U.F.R SCIENCES ET TECHNIQUES
Département d'Informatique
B.P. 1155
64013 PAU CEDEX
Téléphone secrétariat : 05.59.40.79.64
Télécopie : 05.59.40.76.54

III- COLORATION DANS UN GRAPHE

Problème d'allocation de fréquences

Il s'agit de déterminer le **nombre minimum** de fréquences :

-suffisamment éloignées

-à allouer aux opérateurs

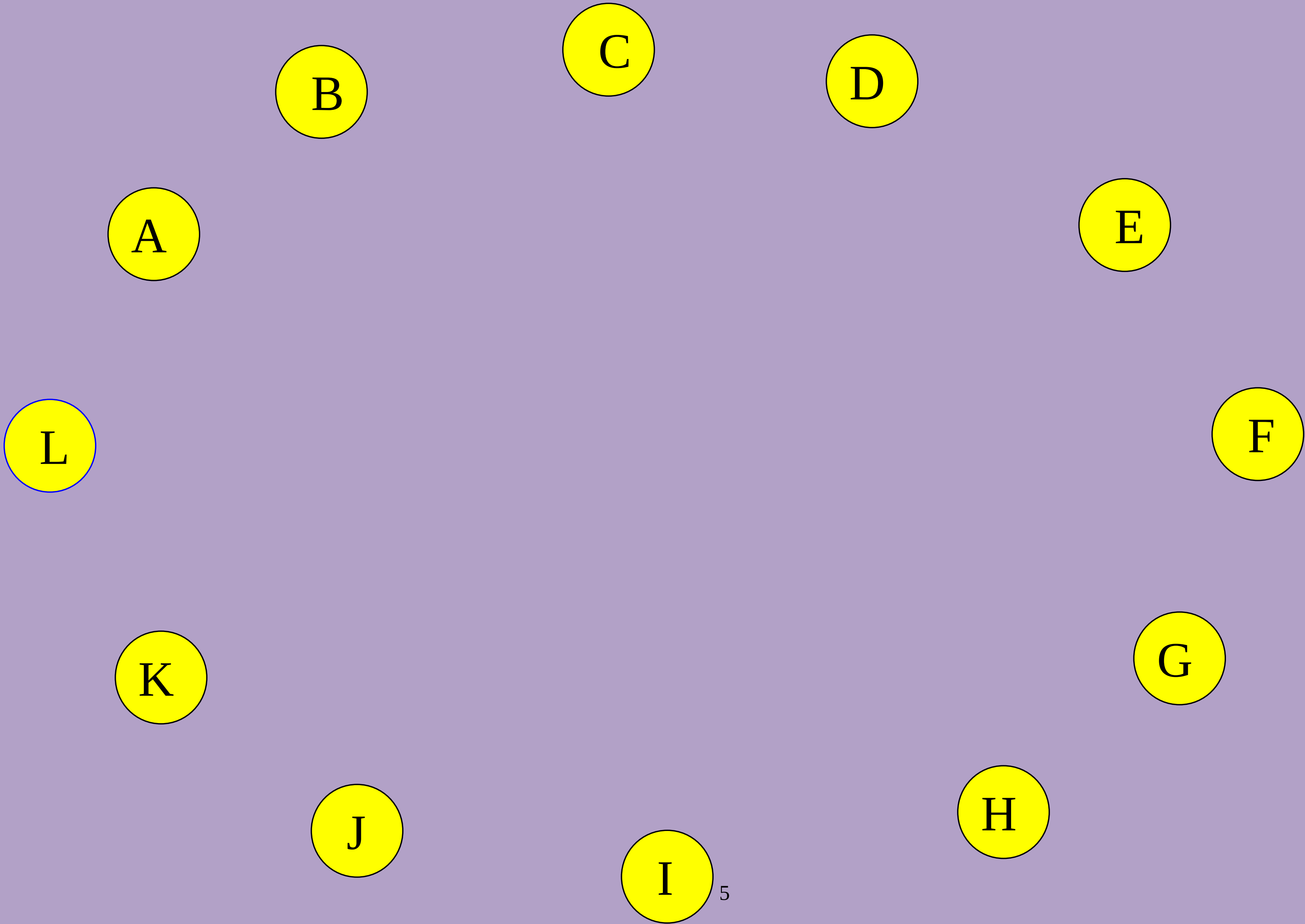
afin de garantir le fonctionnement, sans interférence, du **réseau mobile**.

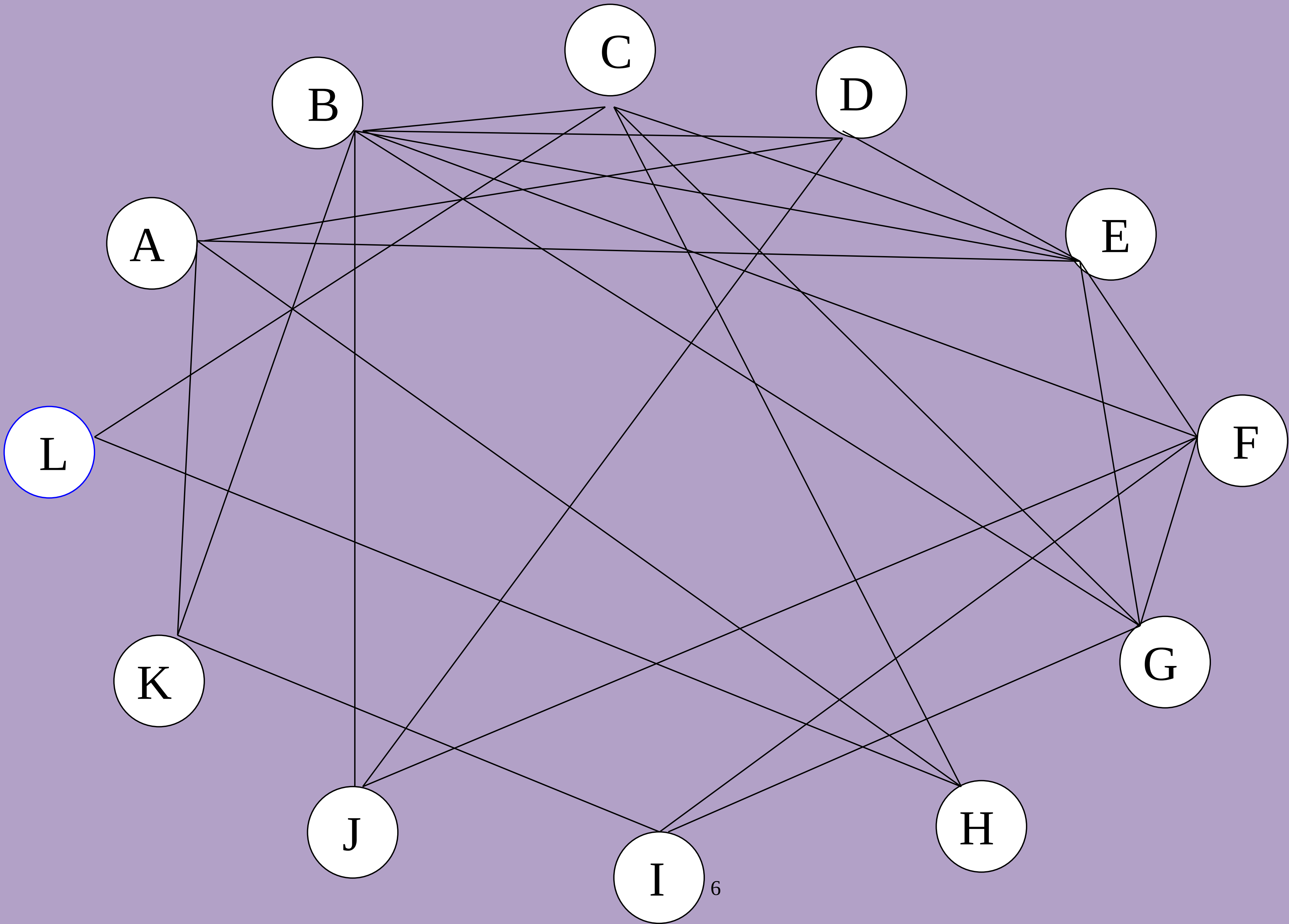
En examinant la répartition géographique des 10 transmetteurs, il ressort le tableau suivant :

Le transmetteur	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
…est «proche» des transmetteurs	D E H K	C D E F G J K	B E G H L	A B E J	A B C D F G	B E G I J	B C E F I	A C L	F G K	B D F	A B I	C H

<u>Etape 1</u> :

Proposer un modèle de graphe représentant l'**incompatibilité** dans l'allocation de fréquences.


A
B
C
D
E
F
G
H
I
J
K
L

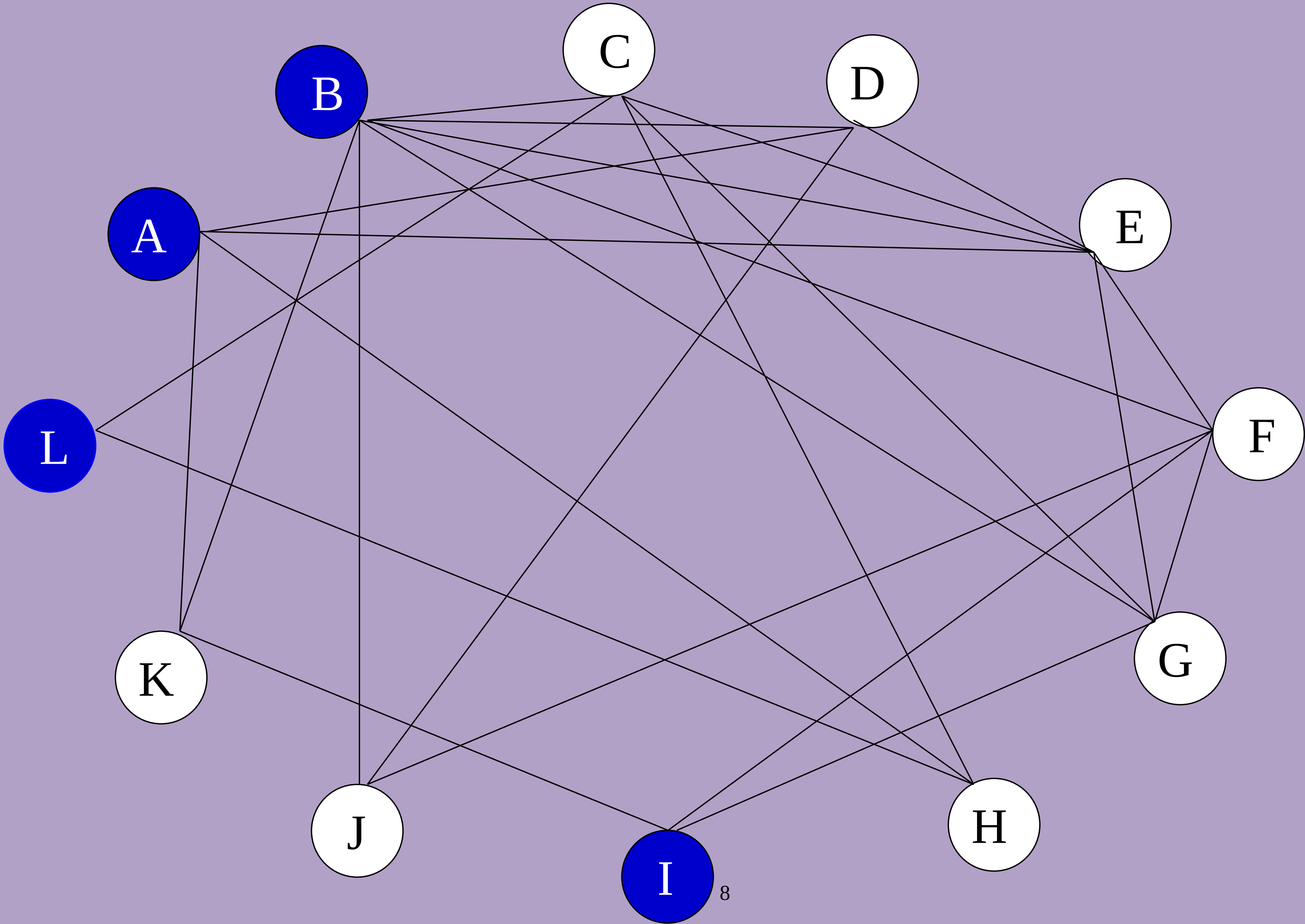

C
B
D
A
E
L
F
K
G
J
I
H

Etape 2

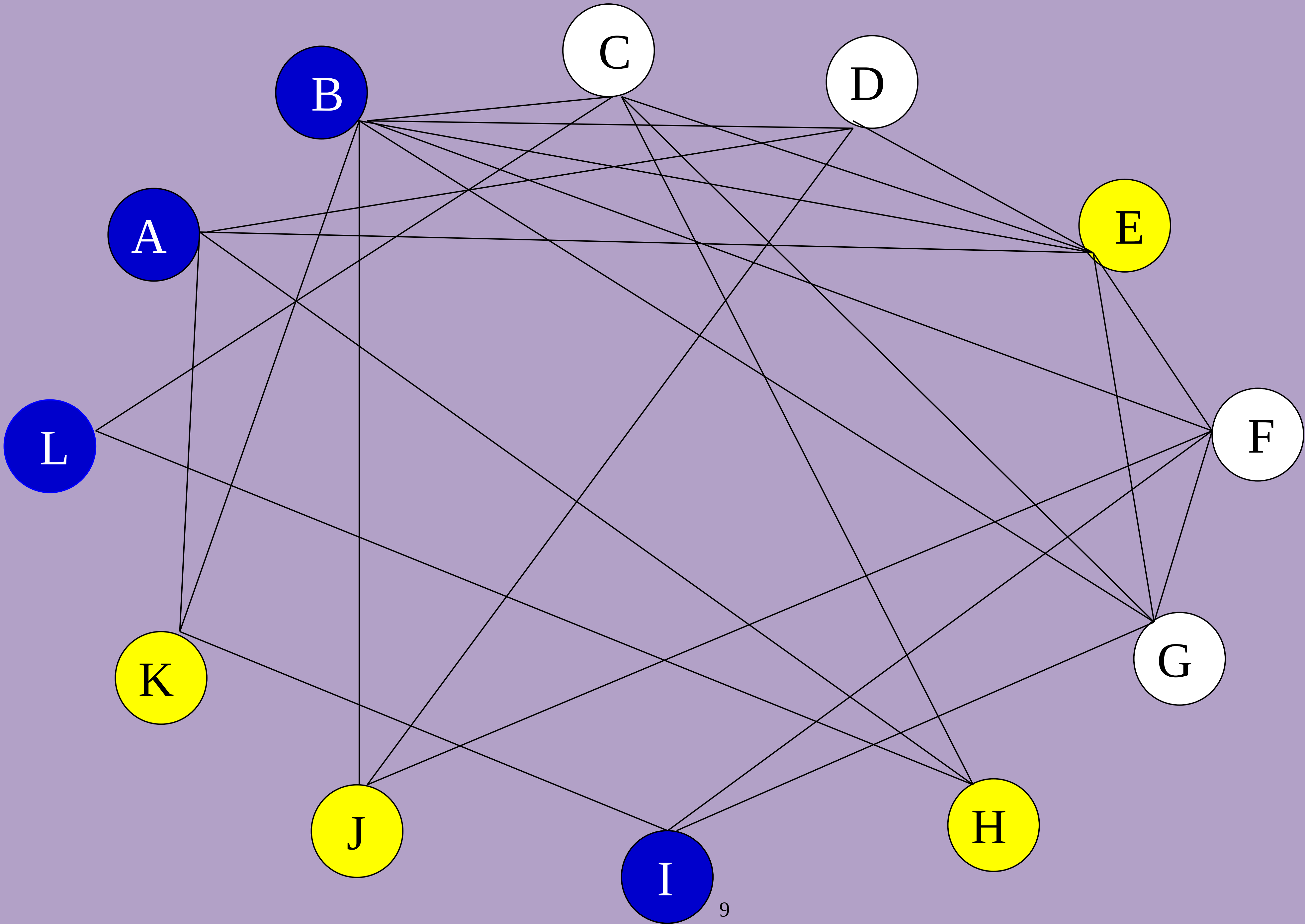
Le problème consiste à :

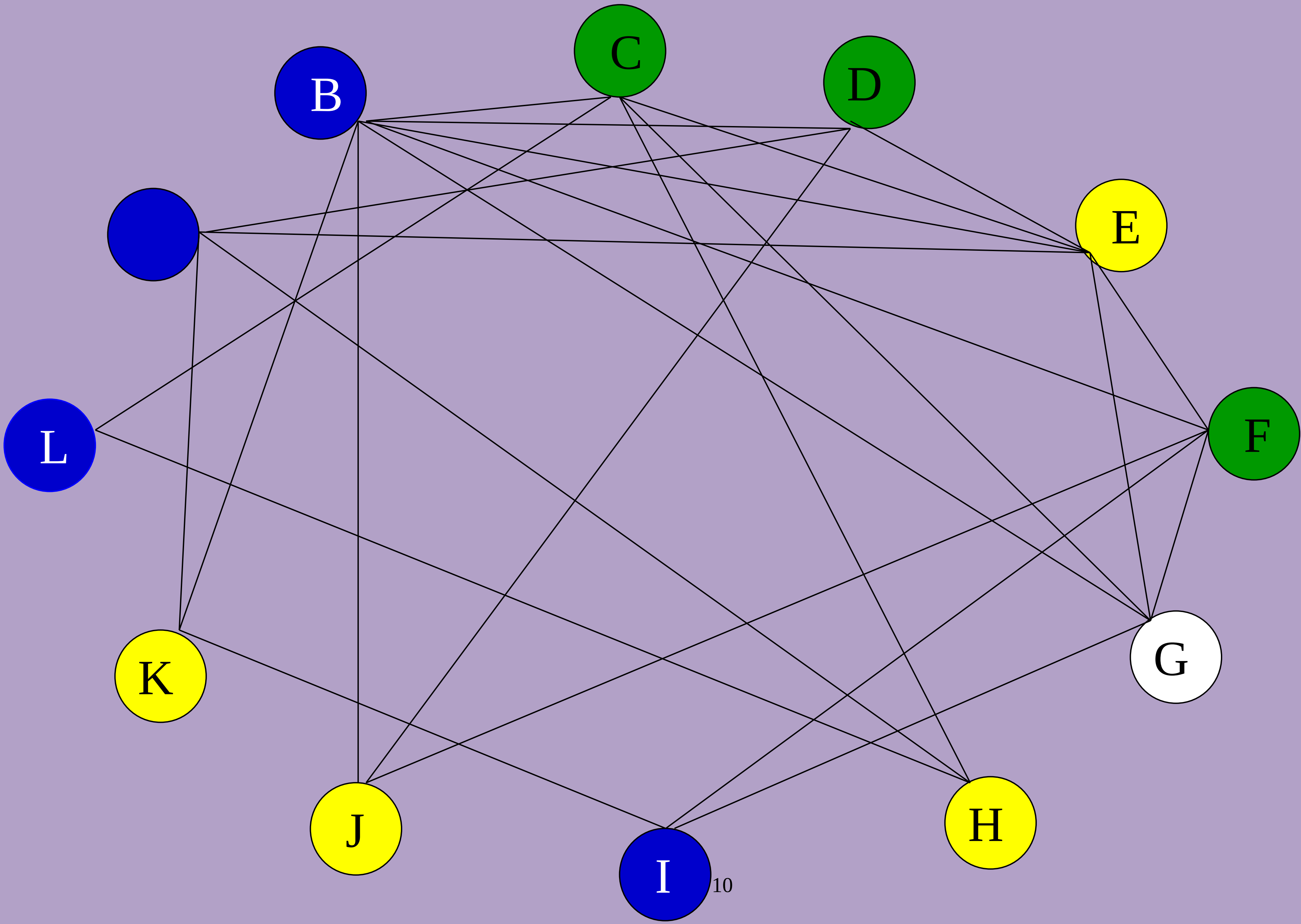
- **minimiser** le nombre de fréquences à allouer
- tout en garantissant leur **compatibilité**

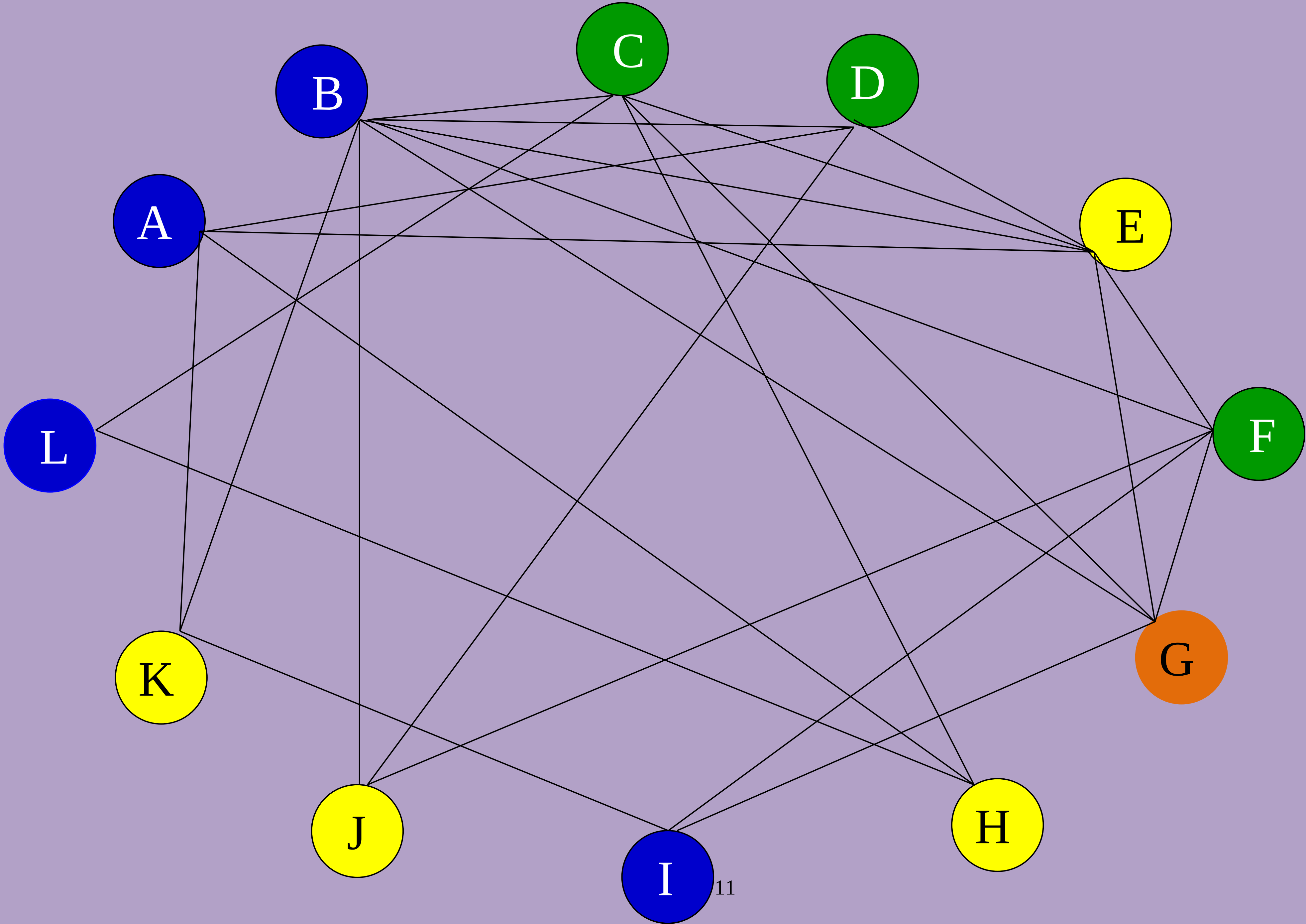
La recherche du **nombre minimum** de fréquences compatibles peut être formulée en termes d'un **problème de coloration de graphe**.



