrm{A}+5\mathrm{I})=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}3 & -1 & 2\\ -2 & 2 & -2\\ -1 & 1 & 0\end{bmatrix}. \quad \blacksquare$$

§ 2.2 最小多项式

定义 A的零化多项式中,次数最低的首一多项式称为A的**最小多项式**,记为 $m_A(\lambda)$.

§ 2.2 最小多项式

定理　A的最小多项式 $m_A(\lambda)$可整除A的任何零化多项式$g(\lambda)$

且$m_A(\lambda)$是唯一的。

证　若$m_A(\lambda)$不能整除$g(\lambda)$，则有$g(\lambda)=p(\lambda)m_A(\lambda)+r(\lambda)$,

其中$\deg r(\lambda)<\deg m_A(\lambda)$

由于$0=g(A)=p(A)m_A(A)+r(A)=r(A)$,

所以 $r(\lambda)$是A的一个零化多项式，且次数低于$m_A(\lambda)$的次数.

这与$m_A(\lambda)$的定义矛盾.

因而$m_A(\lambda)$必能整除$g(\lambda)$，记为$m_A(\lambda)|g(\lambda)$.

§ 2.2 最小多项式

定理 A的最小多项式 $m_A(\lambda)$可整除A的任何零化多项式$g(\lambda)$且$m_A(\lambda)$是唯一的。

再证唯一性.

设$m_1(\lambda), m_2(\lambda)$是$A$的两个最小多项式，则

$$m_1(\lambda)|m_2(\lambda),\ 且\ m_2(A)|m_1(A).$$

因而， $m_1(A) = bm_2(A), b \neq 0$是常数.

但$m_1(A), m_2(A)$都是首一多项式，故有$b = 1$，

从而 $m_1(A) = m_2(A)$. ■

推论： A的最小多项式必能整除A的特征多项式。

§ 2.2 最小多项式

定理 λ_0是A 的特征值的充分必要条件是λ_0 是A的最小多项式 $m_A(\lambda)$ 的根。

证　设 λ_0是A的特征值，x_0是相应的特征向量，则有

$$0 = m_A(A)x_0 = m_A(\lambda_0)x_0,\quad x_0 \neq 0,$$

故 $m_A(\lambda_0) = 0$

即 λ_0是 $m_A(\lambda)$的根。

反之，若 λ_0是$m_A(\lambda)$ 的根，由于 $m_A(\lambda)$可整除A的特征多项式 $f(\lambda)$. 故λ_0 必是特征多项式的根，即 λ_0是A的特征值。■

§ 2.2 最小多项式

定理 λ_0是A 的特征值的充分必要条件是λ_0 是A的最小多项式 $m_A(\lambda)$ 的根。

这个定理给出了由特征多项式检验最小多项式的方法。

事实上，设A的所有不同的特征值是$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_s$,

A的特征多项式为$f(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{n_1}(\lambda - \lambda_2)^{n_2}\cdots(\lambda - \lambda_s)^{n_s}$,

且 $n_1 + n_2 + \cdots + n_s = n$.

则$\boldsymbol{A}$的最小多项式一定有如下形式：

$$m_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{k_1}(\lambda - \lambda_2)^{k_2}\cdots(\lambda - \lambda_s)^{k_s},$$

并且$1 \le k_i \le n_i, i = 1, 2, \cdots, s$.

若A 的特征值的代数重数都为1，那么$m_A(\lambda) = f(\lambda)$ 。

例5　求 $A=\left[\begin{array}{cc:cc} 2 & 1 & & \\ 0 & 2 & & \\ \hdashline & & 1 & 1 \\ & & -2 & 4 \end{array}\right]$ 的最小多项式。**(P69)**

解　由于$\det(\lambda I-A)=(\lambda-3)(\lambda-2)^3$，

所以A的最小多项式只能有下列三种可能：

$$(\lambda-3)(\lambda-2);\ (\lambda-3)(\lambda-2)^2;\ (\lambda-3)(\lambda-2)^3$$

但 $$(A-3I)(A-2I)=\left[\begin{array}{cc|cc} -1 & 1 & & \\ 0 & -1 & & \\ \hline & & -2 & 1 \\ & & -2 & 1 \end{array}\right]\left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & & \\ \hline & & -1 & 1 \\ & & -2 & 2 \end{array}\right]$$

$$=\left[\begin{array}{cc|cc} 0 & -1 & & \\ 0 & 0 & & \\ \hline & & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 \end{array}\right]\neq O,$$

而 $(A-3I)(A-2I)^2=\mathbf{0}$,

故 $m_A(\lambda)=(\lambda-3)(\lambda-2)^2$.

