# Funções

## Função afim

Chama-se função afim a toda a função de domínio .

Se m = 0, f(x) = b e diz-se que f é uma função constante.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| f(x) = mx + b | m > 0 | m < 0 | m = 0 |
| Domínio |  |  |  |
| Contradomínio |  |  | {b} |
| Zeros |  |  |  |
| Representação gráfica |  |  |  |
| Sinal |  |  | b > 0: positiva  b < 0: negativa |
| Variação | crescente | decrescente | constante |

## Função quadrática

Uma função real de variável real definida por um polinómio do 2º grau, ou seja, definida por uma expressão do tipo é designada por função quadrática.

O gráfico da função quadrática é uma parábola.

### y = ax2

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | a > 0 | a < 0 |
| y = ax2 |  |  |
| Domínio |  |  |
| Contradomínio |  |  |
| Zeros | 0 | 0 |
| Sinal | Positiva em | Negativa em |
| Monotonia | Decrescente em  Crescente em | Crescente em  Decrescente em |
| Extremos | Mínimo: 0  Minimizante: 0 | Máximo: 0  Maximizante: 0 |

### y = a(x-h)2

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | a > 0 | a < 0 |
| y = a(x-h)2 |  |  |
| Domínio |  |  |
| Contradomínio |  |  |
| Zeros | h | h |
| Sinal | Positiva em | Negativa em |
| Monotonia | Decrescente em  Crescente em | Crescente em  Decrescente em |
| Extremos | Mínimo: 0  Minimizante: h | Máximo: 0  Maximizante: h |

### y = ax2 + k

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
| y = ax2 + k |  |  |
| Domínio |  |  |
| Contradomínio |  |  |
| Zeros | Não tem | x1, x2 |
| Sinal | Positiva em | Positiva em  Negativa em |
| Monotonia | Decrescente em  Crescente em | Decrescente em  Crescente em |
| Extremos | Mínimo: k  Minimizante: 0 | Máximo: k  Maximizante: 0 |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
| y = ax2 + k |  |  |
| Domínio |  |  |
| Contradomínio |  |  |
| Zeros | x1, x2 | Não tem |
| Sinal | Positiva em  Negativa em | Negativa em |
| Monotonia | Decrescente em  Crescente em | Decrescente em  Crescente em |
| Extremos | Mínimo: k  Minimizante: 0 | Máximo: k  Maximizante: 0 |

### y = a(x-h)2

O gráfico de uma função do tipo é uma parábola com as seguintes características:

* Concavidade voltada para cima se a > 0; concavidade voltada para baixo se a < 0;
* Vértice no ponto de coordenadas (h; k);
* Eixo de simetria é a reta de equação x = h.

### Determinação do vértice da parábola

As coordenas do vértice V são , com f(x) = ax2 +b + c.

Os pontos (0; f(0)) e são simétricos em relação ao eixo de simetria da função, logo a abcissa do vértice é metade de , daí que o vértice V seja dado por .

## Função módulo

Uma função módulo, analiticamente, é definida por ramos. Uma função diz-se definida por ramos se é definida por expressões diferentes em partes diferentes do seu Domínio.

Exemplo:

## Função soma

## Função diferença

## Função produto

## Função quociente

## Igualdade de funções

Dadas as funções f(x) e g(x), estas são iguais se e só se as seguintes igualdades se verificarem:

## Função composta

ou

Exemplo:

## Função racional

O Domínio de uma função racional é o conjunto dos números reais que não anulam o denominador: .

A reta x = a é uma Assíntota Vertical (A.V.) de f se f(x) tende para quando x tende para *a* pelos valores à direta de *a* (a+), pelos valores à esquerda de *a* (a-) ou ambos.

A reta y = b é uma Assíntota Horizontal (A.H.) de f se f(x) tende para *b* quando x tende para ou ambos.

