五一数学建模竞赛

承　诺　书

我们仔细阅读了五一数学建模竞赛的竞赛规则。

我们完全明白，在竞赛开始后参赛队员不能以任何方式（包括电话、电子邮件、网上咨询等）与本队以外的任何人（包括指导教师）研究、讨论与赛题有关的问题。

我们知道，抄袭别人的成果是违反竞赛规则的, 如果引用别人的成果或其它公开的资料（包括网上查到的资料），必须按照规定的参考文献的表述方式在正文引用处和参考文献中明确列出。

我们郑重承诺，严格遵守竞赛规则，以保证竞赛的公正、公平性。如有违反竞赛规则的行为，我们愿意承担由此引起的一切后果。

我们授权五一数学建模竞赛组委会，可将我们的论文以任何形式进行公开展示（包括进行网上公示，在书籍、期刊和其他媒体进行正式或非正式发表等）。

参赛题号（从 A/B/C 中选择一项填写）：A

参赛队号：T2351692523

参赛组别（研究生、本科、专科、高中）：本科

所属学校（学校全称）：山东科技大学（济南校区）

参赛队员：队员 1 姓名：王泽楷

队员 2 姓名：赵子锐

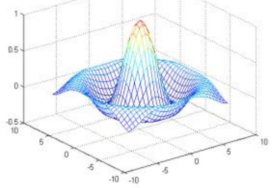
队员 3 姓名：施泽凯

联系方式：Email：76758823@qq.com　联系电话：18366669848

日期：2022 年 5 月 4 日

（除本页外不允许出现学校及个人信息）

五 一 数 学 建 模 竞 赛



题 目： 血管机器人订购方案

关键词：整数规划模型；遗传算法；循环神经网络；灵敏度分析。

摘 要：

随着携带药物进入人体并进行定点治疗的血管机器人得到广泛的应用，如何根据医院的医疗需求合理的制定订购方案进而减少运营成本成为一个难题。本文通过建立数学模型，利用计算机模拟的方法对血管机器人的订购方案进行了优化设计。

针对问题一，在每个熟练操作手可以“指导”10 个购买的新操作手的基础上，同时考虑到每周购买的操作手和容器艇只能用于下一周医疗需求的问题，并且每一周库存的操作手和容器艇大部分来自于上一周购置、使用以及保养。所以首先推导出每一周库存关系和供需关系的**动态递归方程组**，并以此作为约束条件，以运营总成本最小为优化目标建立了**整数规划模型**。利用**遗传算法**求解 1-8 周最低运营成本为 13410 元，每周的购置情况见表 1。

针对问题二，在实际情况中血管机器人工作时可能会碰上巨噬细胞，假设每周有 20%的血管机器人损毁，那么对于每周的库存和供需关系都会有一定的影响。基于此更新了问题一中的动态递归方程组，进而建立了在血管机器人有损失的情况下的整数规划模型。同样采用遗传算法对第 1-104 周全部状态进行求解。从而得到总共需要购买 879 个容器艇和 3840 个操作手使运营总成本达到最低为 669275 元，相关结果见表 2。通过对比分析问题一和问题二第 1-8 周的结果发现即使在有损失的情况下运营总成本仅仅有轻微的浮动，说明该模型准确。

针对问题三，本问要求熟练操作手指导的个数由 10 个转变为最多 20 个以及每周损毁血管机器人比例变为 10%，在满足需求的前提下探究使运营成本达到最低的每周容器艇以及操作手的购买方案。实际上就是对问题二模型中动态递归方程组进行更新。同样利用遗传算法求解更新后的模型，得到总共需要购买 479 个容器艇和 2293 个操作手使运营总成本达到最低为 432930 元，相关结果见表 4。

针对问题四，要求探究在问题三的基础上给出订购优惠政策后求解新的订购方案。所以本文基于该优惠政策更新了问题三中的目标函数。求解得到总共需要购买 479 个容器艇和 2293 个操作手使运营总成本达到最低为 401500 元，相关结果见表 4。对比结果可以看出成本有一定程度的降低，优惠政策发挥了明显的作用。

针对问题五，首先通过 1~104 周的需求利用**循环神经网络**对第 105~112 周血管机器人的使用情况进行预测，具体结果见表 6。针对方案一，在第 105 周时基于新的购买政策构建初始化操作手以及容器艇的模型，而后续每周代入到问题四当中可求得该模型下的总成本为 485710 元。方案二沿用问题四的模型可求得第 1-112 周的成本为 477380 元。方案一比方案二的成本高出 8330 元，因此对于第 1~112 周来说应当选择方案 2 较为合适。

