§6 数值积分

- 1 Newton-Cotes求积公式
- 2 复化求积公式
- 3 龙贝格算法和Richardson外推法
- 4 Gauss型求积公式

第六章　数值积分 /* Numerical Integration */

§1　数值积分的基本概念

/*Elements Concept of Numerical Integration */

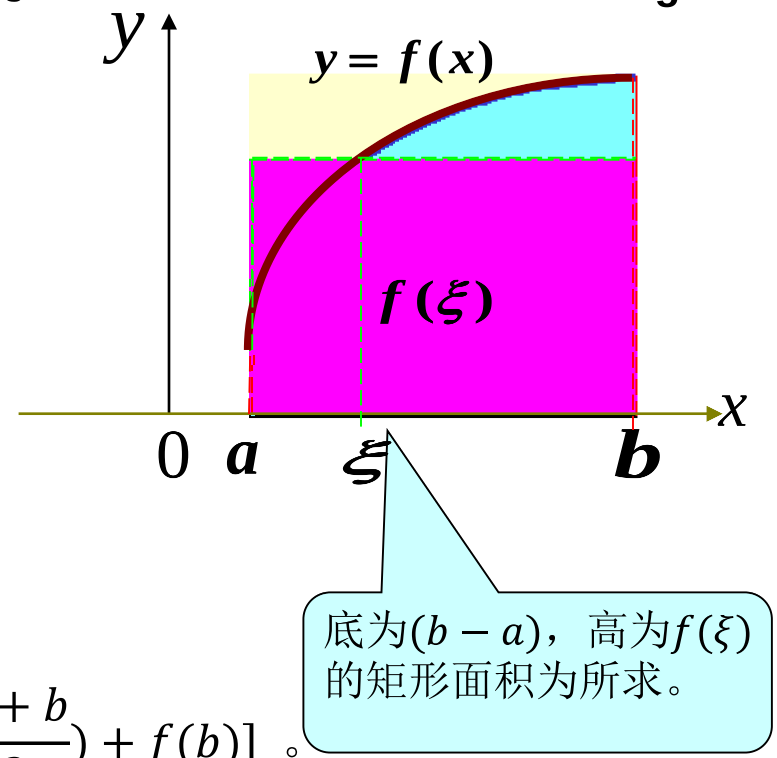
- 对于积分 $I=\int_a^b f(x)dx$
- 只要求出被积函数$\boldsymbol{f(x)}$的原函数$\boldsymbol{F(x)}$，利用牛顿-莱布尼兹（***Newton-Leibniz***）公式：

$$\int_a^b \boldsymbol{f(x)\,dx = F(b) - F(a)}$$

但因大量被积函数找不到用初等函数表示的原函数或$f(x)$是由一张测量数据表给出时，牛顿-莱布尼兹公式则不能直接运用。

数值求积公式的基本思想

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(\xi)$$



为了得到$f(\xi)$的值,我们则提供一些算法，每种算法相应获得一种求积方法.如取平均高度$f(\xi)$的近似值分别是

$$\frac{1}{2}[f(a)+f(b)]\text{，}\quad f(\frac{a+b}{2})\text{，}\quad \frac{1}{6}[f(a)+4f(\frac{a+b}{2})+f(b)]\text{。}$$

- $\int_a^b f(x)dx \approx \frac{(b-a)}{2}[f(a)+f(b)]$ – 梯形公式
- $\int_a^b f(x)dx \approx (b-a)f(\frac{a+b}{2})$ – 中矩公式
- $\int_a^b f(x)dx \approx \frac{(b-a)}{6}[f(a)+4f(\frac{a+b}{2})+f(b)]$ – 辛普森公式

一般的，我们取$[a,b]$内若干个节点x_k处的高度$f(x_k)$通过加权平均的方法近似得出平均高度$f(\xi)$，这类求积公式的一般形式：

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$$

这类求积法通常称为**机械求积法**。式中x_k称为**求积节点**，A_k称为**求积系数**。

数值积分有下述三个方面的**主要问题**：

1) 精确性程度的衡量标准问题；

2) 求积公式的具体构造问题；

3) 余项估计问题（即误差估计问题）.

代数精度的概念

定义 如果某个求积公式对于次数不超过m的多项式均能准确成立，但对于$m+1$次多项式就不一定准确，则称该求积公式具有m次代数精度。

若某个求积公式所对应的误差$R[f]$满足：$R[P_k]=0$ 对任意 $k \le m$ 阶的多项式成立，且 $R[P_{m+1}] \neq 0$ 对某个 $m+1$ 阶多项式不成立，则称此求积公式的代数精度为m 。

欲使求积公式有m 次代数精度，则令$f(x)=1, x, x^2 \cdots,$

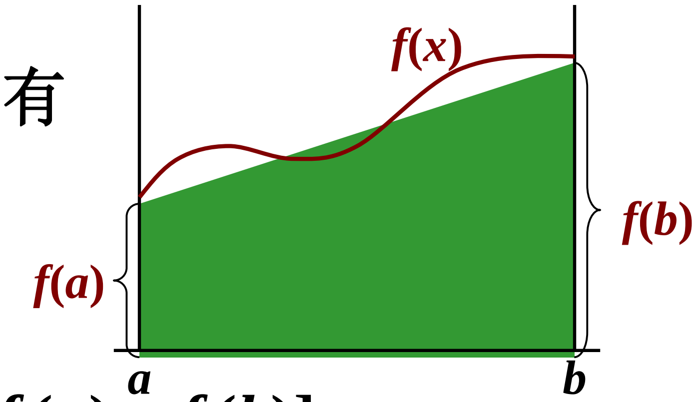
都能准确成立：

$$\sum_{k=0}^{n} A_k = b-a, \sum_{k=0}^{n} A_k x_k = \frac{1}{2}(b^2-a^2), \cdots, \sum_{k=0}^{n} A_k x_k^m = \frac{1}{m+1}(b^{m+1}-a^{m+1})$$

例：试构造两点求积公式：$\int_a^b f(x)dx \approx A_0 f(a) + A_1 f(b)$

并考察其代数精度。

解 令公式对 $f(x)=1, x$ 准确成立，则有



$$\begin{cases} A_0 + A_1 = b-a \\ A_0 a + A_1 b = \dfrac{1}{2}(b^2-a^2) \end{cases}$$

$\Rightarrow A_0 = A_1 = \frac{b-a}{2} \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)]$

梯形公式/* trapezoidal rule*/

逐次检查公式是否精确成立

代入 $P_0 = 1$: $\int_a^b 1\,dx = b-a = \frac{b-a}{2}[1+1]$

代入 $P_1 = x$: $\int_a^b x\,dx = \frac{b^2-a^2}{2} = \frac{b-a}{2}[a+b]$

代入 $P_2 = x^2$:$\int_a^b x^2 dx = \frac{b^3-a^3}{3} \neq \frac{b-a}{2}[a^2+b^2]$

$\Rightarrow$ 代数精度 $= 1$ ∎

➢ **插值型的求积公式** **/*interpolatory quadrature*/**

设给定一组节点$a \le x_0 < x_1 \cdots < x_n \le b$且已知函数$f(x)$在这些节点上的值，作插值函数 $L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k)\, l_k(x)$ 。由于代数多项式$L_n(x)$的原函数是容易求出的，我们取$I_n = \int_a^b L_n(x)\, dx$作为积分$I = \int_a^b f(x)\, dx$的近似值，即令

$$\int_a^b f(x)\, dx \approx \int_a^b L_n(x)\, dx = \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$$