## Funções do tipo

|  |  |
| --- | --- |
|  | Domínio:  Contradomínio:  A.V.: x = 0  A.H.: y = 0 |
| b > 0 | |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | | x |  | 0 |  | | Sinal | - |  | + | | Variação |  |  |  | |
| b < 0 | |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | | x |  | 0 |  | | Sinal | + |  | - | | Variação |  |  |  | |

|  |  |
| --- | --- |
|  | Domínio:  Contradomínio:  A.V.: x = -d  A.H.: y = a |
| b > 0 | |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | | x |  | -d |  | | Variação |  |  |  | |
| b < 0 | |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | | x |  | -d |  | | Variação |  |  |  | |

## Simplificação de frações racionais

|  |  |
| --- | --- |
| a | b |
| c | d |

Exemplo:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |

## Transformações do gráfico de uma função

* y = f(x) + k

Translação na vertical para cima se k > 0

Translação na vertical para baixo se k < 0

* y = f(x +k)

Translação na horizontal para a esquerda se k > 0

Translação na horizontal para a direita se k < 0

* y = kf(x)

Alongamento vertical se k > 1

Encolhimento vertical se 0 < k < 1

* y = f(kx)

Encolhimento horizontal se k > 1

Alongamento horizontal se 0 < k < 1

* y = - f(x)

Simetria em relação ao eixo Ox

* y = f(-x)

Simetria em relação ao eixo Oy

* y = |f(x)|

Módulo de uma função: os intervalos de f(x) com sinal negativo passam a sinal positivo

## Monotonia

* Função crescente: ;
* Função decrescente: ;
* Função constante: .

## Extremos

* f tem um máximo absoluto em *a* se ;
  + A *a* chama-se maximizante, a *f(a)* máximo absoluto;
* f tem um mínimo absoluto em *a* se ;
  + A *a* chama-se minimizante, a *f(a)* mínimo absoluto;
* f tem um máximo relativo em *a* se existir uma vizinhança V de centro *a* tal que ;
  + A *a* chama-se maximizante, a *f(a)* máximo relativo;
* f tem um mínimo relativo em *a* se existir uma vizinhança V de centro *a* tal que ;
  + A *a* chama-se minimizante, a *f(a)* mínimo relativo.

## Injetividade

Dada uma função f de Domínio D, f é injetiva se e só se:

## Paridade

### Função par

### Função ímpar

Caso nenhuma das duas condições se verifique, diz-se que a função não é par nem ímpar.

## Taxa média de variação

A taxa média de variação de uma função f no intervalo [a; b] representa-se por e é dada por: .

* Se f é estritamente crescente em ;
* Se f é estritamente decrescente em ;
* Se f é constante em ;
* Interpretação gráfica: representa o declive da reta secante ao gráfico de f;

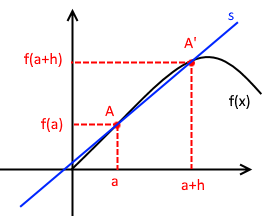
Seja s a reta secante ao gráfico de f em .

* Interpretação física: representa a velocidade média da função no intervalo dado;
* Se uma função for estritamente crescente num intervalo do seu Domínio então a tmv é positiva nesse intervalo, mas o recíproco não é verdadeiro.

## Taxa de variação

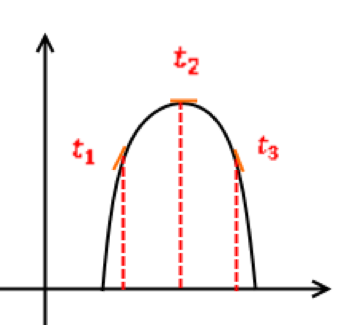
Dada uma função f chama-se derivada de f (ou taxa de variação de f) num ponto do seu Domínio e presenta-se por ao valor de , ou seja,

* Interpretação física: representa a velocidade instantânea da função em ;
* Interpretação gráfica:



Quando , a reta secante “transforma-se” numa reta tangente

A derivada de uma função num ponto é igual ao declive da reta tangente ao gráfico da função nesse ponto:



### Equação reduzida da reta tangente ao gráfico de uma função num ponto

Uma forma de obter a equação de uma reta conhecido o seu declive é um ponto tal que:

No caso da reta em causa ser a reta tangente a , tem-se:

Exemplo:

Determinar a equação da reta tangente ao gráfico da função no ponto .

## Função derivada

Seja f uma função, real de variável real, e D o conjunto de todos os elementos do Domínio de f que admitem variável.

Chama-se função derivada de f à função de Domínio D que a cada x faz corresponder o número real f’(x),

A função derivada de f pode ter as seguintes notações: .

