# Probabilidades

## Axiomática de probabilidades

Chama-se probabilidade à função P que a cada acontecimento *A* de um espaço de resultados Ω de uma experiência aleatória, faz corresponder um número real P(A) que verifica os seguintes axiomas:

1. P(Ω) = 1: a probabilidade do acontecimento certo é 1;
2. P(A) ≥ 0: a probabilidade de qualquer acontecimento *A* é um número real não negativo;
3. : se *A* e *B* são acontecimentos incompatíveis, a probabilidade da reunião de *A* com *B* é a soma das probabilidades de A e de B.

## Teoremas

1. : a probabilidade do acontecimento impossível é zero;

## Conceitos

### Acontecimento impossível

### Acontecimento elementar

Acontecimento com um só resultado

### Acontecimento certo

### Reunião

É o conjunto de todos os resultados que verificam A e/ou B.

A reunião entre dois acontecimentos A e B representa-se por .

### Interseção

É o conjunto de todos os resultados que verificam A e B.

A interseção entre dois acontecimentos A e B representa-se por .

### Diferença

É o conjunto de resultados que verificam um acontecimento A mas não verificam um acontecimento B. Representa-se por .

### Contrário ou complementar

É o conjunto de elementos do espaço amostral, , que não pertencem a um acontecimento A.

Representa-se por .

### Acontecimentos incompatíveis ou disjuntos

São acontecimentos que não têm elementos em comum, ou seja, que nunca se verificam em conjunto.

Dados dois acontecimentos A e B, se diz-se que estes dois acontecimentos são incompatíveis ou disjuntos.

Nota:

* Se A e B são contrários A e B incompatíveis;
* Mas se A e B são incompatíveis A e B contrários.

### Acontecimentos equiprováveis

São acontecimentos com a mesma probabilidade de ocorrência.

Dados dois acontecimentos A e B, estes são equiprováveis se P(A) = P(B).

## Tabela de dupla entrada

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | A |  | Total |
| B |  |  | #B |
|  |  |  | # |
| Total | #A | # |  |

## Propriedades dos acontecimentos e conjuntos em geral

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Propriedade | Reunião() | Interseção() |
| Comulativa |  |  |
| Associativa |  |  |
| Distributiva |  |  |
| Elemento neutro |  |  |
| Elemento absorvente |  |  |
| Leis de De Morgan |  |  |
| … |  |  |

### Acontecimentos contrários

### Diferença

### Outras propriedades

## Definição frequencialista ou empírica de probabilidade

Também conhecida como Lei dos grandes números de Bernoulli.

A probabilidade de um acontecimento A de uma experiência aleatória é o valor para o qual tende a frequência relativa da realização de A quando o número de repetições da experiência tende para o infinito:

### Propriedades das probabilidades decorrentes da definição frequencialista

## Definição clássica de probabilidade (Lei de Laplace)

Seja um espaço de resultados finito constituído por n acontecimentos elementares equiprováveis e A um acontecimento de constituído por acontecimentos elementares.

Então, a probabilidade do acontecimento A é dada pelo quociente entre o número de casos favoráveis ao acontecimento A (m) e o número de casos possíveis (n).

## Regra do produto

Quando é necessário realizar k escolhas sucessivas em que na primeira há alternativas, na segunda há alternativas, …, e na escolha de ordem k há alternativas, então o número total de alternativas é dado por

Exemplo:

Quantas combinações é possível fazer de 1 casaco, 1 saia e 1 blusa tendo 4 casacos, 2 saias e 3 blusas? Resposta: 4\*2\*3 = 24 combinações.

## Probabilidade condicionada

Chama-se probabilidade condicionada de A dado B (ou probabilidade de A sabendo que ocorreu B) e representa-se por p(A|B) ao seguinte quociente:

## Probabilidade da interseção de dois acontecimentos

## Probabilidade total

Generalizando:

Seja são disjuntos entre si. Então:

## Acontecimentos independentes

Dois acontecimentos A e B dizem-se independentes se a ocorrência de um não influencia a probabilidade de outro.

A e B independentes

Tendo em conta que , se A e B forem independentes, então:

## Análise combinatória (técnicas de contagem)

### Princípio fundamental da contagem (regra do produto)

### Arranjos completos (ou com repetição).

Dado um conjunto com n elementos, o número total de sequências com p elementos, repetidos ou não, e escolhidos entre os n elementos iniciais é designado por número de arranjos completos tomados p a p, e é dado por:

*n*

n → número de elementos disponíveis

p → número de elementos da sequência

### Permutações

Dado um número natural n, chama-se fatorial de n! ao produto dos primeiros n números naturais:

ou

### Permutações simples

Dado um conjunto com n elementos, o número total de sequências de n elementos sem repetições, que é possível formar com os n elementos iniciais é designado por número de permutações de n elementos e é dado por: .

n → número de elementos de cada permutação

### Arranjos simples

Dado um conjunto com n elementos, o número total de sequências de p elementos distintos escolhidos entre os n elementos do conjunto designa-se por número de arranjos simples de n elementos tomados p a p e é dado por:

n

n

n → número de elementos disponíveis

p → número de elementos da sequência

Nota: n

## Permutações circulares

Dados n objetos, o número de formas distintas de os dispor em círculo é dado por:

n → número de objetos disponíveis

## Sequências vs. Conjuntos

Um conjunto distingue-se de uma sequência pelo facto de um conjunto não se alterar quando se troca a ordem dos elementos, e ainda por não se poderem considerar elementos repetidos num conjunto.