这样构造出的求积公式 $I_n = \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$称作是插值型的，

式中求积系数A_k通过插值基函数$l_k(x)$积分得出$A_k = \int_a^b l_k(x) dx$。

$\sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k) = \int_a^b L_n(x)\, dx = \int_a^b \sum_{k=0}^{n} f(x_k)\, l_k(x) dx =$

$\sum_{k=0}^{n} f(x_k) \int_a^b l_k\, (x) dx.$

插值型求积公式的余项为： $R[f]=I-I_n=\int_a^b \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x)dx$

式中ξ与变量x有关， $\omega_{n+1}(x)=(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$

定理 形如$\sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$ 的求积公式至少有 n 次代数精度 ⇔ 该公式为插值型（即： $A_k=\int_a^b l_k(x)dx$ ）

证 充分性由余项易证得。下证必要性。

如果求积公式至少有n 次代数精度，则它对于 $l_k(x)$应准确成立，即有

$$\int_a^b l_k(x)dx=\sum_{j=0}^{n} A_j l_k(x_j)=A_k$$

$$l_k(x)=\prod_{\substack{j=0\\j\neq k}}^{n}\frac{x-x_j}{x_k-x_j}$$

注意到

$$l_k(x_j)=\begin{cases}1 & k=j\\ 0 & k\neq j\end{cases}$$

例 对 $\int_0^3 f(x)dx$ 构造一个至少具有三次代数精度的求积公式。

解 具有4个求积节点的插值型求积公式，至少有3次代数精度，如果在[0，3]上取节点为0，1，2，3，则插值型求积公式为

$A_k = \int_a^b l_k(x)dx$

$$\int_0^3 f(x)dx \approx A_0 f(0) + A_1 f(1) + A_2 f(2) + A_3 f(3)$$

下面求 $A_k \ (k = 0,1,2,3)$

$$A_0 = \int_0^3 \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(0-1)(0-2)(0-3)} dx = \frac{1}{6}\int_0^3 (x^3 - 6x^2 + 11x - 6)dx = \frac{3}{8}$$

同理可求得 $A_1 = \frac{9}{8}$, $A_2 = \frac{9}{8}$, $A_3 = \frac{3}{8}$

即有 $\int_0^3 f(x)dx \approx \frac{3}{8} f(0) + \frac{9}{8} f(1) + \frac{9}{8} f(2) + \frac{3}{8} f(3)$

将$f(x) = x^4$代入公式验证，两端不相等

只有三次代数精度. ■

§ 2 Newton-Cotes 公式

利用插值多项式$P_n(x) \approx f(x)$则积分易算。

在$[a, b]$上取 $a \le x_0 < x_1 < \ldots < x_n \le b$，做 f 的 n 次插值多项式 $L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k) l_k(x)$，即得到

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{n} f(x_k) \underbrace{\int_a^b l_k(x)dx}_{A_k}$$

$$A_k = \int_a^b \prod_{j \ne k} \frac{(x - x_j)}{(x_k - x_j)} dx$$

由节点决定，与$f(x)$无关。

插值型积分公式

/*interpolatory quadrature*/

误差 $R[f]$

$$= \int_a^b f(x)dx - \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$$

$$= \int_a^b [f(x) - L_n(x)]dx = \int_a^b R_n(x)dx$$

$$= \int_a^b \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!} \prod_{k=0}^{n} (x - x_k) dx$$

$$A_k = \int_a^b \prod_{j \neq k} \frac{(x - x_j)}{(x_k - x_j)} dx$$

❖ 当节点等距分布时： $x_k = a + kh,\ \ h = \frac{b-a}{n},\ \ \ k = 0,\ 1,\ \ldots,n$

$$A_k = \int_{x_0}^{x_n} \prod_{j \neq k} \frac{(x - x_j)}{(x_k - x_j)} dx$$

令 $x = a + th$

$$= \int_0^n \prod_{k \neq j} \frac{(t-j)h}{(k-j)h} \times h dt = \frac{(b-a)(-1)^{n-k}}{n\ k!\,(n-k)!} \int_0^n \prod_{k \neq j} (t-j) dt$$

Cotes系数 $C_k^{(n)}$

注：Cotes 系数仅取决于 *n* 和 *k*，可查表得到。
与 $f(x)$ 及区间 $[a,b]$ 均无关。

– 柯特斯系数表

	$C_k^{(n)}$								
$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1/2	1/2							
2	1/6	2/3	1/6						
3	1/8	3/8	3/8	1/8					
4	7/90	16/45	2/15	16/45	7/90				
5	19/288	25/96	25/144	25/144	25/96	19/288			
6	41/840	9/35	9/280	34/105	9/280	9/35	41/840		
7	$\frac{715}{17280}$	$\frac{3577}{17280}$	$\frac{1323}{17280}$	$\frac{2989}{17280}$	$\frac{2989}{17280}$	$\frac{1323}{17280}$	$\frac{3577}{17280}$	$\frac{715}{17280}$	
8	$\frac{989}{28350}$	$\frac{5888}{28350}$	$\frac{-928}{28350}$	$\frac{10496}{28350}$	$\frac{-4540}{28350}$	$\frac{10496}{28350}$	$\frac{-928}{28350}$	$\frac{5888}{28350}$	$\frac{989}{28350}$

当 $n \geq 8$ 时，柯特斯系数有正有负，这时稳定性得不到保证。

$n = 1$: $C_0^{(1)} = \frac{1}{2}$, $C_1^{(1)} = \frac{1}{2}$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)]$$

Trapezoidal Rule

代数精度 = 1

$$R[f] = \int_a^b \frac{f''(\xi_x)}{2!}(x-a)(x-b)dx$$

/* 令 $x = a+th$, $h = b-a$, 用中值定理 */

$$= -\frac{1}{12}h^3 f''(\xi), \quad \xi \in [a,b], \; h = \frac{b-a}{1}$$

$n = 2$: $C_0^{(2)} = \frac{1}{6}$, $C_1^{(2)} = \frac{2}{3}$, $C_2^{(2)} = \frac{1}{6}$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6}[f(a)+4f(\tfrac{a+b}{2})+f(b)]$$

Simpson's Rule

代数精度 = 3

$$R[f] = -\frac{1}{90}h^5 f^{(4)}(\xi), \quad \xi \in (a,b), \; h = \frac{b-a}{2}$$

$n = 3$: Simpson's 3/8-Rule, 代数精度 = 3, $R[f] = -\frac{3}{80}h^5 f^{(4)}(\xi)$

$n = 4$: Cotes Rule, 代数精度 = 5, $R[f] = -\frac{8}{945}h^7 f^{(6)}(\xi)$

n 为偶数阶的*Newton-Cotes* 公式至少有 $n+1$ 次代数精度。

例 用牛顿—柯特斯公式计算积分$I=\int_0^1 \frac{\sin x}{x}dx$.
结果如下表，m 为有效数字位数。

n	I	m
1	0.9270354	1
2	0.9461359	3
3	0.9461109	3
4	0.9460830	6
5	0.9460830	6

定理 阶n为偶数时，牛顿-柯特斯公式至少有$n+1$次代数精度。

证：只需验证当n为偶数时，牛顿-柯特斯公式对

$f(x)=x^{n+1}$ 的余项为零.