### Derivabilidade num ponto

Uma função f diz-se derivável (ou diferenciável) num ponto do seu Domínio se e só se existe derivada nesse ponto e é finito, ou seja:

ou

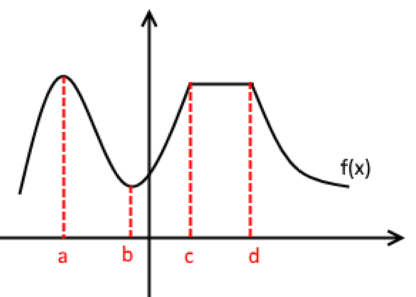
Não existe derivada em pontos angulosos.

Só existe derivada num ponto de descontinuidade de abcissa *a* de uma função f se e só se .

Teorema: se f é derivável num ponto do seu Domínio, então f é contínua nesse ponto.

Nota: .

### Sinal da derivada e sentido de variação (exemplo)

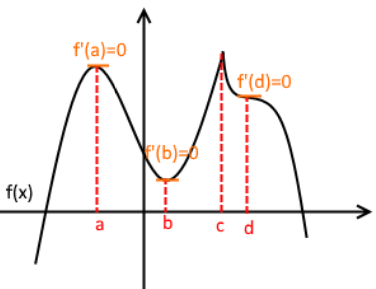


* ;
* ;
* ;
* ;
* ;
* .

### Estudo dos extremos relativos de uma função aplicado às derivadas (exemplo)

Seja f uma função contínua em .

Se , então é extremo relativo (máximo ou mínimo) de f.



|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | a |  | b |  | c |  | d |  |
| sinal de | + | 0 | - | 0 | + | N.D. | - | 0 | - |
| variação de f | ↗ |  | ↘ |  | ↗ |  | ↘ |  | ↘ |

Assim,

## Segunda derivada de uma função

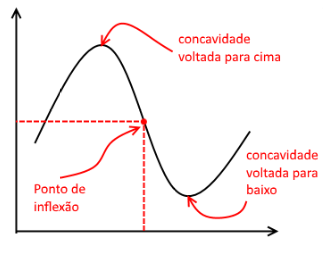
Seja :

A segunda derivada ou derivada de segunda ordem em e representa-se por:

A segunda derivada de f é a derivada de .

* Significado físico da segunda derivada: é o valor da aceleração da função f em ;
* Significado gráfico da segunda derivada (concavidade):

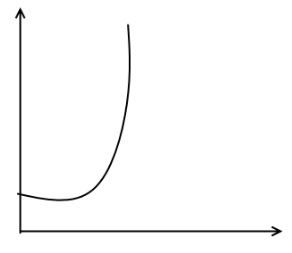
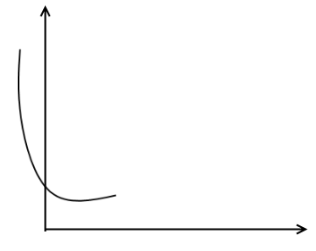
Diz-se que uma função tem a concavidade voltada para cima num intervalo do seu Domínio se em qualquer ponto desse intervalo a curva da função está acima da reta tangente nesse ponto caso contrário diz-se que a concavidade está voltada para baixo.



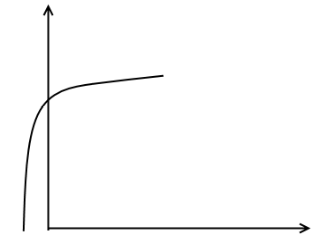
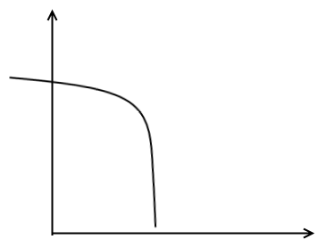
Uma função tem um ponto de inflexão em se o seu gráfico muda o sentido da concavidade nesse ponto.

### Sinal de f’ e o sentido da concavidade

#### Concavidade voltada para cima

#### Concavidade voltada para baixo

#### Conclusão

Seja f duplamente derivável em :

* f tem concavidade voltada para cima em ;
* f tem concavidade voltada para baixo em .

### Estudo analítico das concavidades e pontos de inflexão (exemplos)

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| x |  | -1 |  |
|  | - | 0 | + |
| f |  |  |  |

f tem concavidade voltada para baixo em .

f tem concavidade voltada para cima em .

