Université de Pau et des Pays de l'Adour **Année 2017-2018**
Département de Mathématiques

L2-Info–Calcul scientifique
TD n^o 3

1. Ecrire dans la classe `Matrix` une fonction membre publique d'entête:
`void productVector(const vector<double> &x, vector<double> & b) const;`
effectuant le produit de la matrice *this* par un vecteur x donné en paramètre, et dont le résultat sera stocké dans un vecteur b, lui aussi donné en paramètre.

2. Soit A une matrice carrée de taille n dont les éléments de la diagonale sont supposés non nuls. On note :
• D la matrice carrée contenant la diagonale de A, c'est-à-dire $D_{ij} = 0$ dès que $i \neq j$ et $D_{ii} = A_{ii}$ pour $0 \leq i \leq n-1$.
• M la matrice carrée contenant la partie hors diagonale de A, c'est-à-dire $M_{ij} = A_{ij}$ dès que $i \neq j$ et $M_{ii} = 0$ pour $0 \leq i \leq n-1$.
On notera alors J la matrice de Jacobi définie par
$$J = D^{-1}M.$$
On rappelle que D^{-1} est la matrice diagonale telle que $(D^{-1})_{ii} = \frac{1}{D_{ii}}$ pour $0 \leq i \leq n-1$.

Écrire dans la classe `Matrix` une fonction membre privée d'entête:
`void _jacobiMatrix(Matrix & J) const;`
qui construit la matrice de Jacobi J de la matrice *this*, la matrice J étant passée en paramètre.

3. On cherche à résoudre un système linéaire $Ax = b$ par la méthode itérative de Jacobi qui consiste à construire une suite de vecteurs $(x^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ définie par :$x^{(0)}$ est le vecteur nul et
$$x^{(k+1)} = -Jx^{(k)} + D^{-1}b.$$
On itére jusqu'à ce que le vecteur $Ax - b$ ait une norme plus petite qu'un $\epsilon > 0$ donné, ou que l'on ait atteint un nombre maximum d'itérations.
On rappelle que la norme d'un vecteur v de taille n est donnée par
$$||v|| = \sqrt{\sum_{i=0}^{n-1} v_i^2}.$$
Écrire dans la classe Matrix une fonction membre publique de résolution du système $Ax = b$ par cette méthode. On supposera que A est la matrice *this*. L'entête de la fonction à écrire sera la suivante:
`void solveJacobi(const vector<double> & b, vector<double> & x, double eps, int nitermax) const;`

4. Écrire un programme principal résolvant le système linéaire :
$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$
par la méthode de Jacobi mise en oeuvre dans les questions précédentes.