例6 求下述对角块矩阵A的最小多项式：$A=\begin{pmatrix} -2 & 1 & & & & & & \\ & -2 & & & & & & \\ & & -2 & 1 & & & & \\ & & & -2 & 1 & & & \\ & & & & -2 & & & \\ & & & & & 3 & & \\ & & & & & & 3 & 1 \\ & & & & & & & 3 \end{pmatrix}$

解 A的特征多项式是$(\lambda+2)^5(\lambda-3)^3$，

故A的最小多项式的形式是$(\lambda+2)^k(\lambda-3)^l$。

由于

$$A+2I=\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & & & \\ & 0 & & & & & & \\ & & 0 & 1 & & & & \\ & & & 0 & 1 & & & \\ & & & & 0 & & & \\ & & & & & 5 & & \\ & & & & & & 5 & 1 \\ & & & & & & & 5 \end{pmatrix} \quad A-3I=\begin{pmatrix} -5 & 1 & & & & & & \\ & -5 & & & & & & \\ & & -5 & 1 & & & & \\ & & & -5 & 1 & & & \\ & & & & -5 & & & \\ & & & & & 0 & & \\ & & & & & & 0 & 1 \\ & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

所以由分块矩阵乘法可知，要使$(A+2I)^k(A-3I)^l=\mathbf{0}$

只需注意使幂零矩阵的那部分变为零矩阵所需乘积的次数。

$A+2I$ 需自乘3次，即在 $(A+2I)^3$ 中原幂零矩阵的那部分变为零矩阵，而$A-3I$只需2次便可达到目的。

因此，A的最小多项式是$m_A(\lambda)=(\lambda+2)^3(\lambda-3)^2$.■

一般地，若$A=diag(A_1, A_2,\cdots,A_m)$，

且方阵A_i的最小多项式为 $m_{A_i}(\lambda)$，$1\le i\le m$，则A的最小多项式$m_A(\lambda)$是$m_{A_1}(\lambda),m_{A_2}(\lambda),\cdots,m_{A_m}(\lambda)$的最小公倍式。

这是因为A_i 的最小多项式$m_{A_i}(\lambda)(1\le i\le m)$必可整除$A$的最小多项式 $m_A(\lambda)$，即$m_{A_i}(\lambda)\mid m_A(\lambda)$. ■

§ 2.2 最小多项式

例如，$A=\begin{bmatrix} A_1 & \\ & A_2 \end{bmatrix}$，且 $\mathrm{A}_1=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, $A_2=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$

A_1的最小多项式是 $(\lambda-2)^2$,

A_2 的最小多项式是$(\lambda-3)(\lambda-2)$.

而这两个多项式的最小公倍式是$(\lambda-3)(\lambda-2)^2$

故 $m_A(\lambda)=(\lambda-3)(\lambda-2)^2$.

在讨论如何由方阵A 的最小多项式判断A是否可对角化的问题之前，我们给出有关矩阵乘积的秩的一个重要不等式。

定理 设A是$m \times n$矩阵，B是$n \times s$矩阵，则

$$rankA + rankB - n \le rank(AB) \le \min\{rankA,\ rankB\}$$

证 只证前一个不等式，后一个不等式自证.

设$B = [b_1\ b_2\ \cdots\ b_r\ \vdots\ b_{r+1}\ \cdots\ b_s] = [\underset{n\times r}{B_1}\ \vdots\ \underset{n\times(s-r)}{B_2}]$,

且$rankB = rankB_1 = r$,

那么B_2中的任意一列$b_j(r+1 \le j \le s)$都可由$b_1, b_2, \cdots, b_r$

线性表出，从而存在$r \times (s-r)$矩阵G，使$B_2 = B_1G$,即

$$B_2 - B_1G = \mathbf{0}.$$

令$Q = \begin{bmatrix} I_r & -G \\ O & I_{s-r} \end{bmatrix}$, 显然，$Q$是$s$阶可逆阵，且有

$$BQ = [B_1\ \ B_2]\begin{bmatrix} I_r & -G \\ \mathbf{0} & I_{s-r} \end{bmatrix} = [B_1\ \ B_2 - B_1G] = [b_1\ b_2\ \cdots\ b_r\ \ \mathbf{0}],$$

其中向量组$b_1, b_2, \cdots, b_r$是线性无关的.