é Ponto de Inflexão de f.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| x |  | -1 |  | 1 |  |
|  | - | 0 | + | 0 | - |
| f |  | P.I. |  | P.I. |  |

f tem concavidade voltada para baixo em ;

f tem concavidade voltada para cima em .

.

## Regras de derivação

Exemplos:

Exemplos:

Exemplos:

Exemplo:

Exemplo:

Exemplos:

Exemplo:

Exemplo:

Exemplo:

Exemplo:

Exemplo:

Exemplo:

Exemplo:

* Função definida por ramos
  + Derivar cada ramo;
  + Determinar as derivadas laterais (usando limites) nos pontos de transição dos ramos, para verificar se há derivada;
  + Apresentar a função derivada;

Exemplo:

## Função inversa

Seja f uma função real de variável real de Domínio A e injetiva:

Se B é o Contradomínio de f, isto é, B = f(A), chama-se função inversa de f e representa-se por à função assim definida:

em que .

Uma função f admite função inversa se e só se f for injetiva.

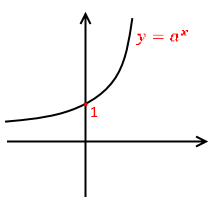
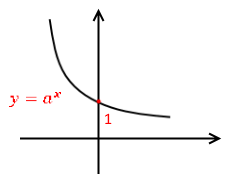
## Funções irracionais

Numa função irracional g de índice n ímpar, o Domínio de g é .

Numa função irracional f de índice n par, o Domínio de f é calculado através da equação .

## Função exponencial

Chama-se função exponencial de base a à função ou qualquer função desta família.

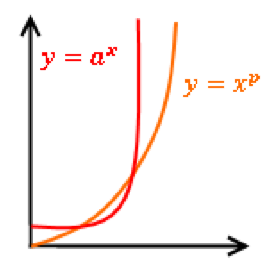
a > 1 a < 1

### Estudo da função f(x) = ax com a > 1

* Domínio: ;
* Contradomínio: ;
* Zeros: f não tem zeros ;
* Continuidade: f é contínua;
* Pontos relevantes: ;
* Monotonia: f é estritamente crescente: , ou seja, ;
* Injetividade: , ou seja, ;
* Assíntota: A.H.: reta y = 0;
* Paridade: f não é par nem ímpar;
* Limites:
  + ;
  + .

O gráfico de com 0 < a < 1 pode ser obtido por simetria relativamente ao eixo Oy de uma função com b > 1, sendo

### Comparação do crescimento exponencial com o da potência



Para aumenta indefinidamente com x:

## Determinação do Contradomínio de uma função exponencial

Exemplos:

## Logaritmo

### Equação polinomial vs. Equação exponencial

equação polinomial (a incógnita está na base): o número que elevado a 3 é 81 e representa-se por .

equação exponencial (a incógnita está no expoente da potência): o número ao qual se deve elevar 3 para obter 81.

Outros exemplos:

### Definição

Seja . Chama-se logaritmo de *b* na base *a* e representa-se por ao expoente a que é necessário elevar *a* para obter *b*.

Assim: .

Nota:

### Logaritmo de base 10

Representa-se por e designa-se por logaritmo decimal

Exemplos:

### Logaritmo de base *e*

Representa-se por e designa-se por logaritmo neperiano ou natural.

Exemplos:

### Consequências da definição de logaritmo

Exemplos:

### Regras operatórias dos logaritmos

Demonstração:

Exemplo:

Demonstração:

Exemplo:

Demonstração:

Exemplo:

Exemplo:

Exemplos:

### Comparação do crescimento logarítmico com o da potência

A função , cresce muito mais lentamente do que . Logo:

* ;
* ;
* ;
* .

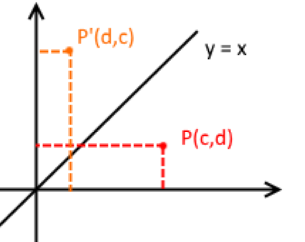
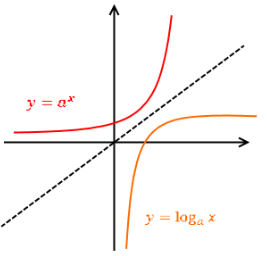
## Função logarítmica de base superior a 1

Seja .

A função inversa de f é dada por:

Conclusão: a função inversa de .