例 分别用梯形公式和Simpson公式计算积分$\int_1^2 e^{\frac{1}{x}} dx$ 的近似值和截断误差。

解：梯形公式 $$\int_1^2 e^{\frac{1}{x}} dx \approx \frac{2-1}{2}(e+e^{\frac{1}{2}}) = 2.1835$$

$$f(x) = e^{\frac{1}{x}}, f'(x) = -\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}, f''(x) = (\frac{2}{x^3}+\frac{1}{x^4})e^{\frac{1}{x}}$$

截断误差为 $$|R_1| \le \frac{(2-1)^3}{12}\max_{1\le x\le 2}|f''(x)| = \frac{(2-1)^3}{12}f''(1) = 0.6796$$

Simpson公式 $$\int_1^2 e^{\frac{1}{x}} dx \approx \frac{2-1}{6}(e+4e^{\frac{1}{1.5}}+e^{\frac{1}{2}}) \approx 2.0263$$

$$f^{(4)}(x) = (\frac{1}{x^8}+\frac{12}{x^7}+\frac{36}{x^6}+\frac{24}{x^5})e^{\frac{1}{x}}, \qquad \max_{1\le x\le 2}\left|f^{(4)}(x)\right| = f^{(4)}(1) = 198.43$$

截断误差为$|R_2| \le \frac{(2-1)^5}{2880}\max_{1\le x\le 2}\left|f^{(4)}(x)\right| = \frac{(2-1)^5}{2880}\left|f^{(4)}(1)\right| = 0.06890.$

求积公式收敛性和稳定性

定义 在求积公式 $\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$中，若 $\lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ h\to 0}} \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k) = \int_a^b f(x)dx$,其中$h = \max\limits_{1\le i\le n}(x_i - x_{i-1})$

则称求积公式是收敛的。

定义 对任给$\varepsilon > 0$，若存在$\delta > 0$，只要$|f(x_k) - \tilde{f}_k| < \delta$

就有$\left|\sum_{k=0}^{n} A_k [f(x_k) - \tilde{f}_k]\right| \le \varepsilon$成立，则称求积公式是稳定的。

定理 若求积公式$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$中系数

$A_k > 0(k = 0,1, \dots, n)$, 则此求积公式是稳定的。

证明：对任给$\varepsilon > 0$，若取$\delta = \frac{\varepsilon}{b-a}$，对$(k = 0,1,2,\cdots, n)$都

有$\left|f(x_k) - \tilde{f}_k\right| \le \delta$，则有

$$\left|I_n(f) - I_n(\tilde{f})\right| = \left|\sum_{k=0}^{n} A_k(f(x_k) - \tilde{f}_k)\right|$$

$$\le \sum_{k=0}^{n} |A_k| \left|f(x_k) - \tilde{f}_k\right| \le \delta \sum_{k=0}^{n} A_k = \delta(b-a) = \varepsilon$$

故知求积公式是稳定的。

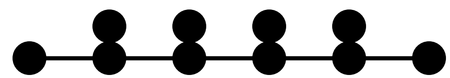
§3 复化求积 /* Composite Quadrature */

高次插值有Runge 现象，故采用分段低次插值

$\Rightarrow$ 分段低次合成的 *Newton-Cotes* 复化求积公式。

➢ 复化梯形公式： $h = \dfrac{b-a}{n}$， $x_k = a + kh \quad (k = 0, \ldots, n)$

在每个 $[x_{k-1}, x_k]$ 上用梯形公式：



$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)dx \approx \frac{x_k - x_{k-1}}{2}[f(x_{k-1}) + f(x_k)], \quad k = 1, \ldots, n \quad \Rightarrow \; = T_n$$

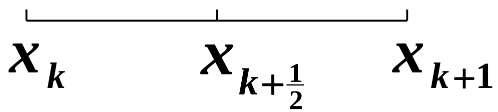
$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=1}^{n} \frac{h}{2}[f(x_{k-1}) + f(x_k)] = \frac{h}{2}\left[f(a) + 2\sum_{k=1}^{n-1} f(x_k) + f(b)\right]$$

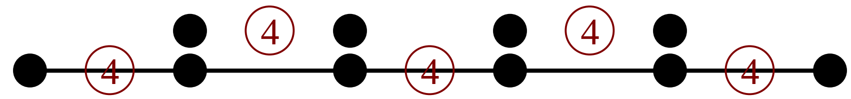
$$R[f] = \sum_{k=1}^{n}[-\frac{h^3}{12}f''(\xi_k)] = -\frac{h^2}{12}(b-a)\frac{\sum_{k=1}^{n} f''(\xi_k)}{n}$$

$$= -\frac{h^2}{12}(b-a)f''(\xi), \quad \xi \in (a,b)$$

➢ 复化 Simpson 公式： $h = \dfrac{b-a}{n}$, $x_k = a + kh \quad (k = 0, \ldots, n)$

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx \approx \frac{h}{6}[f(x_k) + 4f(x_{k+\frac{1}{2}}) + f(x_{k+1})]$$





$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{6}[f(a) + 4\sum_{k=0}^{n-1} f(x_{k+\frac{1}{2}}) + 2\sum_{k=1}^{n-1} f(x_k) + f(b)] \;=\; S_n$$

$$R[f] = -\frac{b-a}{180}\left(\frac{h}{2}\right)^4 f^{(4)}(\xi)$$

注：为方便编程，可采用另一记法：令 $n' = 2n$ 为偶数，这时 $h' = \dfrac{b-a}{n'} = \dfrac{h}{2}$, $x_k = a + kh'$ ，有

$$S_n = \frac{h'}{3}[f(a) + 4\sum_{odd\ \ k} f(x_k) + 2\sum_{even\ \ k} f(x_k) + f(b)]$$

■ 例 对于函数$f(x)=\frac{\sin x}{x}$，利用下表计算积分$I=\int_0^1 \frac{\sin x}{x}dx$

解 将积分区间[0,1]划分为8等份， 应用复化梯形法求得$T_8=0.945609$. 将区间[0,1]划分为4等份，应用复化辛普森法求得$S_4=0.9460832$

两种算法计算量基本相同，但精度却差别很大，同准确值 $I=0.9460831$ 比较复化梯形法的结果只有两位有效数字，而复化辛普森法的结果有六位有效数字。

x	$f(x)$
0	1
1/8	0.9973978
1/4	0.9896158
3/8	0.9767267
1/2	0.9588510
5/8	0.9361556
3/4	0.9088516
7/8	0.8771925
1	0.8414709

例 分别用复化梯形公式与复化辛普森公式计算积分$I = \int_0^1 e^x\,dx$的近似值，要求其截断误差小于等于 $\frac{1}{2}\times 10^{-4}$，问各需取多少个节点?