Exemplos:

## Permutações

A cada conjunto de p elementos correspondem p! sequências distintas, ou seja, o número de sequências de p elementos:

Ou ainda número de conjuntos de p elementos:

Generalizando:

n

n → número de elementos disponíveis

p → número de elementos de cada conjunto

O número total de subconjuntos de p elementos que é possível fazer a partir de um conjunto com n elementos designa-se por número de combinações de n elementos tomados p a p e é dado por:

ⁿ

## Utilização de combinações e arranjos (exemplos)

1. De quantas formas é possível colocar 4 jarras iguais numa estante de 7 lugares?

Resposta: 7C4

1. De quantas formas é possível colocar 4 jarras diferentes numa estante de 7 lugares?

Resposta: 7A4

1. De quantas formas se podem colocar 2 jarras iguais, 4 copos iguais e 3 chávenas iguais numa estante de 9 lugares?

Resposta: 9C2 \* 7C4 \* 3C3

1. De quantas formas distintas se podem colocar 2 jarras iguais, 4 copos diferentes e 3 chávenas iguais numa estante de 9 lugares?

Resposta: 9C2 \* 7A4 \* 3C3

## Permutações com elementos repetidos

O número de permutações de n elementos, dos quais n1 elementos são repetidos, n2 são repetidos, …, nk são repetidos, e é dado pela expressão:

n → número total de elementos

n1, n2, …, nk → elementos repetidos

Exemplo:

Quantos anagramas podem ser feitos com a palavra MATEMATICA?

MATEMATICA → 10 letras: 3’A’, 2’M’, 2’T’, 3 letras diferentes

1º processo:

10C3 \* 7C2 \* 5C2 \* 3!

10C3 → 3’A’

7C2 → 2’M’

5C2 → 2’T’

3! → 3 letras diferentes (equivalente a 3A3 ou P3)

2º processo:

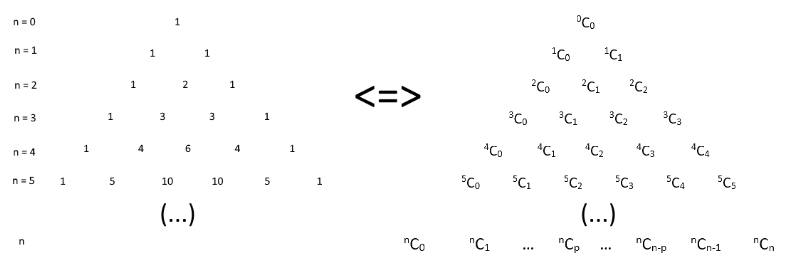
10! → todas as trocas possíveis entre as 10 letras

3! → 3’A’

2! → 2’M’

2! → 2’T’

## Triângulo de Pascal



### Propriedades do Triângulo de Pascal

* Todas as linhas começam e acabam em 1: nC0 = nCn = 1, ;
* O Triângulo é simétrico: nCp = nCn-p, ;
* A soma de dois números consecutivos de uma linha é igual ao número que se situa entre eles na linha seguinte: nCp + nCp+1 = n+1Cp+1, ;
* A soma de qualquer linha n é 2n: nC0 + nC1 + … + nCn-1 + nCn = 2n,;
* O segundo e penúltimo elementos da linha n são iguais a n: nC1 = nCn-1 = n;
* A linha n tem n+1 elementos;
* Se n é par, a linha n do triângulo tem um número ímpar de elementos, sendo o maior deles o elemento central: nCn/2;
* Se n é ímpar, a linha n do triângulo tem um número par de elementos, sendo os maiores os dois elementos centrais (iguais entre si): nC(n+1)/2 ou nC(n-1)/2.

## Binómio de Newton

(a+b)n = nC0an + nC1an-1b1 + nC2an-2b2 + … + nCn-1abn-1 + nCnbn,

No desenvolvimento de (a+b)n:

* O polinómio obtido tem n+1 elementos;
* A soma dos expoentes da parte literal de cada termo é n;
* O termo de ordem p+1 é da forma Tp+1 = nCpan-pbp.

Notas:

Exemplos:

n = 4 → 1 4 6 4 1

n = 7 → 1 7 21 35 35 21 7 1

1. 1(x2)4 + 4(x2)3(x-1) + 6(x2)2(x-1)2 + 4(x2)(x-1)3 + 1(x-1)4 =
2. Qual o 4º termo no desenvolvimento de (a+b)9?