Gráfico de :

pertence ao gráfico de .

pertence ao gráfico de .

Assim, o gráfico de é simétrico do gráfico de relativamente à reta .

### Estudo do gráfico de f(x) = logax, a > 1

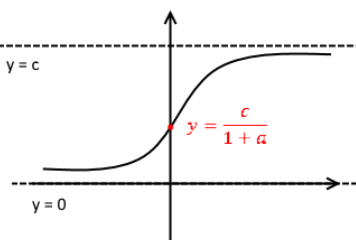
* Domínio: ;
* Contradomínio: ;
* Zeros: ;
* Continuidade: f é contínua em todo o Domínio;
* Injetividade: f é injetiva;

* Monotonia: f é estritamente crescente;

* Assíntotas: A.V.: .

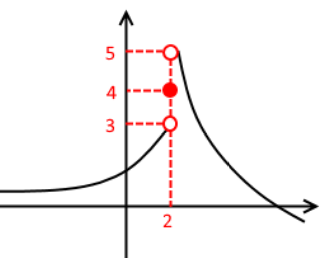
### Domínio de uma função logarítmica

## Função logística



## Definição de limite de uma função segundo Heine

### Limites laterais



#### Limite à direta de a

Diz-se que se e só se, a toda a sucessão que tende para *a*, de termos pertencentes a e superiores a *a*, lhe corresponde uma sucessão de que tende para *b*.

#### Limite à esquerda de a

Diz-se que se e só se, a toda a sucessão que tende para *a*, de termos pertencentes a e inferiores a *a*, lhe corresponde uma sucessão de que tende para *b*.

#### Limite em a

Diz-se que existe e se e só se:

os limites laterais são iguais.

### Limite num ponto segundo Heine

Diz-se que se e só se toda a sucessão de termos pertencentes ao que tenda para *a* por valores diferentes de *a*, a correspondente sucessão tende para *b*.

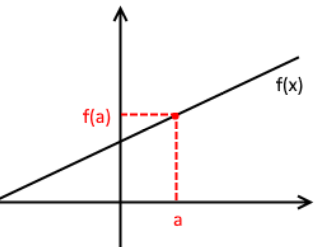
Assim, como consequência da definição:

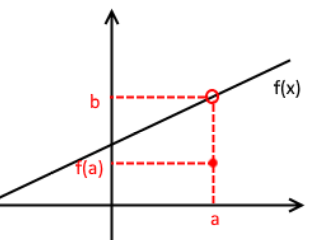
Exemplos:

## Continuidade

Uma função f diz-se contínua num ponto *x = a* do seu Domínio se e só se existe e .

Exemplos:





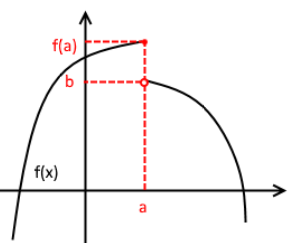
### Continuidade lateral

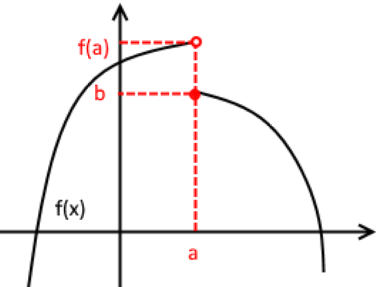
Uma função f diz-se contínua à esquerda no ponto *x = a* do seu Domínio se e só se .

Uma função f diz-se contínua à direita no ponto *x = a* do seu Domínio se e só se .

Uma função f é contínua no ponto *x = a* se e só se for contínua à esquerda e à direita no ponto *x = a*.

Exemplos:

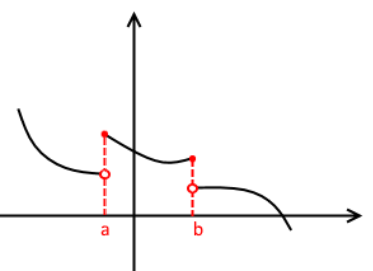
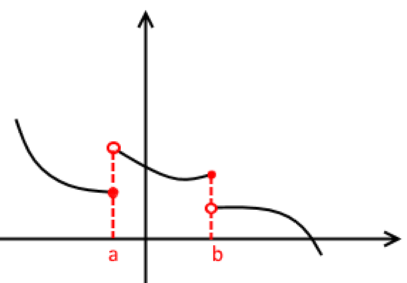




### Continuidade num intervalo

Uma função f diz-se contínua num intervalo [a; b] do seu Domínio se e só se for contínua em todos os pontos do intervalo ]a; b[ e for contínua à direita no ponto *x = a* e à esquerda em *x = b*.

