第四章：矩阵分解1-QR分解

定理： 设 n 阶方阵 A 可逆，则存在正交矩阵 Q 及上三角阵 R，满足 $A = QR$，且分解惟一。

证明：

$r(A) = n$, 故 A 的 n 个列向量线性无关，$A = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$，

由施密特(Schmidt)正交化方法有：

令 $\beta_1 = \alpha_1$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{(\alpha_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)}\beta_1$$

$$\beta_3 = \alpha_3 - \frac{(\alpha_3, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)}\beta_1 - \frac{(\alpha_3, \beta_2)}{(\beta_2, \beta_2)}\beta_2$$

$\cdots\cdots\cdots\cdots$

$$\beta_n = \alpha_n - \frac{(\alpha_n, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)}\beta_1 - \frac{(\alpha_n, \beta_2)}{(\beta_2, \beta_2)}\beta_2 - \cdots - \frac{(\alpha_n, \beta_{n-1})}{(\beta_{n-1}, \beta_{n-1})}\beta_{n-1}$$

则向量组 $\{\beta_1, \beta_2 \cdots, \beta_n\}$ 两两正交，且与 $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$ 等价。

定理： 设 n 阶方阵 A 可逆，则存在正交矩阵 Q 及上三角阵 R，满足 $A=QR$，且分解惟一。

证明：

对$\beta_1,\beta_2\cdots,\beta_n$单位化有：

$$\varepsilon_1=\frac{\beta_1}{|\beta_1|},\varepsilon_2=\frac{\beta_2}{|\beta_2|},\cdots,\varepsilon_n=\frac{\beta_n}{|\beta_n|}.$$

向量组$\{\varepsilon_1,\varepsilon_2\cdots,\varepsilon_n\}$为一组标准的正交向量组（标准正交基）

$$\alpha_1=|\beta_1|\varepsilon_1$$
$$\alpha_2=(\alpha_2,\varepsilon_1)\varepsilon_1+|\beta_2|\varepsilon_2$$
$$\alpha_3=(\alpha_3,\varepsilon_1)\varepsilon_1+(\alpha_3,\varepsilon_2)\varepsilon_2+|\beta_3|\varepsilon_3$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\alpha_n=(\alpha_n,\varepsilon_1)\varepsilon_1+(\alpha_n,\varepsilon_2)\varepsilon_2+\cdots+(\alpha_n,\varepsilon_{n-1})\varepsilon_{n-1}+|\beta_n|\varepsilon_n$$

$$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2\cdots,\varepsilon_n)\begin{pmatrix}|\beta_1| & (\alpha_2,\varepsilon_1) & (\alpha_3,\varepsilon_1) & \cdots & (\alpha_n,\varepsilon_1)\\ & |\beta_2| & (\alpha_3,\varepsilon_2) & \cdots & (\alpha_n,\varepsilon_2)\\ & & |\beta_3| & \cdots & (\alpha_n,\varepsilon_3)\\ & & & \ddots & \vdots\\ & & & & |\beta_n|\end{pmatrix}$$

定理： 设 n 阶方阵 A 可逆，则存在正交矩阵 Q 及上三角阵 R，满足 $A=QR$，且分解惟一。

证明：

$$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2\cdots,\varepsilon_n)\begin{pmatrix} |\beta_1| & (\alpha_2,\varepsilon_1) & (\alpha_3,\varepsilon_1) & \cdots & (\alpha_n,\varepsilon_1) \\ & |\beta_2| & (\alpha_3,\varepsilon_2) & \cdots & (\alpha_n,\varepsilon_2) \\ & & |\beta_3| & \cdots & (\alpha_n,\varepsilon_3) \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & |\beta_n| \end{pmatrix}$$

令 $Q=(\varepsilon_1,\varepsilon_2\cdots,\varepsilon_n)$, 显然有 $Q^TQ=I$.

$$R=\begin{pmatrix} |\beta_1| & (\alpha_2,\varepsilon_1) & (\alpha_3,\varepsilon_1) & \cdots & (\alpha_n,\varepsilon_1) \\ & |\beta_2| & (\alpha_3,\varepsilon_2) & \cdots & (\alpha_n,\varepsilon_2) \\ & & |\beta_3| & \cdots & (\alpha_n,\varepsilon_3) \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & |\beta_n| \end{pmatrix}.$$

于是，$A=QR$.