解：$f(x) = e^x, f''(x) = f^{(4)}(x) = e^x$。在区间[0，1]上，$\max|f''(x)| = \max\left|f^{(4)}(x)\right| = e$

用复化梯形公式求积时，有$|R_N[f]| \le \frac{e}{12}h^2 \le \frac{1}{2}\times 10^{-4}$

由此得：$h \le 0.0149$，取$h = 0.0148$，则$N > 67.6$需取$N + 1 = 69$个节点。

用复化辛普森公式，有$|R_N[f]| \le \frac{e}{2880}h^4 \le \frac{1}{2}\times 10^{-4}$

则$h \le 0.4798$,由此可知$N \ge \frac{1}{h} = 2.085$，取$N = 3$，则只需取$2N + 1 = 7$个节点。

➢ 收敛速度与误差估计：

定义 若一个积分公式的误差满足 $\lim\limits_{h\to 0}\frac{R[f]}{h^p}=C<\infty$ 且$C\neq 0$，则称该公式是 p 阶收敛的。

$$T_n \sim O(h^2)\,,\ S_n \sim O(h^4)\,,\ C_n \sim O(h^6)$$

例：计算 $\pi=\int_0^1 \frac{4}{1+x^2}\,dx$

运算量基本相同

解：$T_8=\frac{1}{16}\left[f(0)+2\sum_{k=1}^{7}f(x_k)+f(1)\right]$ 其中 $x_k=\frac{k}{8}$

$= 3.138988494$

$S_4=\frac{1}{24}\left[f(0)+4\sum_{\text{odd}}f(x_k)+2\sum_{\text{even}}f(x_k)+f(1)\right]$ 其中 $x_k=\frac{k}{8}$

$= 3.141592502$

Q: 给定精度 ε，如何取 n ?

例如：要求 $|I - T_n| < \varepsilon$，如何判断 $n = ?$

$$R[f] = -\frac{h^2}{12}(b-a)f''(\xi) \overset{?}{=} -\frac{h^2}{12}\sum_{k=1}^{n}[f''(\xi_k)\cdot h]$$

$$\approx -\frac{h^2}{12}\int_a^b f''(x)dx = -\frac{h^2}{12}[f'(b)-f'(a)]$$

上例中若要求 $|I - T_n| < 10^{-6}$，则 $|R_n[f]| \approx \frac{h^2}{12}|f'(1)-f'(0)| = \frac{h^2}{6} < 10^{-6}$

➡ $h < 0.00244949$ 即：取 $n = 409$

通常采取将区间不断对分的方法，即取 $n = 2^k$

上例中 $2^k \geq 409 \;\Rightarrow\; k = 9$ 时，$T_{512} = 3.14159202$

注意到区间再次对分时 $R_{2n}[f] \approx \frac{1}{4}R_n[f]$

➡ $\frac{I - T_{2n}}{I - T_n} \approx \frac{1}{4}$ ➡ $I - T_{2n} \approx \frac{1}{3}(T_{2n} - T_n)$

可用来判断计算是否停止。

将区间逐次分半进行计算（每分一次就进行一次计算），可以用 T_n 与 T_{2n} 来估计误差，利用前后两次计算结果来判断误差的大小的方法，我们通常称作误差的事后估计法。

具体方法如下：用 T_{2n} 作为 I 的近似值，则截断误差为 $\frac{1}{3}(T_{2n}-T_n)$ 若：

$$|T_{2n}-T_n|<\varepsilon'=3\varepsilon$$

（ε 为计算结果的允许误差），则停止计算，并取 T_{2n} 作为积分的近似值；否则将区间再次分半后算出 T_{4n}，并检验不等式 $|T_{4n}-T_{2n}|<\varepsilon'$ 是否满足……

类似推导，还可得下列结论：

对于辛普森公式，若$f^{(4)}(x)$在[a，b]上连续且变化不大，有

$$I \approx S_{2n} + \frac{1}{15}(S_{2n} - S_n) = S_{2n} + \frac{1}{4^2 - 1}(S_{2n} - S_n)$$

对于柯特斯公式，若 $f^{(6)}(x)$在[a，b]上连续且变化不大，有

$$I \approx C_{2n} + \frac{1}{63}(C_{2n} - C_n) = C_{2n} + \frac{1}{4^3 - 1}(C_{2n} - C_n)$$

◆例　若要求用辛普森方法计算积分 $I = \int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$ 的近似值，使误差不超过 $\frac{1}{2} \times 10^{-6}$ 。 ($I = 0.9460831$)

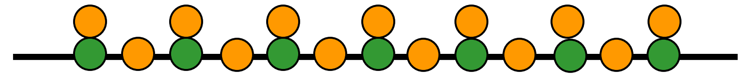
解　可先算出　$S_1 = 0.9461459$，然后将区间分半（即二等分），并计算$S_2 = 0.9460869$，显然 S_2 不合要求，故再次将区间分半（即四等分），并计算 $S_4 = 0.9460833$，因为

$$|S_4 - S_2| < \frac{15}{2} \times 10^{-6}$$

故$S_4 = 0.9460833$ 是满足精度要求的近似解。

§4 龙贝格（Romberg）算法

➢ 梯形法的递推化



将积分区间[a,b]n等分，则一共有n+1个分点，按梯形公式计算的近似值 T_n。将求积区间再二分一次，则分点增至2n+1个，其中老分点n+1个，　为避免计算中的重复，T_{2n}的式子改造如下：

$$T_{2n}=\frac{b-a}{4n}[f(a)+\sum_{k=1}^{2n-1}f(a+k\frac{b-a}{2n})+f(b)]$$

注意到分点 $x_k=a+k\frac{b-a}{2n}\ (k=1,2,\cdots,2n-1)$

当 k 取偶数时是“老分点”

$$T_{2n}=\frac{b-a}{4n}[f(a)+2\sum_{k=1}^{n-1}f(a+2k\frac{b-a}{2n})+f(b)$$

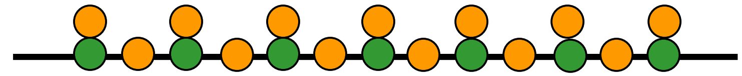
$$+2\sum_{k=1}^{n-1}f(a+(2k-1)\frac{b-a}{2n})]$$

当 k 取奇数时是新增加的分点

$$T_{2n}=\frac{1}{2}T_n+\frac{b-a}{2n}\sum_{k=1}^{n}f[a+(2k-1)\frac{b-a}{2n}]$$

§4龙贝格（Romberg）算法

➢ 梯形法的递推化



将积分区间[a,b]n等分，则一共有n+1个分点，按梯形公式计算的近似值 T_n。将求积区间再二分一次，则分点增至2n+1个，其中老分点n+1个，为避免计算中的重复，T_{2n}的式子改造如下：

$$T_{2n}=\frac{b-a}{4n}[f(a)+\sum_{k=1}^{2n-1}f(a+k\frac{b-a}{2n})+f(b)]$$

注意到分点 $x_k=a+k\frac{b-a}{2n}\quad(k=1,2,\cdots,2n-1)$

当 k 取偶数时是“老分点”

当 k 取奇数时是新增加的分点

$$T_{2n}=\frac{b-a}{4n}[f(a)+2\sum_{k=1}^{n-1}f(a+2k\frac{b-a}{2n})+f(b)$$

$$+2\sum_{k=1}^{n-1}f(a+(2k-1)\frac{b-a}{2n})]$$

$$T_{2n}=\frac{1}{2}T_n+\frac{b-a}{2n}\sum_{k=1}^{n}f[a+(2k-1)\frac{b-a}{2n}]$$

为了便于编制程序，通常将积分区间 $[a,b]$ 的等分数依次取 $1=2^0, 2=2^1, 4=2^2, \cdots$，并将递推式改写成

$$\begin{cases} T_1 = \dfrac{b-a}{2}[f(a)+f(b)] \\ T_{2^k} = \dfrac{1}{2}T_{2^{k-1}} + \dfrac{b-a}{2^k}\sum_{i=1}^{2^{k-1}} f[a+(2i-1)\dfrac{b-a}{2^k}] \end{cases}$$