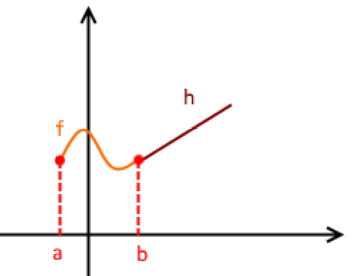
Exemplos:

f é contínua em [a; b] f é contínua em ]a; b]

## Prolongamento/Restrição de uma função

Exemplo:



## Operações com funções contínuas

Se f e g são duas funções contínuas em *x = a* (com ) então as seguintes funções também são contínuas em *x = a*:

### Funções contínuas

As seguintes funções são contínuas em todo o seu Domínio:

* Função polinomial (

Exemplo:

* Função racional fracionária

Exemplo:

* Função exponencial

Exemplo:

* Função logarítmica

Exemplo:

### Exemplos

f é contínua em porque é a soma de uma função exponencial com uma função polinomial .

f é contínua em porque é o produto de uma função racional fracionária por uma função logarítmica .

### Continuidade da função composta

Sejam f e g duas funções e *a* um ponto pertencente ao Domínio da função .

Se f for contínua em *a* e g for contínua em *f(a)* então é contínua em *a*.

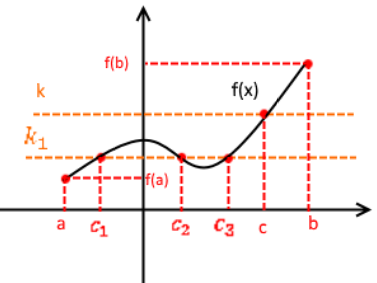
Exemplos:

é contínua em porque é a composta de uma função exponencial , com uma função polinomial .

é contínua em todo o seu Domínio, , porque é a composta de uma função logarítmica , com uma função polinomial .

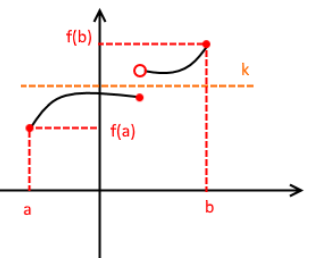
## Teorema de Bolzano-Cauchy

Uma função contínua num intervalo passa de um valor para o outro sem percorrer todos os valores intermédios.



(1 solução)

(3 soluções)



não tem solução porque f não é contínua.

Assim:

Exemplos:

1. Provar que a equação tem uma solução em sendo

f é contínua em porque é o quociente entre a soma de uma função exponencial com uma função constante e uma função polinomial , sendo todas estas funções contínuas no intervalo dado.

O Teorema de Bolzano garante que .

1. Provar que a equação tem uma solução no intervalo sendo

f é contínua em porque é a diferença entre o produto de uma função constante por uma função exponencial e uma função constante , sendo todas estas contínuas no intervalo dado.

O Teorema de Bolzano garante que .

1. Provar que a equação tem uma solução no intervalo sendo

g é contínua no intervalo porque é definido por uma função polinomial , contínua em .

O Teorema de Bolzano garante que , ou seja, .

## Corolário do Teorema de Bolzano

Se uma função f for contínua num intervalo e *f(a)* e *f(b)* tiverem sinais contrários podemos garantir que a função f tem pelo menos um zero no intervalo .

Exemplo:

Mostrar que a função tem um zero em .

f é contínua em .

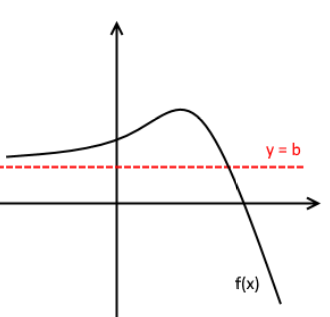
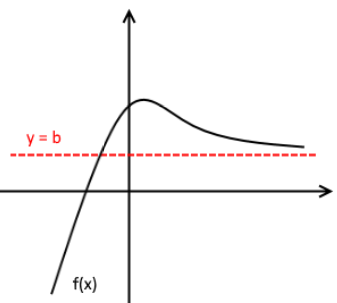
f é contínua em porque é contínua em todos o seu Domínio, , uma vez que é composta por uma função logarítmica , e por uma função afim .