T4 = 9C3a9-3b3 T4 = 84a6b3

1. Qual o termo de grau 6 no desenvolvimento de ?

n = 5

Tp+1 = 5Cp(x2)5-pxp Tp+1 = 5Cpx10-2pxp Tp+1 = 5Cpx10-p

p = 4 T4+1 = 5C4x10-4 T5 = 5x6

## Variáveis aleatórias

Dada uma experiência aleatória, chama-se variável aleatória (v.a.) a toda a função que a cada elemento do espaço de resultados associa um número real.

As variáveis aleatórias representam-se habitualmente pelas últimas letras maiúsculas do alfabeto (…, X, Y, Z).

As variáveis aleatórias dividem-se entre dois tipos:

* Discretas: tomam um número finito de valores ou um infinito numerável de valores;
* Contínuas: tomam valores num intervalo real.

### Variáveis aleatórias discretas (exemplos)

1. Lançamento de uma moeda três vezes

X: “número de vezes que ocorre a face Euro”

Tabela de distribuição de probabilidades da variável X

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 0 | 1 | 2 | 3 |
|  |  |  |  |  |

Nota:

1. Lançamento de dois dados tetraédricos com as faces numeradas de 1 a 4

Y: “soma dos pontos obtidos”

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| + | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|  |  |  |  |  |  |  |  |

1. Extração de um conjunto de cinco cartas de um baralho de 40 cartas

Z: “número de Reis obtidos”

Casos possíveis = 40C5

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|  |  |  |  |  |  |

## Distribuição de frequências relativas/ Distribuição de probabilidades (exemplos)

1. Faz-se rodar uma roleta dividida em seis secções, três numeradas com 1, uma numerada com 2 e duas numeradas com 3, 200 vezes. Obteve-se a seguinte a tabela do número de ocorrências de cada número:

X: “número saído na jogada”

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
| 1 | 98 |
| 2 | 34 |
| 3 | 68 |
| Total | 200 |

* 1. Construir a tabela de distribuição de frequências relativas da variável estatística X

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 2 | 3 |
|  | 0,49 | 0,17 | 0,34 |

1. Construir a tabela de distribuição de probabilidades da variável aleatória Y, dos resultados esperados de rodar uma roleta dividida em seis secções iguais, três numeradas com 1, uma numerada com 2 e duas numeradas com 3.

Y: “número saído na jogada”

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 2 | 3 |
|  |  |  |  |

## Valor médio e desvio padrão

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  | … |  |
|  |  |  | … |  |

Então chama-se valor médio ou esperança matemática da variável aleatória X a:

Chama-se desvio padrão da variável aleatória X a:

## Modelo Binomial ou Distribuição de Bernoulli

Considere-se uma experiência aleatória em que apenas interessa observar a ocorrência de um acontecimento A (sucesso) e a do seu contrário (insucesso).

Suponhamos que a experiência é repetida n vezes e que os resultados obtidos em cada prova são independentes dos resultados obtidos em provas anteriores.

Seja p a probabilidade de sucesso em cada prova.

A variável aleatória X: “número de sucessos nas n provas” chama-se variável aleatória com distribuição Binomial de parâmetros n e p e representa-se po:

B(n; p)

Seja X a variável aleatória binomial B(n; p). A probabilidade de obter exatamente k sucessos nas n provas é dado por:

nCk

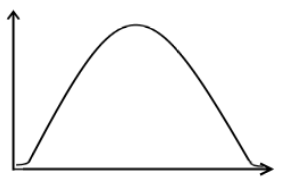
Assim, a tabela de distribuição das probabilidades da variável aleatória binomial B(n; p) é:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| k | 0 | 1 | … | n |
| P(n = k) | nC0 | nC1 | … | nCn |

## Variáveis contínuas

Função densidade de probabilidade ou função de probabilidade é a função cuja representação gráfica é a linha curva para a qual evolui o polígono de frequências relativas de uma variável contínua quando o número de experiências realizadas é muito elevado e a amplitude das classes consideradas tende para zero.

Exemplo genérico:

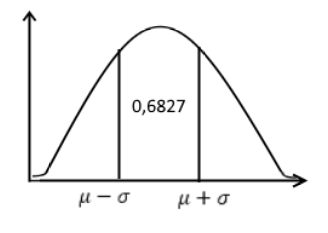


Notas:

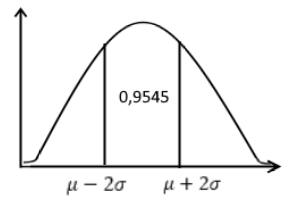
* A área total sob a curva de uma função densidade de probabilidade é igual a 1;
* A probabilidade de que a variável tome valores no intervalo [a; b] é igual à área da curva correspondente ao intervalo [a; b].

## Modelo Normal (Curva de Gauss)

* Tem forma de sino;
* Atinge o máximo no ponto de abcissa igual à média;
* É simétrica em relação à média (a reta x = média);
* A cada par ordenado corresponde uma curva normal, que se representa por N;
* Quanto maior for o desvio padrão, , mais achatada é a curva;
* A área limitada pela curva e correspondente ao intervalo é aproximadamente igual a 0,6827



* A área limitada pela curva e correspondente ao intervalo é aproximadamente igual a 0,9545



* A área limitada pela curva e correspondente ao intervalo é aproximadamente igual a 0,9973