利用公式在电子计算机上求积分的计算步骤如下：

（1）计算初值 T_1

(2) $K \leftarrow 1$

（3）计算新的梯形值 T_{2^k}

（4）精度控制：若 $\left|T_{2^k} - T_{2^{k-1}}\right| < \varepsilon$，则停止计算，并输出 T_{2^k} 作为积分的近似值；否则 $k \leftarrow k+1$，并转第（3）步继续计算（其中 ε 根据问题的精度要求确定）。

例 利用梯形公式计算积分 $I=\int_0^1 \frac{\sin x}{x}dx$，使误差不过 $\frac{1}{2}\times 10^{-6}$。

解： 定义 $f(0)=1, f(1)=0.8414709,$ 由梯形公式得

$$T_1=\frac{1}{2}[f(0)+f(1)]=0.9207355.$$ 利用递推式有

$$T_2=\frac{1}{2}T_1+\frac{1}{2}f(\frac{1}{2})=0.9397933. \quad f(\frac{1}{2})=0.9588510,$$

进一步二分求积区间，新分点的函数值为 $f(\frac{1}{4})=0.9896158,$

$f(\frac{3}{4})=0.9088516,$ 则有 $T_4=\frac{1}{2}T_2+\frac{1}{4}[f(\frac{1}{4})+f(\frac{3}{4})]=0.9445135.$

继续二分下去，… 有：

$$T_{2^6}=T_{64}=0.9460815$$

$$T_{2^7}=T_{128}=0.9460827$$

因 $\left|T_{2^7}-T_{2^6}\right|<3\times\frac{1}{2}\times 10^{-6}$ 故取 $\int_0^1 \frac{\sin x}{x}dx \approx T_{2^7}=0.9460827$

➢ Romberg算法

梯形法计算简单但收敛慢，如何提高收敛速度是本节讨论的中心问题。

已知对于$\varepsilon = 0.5\times 10^{-6}$须将区间对分7 次，得到

$$T_{128} = 0.9460827$$

计算了129个点上的值

考察$\dfrac{I-T_{2n}}{I-T_n} \approx \dfrac{1}{4}$ $\Rightarrow$ $I-T_{2n} \approx \dfrac{1}{3}(T_{2n}-T_n)$

由 $I \approx \dfrac{4T_{2n}-T_n}{4-1} = \dfrac{4}{3}T_{2n} - \dfrac{1}{3}T_n$ 来计算 I 效果是否好些?

计算了9个点上的值

$$\frac{4}{3}T_8 - \frac{1}{3}T_4 = 0.9460833 = S_4$$

Romberg 序列

一般有：

$$\frac{4T_{2n}-T_n}{4-1} = S_n \qquad \frac{4^2 S_{2n}-S_n}{4^2-1} = C_n \qquad \frac{4^3 C_{2n}-C_n}{4^3-1} = R_n$$

➢ 理查德森外推法 /* Richardson's extrapolation */

利用低阶公式产生高精度的结果。

α_i 与 h 无关

设对于某一 $h \neq 0$，有公式 $T_0(h)$ 近似计算某一未知值 I。由 Taylor展开得到： $T_0(h) - I = \alpha_1 h + \alpha_2 h^2 + \alpha_3 h^3 + \ldots$

现将 h 对分，得： $T_0(\frac{h}{2}) - I = \alpha_1 \left(\frac{h}{2}\right) + \alpha_2 \left(\frac{h}{2}\right)^2 + \alpha_3 \left(\frac{h}{2}\right)^3 + \ldots$

Q：如何将公式精度由 $O(h)$ 提高到 $O(h^2)$？

$$\frac{2T_0(\frac{h}{2}) - T_0(h)}{2-1} - I = -\frac{1}{2}\alpha_2 h^2 - \frac{3}{4}\alpha_3 h^3 - \ldots$$

即： $$\boldsymbol{T_1(h) = \frac{2T_0(\frac{h}{2}) - T_0(h)}{2-1} = I + \beta_1 h^2 + \beta_2 h^3 + \ldots}$$

$$\boldsymbol{T_2(h) = \frac{2^2 T_1(\frac{h}{2}) - T_1(h)}{2^2-1} = I + \gamma_1 h^3 + \gamma_2 h^4 + \ldots}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{T_m(h) = \frac{2^m T_{m-1}(\frac{h}{2}) - T_{m-1}(h)}{2^m - 1} = I + \delta_1 h^{m+1} + \delta_2 h^{m+2} + \ldots}$$

定理 $f(x) \in C^{\infty}[a,b]$,则有

$$T(h) = I + a_1 h^2 + a_2 h^4 + \cdots + a_l h^{2l} + \cdots,$$

其中系数a_l $(l = 1,2,\ldots)$与h 无关。

定理表明$T(h) \approx I$ 是$O(h^2)$阶，若用$h/2$代替h,有

$$T\left(\frac{h}{2}\right) = I + a_1 \frac{h^2}{4} + a_2 \frac{h^4}{16} + \cdots + a_l (\frac{h}{2})^{2l} + \cdots,$$

再做变换，得

$$T_1(h) = \frac{4T(\frac{h}{2}) - T(h)}{3} = I + \beta_1 h^4 + \beta_2 h^6 + \cdots,$$

这里β_k 以及后面出现的 r_k, δ_k 均为与h无关的系数，这样构造的$T_1(h)$ 与积分值I 近似的阶为$O(h^4)$。

这样构造的序列$T_1(h)$ $T_1(\frac{h}{2}),\cdots$ ，就是Simpson序列 $S_n, S_{2n},\cdots$ 。又

$$T_1\left(\frac{h}{2}\right) = I + \beta_1 \frac{h^4}{16} + \beta_2 \frac{h^6}{64} + \cdots,$$

若令

$$T_2(h) = \frac{16}{15} T_1(\frac{h}{2}) - \frac{1}{15} T_1(h),$$

则又可进一步从余项展开式中消去 h^4 的项，而有

$$T_2(h) = I + r_1 h^6 + r_2 h^8 + \cdots$$

这样构造出的 $T_2(h)$ 其实就是Cotes序列，它与积分值 I 的逼近阶为 $O(h^6)$ 。如此继续下去，每加速一次，误差的量级就提高2阶.