O Corolário do Teorema de Bolzano garante que

## Assintotas

### Assíntotas horizontais (A.H.)

A reta de equação é uma A.H. do gráfico da função f se e só se:

ou

* No máximo, uma função tem duas A.H.;
* Uma função pode ter uma A.H. bilateral;
* Uma função de Domínio limitado não tem A.H.;
* Uma função com Domínio tem no máximo uma A.H. (em );
* Uma função com Domínio tem no máximo uma A.H. (em ).

Exemplos:

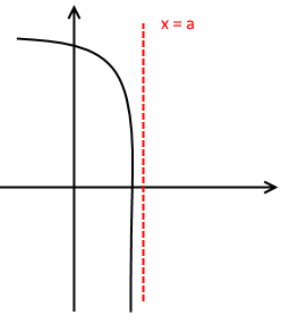
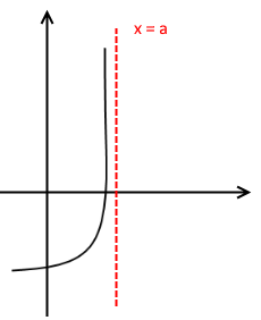
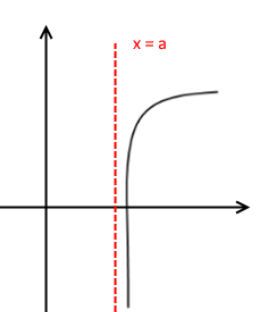
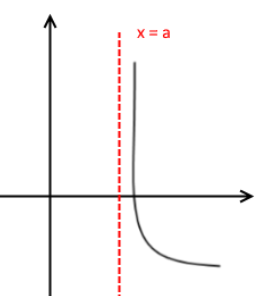
Assim conclui-se que f não tem A.H.

Assim conclui-se que e .

Assim conclui-se que f não tem A.H.

### Assintotas verticais (A.V.)

A reta de equação é A.V. do gráfico da função f se e só se:

ou ou ou

* Uma função pode ter um número infinito de A.V.;
* Testar pontos de acumulação: pontos que não pertencem ao Domínio, mas em cuja vizinhança há pontos do Domínio;
  + Exemplos:
* Testar pontos de descontinuidade do Domínio;
* Geralmente estes tipos de pontos são os pontos de transição nas funções definidas por ramos;
* Uma função contínua de Domínio não tem A.V.

Exemplos:

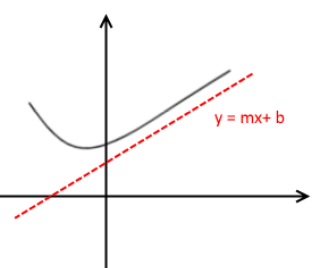
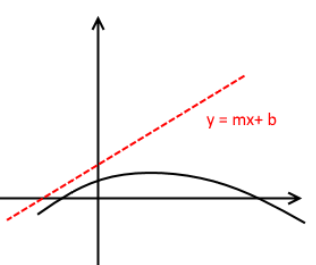
Assim não é A.V. de f.

Assim é A.V. bilateral de f.

Assim é A.V. de f à direita.

### Assíntotas oblíquas (A.O.)

A reta de equação , é uma A.O. do gráfico da função f se e só se:

ou

### Assíntotas não verticais (A.N.V.)

Chamam-se Assíntotas não verticais ao conjunto das A.H. e A.O., ou seja, às assíntotas de equação . No máximo, uma função tem duas A.N.V.

Se não há A.N.V. (não é preciso calcular *b*).

Se , a assíntota, se existir, é horizontal (A.H.).

Exemplo:

Assim .

Assim .

## Aspetos a considerar no estudo analítico de uma função

* Domínio;
* Paridade;
* Assíntotas;
* Interseção com os eixos;
* Monotonia e extremos (1ª derivada);
* Contradomínio (por observação da tabela de variação);
* Concavidades e pontos de inflexão (2ª derivada);
* Representação gráfica.