C
D
B
A
E
L
F
G
K
J
H
I


A
B
C
D
E
F
G
H
I
J
K
L


C
D
B
E
L
F
G
K
J
H
I


C
D
B
A
E
L
F
G
K
J
H
I

<u>Etape 3</u> :

Tous les nœuds sont coloriés, l'algorithme s'arrête

k = **4** : résultat de l'algorithme de Welsh-Powell

$\gamma(G) \approx \mathbf{4}$

I- COLORATION DES SOMMETS

1-Plus grande clique

Soit $G = (S, A)$ un graphe non orienté et un sous-ensemble S' tel que :

$$S' \subseteq S$$

Le **sous-graphe** induit par S' est le graphe $G' = (S', A')$ tel que :

$$\forall a \in A' \bullet \ \textbf{source}\,(a) \in S' \wedge \textbf{cible}(a) \in S'$$

On appelle **clique** de G un sous-graphe **complet** de *G*.

Axiome définissant une clique

cliqueDe(g1, g2:Graphe) $\Leftrightarrow$ **sousGrapheDe**(g1,g2)$\wedge$ **complet**(g1)

Axiome définissant une clique maximum

maxCliqueDe(g1, g2 : Graphe) ⇔ **cliqueDe**(g1,g2) ∧

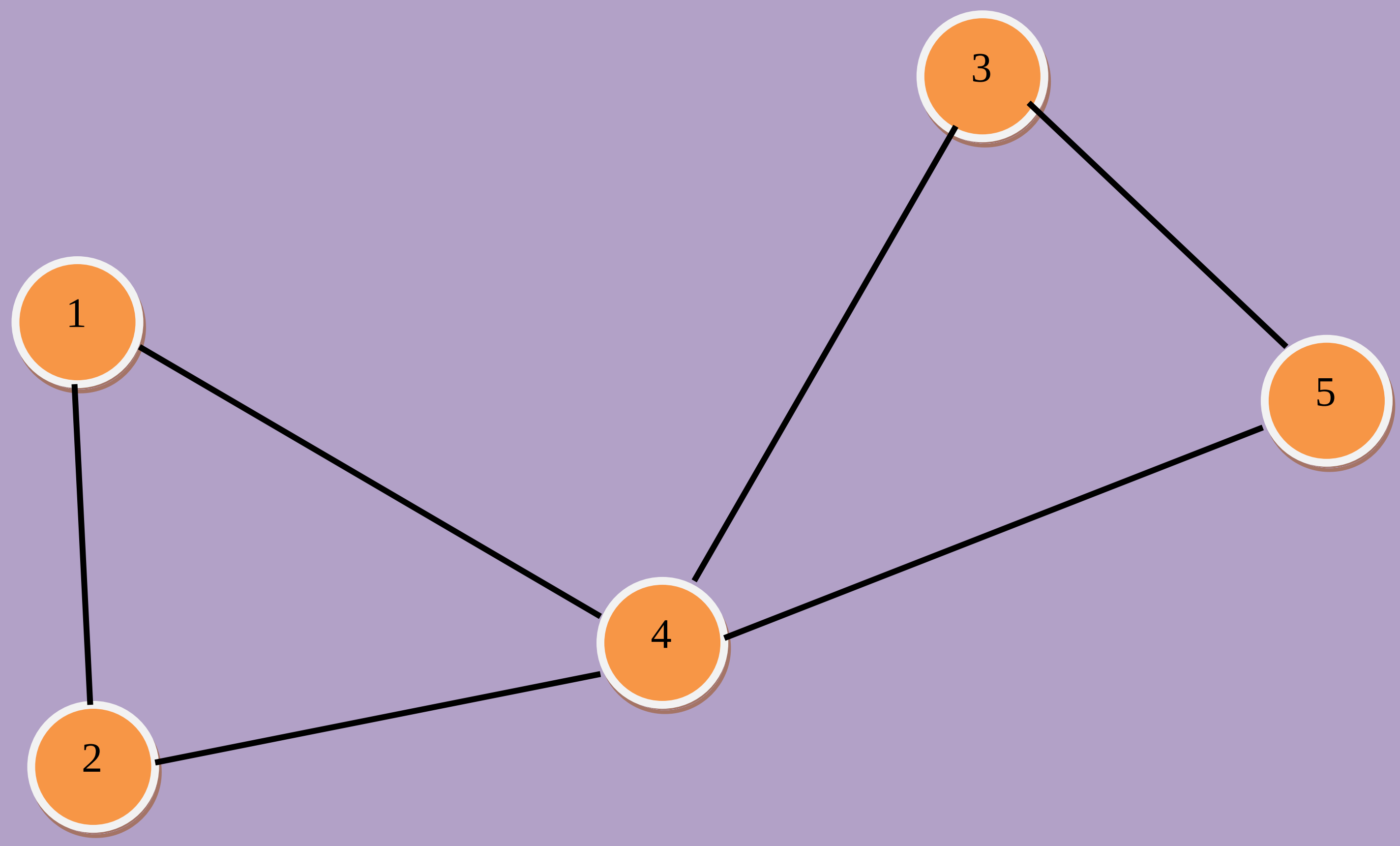
(∀ g3:Graphe •
cliqueDe(g3,g2) ⇒ **sousGrapheDe**(g1,g3) ⇒ g1=g3)

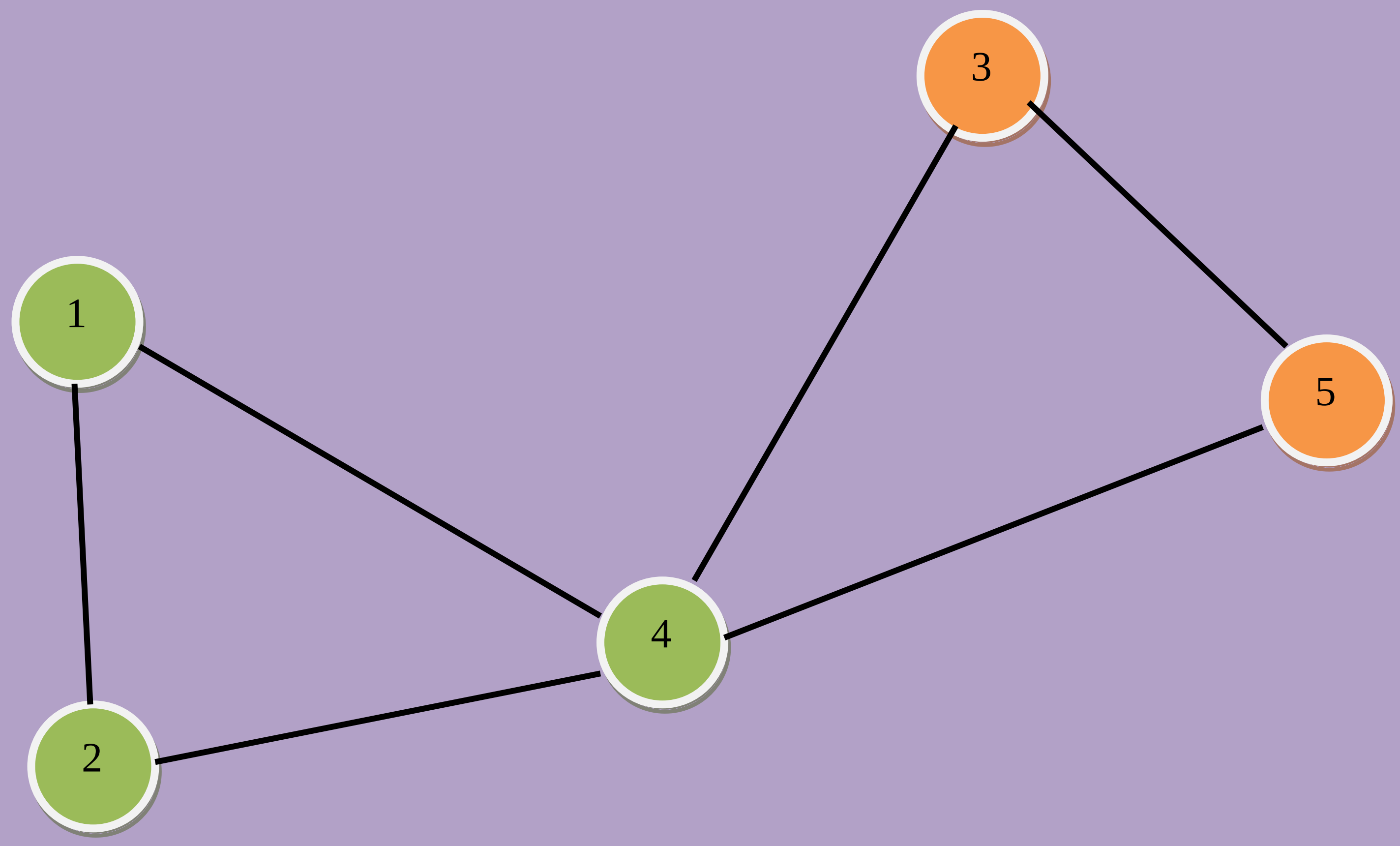
Remarque:

- Dans un graphe, il peut y avoir **plusieurs** **cliques maximum**.

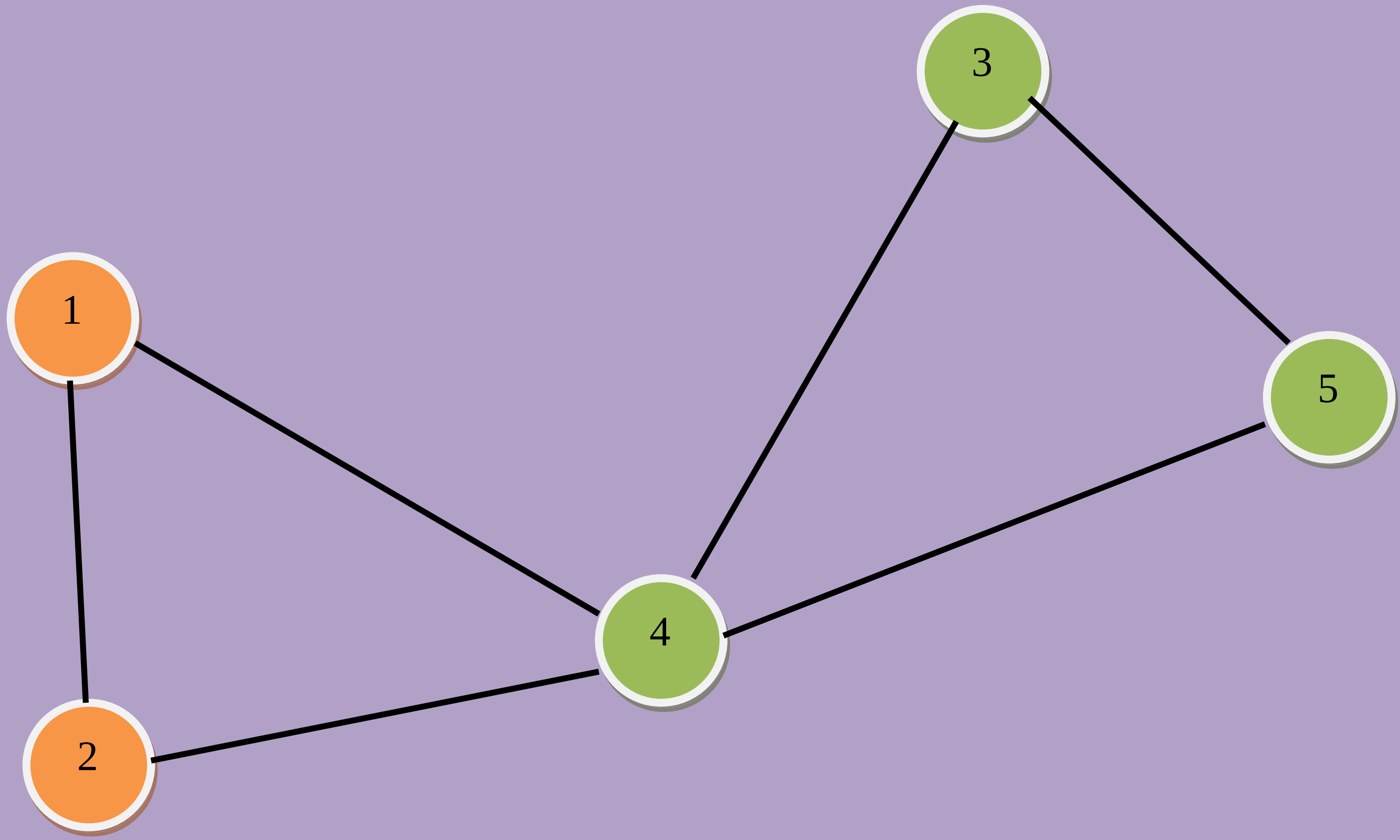
- La **taille** de la **clique maximum** est une caractéristique importante du graphe G; elle est notée **ω(G).**

Soit le graphe ci-dessous :





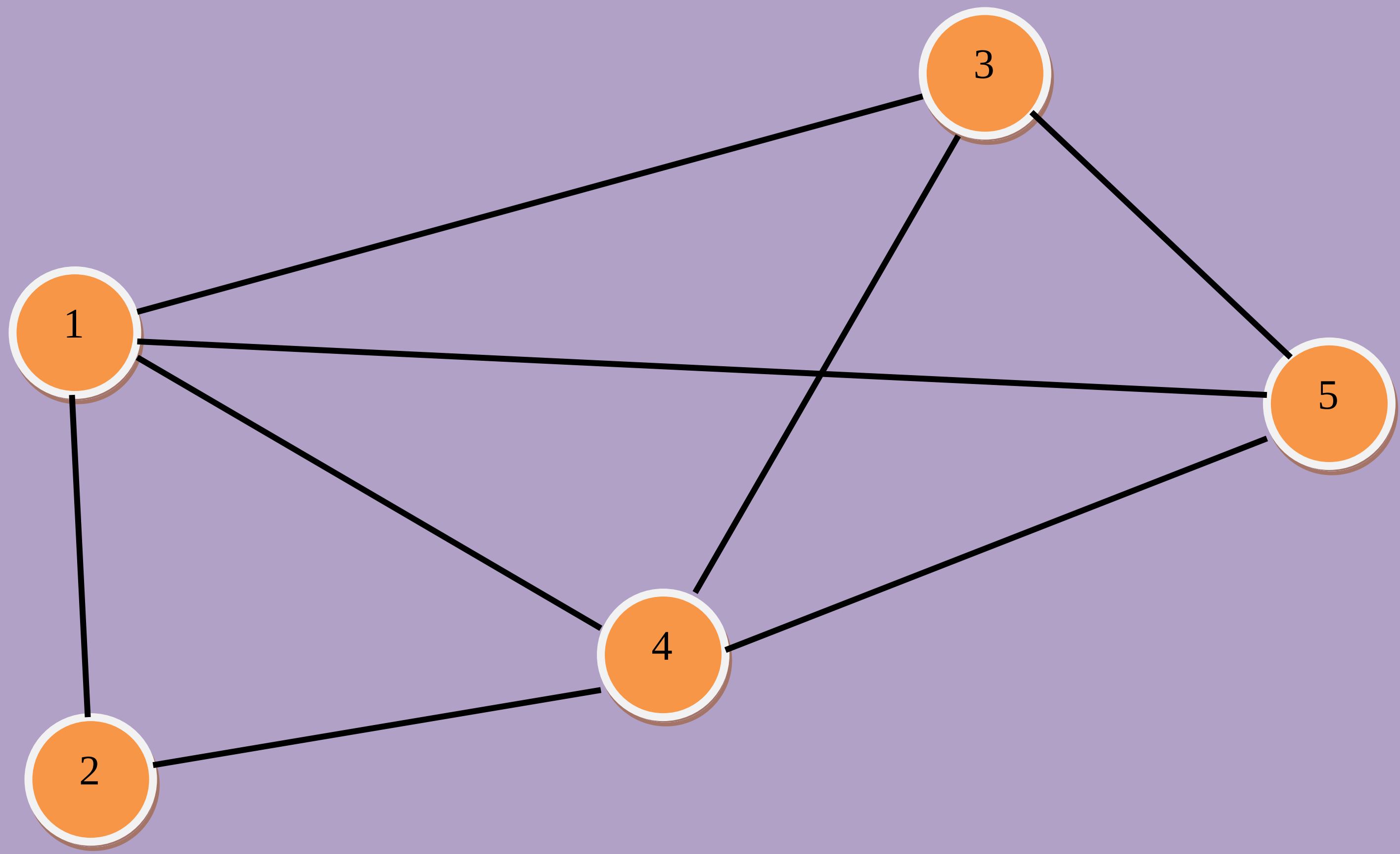
$S1 = \{1,2,4\}$ $\omega(G) = 3$

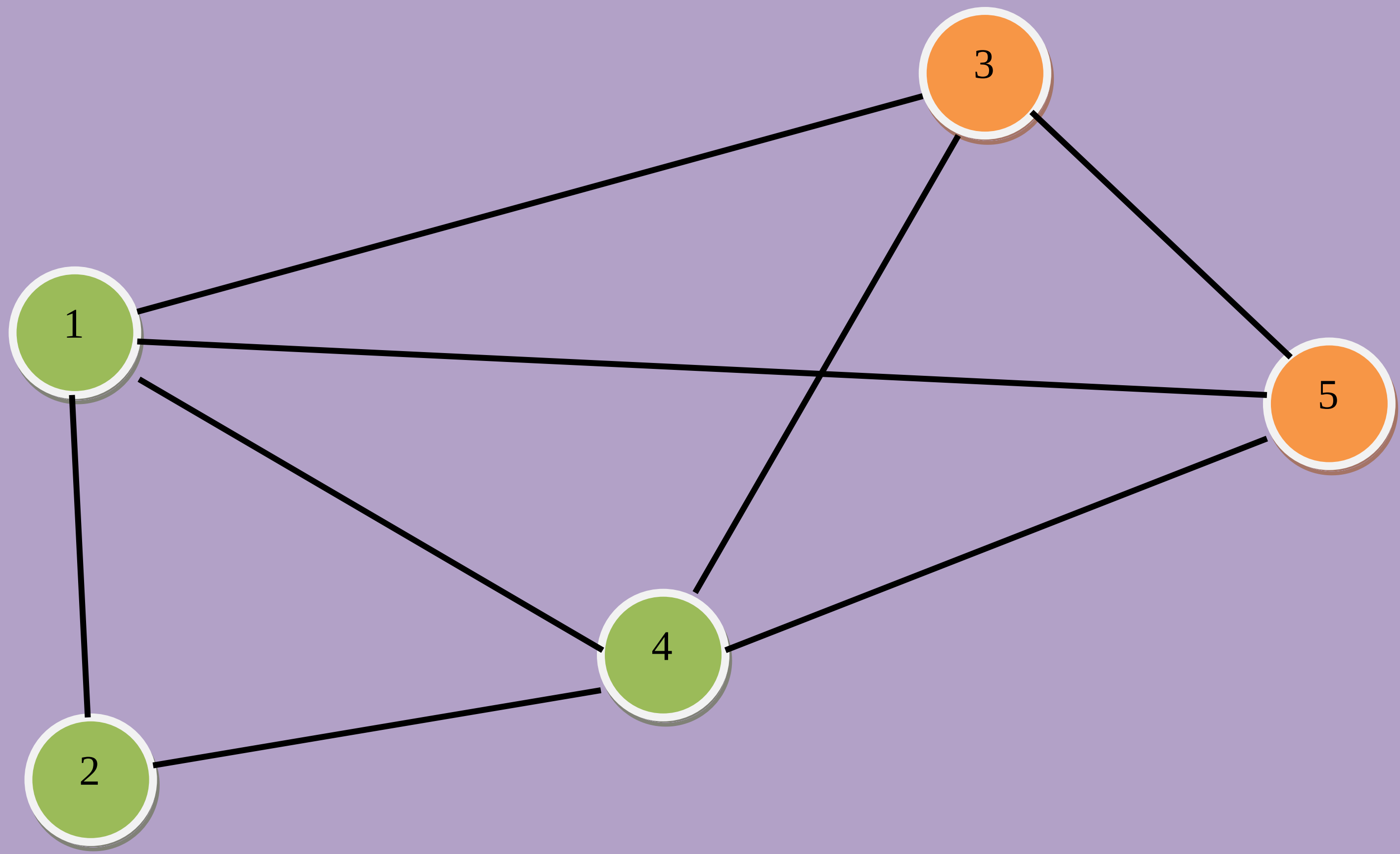


S2= {3,4,5}

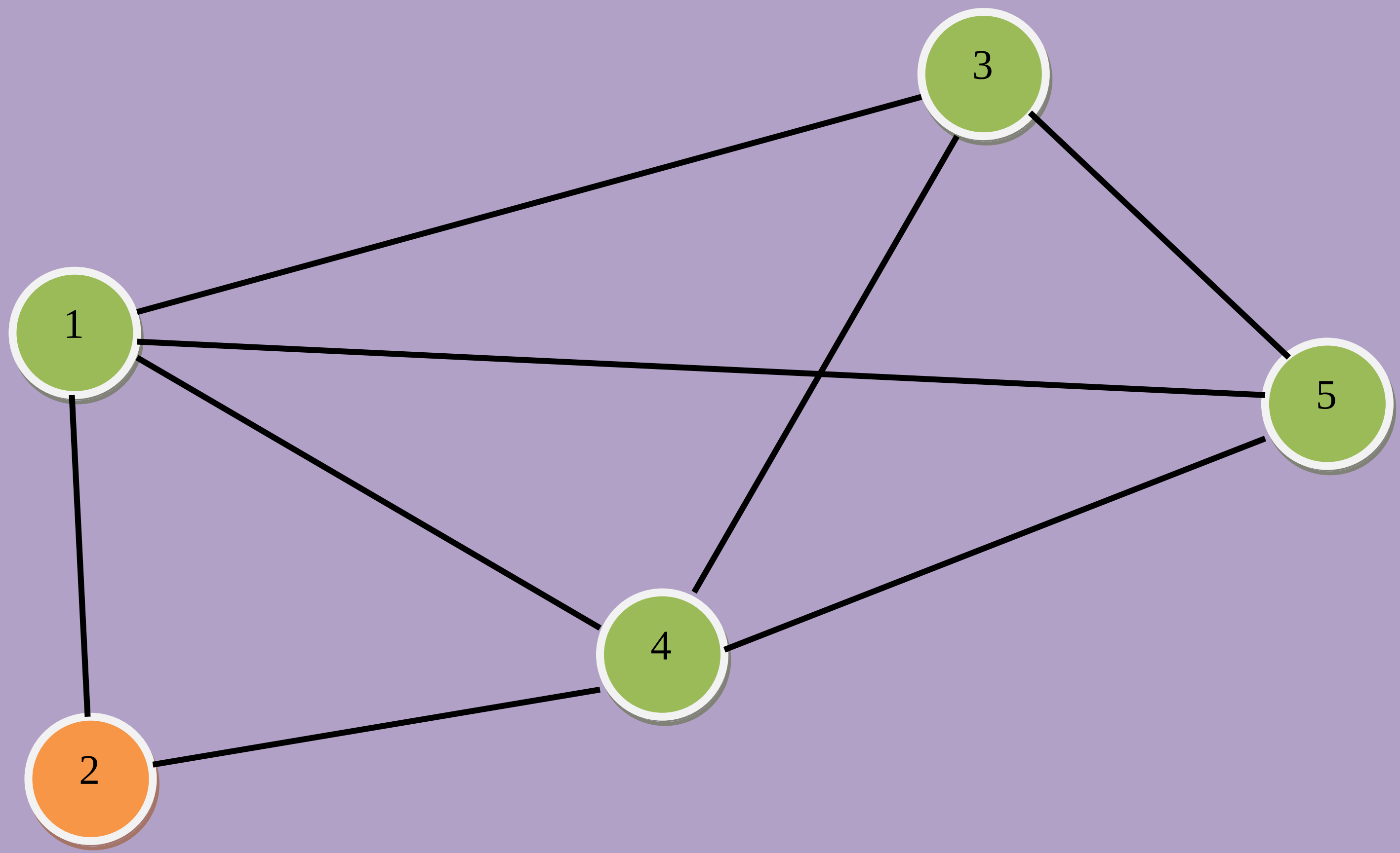
$\omega(G)$= 3

Soit le graphe ci-dessous:

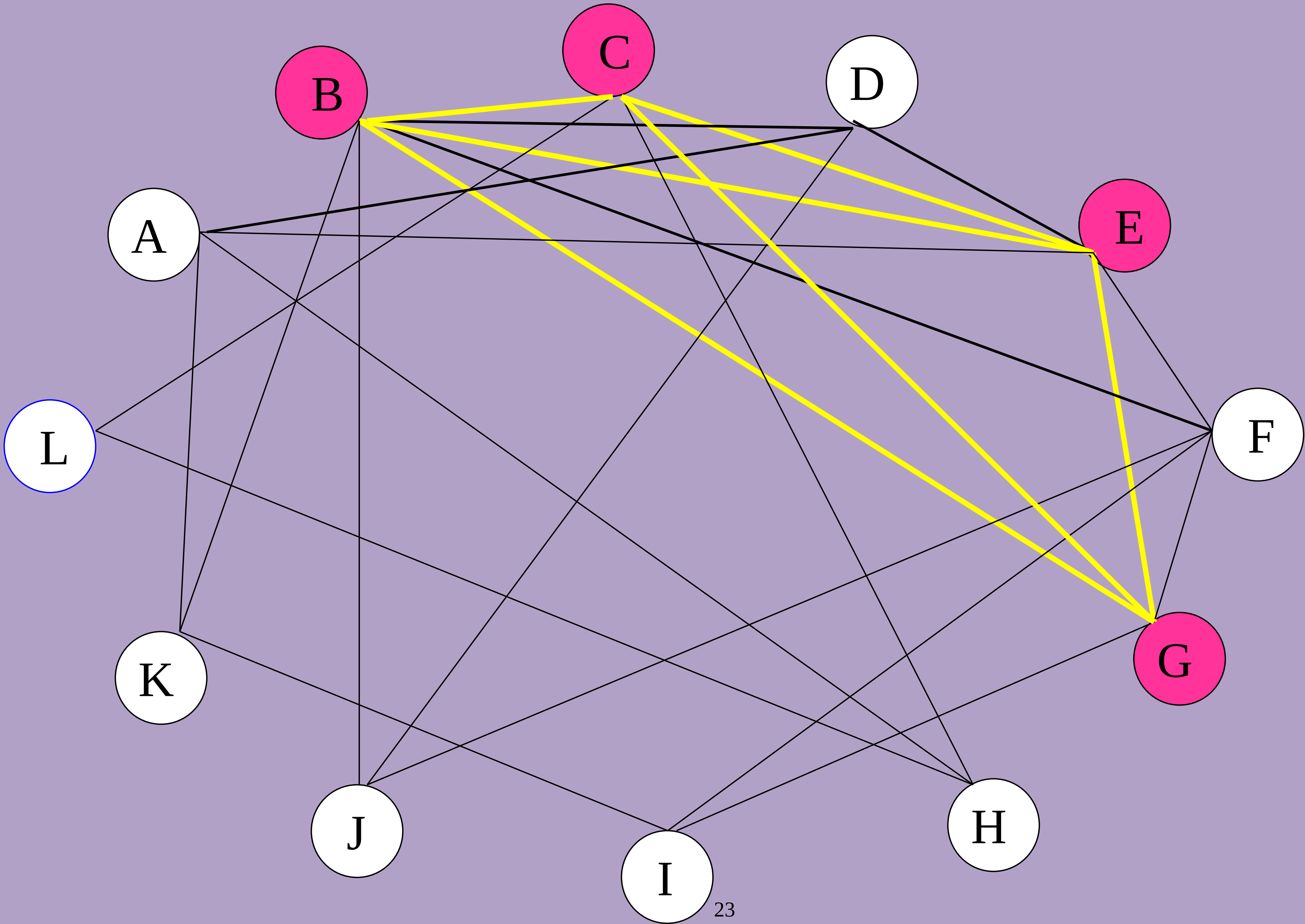




S1= {1,2,4} $\omega(G)= 3$



S2= {1,3,4,5} ω(G)= 4


C
B
D
A
E
L
F
G
K
J
I
H

$S1 = \{B, C, E, G\}$ $\omega(G) = 4$

2- Nombre de stabilité

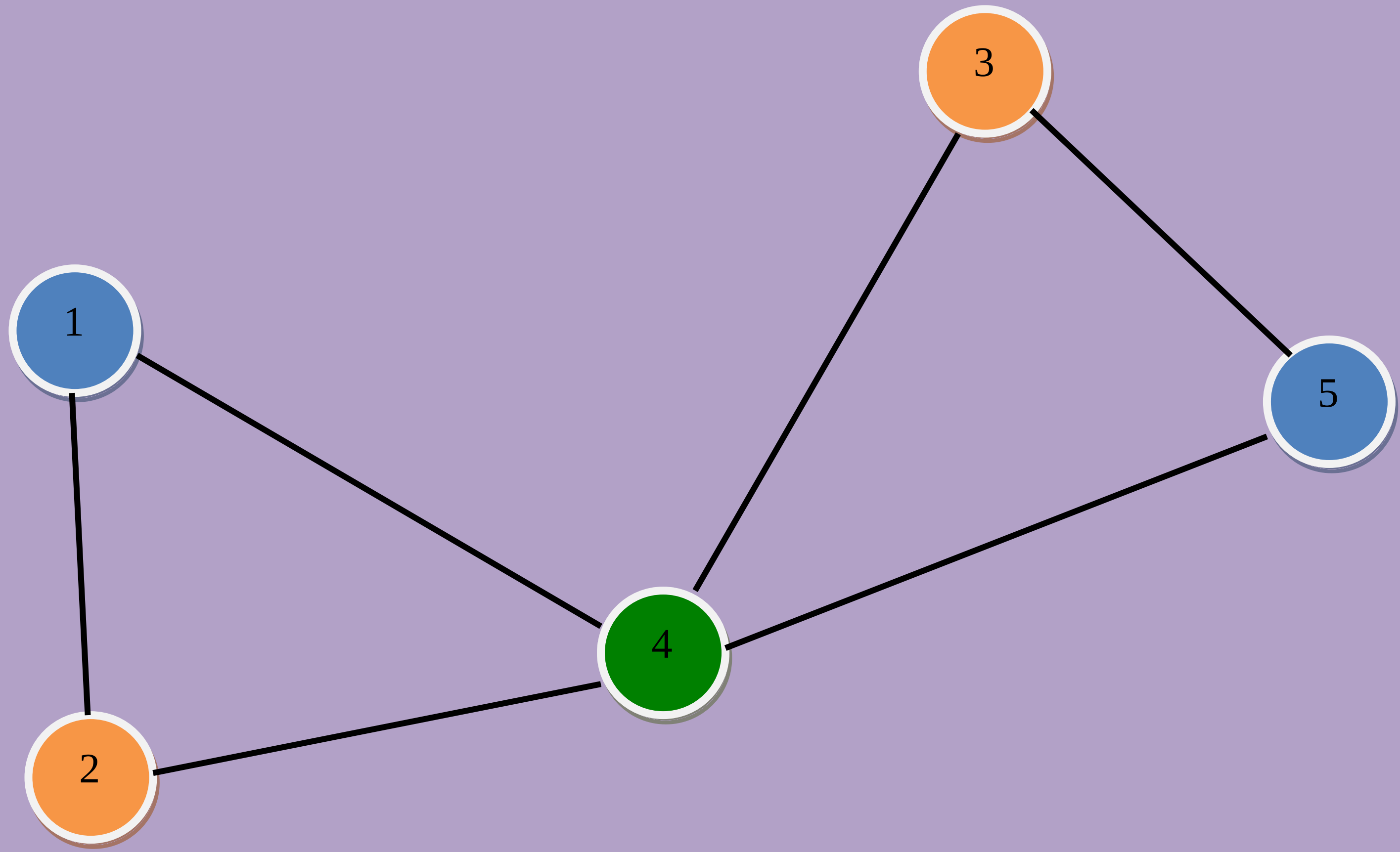
Soit $G = (S, A)$ un graphe non orienté.

Un sous-ensemble S' de S est un **stable** s'il ne comprend que des sommets **non adjacents** deux à deux.

Soit S_{max} le **plus grand stable** de G; on appelle **nombre de stabilité** de G et on note $\alpha(G)$ le nombre:

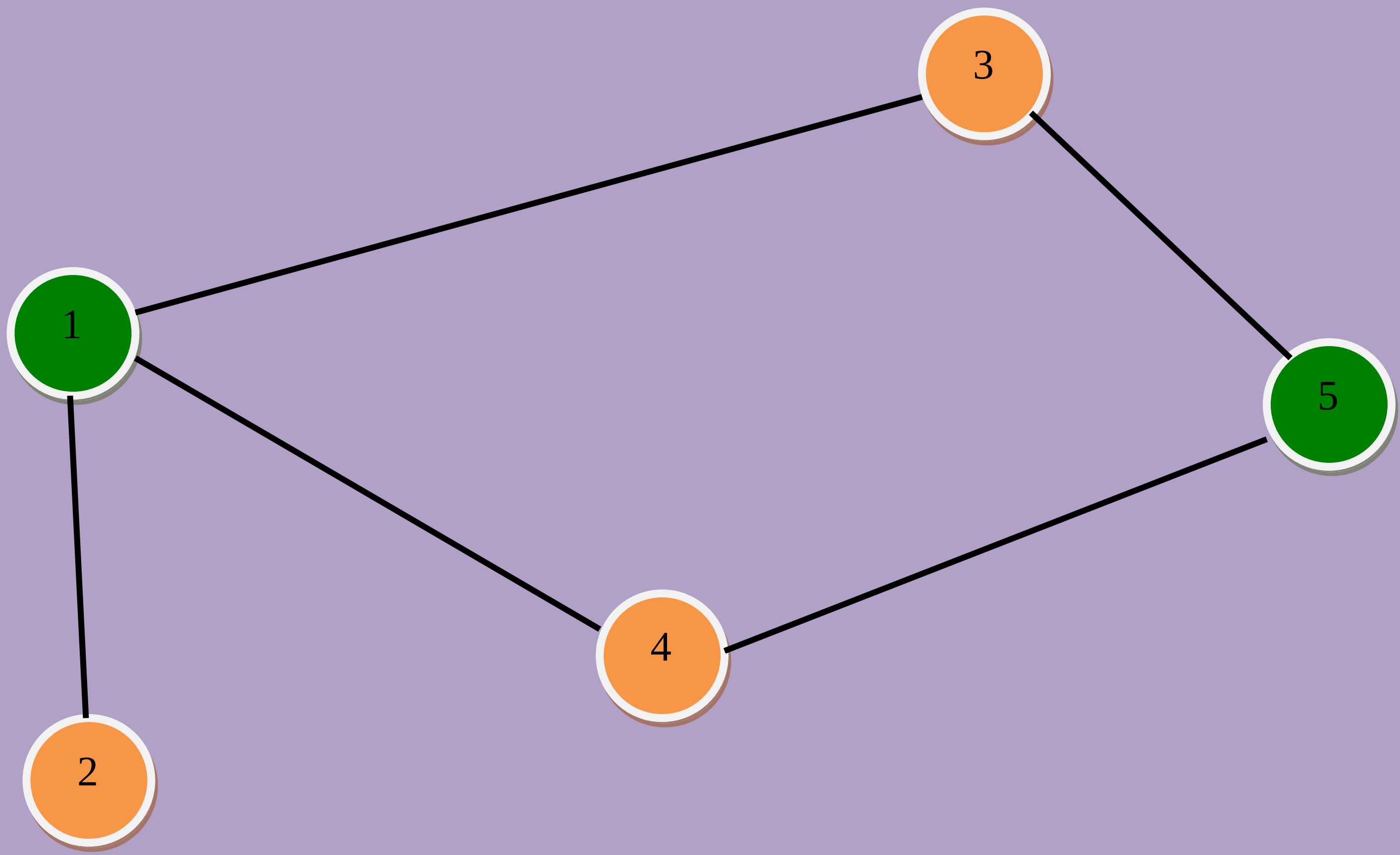
$$\alpha(G) = \mathrm{Card}[S_{max}]$$

Soit le graphe ci-dessous :

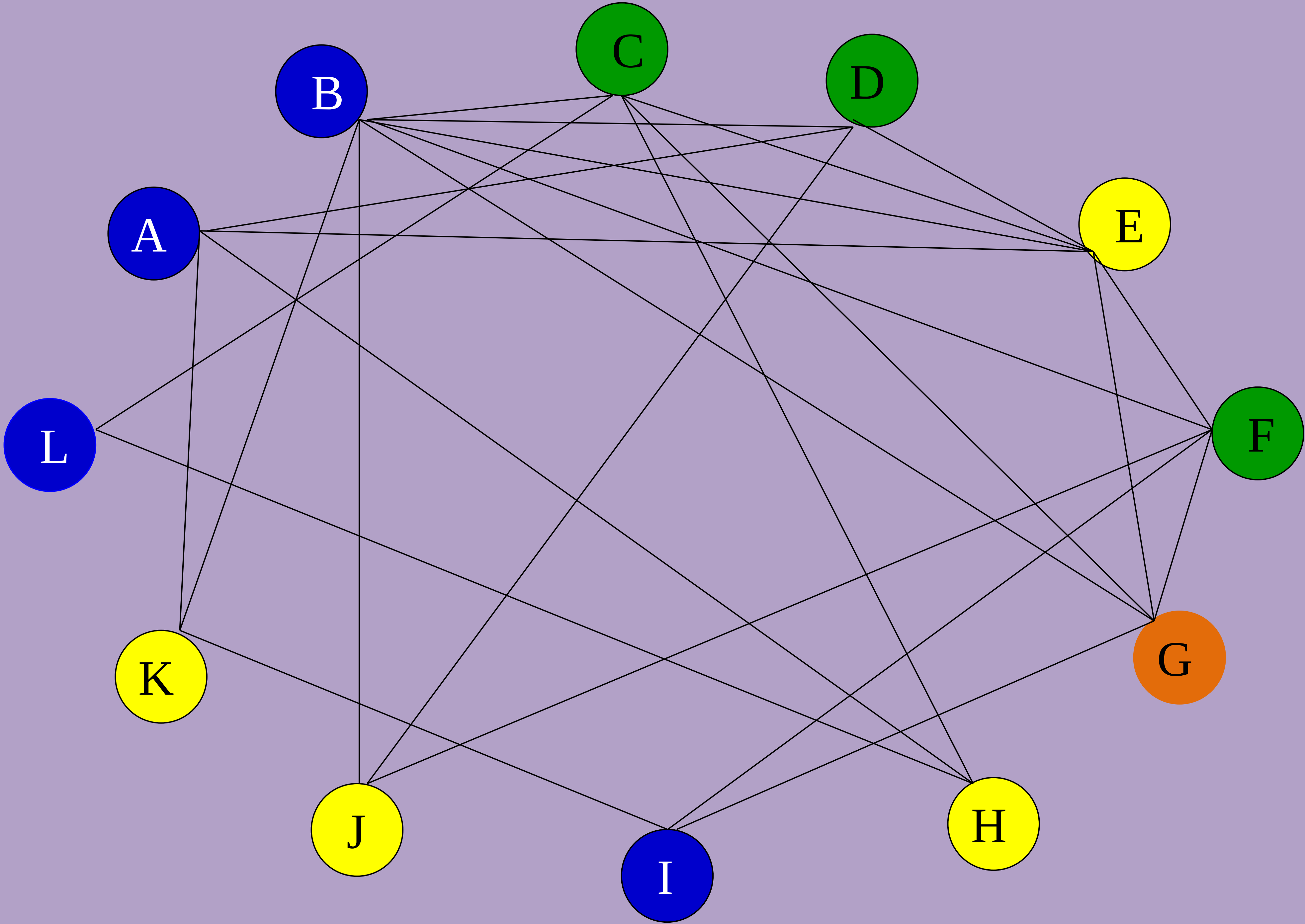


$S_1=\{2,3\}$ $S_2=\{1,5\}$ $S_3=\{4\}$ $\alpha(G) = 2$

Soit le graphe ci-dessous:



$S_1=\{2,3,4\}$ $S_2=\{1,5\}$ $\alpha(G) = 3$


A
B
C
D
E
F
G
H
I
J
K
L

$S_1=\{E,H,J,K\}$ $\alpha(G) = 4$

3- Processus de coloration

La coloration des sommets d'un graphe consiste affecter une **couleur** :

- à **tous les sommets** de ce graphe

- de sorte que deux sommets **adjacents** ne portent pas la **même couleur**.

Une coloration avec *k* couleurs est donc:

- une **partition** de l'ensemble S des sommets,
- en k **stables** S_1, S_2,…, S_k tels que :

i) $\forall i,j \in [1,..,k] \bullet \quad S_i \cap S_j = \emptyset$

ii) $S = S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_k$

4- Nombre chromatique d'un graphe

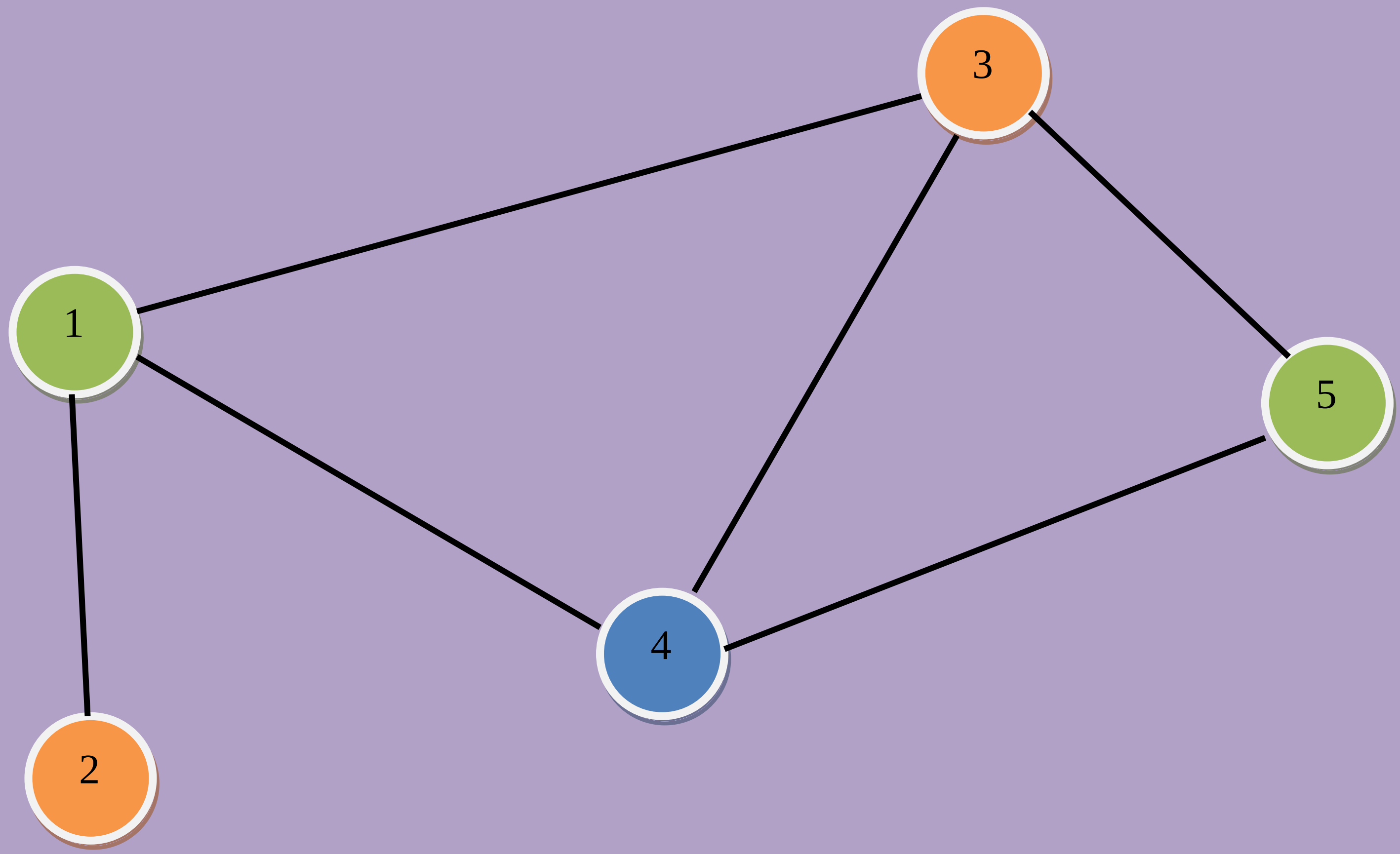
Le **nombre chromatique** du graphe G :

- est le **plus petit entier** k
- pour lequel il existe une partition de S en k stables.

On notera $\boldsymbol{\gamma(G)}$ le nombre chromatique de G.

Exemple

Soit le graphe ci-dessous :



On a eu besoin de **trois** couleurs : vert, orange et bleu, pour colorer tous les sommets.