若记 $T_0(h) = T(h)$,则有

$$T_m(h) = \frac{4^4}{4^m - 1} T_{m-1}\left(\frac{h}{2}\right) - \frac{1}{4^m - 1} T_{m-1}(h)$$

经过$m(m = 1,2,\ldots)$ 次加速后，余项便取下列形式：

$$T_m(h) = I + \delta_1 h^{2(m+1)} + \delta_2 h^{2(m+2)} + \cdots$$

上述处理方法通常称为理查森（Richardson）外推加速算法。

设以T_0^k表示二分k次后求得的梯形值，且以T_m^k 表示序列$\{T_0^k\}$的m次加速值，则由上面递推公式可得到：

$$T_m^k(h) = \frac{4^m}{4^m - 1} T_{m-1}^{k+1} - \frac{1}{4^m - 1} T_{m-1}^k (k = 1,2,\ldots)$$

此公式也被称为龙贝格求积算法。

在计算机上实现所谓龙贝格算法，就是二分过程中逐步形成T数表的具体方法，其步骤如下：

（1）取$k=0, h=b-a$,求$T(0)=h[f(a)+f(b)]/2$ 令$1\to k$（k记区间$[a,b]$的二分数）。

（2）求梯形值 $T_0(\frac{b-a}{2^k})$，按递推公式

$$T_{2^k}=\frac{1}{2}T_{2^{k-1}}+\frac{b-a}{2^k}\sum_{i=1}^{2^{k-1}}f[a+(2i-1)\frac{b-a}{2^k}]$$ 计算T_0^k。

（3）求加速值，按公式

$$T_m^k(h)=\frac{4^m}{4^m-1}T_{m-1}^{k+1}(\frac{h}{2})-\frac{1}{4^m-1}T_{m-1}^k(h)$$

逐个求出T数表的第k行其余各元素 T_j^{k-j}（j=1,2,…,k）。

（4）若$\left|T_k^0-T_{k-1}^0\right|<\varepsilon$（预先给定的精度），则终止计算，并取 $T_k^{(0)}\approx I$；否则令 $k+1\to k$ 转（2）继续计算。

➢ Romberg 算法:

① $T_1 = T_0^{(0)}$ $< \varepsilon ?$

② $T_2 = T_0^{(1)}$ ③ $S_1 = T_1^{(0)}$ $< \varepsilon ?$

④ $T_4 = T_0^{(2)}$ ⑤ $S_2 = T_1^{(1)}$ ⑥ $C_1 = T_2^{(0)}$ $< \varepsilon ?$

⑦ $T_8 = T_0^{(3)}$ ⑧ $S_4 = T_1^{(2)}$ ⑨ $C_2 = T_2^{(1)}$ ⑩ $R_1 = T_3^{(0)}$

… … … … … …

例 用龙贝格算法计算积分 $I = \int_0^1 x^{3/2} dx$。

解 $f(x) = x^{3/2}$ 在[0, 1]上仅一次连续可微，用龙贝格算法计算见下表，算到$k=5$的精度与辛普森求积精度相当。这里I的精确值为0.4。

$T_0^{(k)}$	$T_1^{(k)}$	$T_2^{(k)}$	$T_3^{(k)}$	$T_4^{(k)}$	$T_5^{(k)}$
0.500000					
0.426777	0.402369				
0.407018	0.400432	0.400302			
0.401812	0.400077	0.400054	0.400050		
0.400463	0.400014	0.400009	0.400009	0.400009	
0.400118	0.400002	0.400002	0.400002	0.400002	0.400002

§5 高斯型积分 /* Gaussian Quadrature */

例 $\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1)$

解 （法一）利用n =1时的Newton Cotes公式，有

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx f(-1) + f(1)$$

代数精度为1。

（法二）令公式对 $f(x) = 1, x, x^2, x^3$准确成立，有

$$\begin{cases} A_0 + A_1 = 2 \\ A_0 x_0 + A_1 x_1 = 0 \\ A_0 x_0^2 + A_1 x_1^2 = \dfrac{2}{3} \\ A_0 x_0^3 + A_1 x_1^3 = 0 \end{cases} \Rightarrow x_0 = -\frac{1}{\sqrt{3}}, x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad A_0 = A_1 = 1$$

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

它至少有3次代数精确度，而以两个端点为节点的梯形公式却只有1次代数精度。

例：构造形如$\int_0^1 \sqrt{x} f(x)dx \approx A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1)$ 的 2 点 公式。

解：设公式对$f(x) = 1, x, x^2, x^3$ ，准确成立，则有：

$$\begin{cases} \frac{2}{3} = A_0 + A_1 \\ \frac{2}{5} = A_0 x_0 + A_1 x_1 \\ \frac{2}{7} = A_0 x_0^2 + A_1 x_1^2 \\ \frac{2}{9} = A_0 x_0^3 + A_1 x_1^3 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x_0 \approx 0.8212 \\ x_1 \approx 0.2899 \\ A_0 \approx 0.3891 \\ A_1 \approx 0.2776 \end{matrix}$$

构造具有$2n+1$次代数精度的求积公式

$$\int_a^b \rho(x) f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$$

将节点 $x_0 \ldots x_n$ 以及系数 $A_0 \ldots A_n$ 都作为待定系数。令 $f(x) = 1, x, x^2, \ldots, x^{2n+1}$ 代入可求解，得到的公式具有$2n+1$ 次代数精度。这样的节点称为Gauss 点，公式称为Gauss 型求积公式。

定义 选互异节点 $x_0, x_1, \ldots, x_n$，使插值型求积公式的代数精度为2n+1，则称该求积公式为Gauss型的。称这些节点为Gauss点。

➢ Gauss点与正交多项式零点的关系

一般利用正交多项式来确定Gauss点 $x_0, x_1, \ldots, x_n$，然后，利用插值原理确定Gauss求积系数

$$A_k = \int_a^b \rho(x) l_k(x) dx$$

其中 $l_k(x)$ 是关于Gauss点的Lagrange插值基函数，从而得到插值型求积公式

$$\int_a^b \rho(x) f(x) dx \approx \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$$

定理 $x_0 \dots xn$ 为 $Gauss$ 点 $\Leftrightarrow \omega(x) = \prod_{k=0}^{n}(x - x_k)$ 与任意次数不大于n 的多项式 $P(x)$（带权）正交。

证明: "$\Rightarrow$" $x_0 \dots x_n$ 为 Gauss 点, 则公式 $\int_a^b \rho(x) f(x) dx \approx \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$ 至少有 $2n+1$ 次代数精度。

对任意次数不大于n 的多项式 $P_m(x)$， $P_m(x)\ \omega(x)$的次数不大于$2n+1$，则代入公式应精确成立：

$$\int_a^b \rho(x) P_m(x) \omega(x) dx = \sum_{k=0}^{n} A_k P_m(x_k) \cancel{\omega(x_k)}^{0} = 0 \quad \checkmark$$

"$\Leftarrow$" 要证明 $x_0 \dots x_n$ 为 Gauss 点，即要证公式对任意次数不大于$2n+1$ 的多项式 $P_m(x)$ 精确成立，即证明：

$$\int_a^b \rho(x) P_m(x) dx = \sum_{k=0}^{n} A_k P_m(x_k) \qquad \text{设 } P_m(x) = \omega(x) q(x) + r(x)$$

$$\int_a^b \rho(x) P_m(x) dx = \int_a^b \rho(x) \omega(x) q(x) dx + \int_a^b \rho(x) r(x) dx = \sum_{k=0}^{n} A_k r(x_k)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} A_k P_m(x_k) \quad \checkmark$$

在Gauss型求积公式$\int_a^b \rho(x)f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$中，若取 $f(x)=\omega^2(x)=[\prod_{k=0}^{n}(x-x_k)]^2$ 则公式的左边$\int_a^b \rho(x)\omega^2(x)dx>0$

而右边 $\sum_{k} A_k\omega^2(x_k)=0$

故n+1个节点的Gauss型求积公式的代数精度至多为2n+1次。

n+1个求积节点的插值型求积公式代数精度的最高值为2n+1，因而高斯型求积公式常称为最高代数精度求积公式。

$n+1$个节点的插值型求积公式至少可达到n次代数精度，至多只能达到$2n+1$次代数精度。

正交多项式族$\{\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n, \ldots\}$有性质：任意次数不大于$n$的多项式 $P(x)$ 必与φ_{n+1}正交。