一、 问题重述

1.1 问题背景

血管机器人可以携带药物进入血管治疗血管相关疾病并且还可以用作血管清除剂，清除病毒，维持人类健康。一家医院使用 ABLVR 血管机器人，配备一个容器艇和四个操作手。这种血管机器人没有直接的信息复制功能。新购买的操作手在工作前需要由“熟练”操作手在特定环境中“指导”一周。血管机器人在患者的血管中工作一周，一周后必须移除。操作手被移除后，需要一周的维护才能再次工作。如果没有安排工作，它需要一直保养。新购买的容器艇必须经过一周的检查和调试才能投入使用。使用后，容器艇不需要维护，可以继续使用，但如果不使用，也需要保养。

1.2 问题表述

问题 1：在每个熟练操作手可以“指导”10 个新操作手的前提下，考虑第 1~8 周购买容器艇和操作手的数量，使其既满足治疗又能够使运营成本达到最低。

问题 2：假设每周有 20%的血管机器人损毁，同问题一，考虑第 1~104 周购买容器艇和操作手的数量，使其既满足治疗又能够使运营成本达到最低。

问题 3：如果每名熟练操作手可以“指导”新操作手的数量不超过 20 个，假设每周有 10%的血管机器人损毁，同问题 2，考虑第 1~104 周购买容器艇和操作手的数量。

问题 4：考虑优惠政策下容器艇以及操作手的成本问题。其他条件遵循问题 3，则第 1~104 周里总共购买的容器艇和操作手将如何调整

问题 5：预测第 105~112 周的血管机器人的需求。方案 1：第 105 周开始时需要以每个 300 元的高价购买能够直接使用的容器艇和每个 150 元购买熟练操作手，后几周均按问题 4 中的优惠政策购买合适数量的容器艇新操作手；方案 2：通盘考虑第 1~112 周的血管机器人的需求。比较第 1~112 周最低运营成本的差额。