定理： 设 n 阶方阵 A 可逆，则存在正交矩阵 Q 及上三角阵 R，满足 $A = QR$，且分解惟一。

证明：

惟一性证明：

设 $A = Q_1R_1 = Q_2R_2$，$Q_1 = Q_2R_2{R_1}^{-1} = Q_2D$,

其中$D = R_2{R_1}^{-1}$ 仍然是上三角阵，而

$I = {Q_1}^TQ_1 = D^T{Q_2}^TQ_2D = D^TD$,

从而 D 既为正交矩阵又为上三角阵，故

$D = I$,

所以$Q_1 = Q_2$，$R_1 = R_2$. 得证。

QR分解步骤

1. 写出矩阵A 的列向量;
2. 将列向量组按施密特正交化方法得到正交向量组，标准化得正交矩阵Q;
3. 将矩阵A列向量表示成正交向量组的线性组合，得系数矩阵R;
4. 得到矩阵A 的QR分解。

注：在实际计算过程中根本不需要求取R 的每个值，而是只需通过Gram-Schmidt过程得到A 的标准正交矩阵Q，可以通过如下形式快速的求取R，

$$A = QR \Rightarrow R = Q^{-1}A = Q^{T}A.$$

例：设$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&2\\1&2&1\end{pmatrix}$，求$A$ 的QR分解。

解：设 $A=(a_1,a_2,a_3)$, 其中，$a_1=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$，$a_2=\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$，$a_3=\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$。

可以验证$r(A)$=3,所以A满秩，可进行QR分解。

由正交化过程得

$$\beta_1=a_1=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},\qquad e_1=\frac{\beta_1}{|\beta_1|}=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix};$$

$$\beta_2=a_2-(a_2,e_1)e_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix},\qquad e_2=\frac{\beta_2}{|\beta_2|}=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix};$$

$$\beta_3=a_3-(a_3,e_1)e_1-(a_3,e_2)e_2=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\qquad e_3=\frac{\beta_3}{|\beta_3|}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix};$$

于是，$\mathrm{Q}=(e_1,e_2,e_3)=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{2}{\sqrt{6}}&\frac{-1}{\sqrt{3}}&0\\\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{-1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$,

例： 设$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&2\\1&2&1\end{pmatrix}$，求$A$ 的QR分解。

解：$Q=(e_1,e_2,e_3)=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{2}{\sqrt{6}}&\frac{-1}{\sqrt{3}}&0\\\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{-1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$,

$$R=\begin{pmatrix}|\beta_1|&(a_2,e_1)&(a_3,e_1)\\0&|\beta_2|&(a_3,e_2)\\0&0&|\beta_3|\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sqrt{6}&\sqrt{6}&\frac{8}{\sqrt{6}}\\0&\sqrt{3}&\frac{2}{\sqrt{3}}\\0&0&\sqrt{2}\end{pmatrix}.$$

注：$A=QR$ 将矩阵分解为Q和R两部分，

其中Q是标准正交矩阵，R是一个上三角矩阵。

矩阵的QR分解能够简化计算。以线性系统的计算为例，

$Ax=b\Rightarrow QRx=b, Rx=Q^{-1}b=Q^Tb.$

线性方程组求解显得计算方便。

求解常系数微分方程组

若 $X(t) \in \mathbb{R}^n$, 关于$X(t)$的常系数微分方程组

$$X'(t) = AX(t) + f(t), \quad X(t_0) = X_0$$

其中 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $f(t) \in \mathbb{R}^n$, $X_0 \in \mathbb{R}^n$ 为已知.

(注: $x'(t) = ax(t) + f(t)$ 微分方程的解为
$x(t) = \int_{t_0}^{t} e^{a(t-s)} f(s)ds + Ce^{at}$)

类似的,

$$X(t) = \int_{t_0}^{t} e^{A(t-s)} f(s)ds + e^{At}X(t_0)$$

例: 求解 $X'(t)=\begin{pmatrix}1&2\\4&3\end{pmatrix}X(t)+\begin{pmatrix}e^t\\-e^t\end{pmatrix}$, 其中

初值条件为 $X(0)=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$.

解: 设 $A=\begin{pmatrix}1&2\\4&3\end{pmatrix}$, 则 $A=PJP^{-1}$,

其中 $P=\begin{pmatrix}1&1\\2&-1\end{pmatrix}$, $J=\begin{pmatrix}5&\\&-1\end{pmatrix}$.

于是有 $e^{At}=P\begin{pmatrix}e^{5t}&\\&e^{-t}\end{pmatrix}P^{-1}$

$$=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}e^{5t}+\frac{2}{3}e^{-t}&\frac{1}{3}e^{5t}-\frac{1}{3}e^{-t}\\\frac{2}{3}e^{5t}-\frac{2}{3}e^{-t}&\frac{2}{3}e^{5t}+\frac{1}{3}e^{-t}\end{pmatrix}.$$

取 $t_0 = 0$, $f(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ -e^t \end{pmatrix}$, 代入公式求解

$$X(t) = \int_0^t e^{A(t-s)} f(s) ds + e^{At} X(0)$$

可得 $X(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}e^t - \frac{1}{2}e^{-t} \\ -\frac{1}{2}e^t + \frac{1}{2}e^{-t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^{5t} \\ 2e^{5t} \end{pmatrix}$.