于是

$$ABQ = [Ab_1 \quad Ab_2 \quad \cdots \quad Ab_r \quad \mathbf{0}],$$

且$Ab_1, Ab_2, \cdots, Ab_r$中有$rank(AB)$个向量是线性无关的，

因而在这些向量中至多有$r - rank(AB)$个零向量.

但齐次线性方程组 $AX = 0$ 有$n - rankA$个线性无关的解.

因此 $r - rank(AB) = rankB - rank(AB) \le n - rankA$.

即前一个不等式成立. ■

$$\underbrace{\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ -A & I_m \end{pmatrix}}_{C}\underbrace{\begin{pmatrix} I_n & B \\ A & 0 \end{pmatrix}}_{D}\underbrace{\begin{pmatrix} I_n & -B \\ 0 & I_k \end{pmatrix}}_{E} = \underbrace{\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & -AB \end{pmatrix}}_{F},$$

$rankA + rankB - n \le rank(AB)$.

例7　设 $A_i(i=1,\ 2,\cdots,k)$都是n阶方阵。证明当 $A_1A_2\cdots A_k=\mathbf{0}$时有下述不等式：

$$\sum_{i=1}^{k} rankA_i \le (k-1)n.$$

即
$$\sum_{i=1}^{k}(n-rankA_i)\ge n\ .$$ **(P72)**

例7　设 $A_i(i=1,\ 2,\cdots,k)$都是n阶方阵。

证明当$A_1A_2\cdots A_k=\mathbf{0}$时有下述不等式:

$$\sum_{i=1}^{k}(n-rankA_i)\geq n\ .$$

即　$\sum_{i=1}^{k} rankA_i \leq (k-1)n$. **(P72)**

证　有

$$\begin{aligned} 0 = rank(A_1A_2\cdots A_k) &\geq rank(A_1A_2\cdots A_{k-1}) + rankA_k - n \\ &\geq rank(A_1A_2\cdots A_{k-2}) + rankA_{k-1} + rankA_k - 2n \\ &\geq \cdots \geq \sum_{i-1}^{k} rankA_i - (k-1)n\,, \end{aligned}$$

即　$\sum_{i-1}^{k} rankA_i \leq (k-1)n$.　■

定义： 设λ_0是n阶方阵A的特征值，则集

$$E_{\lambda_0} \underline{\Delta} \{x | (A - \lambda_0 I)x = 0\}$$

称为**A关于λ_0的特征子空间**。

显然，特征子空间

$$E_{\lambda_0} = N(A - \lambda_0 I)$$

是由A关于λ_0的所有特征向量，再添加零向量所组成的。

$$dimE_{\lambda} = n - rank(A - \lambda_0 I)$$

称为λ_0的**几何重数**，且这个数就是A关于λ_0的线性无关特征向量的最大个数，并且λ_0的几何重数不大于其代数重数。

§ 2.2 最小多项式

定理 n 阶方阵A 可对角化（即相似于对角矩阵）的充分必要条件是，A的最小多项式没有重根。

证 **必要性**.由于对角矩阵可以看作是1阶方阵所组成的对角块矩阵，而1阶方阵的最小多项式是一次多项式，所以A的最小多项式没有重根.

充分性.设$m_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\cdots(\lambda - \lambda_s)$,

则有$(A - \lambda_1 I)(A - \lambda_2 I)\cdots(A - \lambda_s I) = O$,

故有例7知$\sum_{i=1}^{s}[n - rank(A - \lambda_i I)] \geq n$,

即$\dim E_{\lambda_1} + \dim E_{\lambda_2} + \cdots + E_{\lambda_s} \geq n$.

另一方面又有$\dim E_{\lambda_i} \le n_i (1 \le i \le s)$,故

$$\dim E_{\lambda_1} + \dim E_{\lambda_2} + \cdots + \dim E_{\lambda_s} \le n_1 + n_2 + \cdots + n_s = n,$$

这里n_i是λ_i的代数重数.

因此， $\dim E_{\lambda_i} = n_i \quad (1 \le i \le s)$,

即A的任一特征值λ_i的几何重数等于λ_i的代数重数，

故A可对角化. ■

例8　设n阶方阵A满足关系式$A^3-3A^2-A+3I=0$，证明A必可对角化。(P73)

解　由题设可知$g(\lambda)=\lambda^3-3\lambda^2-\lambda+3$

是A的零化多项式，

又因$g(\lambda)=(\lambda+1)(\lambda-1)(\lambda-3)$没有重根，

故 $m_A(\lambda)$没有重根。

因此，A必可对角化。■