二、 问题分析

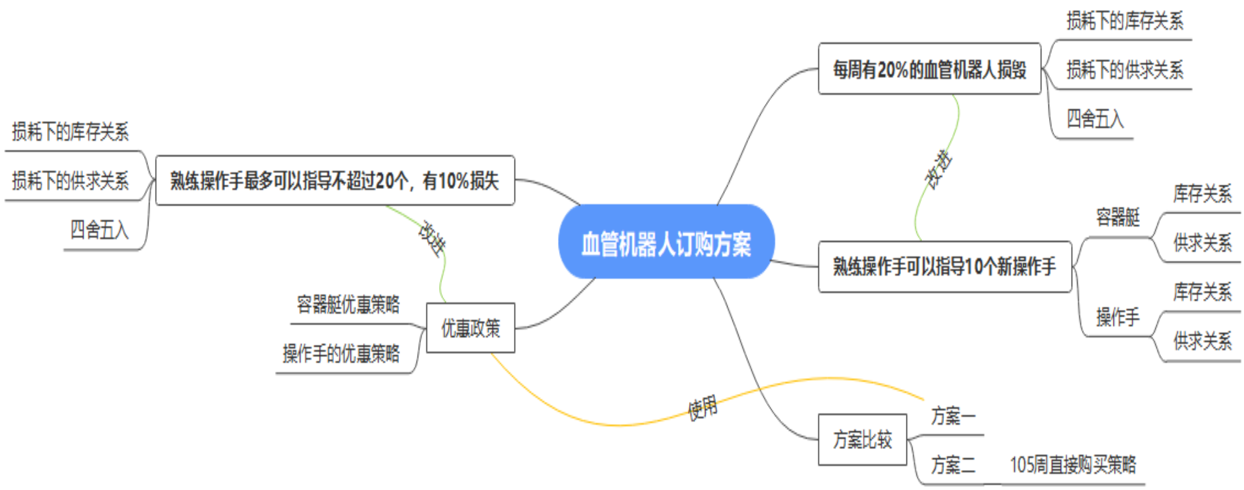


图 1：分析导图

2.1 问题一的分析

问题一要求在每个熟练操作手可以“指导”10 个购买的新操作手的基础上，合理

规划 1~8 周容器艇以及操作手的购买情况使得既满足医疗需求又能够使成本达到最低。首先满足医疗需求下成本最低主要受限于两个方面：第一个方面在于满足医疗需求，即医院每周可以使用的操作手以及容器艇的量要大于每周的需求量，第二个方面在于每周的购入量应当最少仅仅可以满足医疗需求即可。这里需要注意的是，首先对于操作手来说存在隔周使用以及新购入的操作手必须由熟练操作手“指导”一周才可使用的问题，因此本文在建立操作手模型时运用递归的思想通过一周一周分析操作手的来源以及去处，进而总结一般规律得到最终的结果。针对第 t 周医院的操作手库存可以化为两个部分，一个部分为可以使用的部分，一个部分为无法使用的部分，因为这一部分无法使用的存在，在考虑这一问时，不仅引入了库存关系，而且为了下一周能够有满足医疗需求的操作手的量而引入了供求关系，通过这两个关系可以分析出操作手每周购入量的限制。采用同样的方法，本文构建了容器艇模型，与操作手模型不同的是，容器艇不考虑隔周使用的问题，因此需要考虑当库存大于下一周的需求时不需要额外购买这一情况。最后通过结合操作手模型以及容器艇模型，以成本最小为目标函数，结合题干信息建立约束，求解规划模型即可得到第 1~8 周操作手以及容器艇的购买量，以及所要花费的最下成本。

2.2 问题二的分析

问题二要求在考虑到每周有 20%血管机器人损毁的情况下，第 1~104 周购买容器艇以及数目。对于第二问，本文考虑基于第一问所建立的模型，通过改变每个周用完后操作手以及容器艇的回收量，并增加四舍五入模型，尝试对模型进行修改，得到了第 1~104 周操作手以及容器艇的购买量，并且对比了问题一和问题二两种方案下 1~8 周的购买差异。

2.3 问题三的分析

问题三要求在熟练操作手指导的个数由 10 个转变为最多 20 个以及损毁率变为 10%的情况下，研究第 1~104 周容器艇以及操作手的购买量。对于第三问，本文考虑基于第一问所建立的模型，通过改变每个周用完后操作手以及容器艇的回收量以及熟练工的“指导”个数，尝试对模型进行修改，最终得到了第 1~104 周操作手以及容器艇的购买量

2.4 问题四的分析

问题四要求在考虑优惠政策下给出第 1~104 周容器艇以及操作手的购买量。对于第二问，本文考虑基于第三问所建立的模型，通过增加优惠政策进而改进目标方程，尝试对模型进行修改，最终得到了第 1~104 周操作手以及容器艇的购买量，并且对比了问题三和问题四两种方案下的成本差异。

2.5 问题五的分析

问题五要求对两个方案进行比较。首先通过 1~104 周已有的数据对第 105~112 周血管机器人的使用情况进行预测，针对方案一通过在第 105 周构建初始化操作手以及容器艇的模型带入到问题四当中可求得该模型下的成本以及购买量，方案二沿用问题四的模型可求得该模型下的成本以及购买量，最终对两个方案成本进行比较。

三、 模型假设

（1）该医院在未来的几周内的需求比较稳定并且不存在中途更换血管机器人的情况，符合近几周的需求规律，未出现较大的变化。

（2）该血管机器人在 1~112 周使用过程中除去可能损坏的 10%不存在老化以及故障等其他问题，并且熟练操作手不会因为指导的数目太多而增长“指导”时间。

（3）该医院的仓库有足以满足所有需求量的存储量。

四、 符号说明

符号	说明	单位
V_t	第 t 周用于保养的操作手的数量	个
P_t	第 t 周操作手的采购量	个
x_t	第 t 周血管机器人的需求量	个
P_0	操作手的初始值	个
Q_t	第 t 周容器艇的采购量	个
U_t	第 t 周用于保养的容器艇的数量	个
Q_0	容器艇的初始值	个
$H(\alpha)$	四舍五入函数	/
Z_t	第 t 周的总成本	元

五、 问题一模型的建立与求解

5.1 模型的准备

该医院使用的 ABLVR 型号的血管机器人包含一个容器艇以及四个操作手两个部分，并且这两个部分可以拆卸、安装、更换。

对于操作手来说，该操作手应用了人体仿生学技术，有生物大脑以及机械臂两个部分，生物大脑可以控制机械臂进行工作。对于新购买的操作手来说，此时“脑中”没有任何操作信息，因此需要进行提前学习，即在特定的环境下由已经学习完成的操作手指导持续一周时间，即可参与工作。并且每个操作手在工作一周后必须从容器艇上卸下，进行一周的检查调试，下一周才能继续使用。这就即使库存内的操作手的数量要多与本周需要的操作手量仍需要提前额外购买操作手。而对于未使用的操作手则需要一直保养。

对于容器艇来说，使用结束后容器艇不需要保养可以连续使用，那么当需求量小于库存量时，医院不需要向外界购买多余的容器艇，当超过时，由于容器艇需要进行一周的训练，那么对于医院来说应根据需求提前购置，以备高需求量的情况。