On a donc trois stables :

$S_1 = \{\mathbf{1}, \mathbf{5}\}$,

$S_2 = \{\mathbf{2}, \mathbf{3}\}$

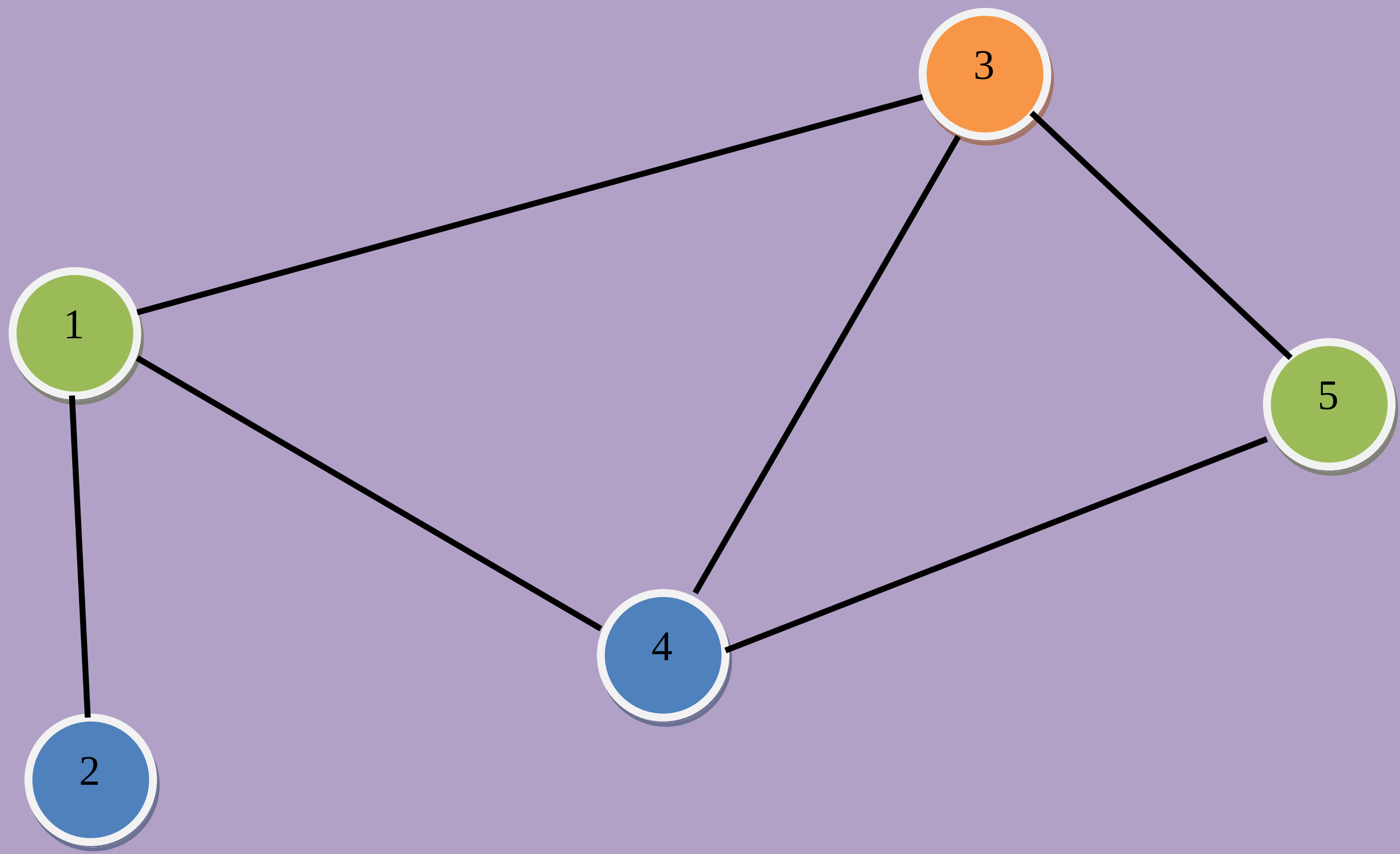
$S_3 = \{\mathbf{4}\}$.

$$\gamma(G) = 3$$

Remarques

On ne peut pas utiliser moins de 3 couleurs, à cause des **cliques** 1-3-4 et 3-4-5.

Remarquons enfin que le sommet 2 aurait pu aussi être **bleu**.



La coloration minimale n'est donc **pas unique**.

Application

Une faculté doit organiser les horaires des oraux de rattrapage.

Supposons qu'il y a 7 épreuves à planifier, numérotées de1 à 7.

En outre, les paires d'épreuves suivantes ont des étudiants communs :

E1 et E2,
E1 et E4,
E1 et E7,
E2 et E4,
E2 et E6,
E3 et E4,
E3 et E7,
E4 et E6,
E5 et E7.

Problème :

Comment organiser ces épreuves de façon que :

- aucun étudiant n'ait à passer deux épreuves en même temps ?
- et cela sur une durée minimale ?

Un tel problème se ramène à un problème **de coloration de graphe**.

5- Encadrement du nombre chromatique

5.1- Première majoration

$$\gamma(G) \leq r + 1$$

où r est tel que :

$$r = \mathbf{Max}\ [d°(s)\ ] \quad \text{pour } s \in S$$

Preuve :

Soit un graphe et r le degré maximum de ses sommets.

Donnons-nous une palette de $(r + 1)$ couleurs.

Pour chaque sommet du graphe on peut tenir le raisonnement suivant :

- ce sommet est adjacent à r sommets au plus,

- le nombre de couleurs déjà utilisées pour colorer ces sommets est majoré par r,

- il reste donc au moins une couleur non utilisée avec laquelle nous pouvons colorer notre sommet.

5.2- Deuxième majoration

$$\gamma(G) \leq n + 1 - \alpha(G)$$

Preuve :

Considérons S' un stable de S de cardinal $\alpha(G)$.

Une coloration possible des sommets consiste :

- à colorer les sommets de S' d'une même couleur,

- et les n-$\alpha(G)$ autres sommets de couleurs toutes différentes.

On en déduit que : $\gamma(G) \leq 1+ n-\alpha(G)$.

5.3- Première minoration

Le **nombre chromatique** d'un graphe est supérieur ou égal à celui de chacun de ses sous-graphes.

Preuve:
Ce résultat découle de la définition même du nombre chromatique.

5.4- Deuxième minoration

$$\gamma(G) \geq \omega(G)$$

Preuve :

Puisque, par définition, dans une **clique** d'ordre *n'*, tous les sommets sont adjacents entre eux, il faudra *n'* couleurs.

Donc, forcément, le nombre chromatique du graphe sera supérieur ou égal à l'ordre de sa plus grande clique.

6- Algorithme de Welsh-Powell

L'algorithme permet d'obtenir une coloration qui utilise un nombre k «**pas trop grand»** de couleurs.

Cependant il **n'assure pas** que k soit **minimum**, c'est à dire que :

$$k = \gamma(G)$$

La mise en œuvre de l’algorithme implique **trois** étapes :

Étape 1

1- Classer les sommets du graphe dans l'ordre **décroissant** de leur degré.

2- Attribuer à chacun des sommets son numéro d'ordre dans la liste triée.

Étape 2

En parcourant la liste des sommets **dans l'ordre** de tri:

1- attribuer une couleur **non encore utilisée** au premier sommet **non encore coloré**

2- attribuer cette **même couleur** à chaque sommet **non encore coloré** et **non adjacent** à un sommet de **cette couleur**.

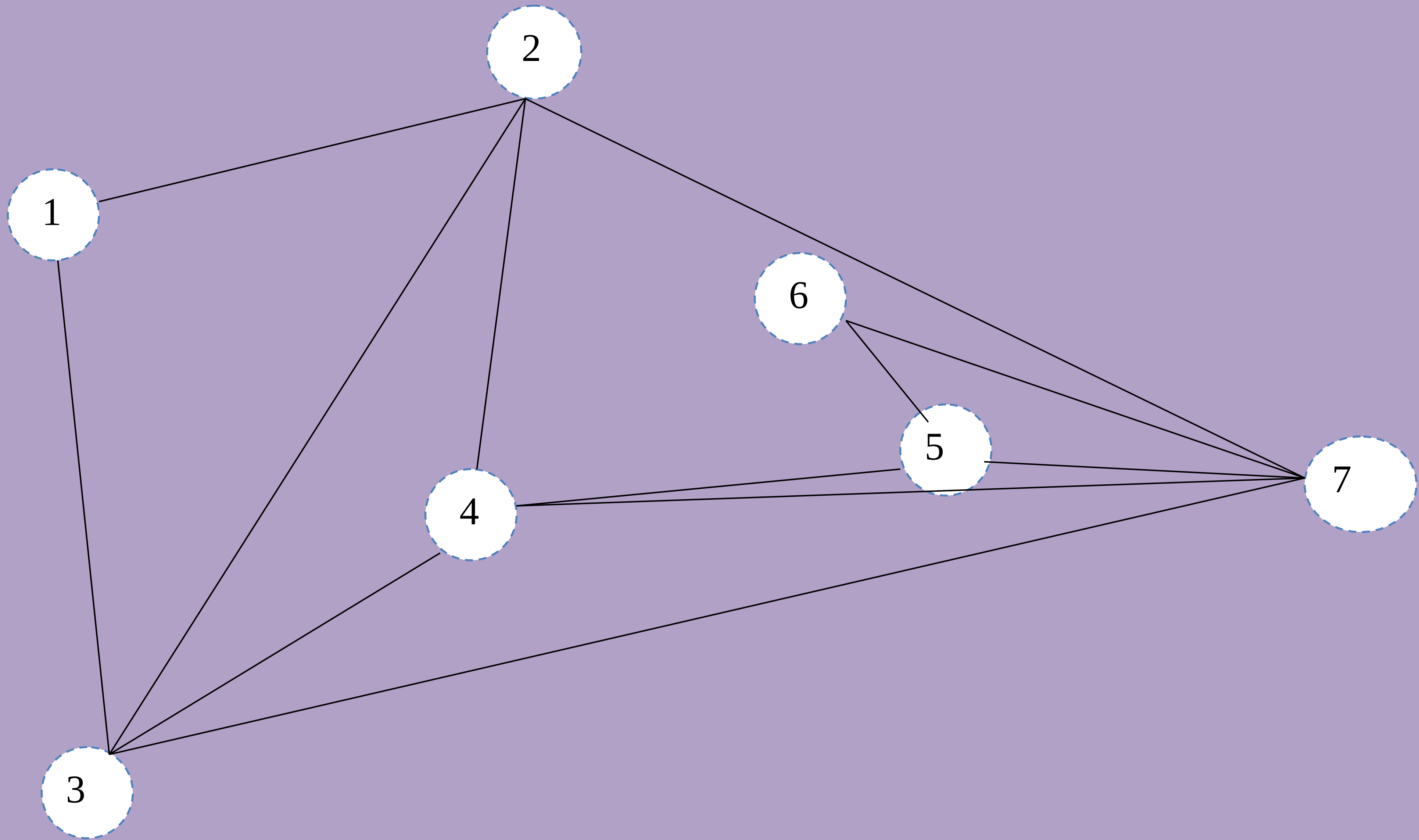
Étape 3

1- S'il reste encore des sommets non colorés revenir à l'étape 2.

2- Sinon, la coloration des sommets est terminée.

Exemple

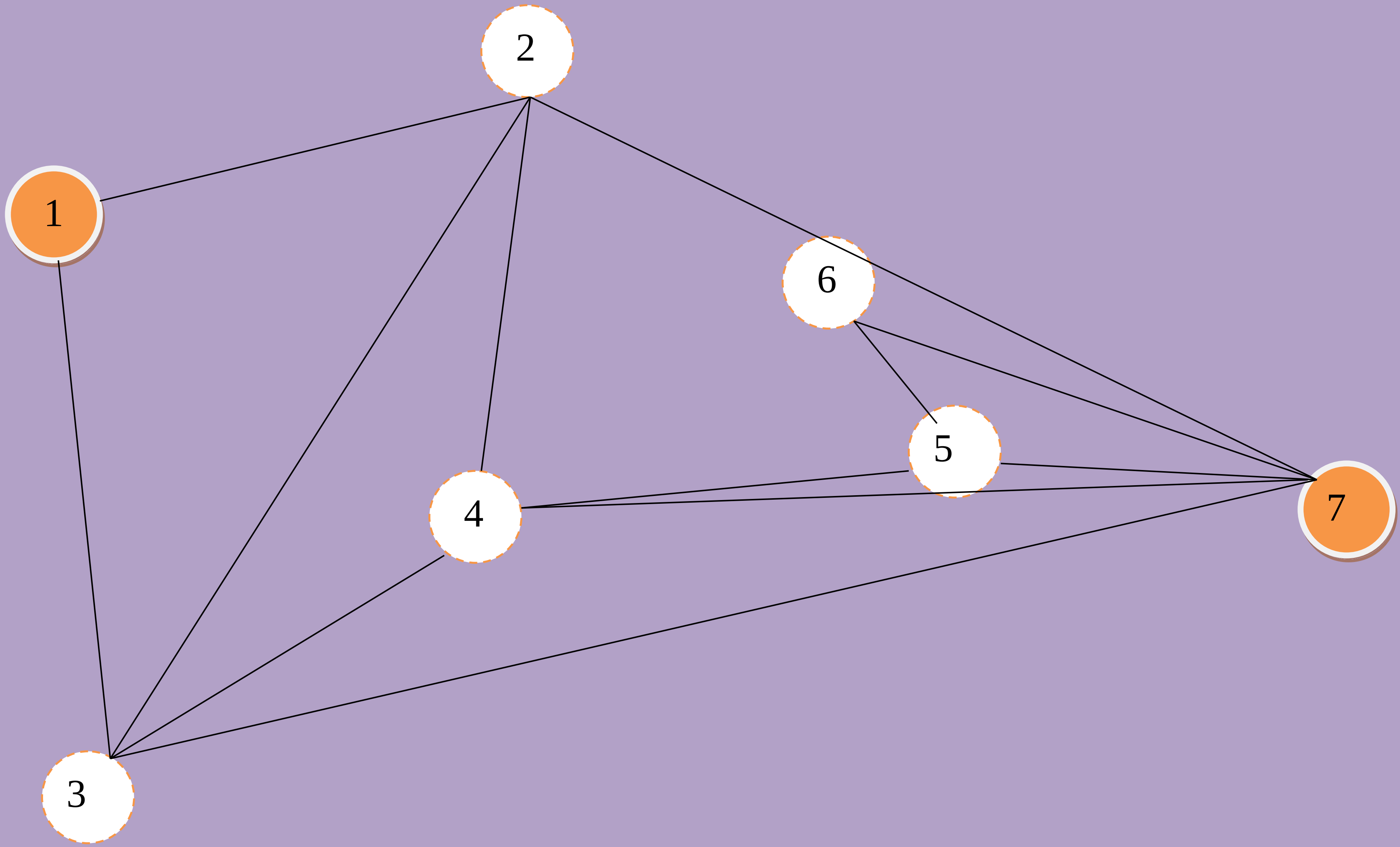
Soit le graphe représenté ci-dessous :



Tri des sommets par ordre de degré décroissant :

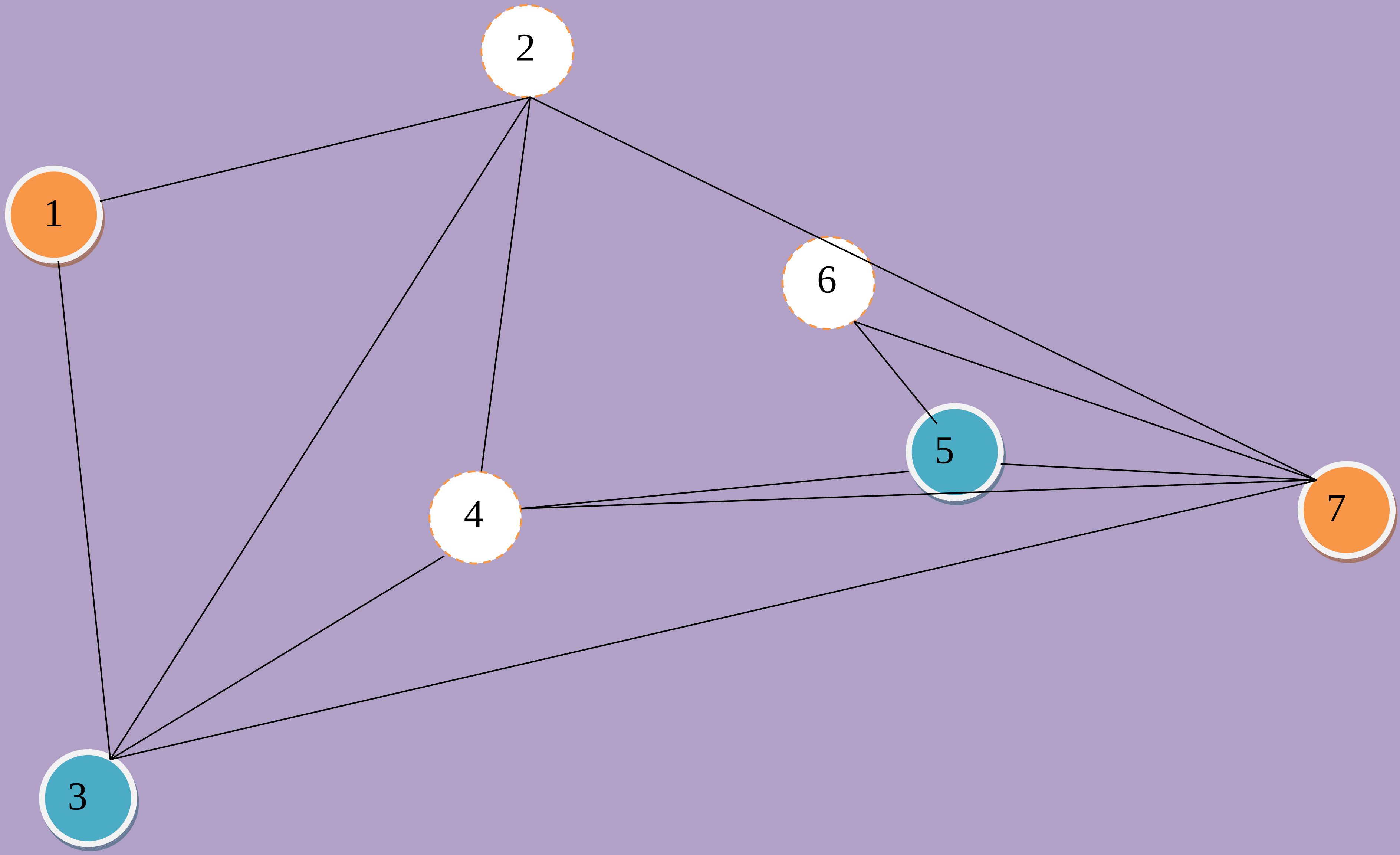
d°(7) = 5,
d°(3) = 4,
d°(2) = 4,
d°(4) = 4,
d°(5) = 3 ,
d°(1) = 2,
d°(6) = 2,

