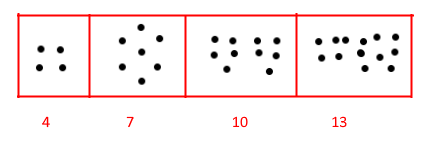
# Sucessões

## Conceito de sucessão

Chama-se sucessão de números reais, ou simplesmente sucessão, a uma função que a cada número natural faz corresponder um número real, de Domínio .

Exemplo:



u(1) = 4, u(2)=7, u(3) = 10, u(4) = 13, …

u(n) = 3n + 1

A expressão u(1) = 4 pode ser representada por u1 = 4 e lê-se “o primeiro termo da sucessão é 4”.

A expressão u(n) = 3n + 1 pode ser representada por = 3n + 1 e lê-se “o termo de ordem n é 3n + 1”. Diz-se que o termo geral da sucessão é 3n + 1.

É usual utilizar a notação para designar a sucessão:

## Modos de definir uma sucessão

Seja uma sucessão tal que:

t(1) = 1, t(2) = 3, t(3) = 6, t(4) = 10, …

É possível definir por recorrência:

Diz-se que uma sucessão é definida por recorrência se é (são) conhecido(s) o(s) primeiro(s) termo(s) e a “lei” para determinar qualquer outro termo, recorrendo a termos anteriores.

## Sucessões monótonas

Dada uma sucessão diz-se que:

* É uma sucessão crescente (em sentido estrito) se e só se ;
* É uma sucessão decrescente (em sentido estrito) se e só se: ;
* É uma sucessão monótona (em sentido estrito) se e só se é crescente ou decrescente.

Se ou , a sucessão diz-se monótona crescente ou monótona decrescente em sentido lato.

## Sucessões limitadas

Um conjunto P de números reais diz-se limitado se tiver majorantes e minorantes.

Uma sucessão diz-se limitada se o conjunto dos seus termos é majorado e/ou minorado:

.

* Se é monótona crescente, então o primeiro termo é um minorante do conjunto dos termos da sucessão ;
* Se é monótona decrescente, então o primeiro termo é um majorante do conjunto dos termos da sucessão .

## Progressões aritméticas

Uma sucessão é progressão aritmética se e só se existe um número real r (razão) tal que:

Cada termo da sucessão é obtido a partir do anterior adicionando-lhe r, a chamada razão aritmética:

Se é uma progressão aritmética de razão r, tem-se:

### Soma dos n primeiros termos

A soma dos n primeiros termos é dada por:

### Soma de termos consecutivos

A soma dos termos consecutivos desde até é dada por:

## Progressões geométricas

Uma sucessão é uma progressão geométrica se e só se existe um número real r (razão) tal que:

Cada termo da sucessão obtém-se do anterior multiplicando-o por r, a chamada razão da progressão geométrica.

é uma progressão geométrica se e só se:

Se é uma progressão geométrica de razão r, então:

### Soma de n termos consecutivos

Se tem , então é dada por:

Se r = 1, todos os termos são iguais ao primeiro, tendo-se

## Indução Matemática

* Provar a validade para o primeiro elemento do conjunto (b(1))
* Provar a validade para o elemento n do conjunto (b(n))
* Provar a validade para o elemento n + 1 do conjunto (b(n+1))

## Sucessões convergentes e divergentes

Uma sucessão un é convergente se existir um número real *a* tal que:

Neste caso diz-se que un converge para *a*.

Uma sucessão un é divergente se não for convergente, isto é, lim(un) não existe ou é infinito.

## Teorema da Unicidade de limite

Uma sucessão convergente tem limite único.

## Teorema do Critério de convergência das sucessões monótonas

Toda a sucessão monótona e limitada é convergente.

## Infinitamente grandes e infinitésimos

* Infinitamente grande positivo -> lim(un) → +∞;
* Infinitamente grande negativo -> lim(un) → -∞;
* Infinitamente grande em módulo -> lim(|un|) → +∞;
* Infinitésimo -> lim(un) → 0

Seja un uma sucessão tal que . Então:

* un é um infinitésimo é um infinitamente grande, ou seja, ;
* un é um infinitamente grande é um infinitésimo, ou seja, .

## Operações com limites finitos

Se un = k então lim(un) = k.

Sendo un e vn sucessões convergentes, então:

* ;
* ;
* ;
* ;
* ;

## Operações com limites infinitos

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |

Notas:

* ;
* .

## Indeterminações

* ;
* ;
* ;
* ;
* ;
* ;
* .

## Limite de Nepper

A partir deste limite pode provar-se que:

Exemplos:

|  |  |
| --- | --- |
| n + 5 | n + 3 |
| -n – 2 | 1 |
| 3 |  |

## Número de Nepper

Designa-se por número de Nepper e representa-se por o limite da sucessão .

Trata-se de um número irracional, sendo .

## Limites notáveis

Exemplos:

Exemplos:

Exemplos:

Ou

Exemplos:

Ou

## Cálculo de limites (exemplos)

|  |  |
| --- | --- |
| 4n + 7 | 2n - 3 |
| -4n + 6 | 2 |
| +13 |  |

|  |  |
| --- | --- |
| -6n + 5 | 3n + 1 |
| +6n + 2 | -2 |
| +7 |  |

## Indeterminações

São operações com limites cujo resultado difere de caso para caso.

As indeterminações podem ser de diferentes tipos:

* ;
* ;
* ;
* .

Quando no cálculo de um limite se obtém alguma destas operações é necessário “levantar a indeterminação”, ou seja, substituir a expressão dada por outra equivalente que não dê origem a uma indeterminação.

Exemplos:

## Levantamento de indeterminações

### 0 / 0

#### Funções racionais fracionárias

Fatorizar o numerador e o denominador, usando preferencialmente a Regra de Ruffini com o valor para o qual tende x como zero.

Exemplos:

C.A.

ou

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | 3 | -3 | -6 |
| 2 |  | +6 | +6 |
|  | 3 | +3 | 0 |

C.A.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | -2 | -5 | 6 |
| 1 |  | 1 | -1 | -6 |
|  | 1 | -1 | -6 | 0 |

#### Funções irracionais fracionárias

Racionalizar o denominador (ou o numerador).

### ∞ - ∞

#### Funções polinomiais

Exemplos:

#### Funções racionais fracionárias

Efetua-se a operação (somar/subtrair reduzindo ao mesmo denominador).

Exemplo:

#### Funções irracionais

Exemplo:

### ∞ / ∞

#### Funções racionais fracionárias

Exemplos:

#### Funções irracionais fracionárias

1. Ter em conta que .

Exemplos:

1. Pôr em evidência o termo de mais alto grau do numerador e do denominador.

Exemplo:

### ∞ \* 0

Efetuam-se as operações, de forma a transformar numa outra indeterminação.