➡ 若取 $\omega(x)$ 为其中的φ_{n+1}，则φ_{n+1}的零点就是 Gauss 点。

例 求形如 $\int_0^1 \sqrt{x} f(x)dx \approx A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1)$ 的两点Gauss型求积公式。

（法一） *Step 1*：构造正交多项式φ_2，设$\varphi_2(x) = x^2 + bx + c$

为区间[0, 1]上带权$\sqrt{x}$正交的多项式，则

$$(\varphi_2, 1) = 0 \Rightarrow \int_0^1 \sqrt{x}(x^2 + bx + c)dx = 0$$

$$(\varphi_2, x) = 0 \Rightarrow \int_0^1 \sqrt{x}\, x(x^2 + bx + c)dx = 0$$

➡ $b = -\dfrac{10}{9}$，$c = \dfrac{5}{21}$

即：$\boldsymbol{\varphi_2(x) = x^2 - \dfrac{10}{9}x + \dfrac{5}{21}}$

Step 2：求$\varphi_2 = 0$ 的 2 个根，即为 Gauss 点 x_0， x_1

$$x_{0;1} = \frac{10/9 \pm \sqrt{(10/9)^2 - 20/21}}{2}$$

$$x_0 \approx 0.821162, \quad x_1 \approx 0.289949,$$

Step 3：代入 $f(x) = 1, x$ 以求解 A_0， A_1

$$\begin{cases} \dfrac{2}{3} = \int_0^1 \sqrt{x}\,dx = A_0 + A_1 \\ \dfrac{2}{5} = \int_0^1 \sqrt{x}\,x\,dx = A_0 x_0 + A_1 x_1 \end{cases} \Rightarrow A_0 \approx 0.389111, \quad A_1 \approx 0.277556$$

$$\int_0^1 \sqrt{x} f(x)dx \approx 0.389111 f(0.821162) + 0.277556 f(0.289949)$$

*Step3*也可换为 $A_0 = \int_0^1 \rho(x) l_0(x)dx \approx 0.389111, \quad A_1 = \int_0^1 \rho(x) l_1(x)dx \approx 0.277556$

（法二）设$\omega(x)=(x-x_0)(x-x_1)$为区间[0, 1]上带权$\sqrt{x}$正交的多项式

则有 $\int_0^1\sqrt{x}\omega(x)dx=0 \Longrightarrow \int_0^1\sqrt{x}(x-x_0)(x-x_1)dx$

$$=\int_0^1\sqrt{x}(x^2-x_0x-x_1x+x_0x_1)dx$$

$$=\frac{2}{7}-\frac{2}{5}(x_0+x_1)+\frac{2}{3}x_0x_1=0$$

$\int_0^1\sqrt{x}\cdot x\cdot\omega(x)dx=0 \Longrightarrow \int_0^1\sqrt{x}(x^2-x_0x-x_1x+x_0x_1)dx$

$$=\frac{2}{9}-\frac{2}{7}(x_0+x_1)+\frac{2}{5}x_0x_1=0$$

令， $x_0+x_1=v$，$x_0x_1=u$ 则有 $\begin{cases}\frac{2}{5}v-\frac{2}{3}u=\frac{5}{7}\\ \frac{2}{7}v-\frac{2}{5}u=\frac{2}{9}\end{cases} \Rightarrow u=\frac{5}{21},\ v=\frac{10}{9}$

由韦达定理，知 x_0, x_1是方程 $x^2-\frac{10}{9}x+\frac{5}{21}=0$ 的两个根，解之得

$$\begin{cases}x_0=0.821162\\ x_1=0.289949\end{cases}$$

A_0, A_1 的求得同于（法一）。

✍ 例 利用此公式计算 $\int_0^1 \sqrt{x} e^x \, dx$的值。

解 $$\int_0^1 \sqrt{x} e^x \, dx \approx A_0 e^{x_0} + A_1 e^{x_1} = 0.3891 \times e^{0.8212} + 0.2776 \times e^{0.2899}$$

$$\approx 1.2555$$

注：构造正交多项式也可以利用 *L-S* 拟合中介绍过的递推式进行。

➢ 特殊正交多项式族：

① Legendre 多项式族： 定义在$[-1, 1]$上，$\rho(x) \equiv 1$

$$\boxed{P_k(x) = \frac{1}{2^k k!}\frac{d^k}{dx^k}(x^2-1)^k}$$

满足：$(P_k, P_l) = \begin{cases} 0 & k \neq l \\ \frac{2}{2k+1} & k = l \end{cases}$

由 $P_0 = 1,\ P_1 = x$ 有递推 $(k+1)P_{k+1} = (2k+1)xP_k - kP_{k-1}$

以 P_{n+1} 的根为节点的求积公式称为*Gauss-Legendre* 公式。

② Chebyshev 多项式族： 定义在$[-1, 1]$上，$\rho(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$$\boxed{T_k(x) = \cos(k \times \arccos x)}$$

T_{n+1} 的根为 $x_k = \cos\left(\dfrac{2k+1}{2n+2}\pi\right)$

$k = 0, \ldots, n$

以此为节点构造公式 $\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}f(x)dx = \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$

称为 *Gauss-Chebyshev* 公式。

➢ 特殊正交多项式族：

① Legendre 多项式族： 定义在$[-1, 1]$上，$\rho(x) \equiv 1$

$$P_k(x) = \frac{1}{2^k k!} \frac{d^k}{dx^k}(x^2-1)^k$$

满足：$(P_k, P_l) = \begin{cases} 0 & k \neq l \\ \frac{2}{2k+1} & k = l \end{cases}$

由 $P_0 = 1$，$P_1 = x$ 有递推 $(k+1)P_{k+1} = (2k+1)xP_k - kP_{k-1}$

以 P_{n+1} 的根为节点的求积公式称为*Gauss-Legendre* 公式。

② Chebyshev 多项式族： 定义在$[-1, 1]$上，$\rho(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$$T_k(x) = \cos(k \times \arccos x)$$

T_{n+1} 的根为 $x_k = \cos\left(\dfrac{2k+1}{2n+2}\pi\right)$

$k = 0, \ldots, n$

以此为节点构造公式 $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} f(x)dx = \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$

称为 *Gauss-Chebyshev* 公式。

➢ 高斯—勒让德(*Gauss-Legendre*) 求积公式

构造形如

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$$

的求积公式，使其为Gauss型的。

积分区间为[- 1, 1]时,求积公式的代数精度为$2n+1$的充要条件是 $\omega(x)$ 在[- 1, 1]上与一切次数不超过*n* 的多项式正交。

由正交多项式的性质可知，*n*+1 次勒让德多项式$P_{n+1}(x)$就具有这个性质，所以用*n*+1次勒让德多项式的零点作为节点，可得高斯型求积公式。

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$$

该公式通常称为高斯—勒让德（*Gauss-Legendre*）求积公式。

例　构造两点的高斯—勒让德求积公式

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1)$$

解　取二次勒让德多项式 $P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$ 的两个零点 $\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ 作为Gauss点，则有

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx A_0 f\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right) + A_1 f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