Coloration des sommets en partant de 7 : 1



d°(7) = 5,
d°(3) = 4,
d°(2) = 4,
d°(4) = 4,
d°(5) = 3 ,
d°(1) = 2,
d°(6) = 2,

Coloration des sommets partant de 3 : 5



$d°(7) = 5$,

$d°(3) = 4$,

$d°(2) = 4$,

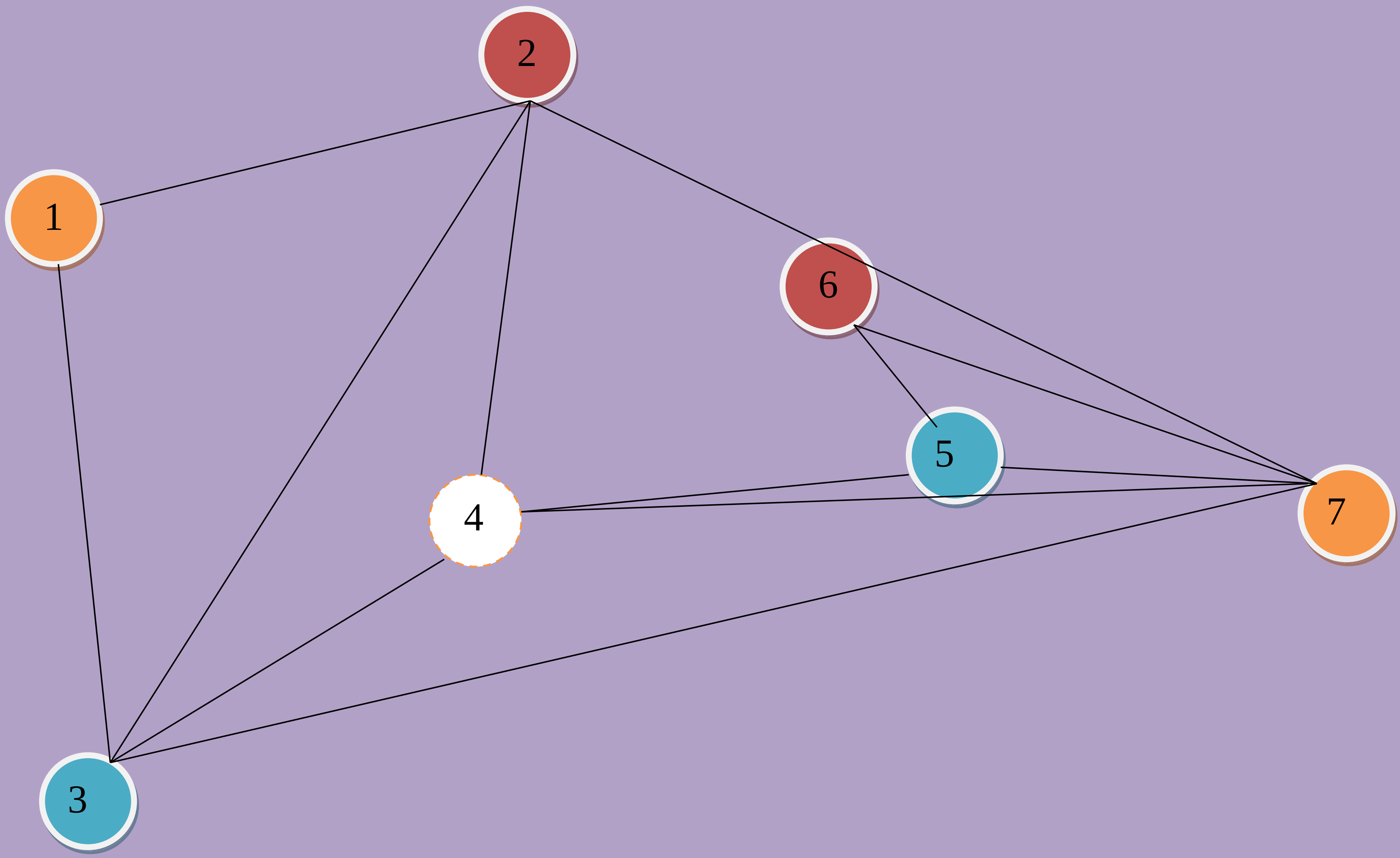
$d°(4) = 4$,

$d°(5) = 3$,

$d°(1) = 2$,

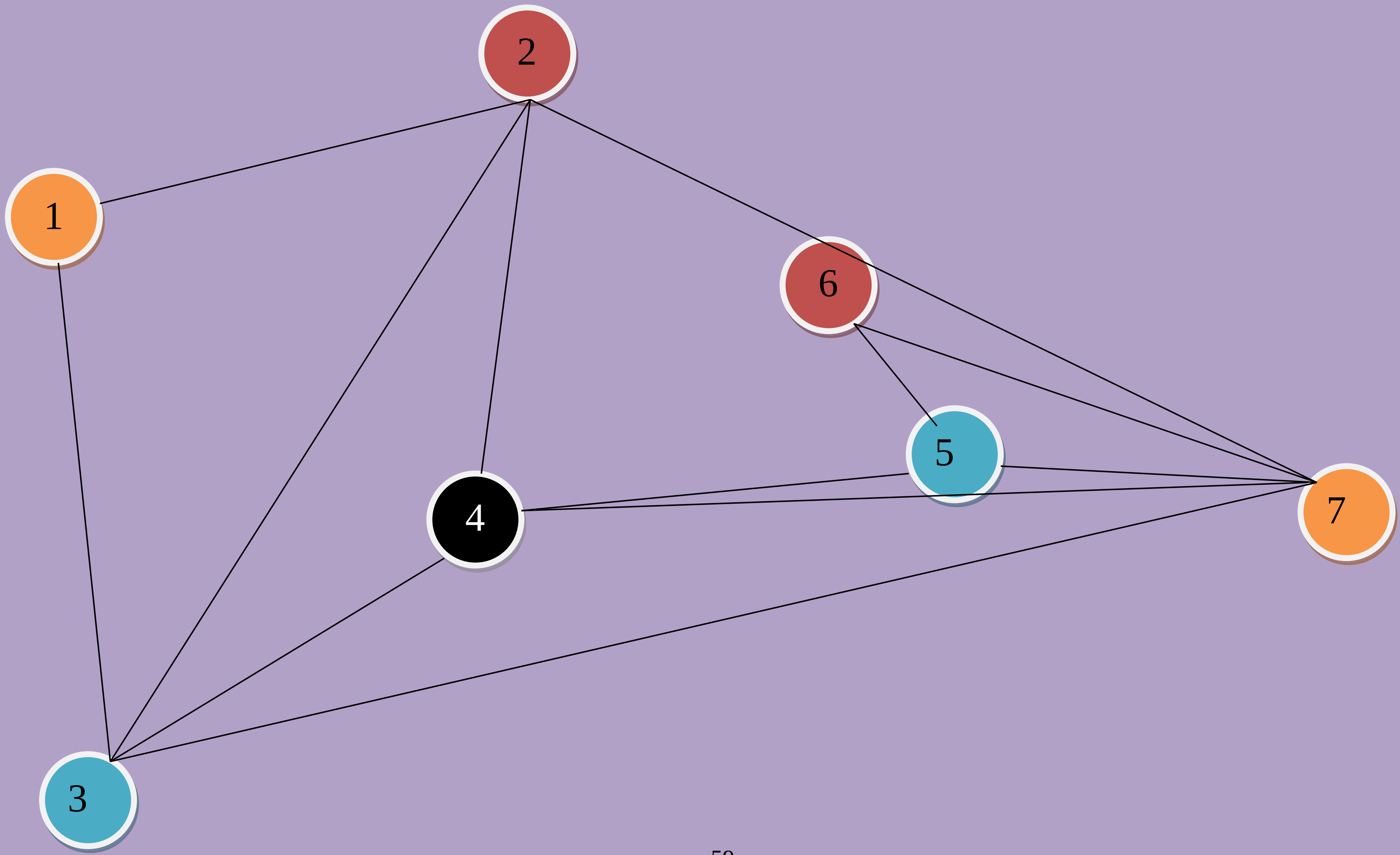
$d°(6) = 2$,

Coloration des sommets partant de 2 : 6



$d°(7) = 5$,
$d°(3) = 4$,
$d°(2) = 4$,
$d°(4) = 4$,
$d°(5) = 3$,
$d°(1) = 2$,
$d°(6) = 2$,

Coloration des sommets partant de 4 : rien



Conclusion

k = 4 : résultat de l'algorithme Welsh-Powell

$\gamma(G) \approx 4$

Vérification :

$\gamma(G) \leq r+1 = d°(7) +1 = 5+1= 6$

$\gamma(G) \leq n+1 - \alpha(G) = 7+1 - 3= 5$

$\gamma(G) \geq \omega(G) =3$

$$3 \leq \gamma(G) \leq 5$$

II- COLORATION DES ARETES

0- Arêtes adjacentes

Deux arêtes sont dites **adjacentes** si elles ont une extrémité commune.

Cette extrémité commune est adjacente aux deux autres.

1- Processus de coloration

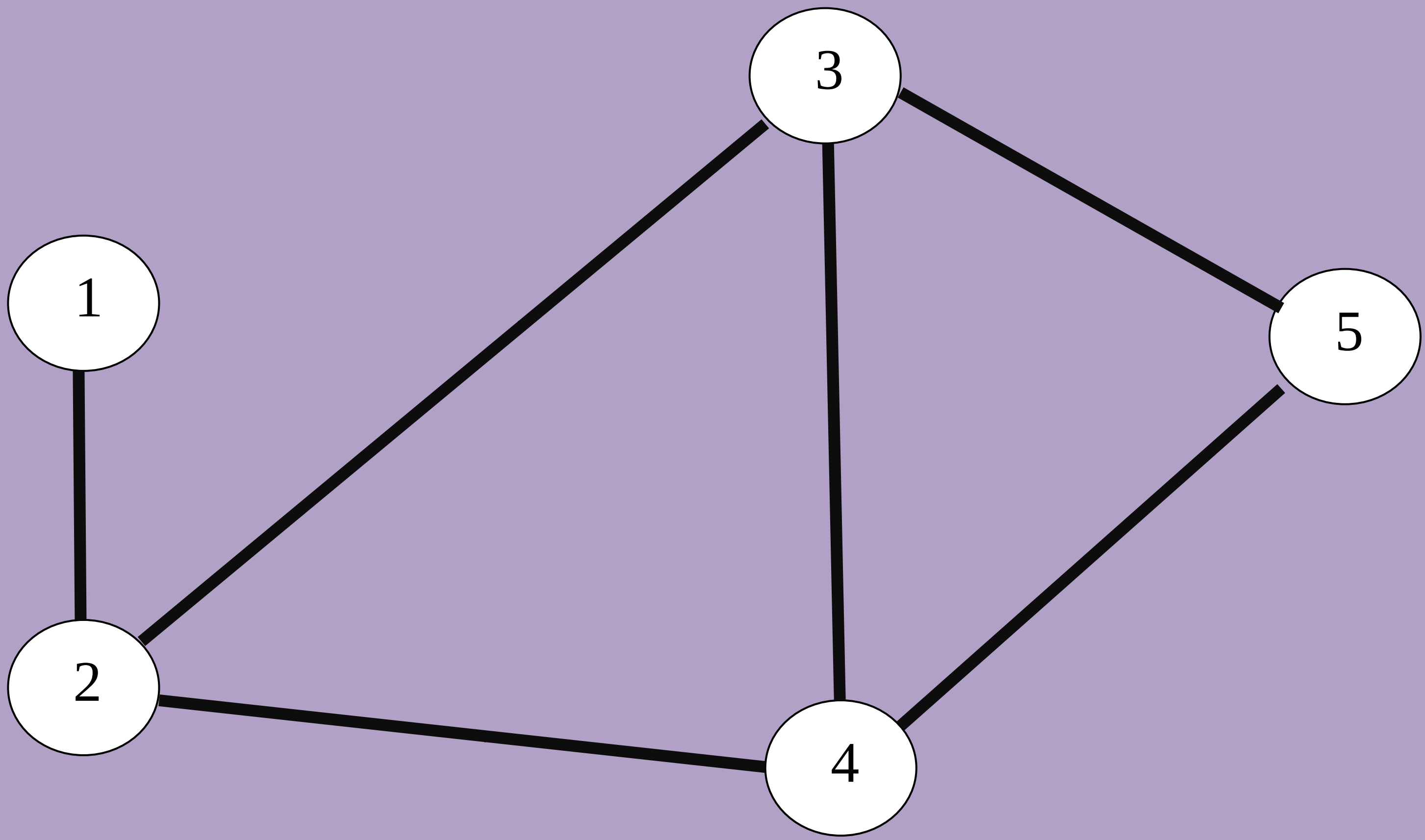
La coloration des arêtes d'un graphe consiste à affecter une **couleur**:

- à **toutes** les arêtes de ce graphe

- de sorte que deux **arêtes adjacentes** ne portent **pas la même couleur**.

Exemple

Soit le graphe ci-dessous.

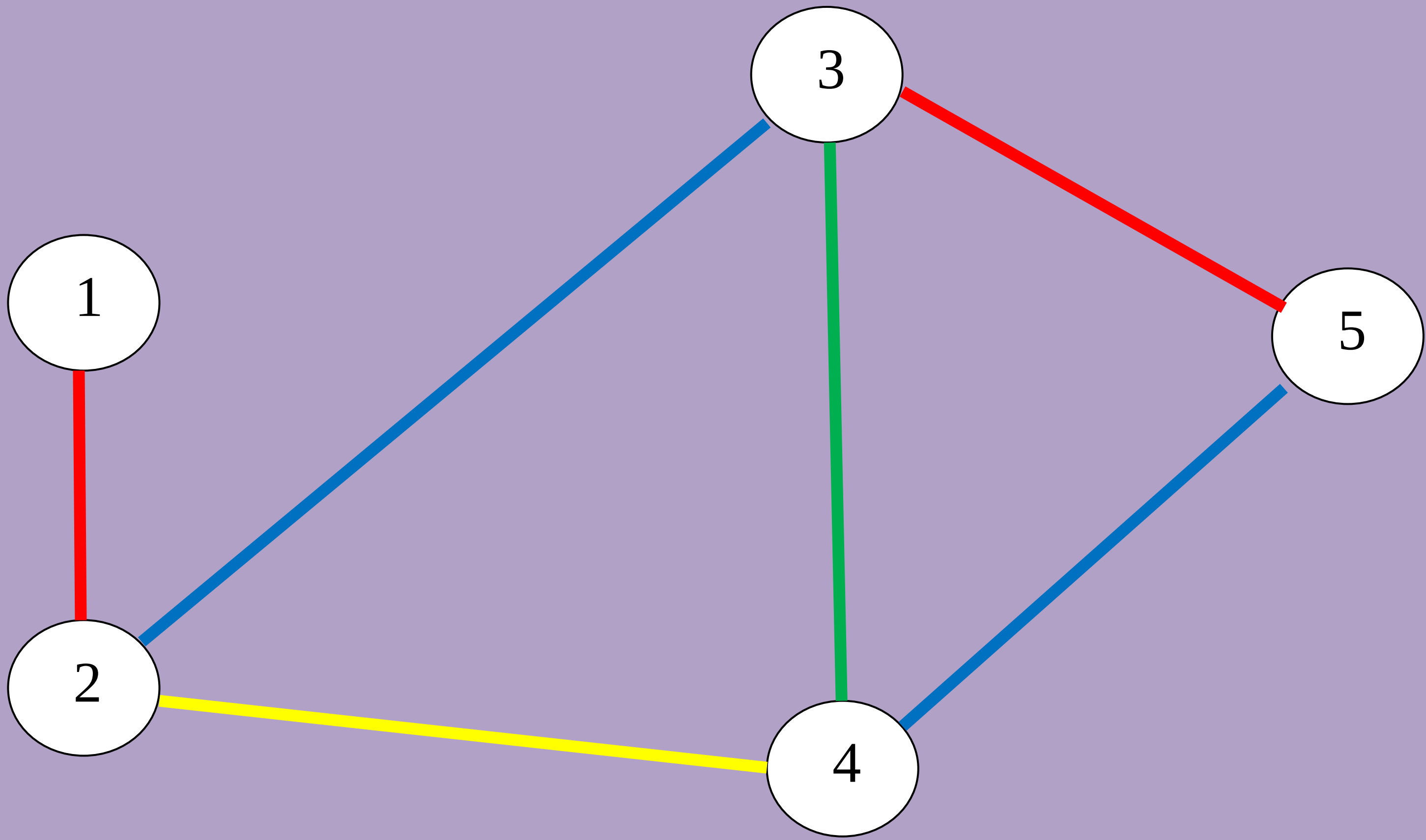


- on a eu besoin de **trois** couleurs pour colorer les arêtes,

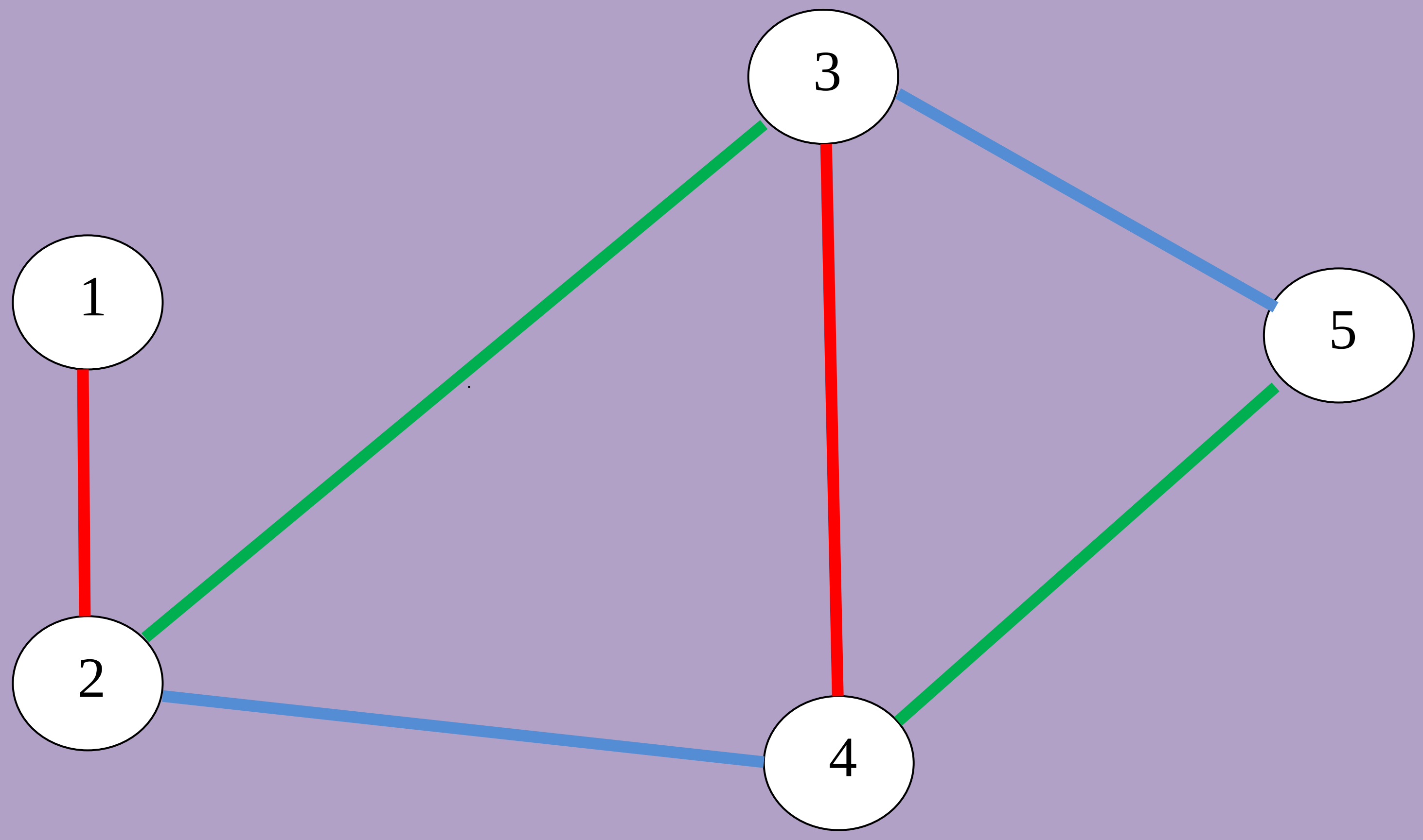
- deux arêtes adjacentes ont des couleurs différentes.

- mais …**plusieurs** solutions sont possibles

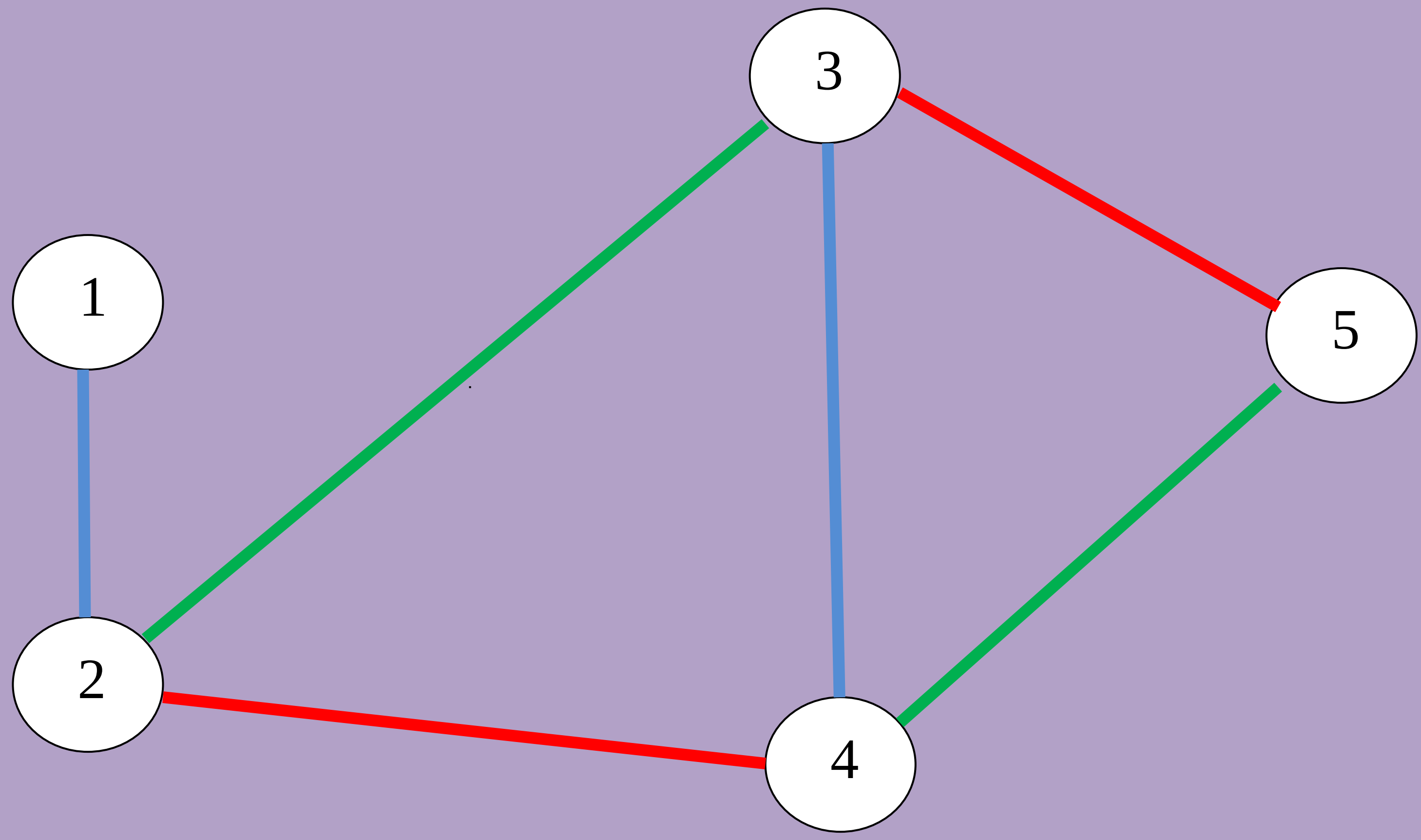
On peut proposer la coloration suivante :



Ou la coloration la suivante :



…ou la coloration la suivante :



2- Indice chromatique

L'**indice chromatique** du graphe *G* est :

- le **plus petit entier** *k*
- pour lequel il existe une **coloration des arêtes**.

Nous noterons **$\psi(G)$** l'**indice chromatique** du graphe *G*.

3- Graphe adjoint

Pour colorer les **arêtes** d'un graphe, on peut se ramener au problème de la coloration des **sommets**

Il suffit pour cela de construire le **graphe adjoint**, noté *G'*, de G.

Le graphe G’ est défini comme suit:

- à chaque **arête** de $G = (S, A)$ correspond un **sommet** de $G' = (A, F)$

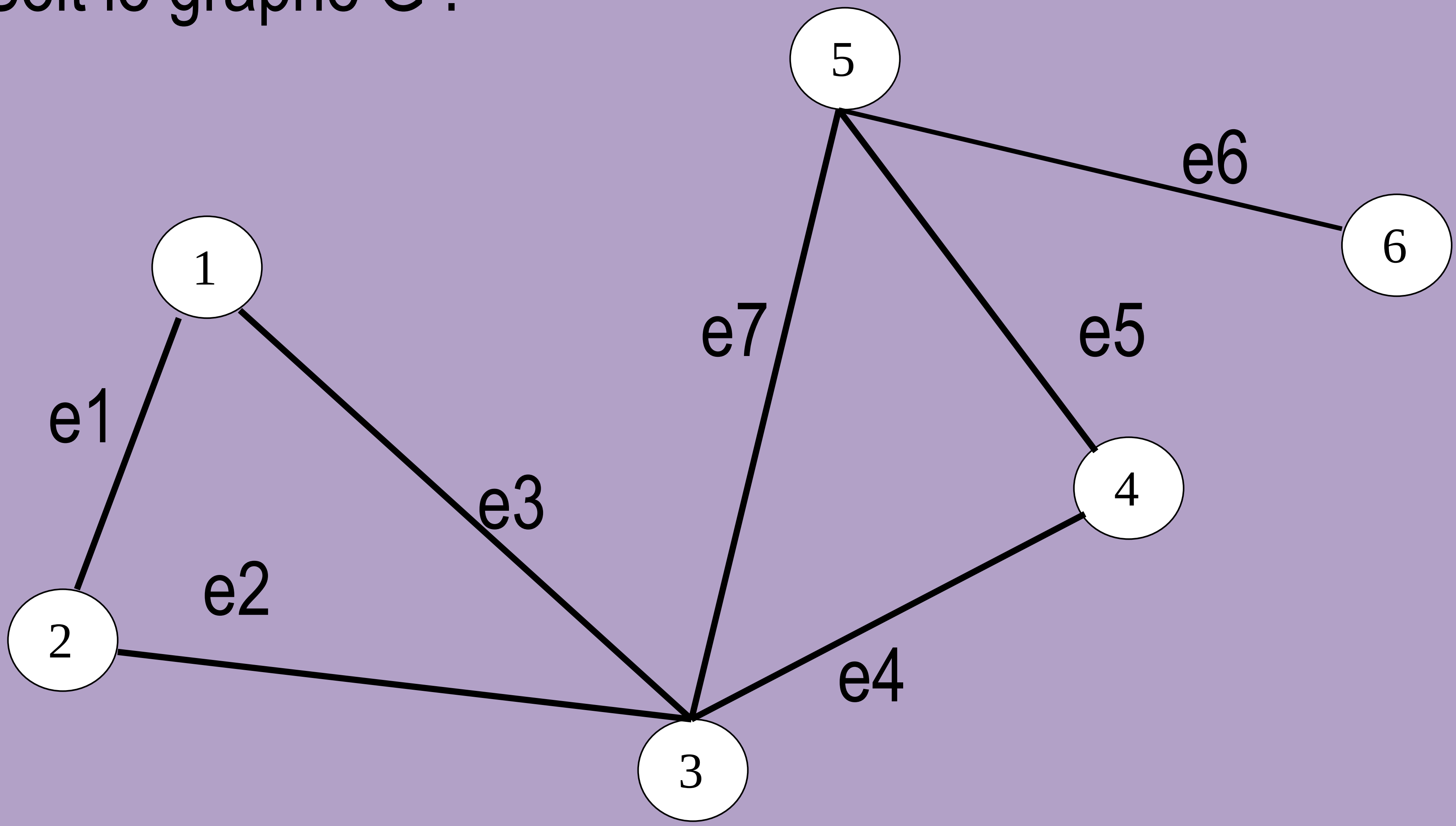
- deux sommets de G' sont reliés par une arête si les deux arêtes correspondantes de G sont adjacentes.

On peut, ensuite, appliquer l'algorithme de Welsh-Powell sur le graphe G' pour colorer ses sommets.

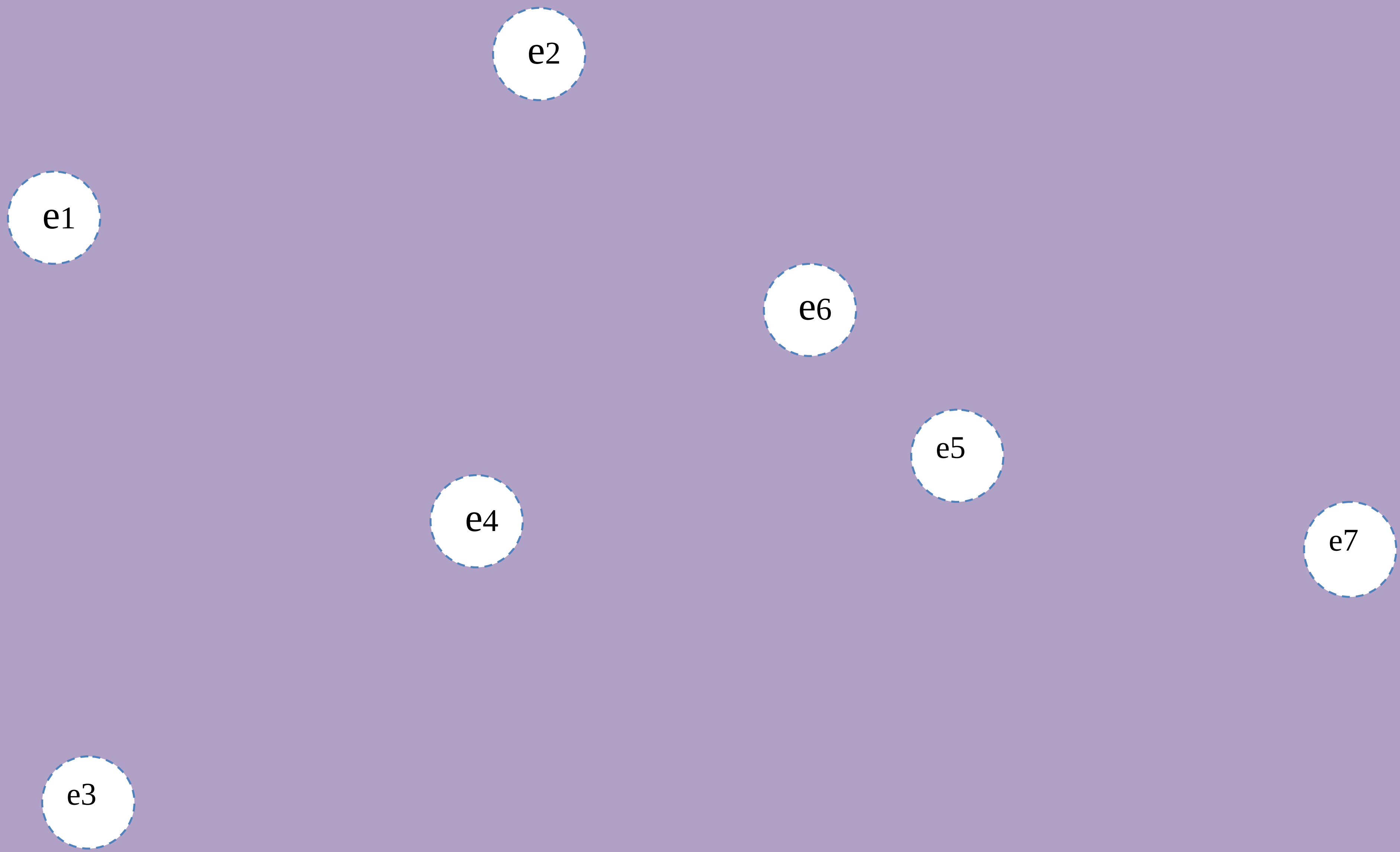
Enfin, on colorera les arêtes de G de la même couleur que les sommets correspondants de G'.

4- Exemple

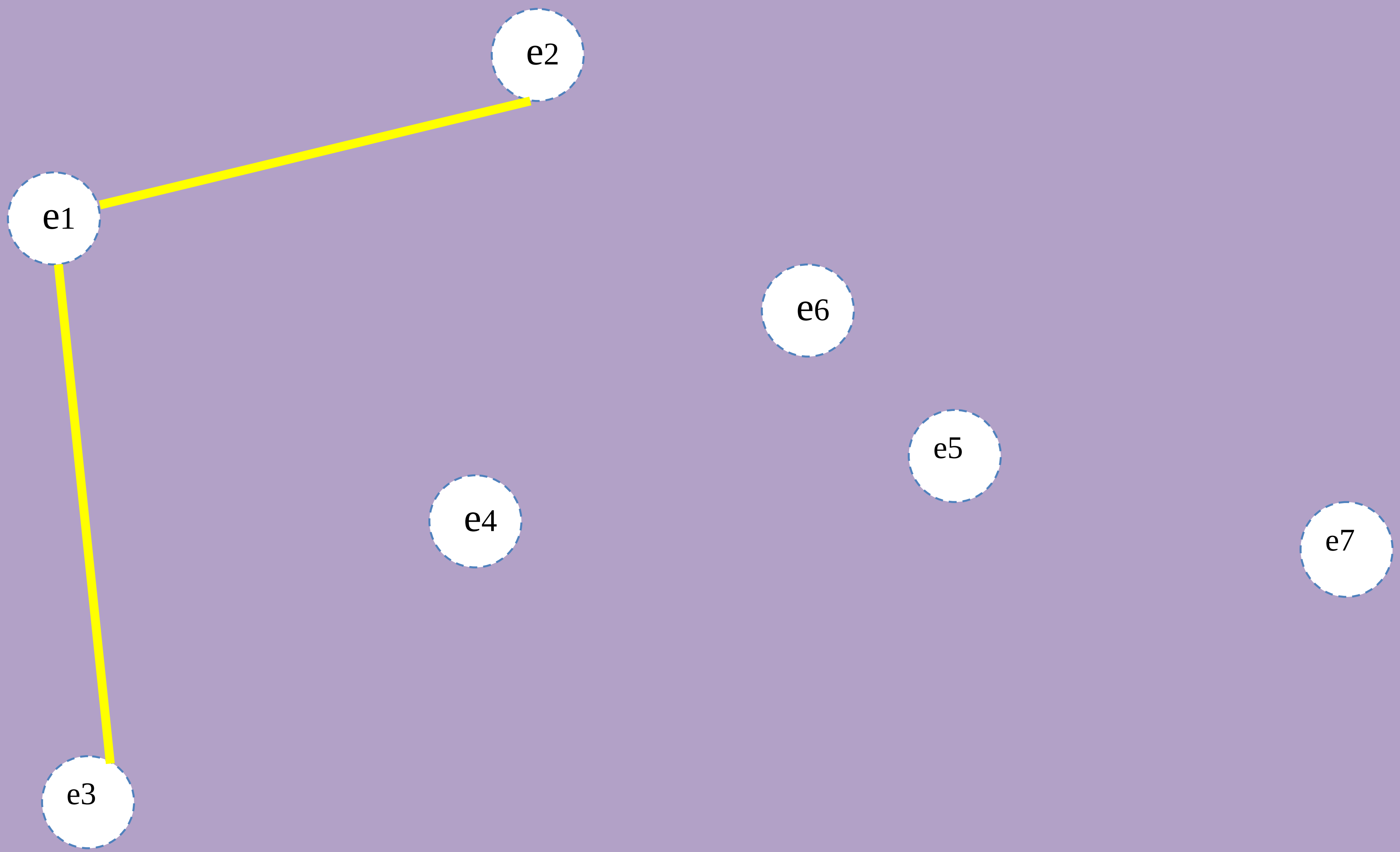
Soit le graphe G :



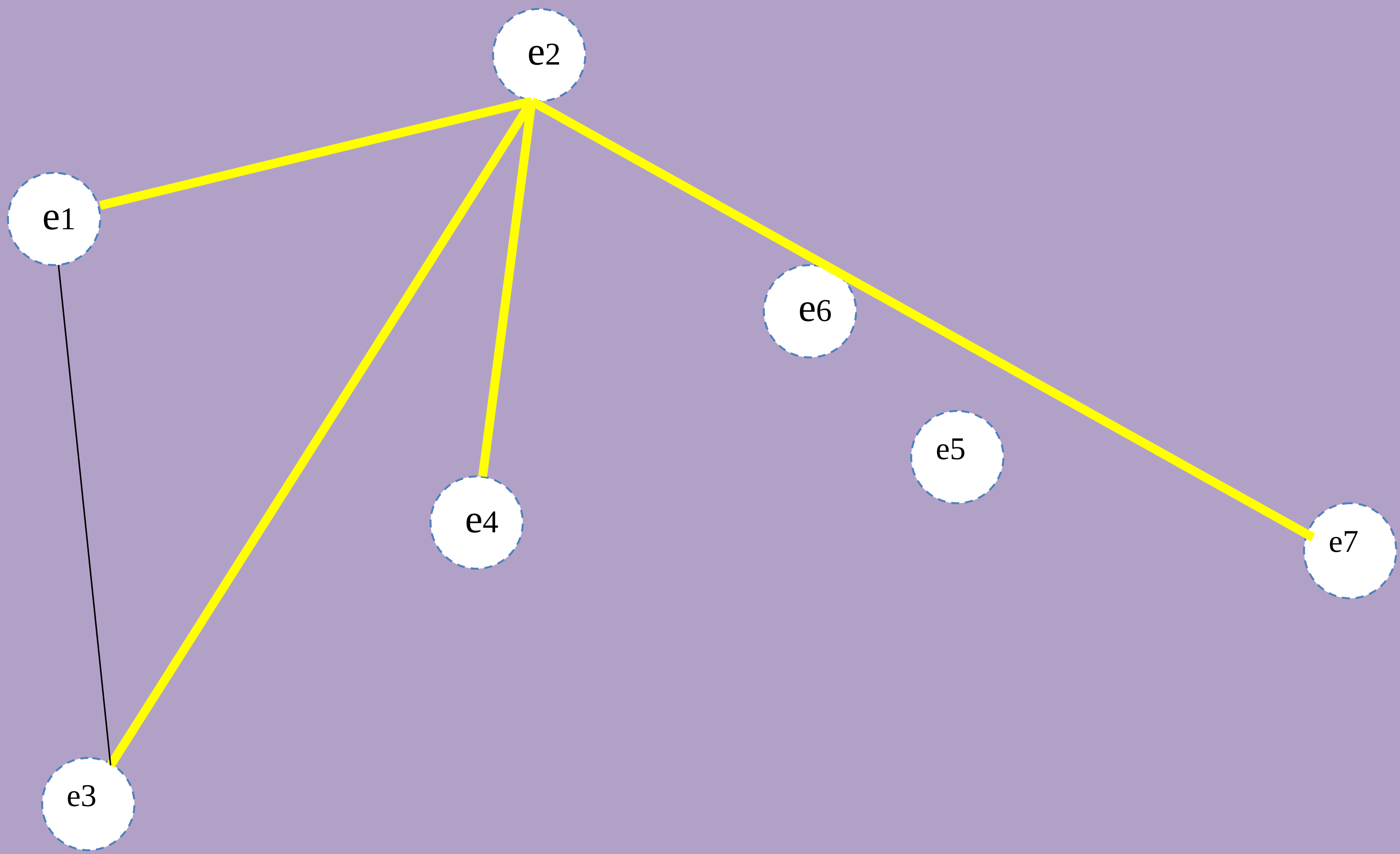
A chaque arête de G correspond un sommet de G’ est:



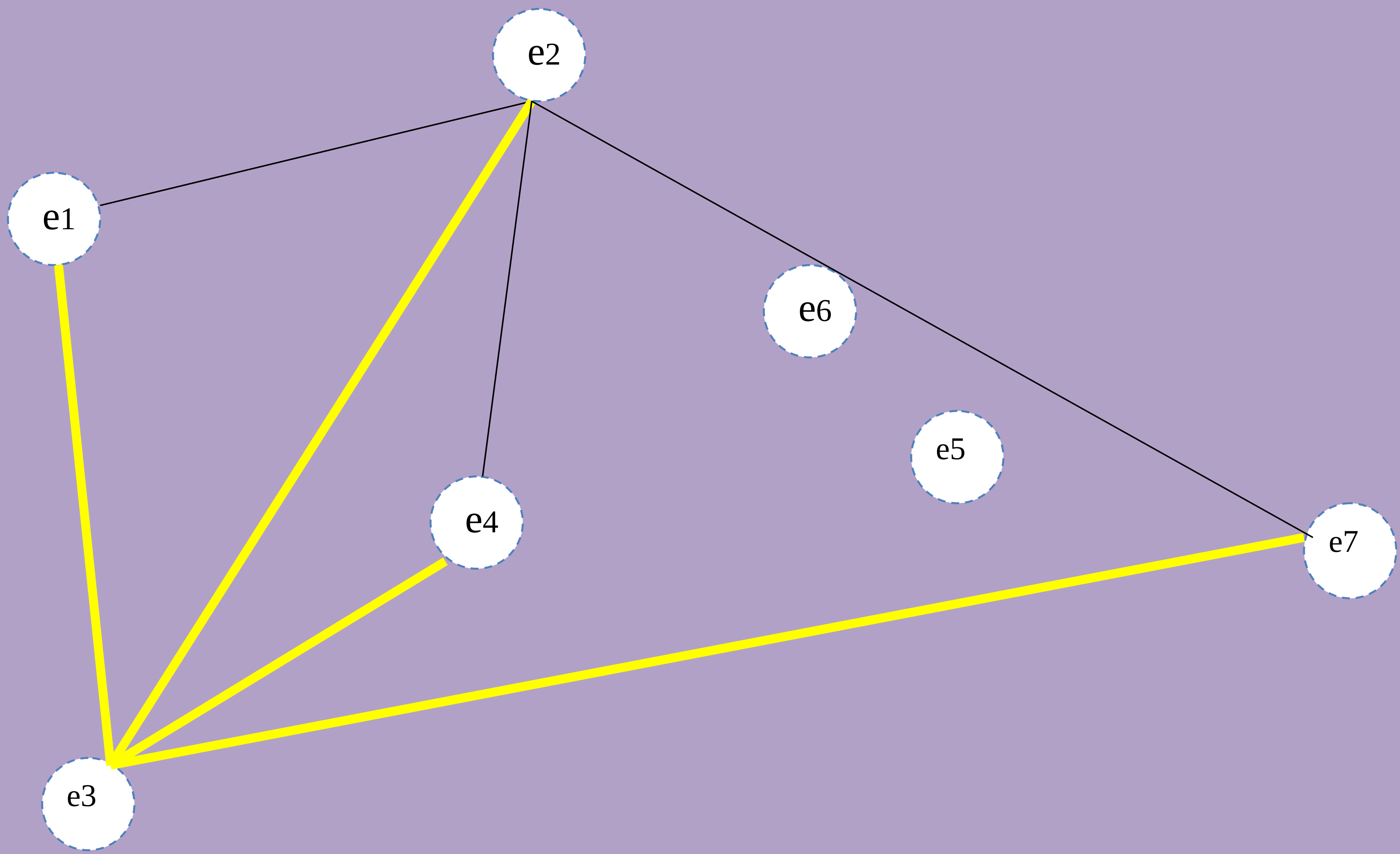
Arêtes incidentes à e1 :



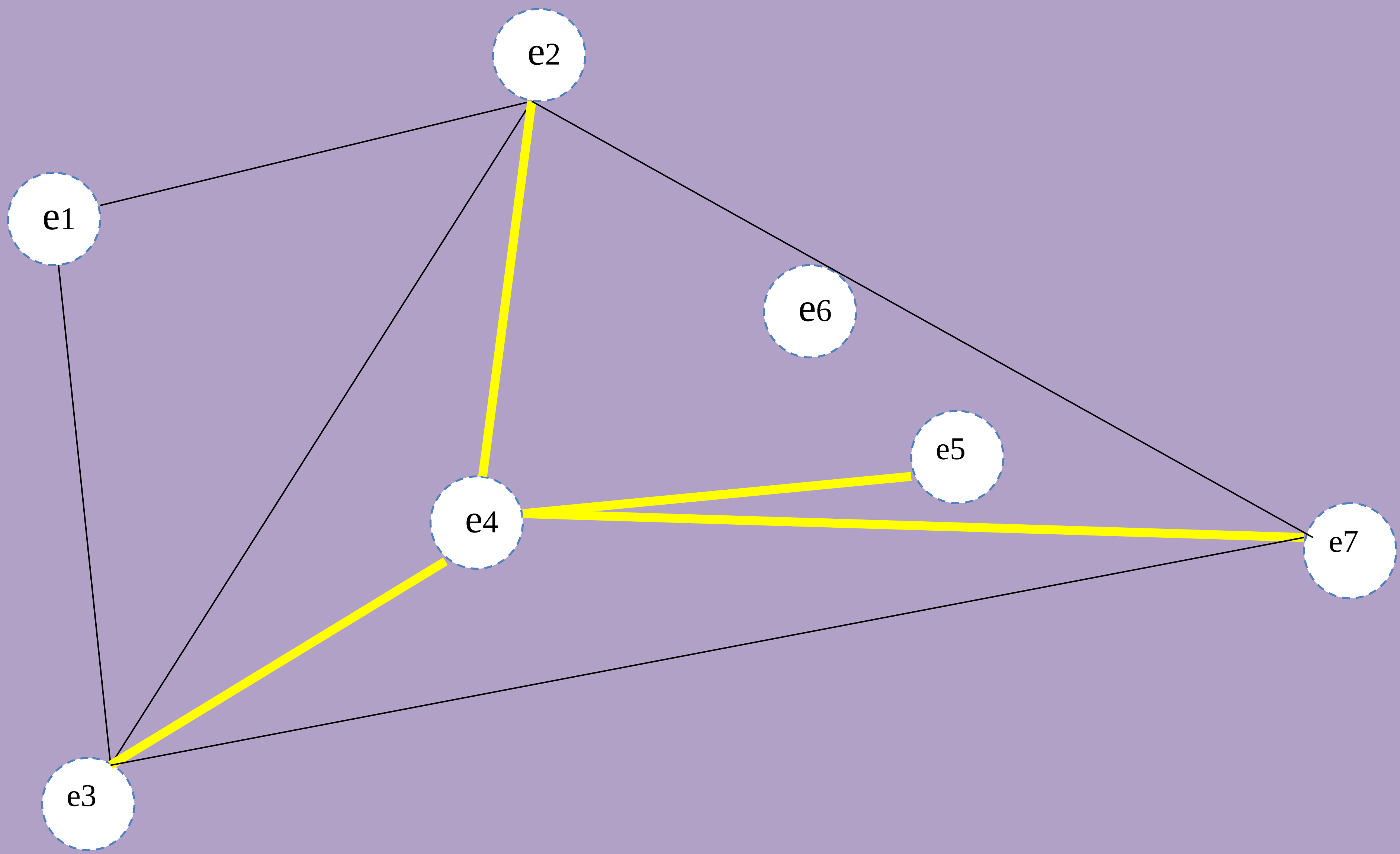
Arêtes incidentes à e2 :



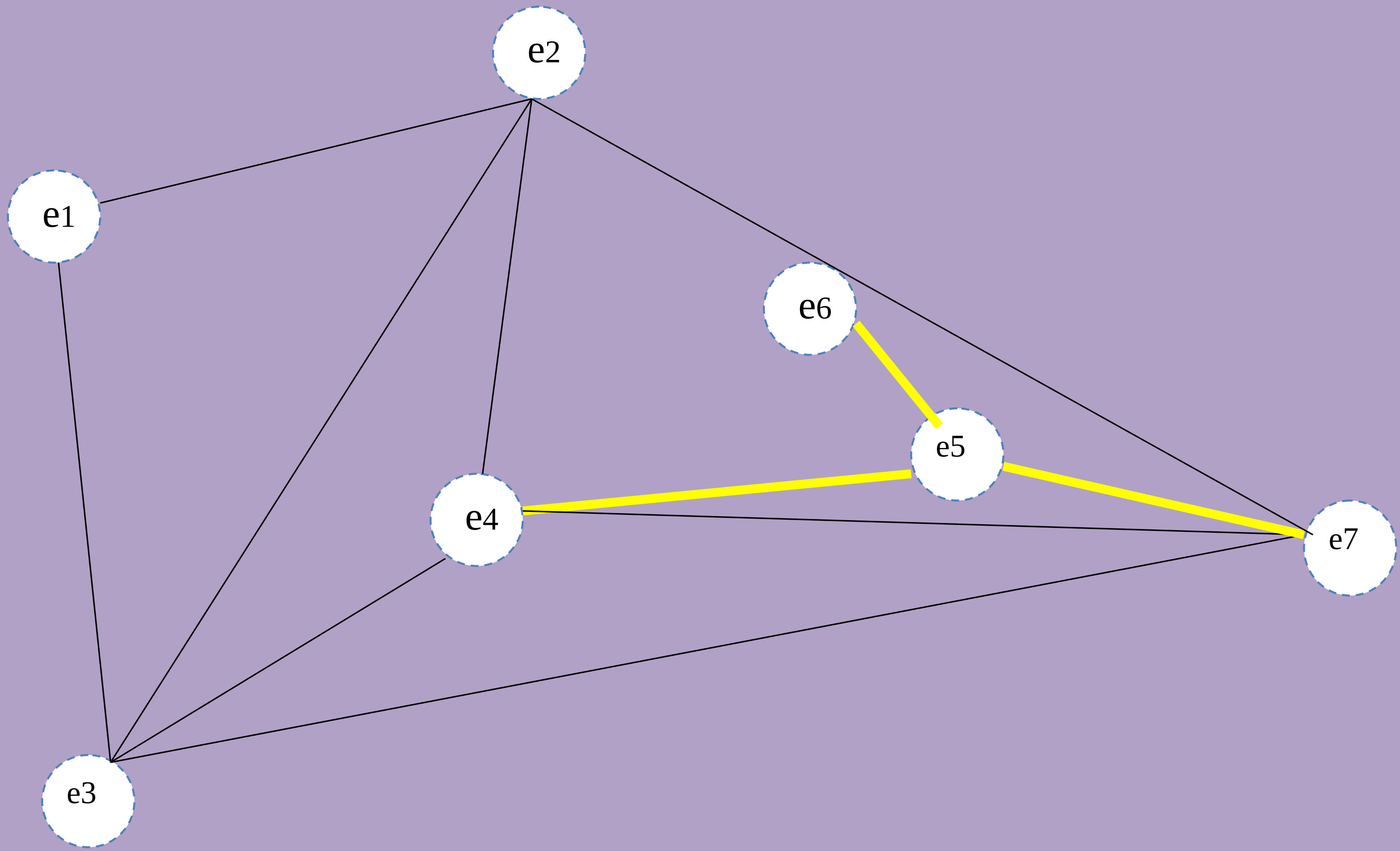
Arêtes incidentes à e3 :