若求积公式的代数精度为3，则当 $f(x) = 1, x$ 时，上式能准确成立，即由方程组

$$\begin{cases} A_0 + A_1 = \int_{-1}^{1} 1dx = 2 \\ A_0\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right) + A_1\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \int_{-1}^{1} xdx = 0 \end{cases} \Longrightarrow A_0 = A_1 = 1$$

便可得两点高斯—勒让德求积公式

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx f\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

不难验证，该公式的代数精度的确是3。

P110表4—6给出了部分*Gauss-Legendre*的节点和系数，以备查用。

例 利用四点高斯—勒让德公式计算积分$\int_0^{\pi} e^x \cos x dx$

(积分准确值为$-\frac{1}{2}(1+e^{\pi}) = -12.0703463\cdots$)

解 作变换 $x = \frac{\pi}{2}(1+t)$ 则得

$$\int_0^{\pi} e^x \cos x dx = \frac{\pi}{2}\int_{-1}^{1} e^{\frac{\pi}{2}(1+t)} \cos[\frac{\pi}{2}(1+t)]dt = -\frac{\pi}{2} e^{\frac{\pi}{2}} \int_{-1}^{1} e^{\frac{\pi}{2}t} \sin\frac{\pi}{2} t dt$$

$$\approx -\frac{\pi}{2} e^{\frac{\pi}{2}}[0.3478548(e^{-\frac{\pi}{2}\times 0.8611363} \sin\frac{\pi}{2}\times 0.8611363$$

$$+e^{\frac{\pi}{2}\times 0.8611363} \sin\frac{\pi}{2}\times 0.8611363) + 0.6521452(e^{-\frac{\pi}{2}\times 0.3398810} \sin\frac{\pi}{2}\times 0.3398810$$

$$+e^{\frac{\pi}{2}\times 0.3398810} \sin\frac{\pi}{2}\times 0.3398810)] \approx -12.0701895$$

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1} f(\frac{b-a}{2}t + \frac{b+a}{2})dt$$

➢ 高斯--切比雪夫（*Gauss-Chebyshev*）求积公式

形如 $\int_{-1}^{1}\frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx \approx A_k\sum_{k=0}^{n} f(x_k)$ 的求积公式，若其代数精度为 2n+1，则称其为高斯--切比雪夫求积公式

例 求形如 $\int_{-1}^{1}\frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx \approx A_0 f(x_0)+A_1 f(x_1)$ 的两点Gauss型求积公式。

解：由于节点必是区间[- 1，1]上带权 $\rho(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 的二次正交多项式的零点，这个正交多项式就是二次切比雪夫多项式 $T_2(x)=\cos(2\arccos x)$ 故零点为 $x_0=-\frac{\sqrt{2}}{2}$，$x_1=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 由该公式对 $f(x)=1, x$ 都准确成立，可得 A_0, A_1 应满足的方程组

$$\begin{cases}\pi = A_0 + A_1 \\ 0 = A_0(-\frac{\sqrt{2}}{2})+A_1(\frac{\sqrt{2}}{2})\end{cases} \Rightarrow \quad A_0 = A_1 = \frac{\pi}{2}$$

即所求公式为 $\int_{-1}^{1}\frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx \approx \frac{\pi}{2}f(-\frac{\sqrt{2}}{2})+\frac{\pi}{2}f(\frac{\sqrt{2}}{2})$

一般地，利用$n+1$次切比雪夫多项式 $T_{n+1}(x)$ 的零点

$$x_k = \cos\frac{2k+1}{2(n+1)}\pi \qquad (k=0,1,\cdots,n)$$

可以得到n+1点的Gauss型求积公式:

$$\int_{-1}^{1}\frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx \approx \frac{\pi}{n+1}\sum_{k=0}^{n} f\left(\cos\frac{2k+1}{2(n+1)}\pi\right)$$

例　计算积分 $\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{2+x}{1-x^2}}dx$

解　选用 $n=2$ 的Gauss-Chebyshev求积公式计算，即

$$\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$$

这时　$x_0 = \cos\frac{5}{6}\pi = -0.866025403 \quad x_1 = \cos\frac{3}{6}\pi = 0$

$$x_2 = \cos\frac{1}{6}\pi = 0.866025403 \quad A_k = \frac{\pi}{3}, \quad k=0,1,2$$

于是有 $\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{2+x}{1-x^2}}dx \approx \frac{\pi}{3}\left(\sqrt{2+x_0}+\sqrt{2+x_1}+\sqrt{2+x_2}\right) = 4.368939556$

Gauss型求积公式稳定性与收敛性

稳定性

高斯求积公式的系数具有下列特点：

（1）由求积公式对函数 $f(x)=1$ 准确成立知

$$\sum_{k=0}^{n} A_k = \int_a^b \rho(x)dx$$

（2）由求积公式对$2n$次多项式$f(x)=l_k^2(x)$ 也准确成立知

$$A_k = \sum_{j=0}^{n} A_j l_k^2(x_j) = \int_a^b \rho(x) l_k^2(x)dx > 0 \qquad k=0,1,\cdots,n$$

故知Gauss型求积公式是稳定的。

收敛性

关于收敛性，只指出结论：若 $f(x)$ 在区间$[a,b]$上连续，那么当$n\to\infty$时，Gauss型求积公式 $\sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$ 收敛到积分值 $\int_a^b \rho(x)f(x)dx$。

➢ Gauss型求积公式稳定性与收敛性

稳定性

高斯求积公式的系数具有下列特点：

（1）由求积公式对函数 $f(x)=1$ 准确成立知

$$\sum_{k=0}^{n} A_k = \int_a^b \rho(x)dx$$

（2）由求积公式对$2n$ 次多项式 $f(x)=l_k^2(x)$ 也准确成立知

$$A_k = \sum_{j=0}^{n} A_j l_k^2(x_j) = \int_a^b \rho(x) l_k^2(x)dx > 0 \qquad k=0,1,\cdots,n$$

故知Gauss型求积公式是稳定的。

收敛性

关于收敛性，只指出结论：若 $f(x)$在区间$[a,b]$上连续，那么当 $n\to\infty$时，Gauss型求积公式 $\sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$ 收敛到积分值 $\int_a^b \rho(x) f(x)dx$ 。

➢ Gauss 公式的余项:

$$R[f]=\int_a^b f(x)dx-\sum_{k=0}^{n}A_k f(x_k)$$ /* 设 P 为 f 的过 $x_0 \ldots x_n$ 的插值多项式 */

$$=\int_a^b f(x)dx-\sum_{k=0}^{n}A_k P(x_k)$$ /*只要 P 的阶数不大于 $2n+1$，则下一步等式成立*/

$$=\int_a^b f(x)dx-\int_a^b P(x)dx=\int_a^b [f(x)-P(x)]dx$$

Q：什么样的插值多项式在 $x_0 \ldots x_n$ 上有 $2n+1$ 阶?

A：Hermite 多项式! 满足 $H(x_k)=f(x_k),\ H'(x_k)=f'(x_k)$

$$\Rightarrow R[f]=\int_a^b [f(x)-H(x)]dx$$

$$=\int_a^b \frac{f^{(2n+2)}(\xi_x)}{(2n+2)!}w^2(x)dx$$

$$=\frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!}\int_a^b w^2(x)dx, \qquad \xi\in(a,b)$$