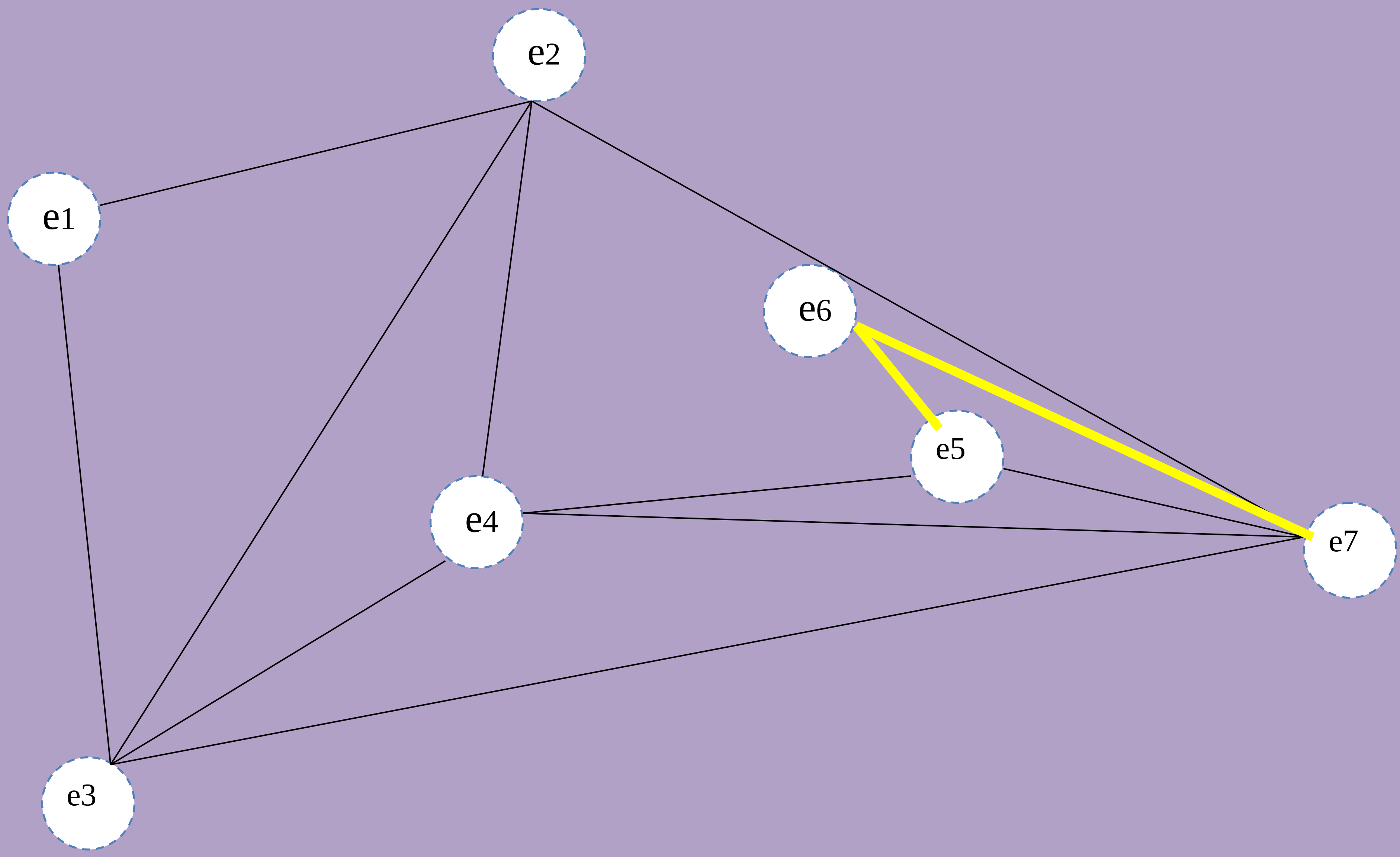
Arêtes incidentes à e4 :



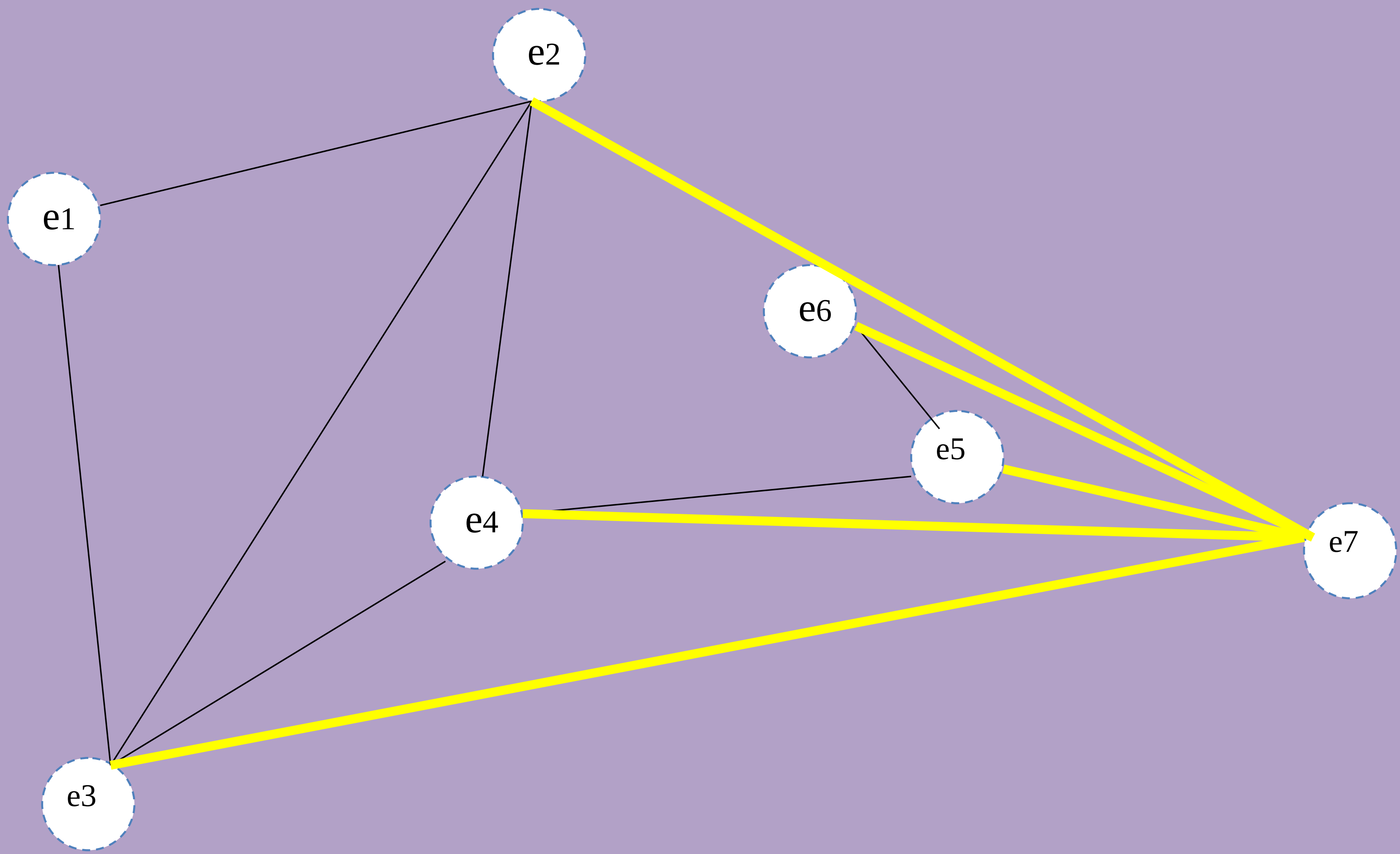
Arêtes incidentes à e5 :



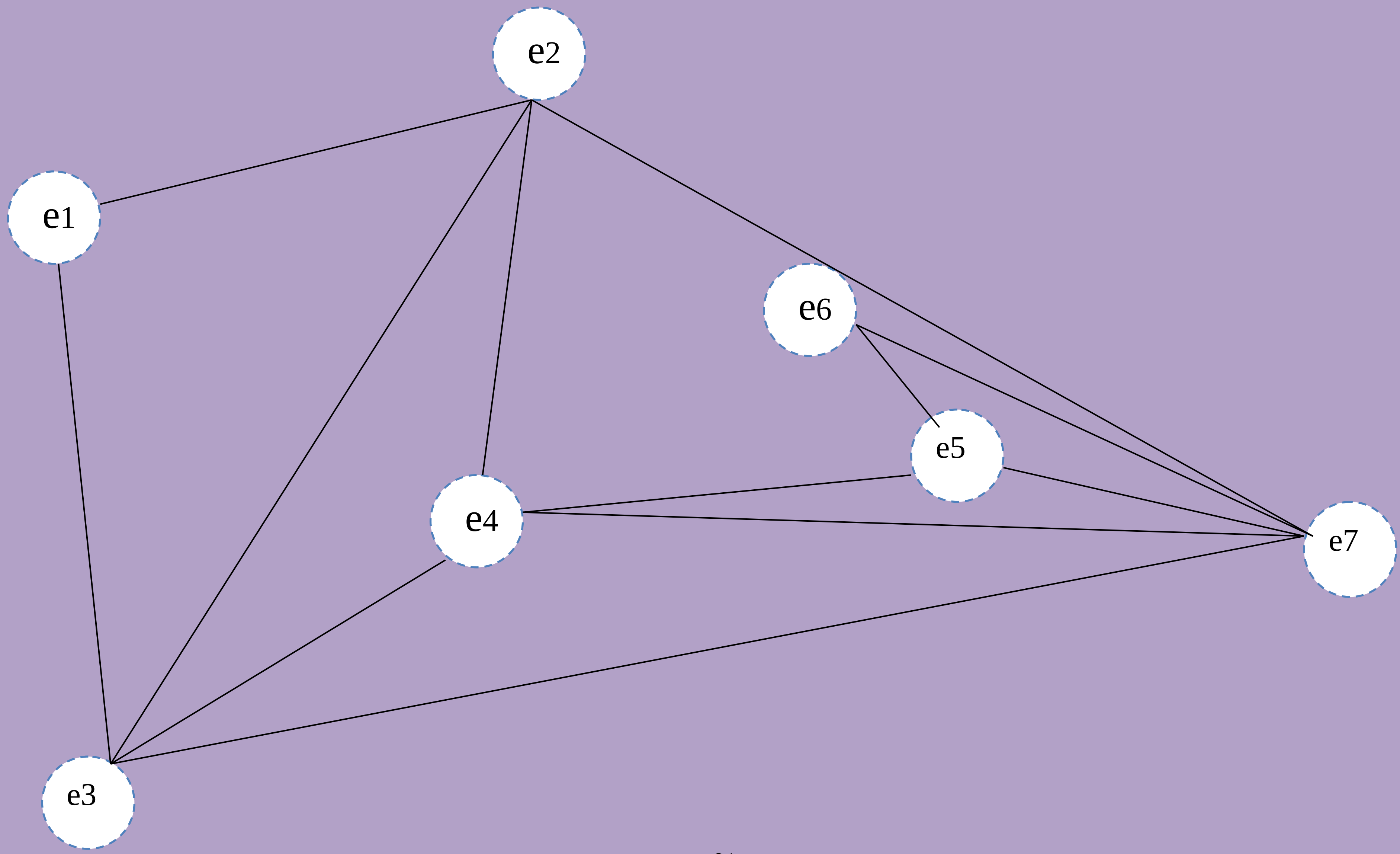
Arêtes incidentes à e6 :



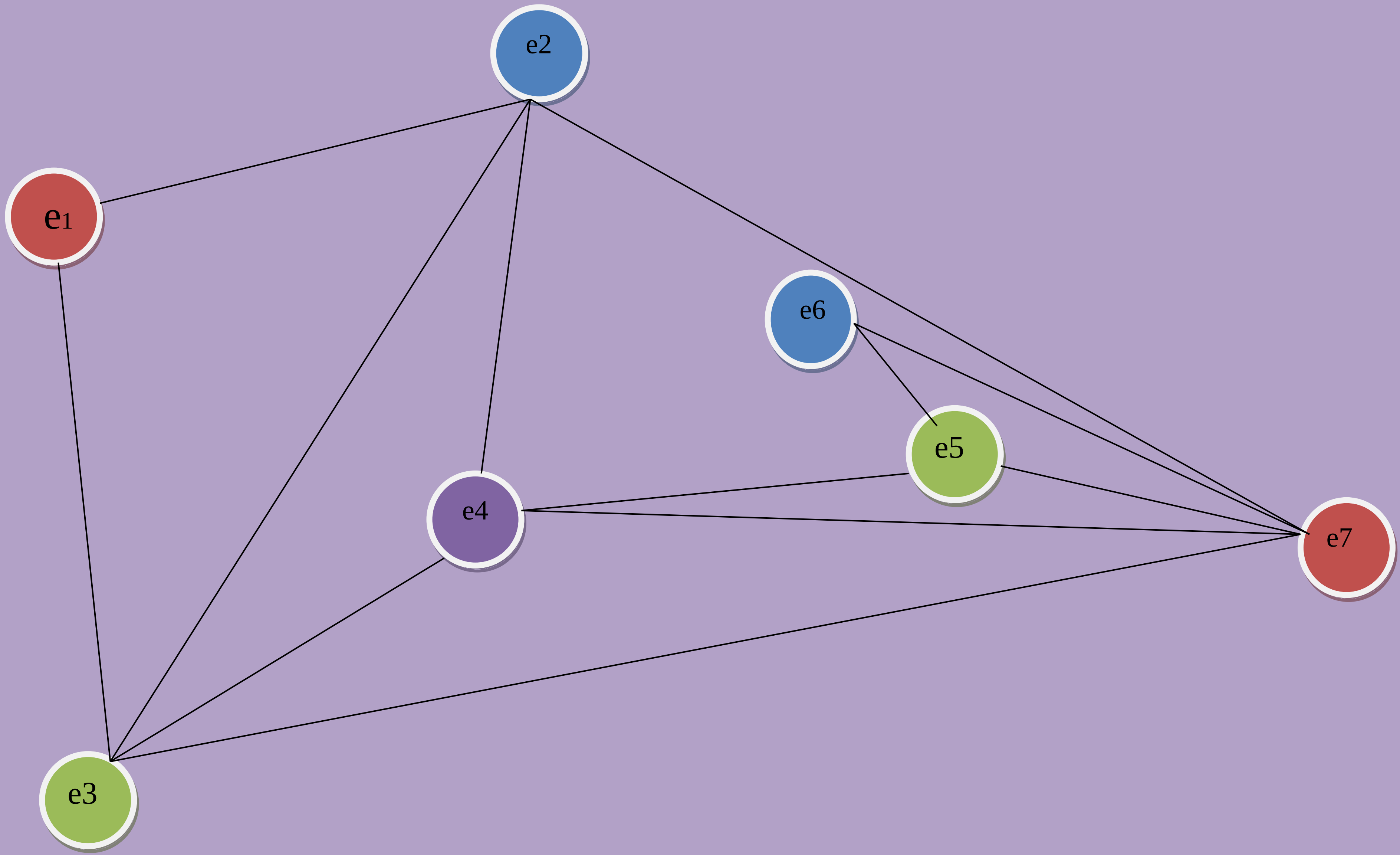
Arêtes incidentes à e7 :



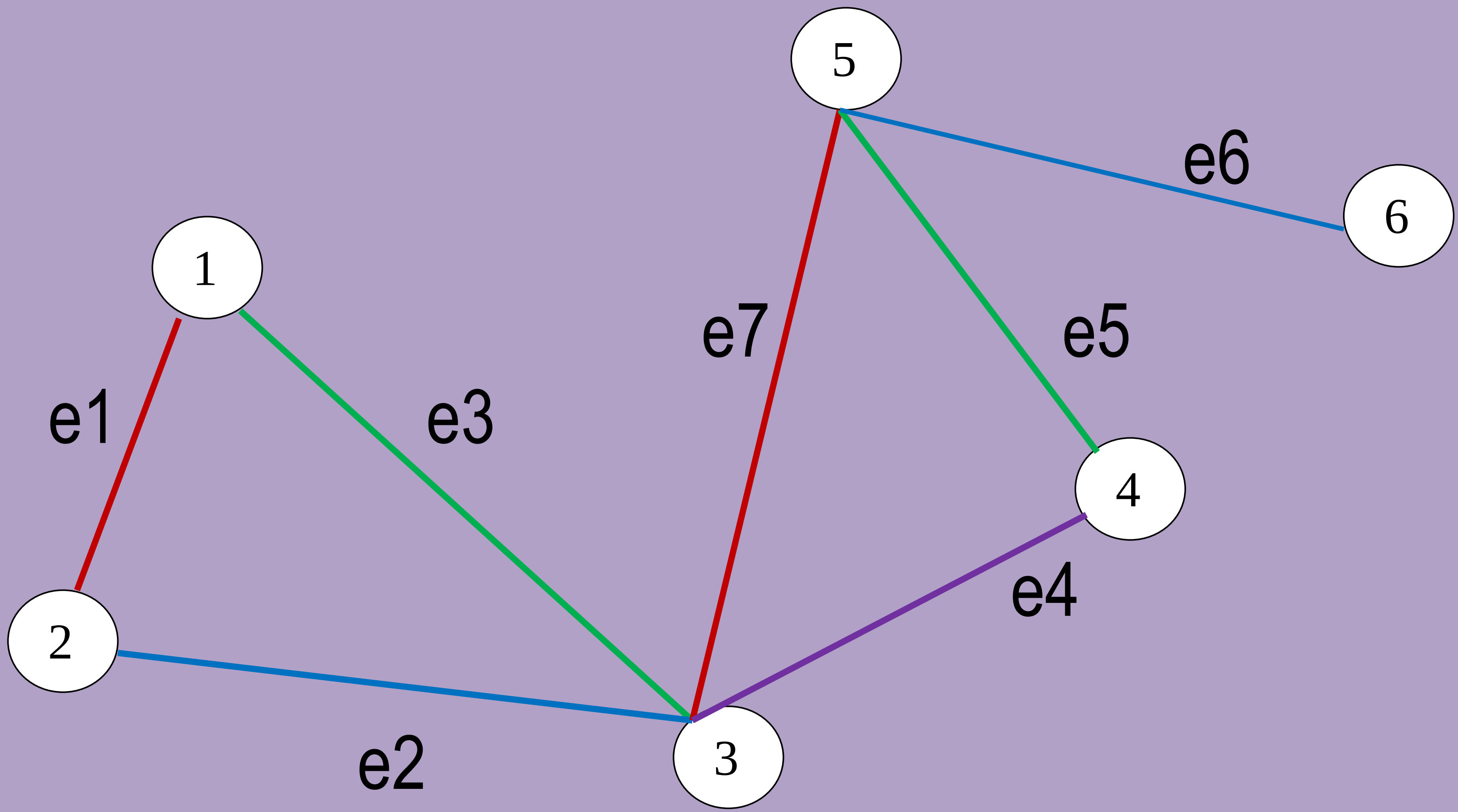
Finalement, le graphe adjoint G’ est:



En appliquant l'algorithme de Welsh-Powell on a une coloration des sommets :



En appliquant la coloration des sommets aux arêtes correspondantes, on a:



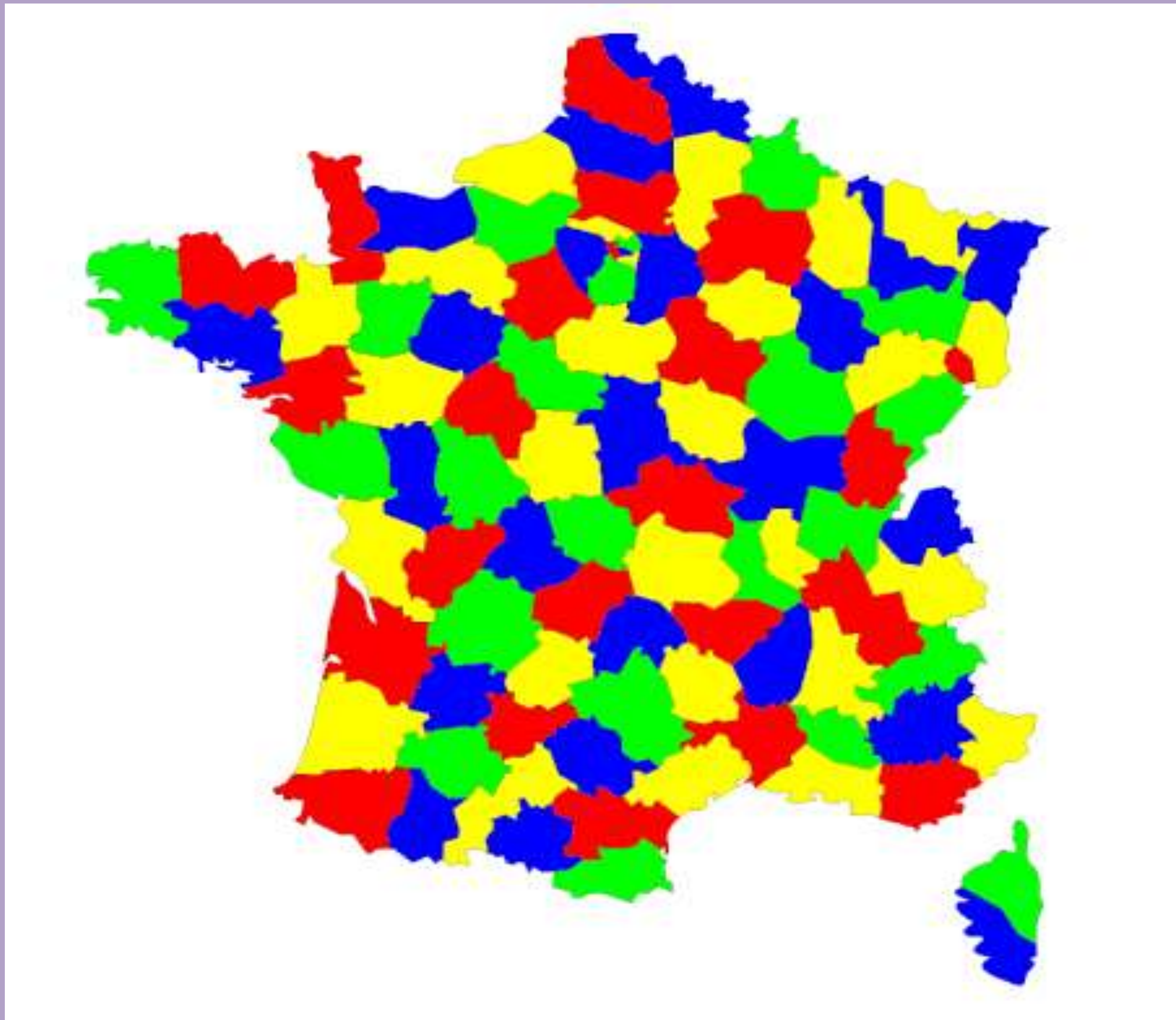
III- DES CARTES AUX GRAPHES

Le problème consiste :

-à appliquer une **couleur** à chaque **région** d'une carte

- de sorte que deux régions **frontalières** ne soient **pas de même couleur**.

Exemple des départements Métropolitains



Tout problème de **coloriage** de carte est trivialement équivalent à un problème de **coloration de graphe**.

Il suffit de :

1- choisir une **capitale** dans chaque région : **sommet**

2- et de relier les capitales de chaque paire de régions ayant un segment (pas un point) de frontière en commun : **arête**

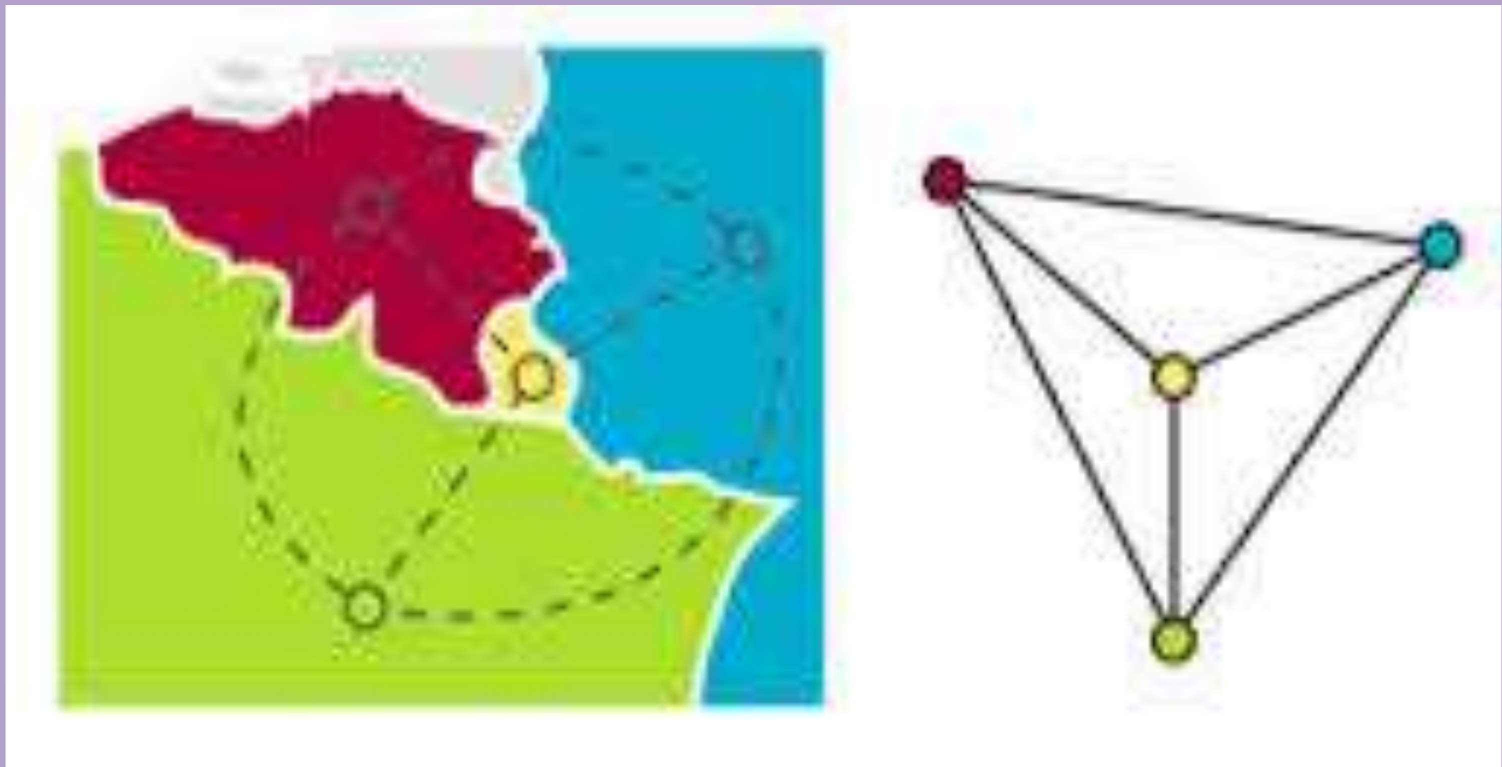
Ainsi, colorier la carte équivaut à :

- colorier les **capitales** **: sommets d'un graphe**

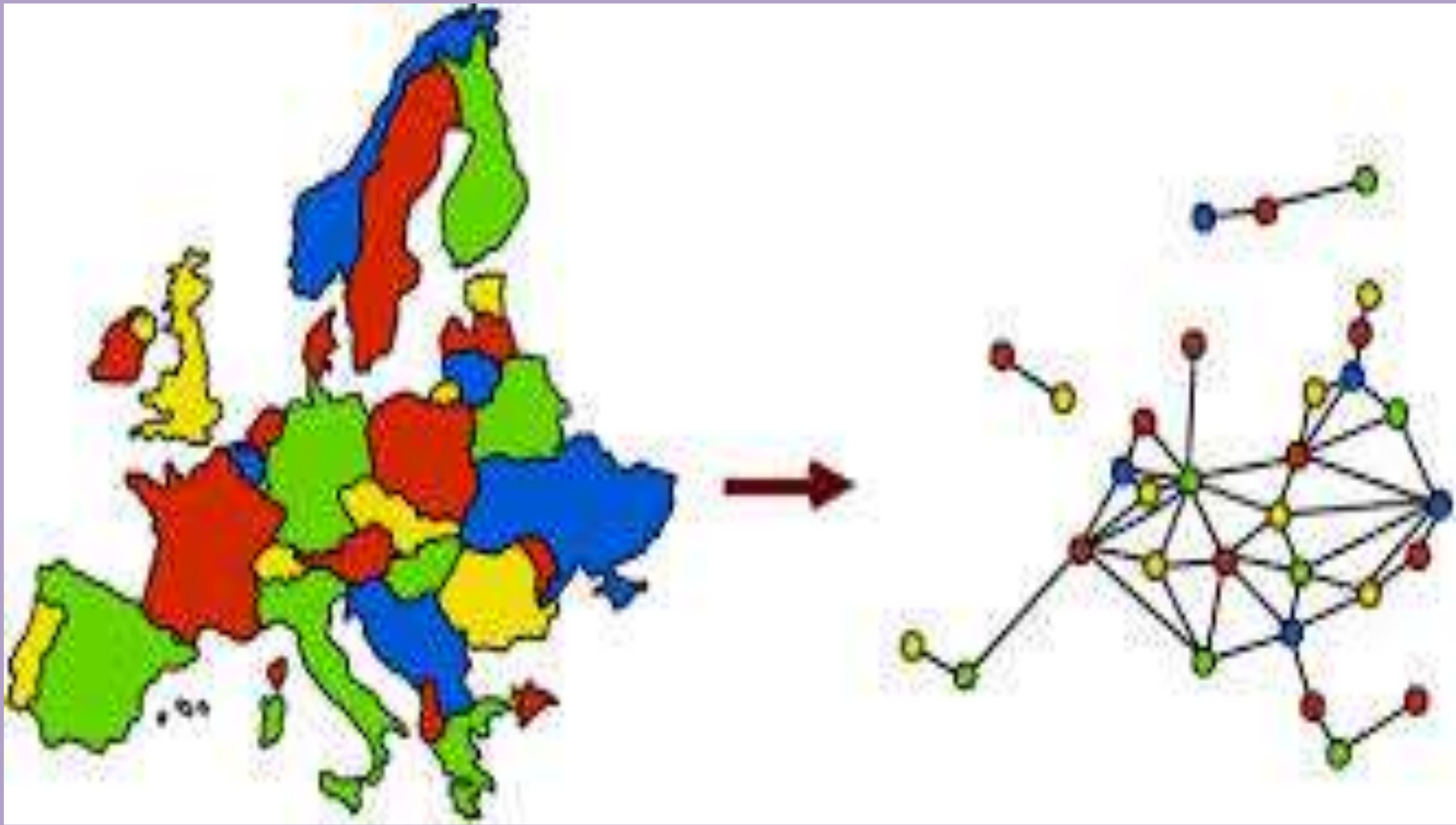
- en donnant des **couleurs différentes** à deux capitales directement **reliées**: **arêtes d'un graphe**

Exemple

Cartes Belgique-France-Luxembourg-Allemagne



Carte Europe



La transformation carte-graphe est en fait une **dualité**.

Parce qu'elle permet de faire des **figures plus claires**, la formulation en graphes est celle qui est généralement utilisée.

2- Théorème des quatre couleurs

Le théorème des quatre couleurs énonce la possibilité de colorer avec **quatre couleurs** **seulement :**

- une carte géographique

-sans que deux régions voisines aient la même couleur.

En n'utilisant que quatre couleurs, il est possible de colorer :

- n'importe quelle carte découpée en **régions connexes**

-de sorte que deux régions ayant toute une frontière reçoivent toujours **deux couleurs distinctes**.

La **conjecture** des « quatre couleurs » a été formulée pour la première fois par l'Écossais *Francis Guthrie* en 1852.

La «preuve» de ce théorème n'arriva qu'en... **1976** !

En 1976, K.Appel et W. Haken réalisèrent le fameux programme de **Heesch**.

Ils montrèrent en utilisant des dizaines de milliers de figures, que:

- toute carte non **4-coloriable** doit contenir l'une des 1478 configurations,

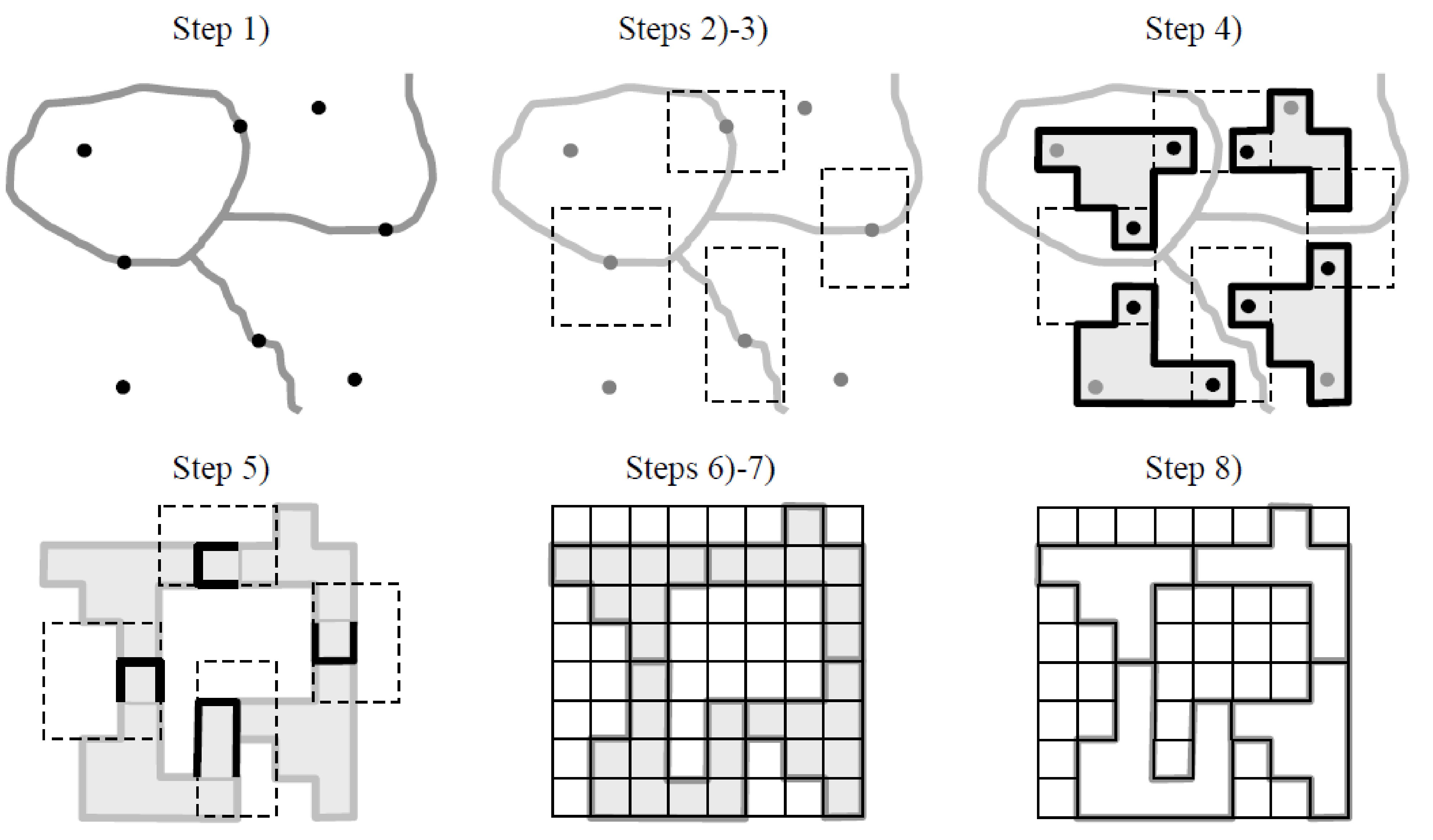
- et, que ces configurations sont réductibles (1200 h de calcul)

En 1995, Robertson, Sanders, Seymour et Thomas trouvèrent une réalisation plus simple du programme de Heesch: seulement 633 configurations.

De plus, ils automatisèrent également la preuve d'inévitabilité.

Ce n’est qu’en Septembre 2012 que **G. Gonthier** et son équipe (INRIA) réussissent la démonstration du **théorème de Feit et Thompson.**

Et…. établissent la preuve de la validité de la démonstration du **théorème des quatre couleurs**.


Step 1)
Steps 2)-3)
Step 4)
Step 5)
Steps 6)-7)
Step 8)

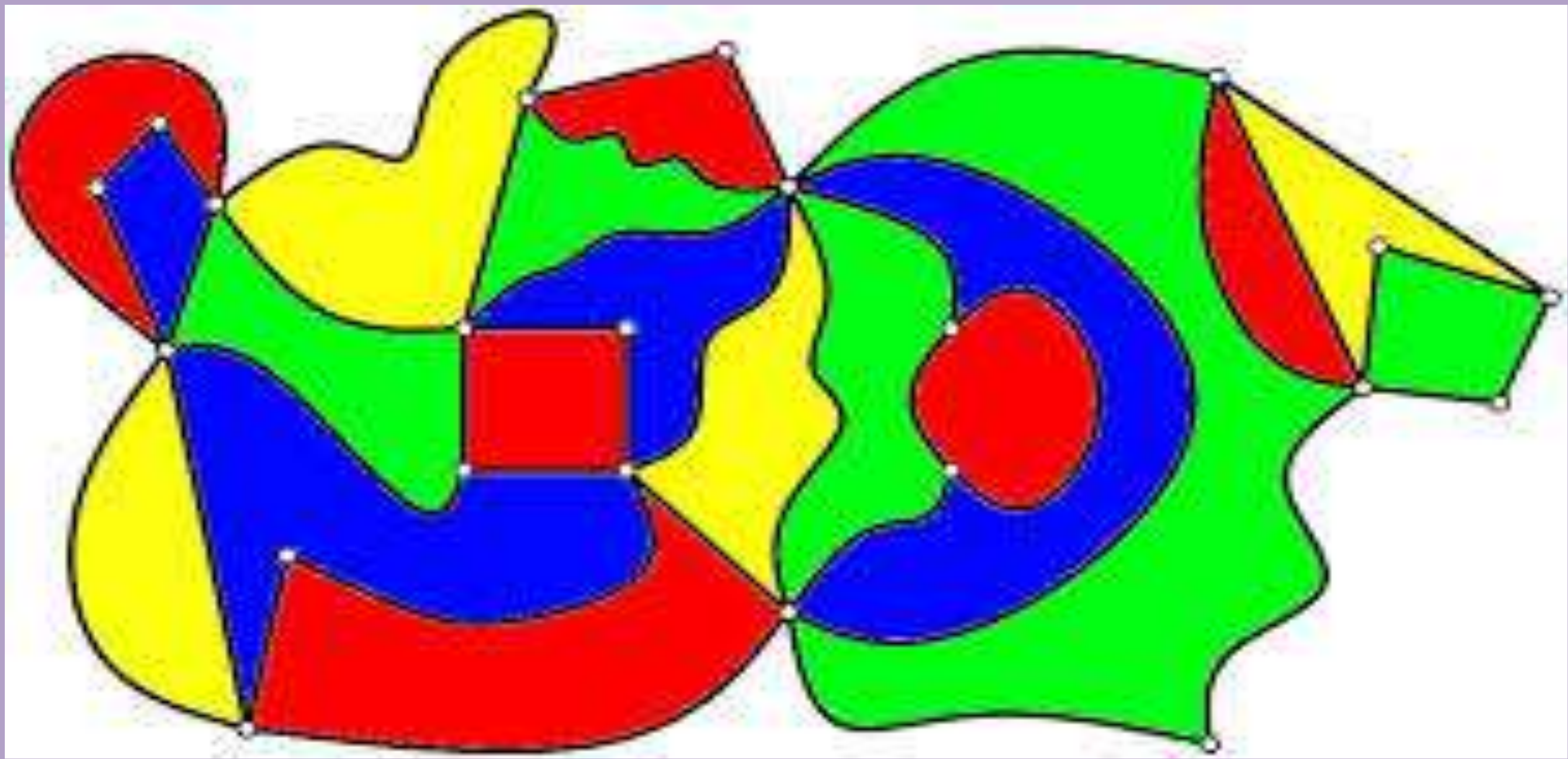
Ce fut le premier théorème de l'histoire qui a nécessité l'usage **systématique** de l'ordinateur.

3- Théorème de Kuratowski

Il ne peut exister :

- **cinq** régions connexes,
- **deux à deux** adjacentes

Ilustration du théorème par Kuratowski

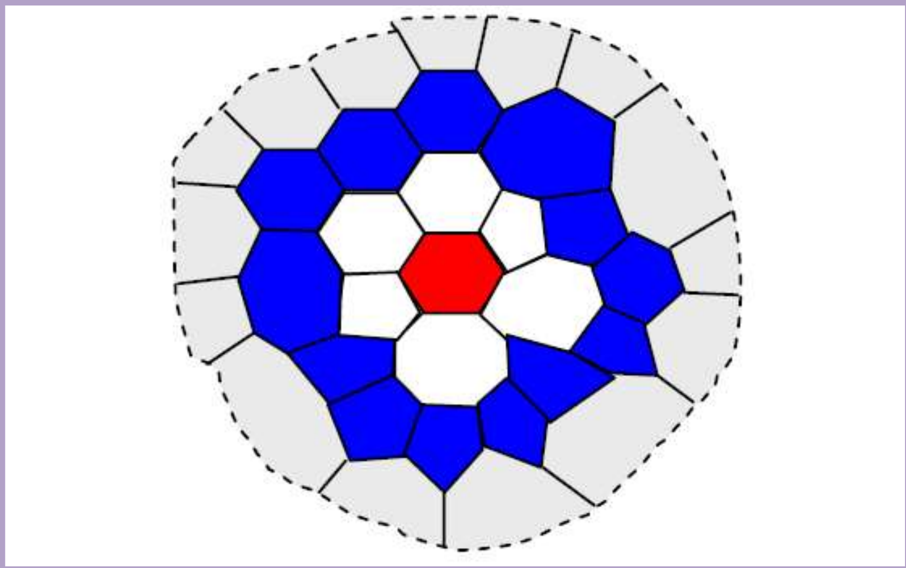


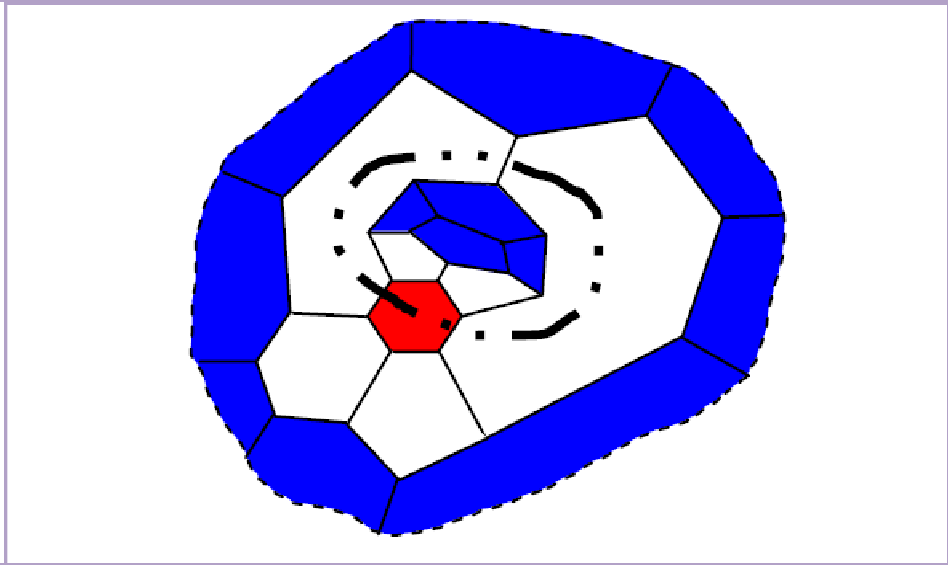
4- Application directe des travaux

Ces théorèmes sont appliqués dans l'affectation :

- par un **opérateur de réseau mobile**
- des fréquences GSM aux **zones de couverture** des stations de base de son réseau.

Un réseau GSM est modélisé, comme une carte géographique, par des **hexagones** contigus.





Chaque hexagone est appelé **cellule**, d'où la notion de **réseau cellulaire**.

Une cellule correspond au rayonnement d'une station de base: environ 30 kms de diamètre en zone rurale.

Deux hexagones contigus ne doivent en aucun cas se voir attribuer la même **bande de fréquences**.