5.2 模型的建立

5.2.1 操作手模型的建立

在已经知道该医院 1~8 周血管机器人使用量x_t的前提下，可以得出每个周t所需要的操作手的数目为$4x_t$。由于操作手在使用完后无法继续投入使用，需要一周的检查调试，即前一周对后一周的结果有影响，在这里对该模型进行了分类讨论。

- **第一周的使用情况：**

目前已经有了 50 个熟练的操作手，即初始的库存量$P_0 = 50$个，从附件 2 所给的数据可知，第一周该医院需要 11 个血管机器人即 44 个熟练的操作手，那么将有 6 个操作手理论上用于保养，但观察第二周的数据可以发现，第二周的需求量为 5 个血管机器人即 20 个操作手，在第一周使用完无法直接使用的情况下，原库存仅能提供 6 个操作手，难以满足治疗需求，这就要求医院在第一周时可以提前购置一批血管机器人

P_1用于训练，以方便第二周可以持续使用。那么一部分机器人理论上进行保养的机器人应当拿出一部分用于训练新购入的机器人。

对于一个熟练操作手来说可以“指导”10 个新购入的操作手，即$\left[\frac{P_1}{10}\right]$就可以得到所需的熟练操作手的数目，但是需要注意的是，通常高斯函数为向下取整，这样可能会少考虑所需的熟练操作手的数目，这里对高斯函数经行了改造，即通过向左平移一个单位来消除误差：

$$\left[\frac{P_1}{10}\right]+1$$

对于第一周来说可用的操作手将用于血管机器人、“培训新人”、保养三个部分，即满足如下关系式：

$$P_0=4x_1+V_1+(\left[\frac{P_1}{10}\right]+1) \tag{5-1}$$

其中，V_1为第一周用于保养的机器人的数量，$4x_1$为第一周用于医用治疗的操作手的数量。对于这里的购买量P_1，在成本最小化的前提下，并不是一个随机量，而是应该满足第一周结束后第二周可以用的部分加上新购入的操作手的总量可以满足第二周的需求，细化来说就是用于训练的“老手”、没有用而保养的部分、以及第一周的购入量应大于第二周的血管机器人的需求量以及第二周用于训练的“熟练”操作手的量，那么应当满足如下供求关系：

$$P_1+V_1+\left(\left[\frac{P_1}{10}\right]+1\right)\geq 4x_2+(\left[\frac{P_2}{10}\right]+1) \tag{5-2}$$

- **第二周的使用情况：**

对于第二周的库存量来说可以分为两个部分，一部分为可以使用的操作手的数量，这一部分的操作手来自于第一周用于保养的操作手量V_1、第一周采购并且在第一周已经完成了一周学习的操作手量P_1、以及在第一周用于“指导”的熟练操作手量$\left[\frac{P_1}{10}\right]+1$；另一个部分为无法使用的操作手，即在第一周已经使用过但是第二周不能继续使用（也就是需要保养）的操作手量$4x_1$，那么总的库存量为：

$$P_1+V_1+(\left[\frac{P_1}{10}\right]+1)+4x_1$$

而对于第二周的消耗，一部分将会用于医用治疗$4x_2$，一部分将会用于为了满足第三周的以用需求在第二周周采购的新操作手消耗的老操作手的数量$\left[\frac{P_2}{10}\right]+1$,还有一部分是第二周正在进行保养的操作手，这里包括第一周已经用过的操作手以及如果有剩余的话剩余部分的操作手V_2，即满足：

$$V_2+(\left[\frac{P_2}{10}\right]+1)+4x_2$$

其中，V_2为第二周用于保养的机器人的数量，P_2为第二周的采购量，$4x_2$为第二周将会用于医疗治疗的操作手的数量。

由供求平衡可以得到第二周的库存关系为：

$$P_1+V_1+\left(\left[\frac{P_1}{10}\right]+1\right)+4x_1=V_2+\left(\left[\frac{P_2}{10}\right]+1\right)+4x_2 \tag{5-3}$$

并且对于第二周的购入量同第一周一样也应当满足下一周的需求，即供求关系应满足：

$$P_2+V_2+\left(\left[\frac{P_2}{10}\right]+1\right)\geq 4x_3+(\left[\frac{P_3}{10}\right]+1)$$

➢ **模型推广：**

对于 2~8 周来说，库存量的来源以及消耗的去处均与第二周相似，仅仅是每周用于医疗治疗的需求量不同，具体过程见图 1：

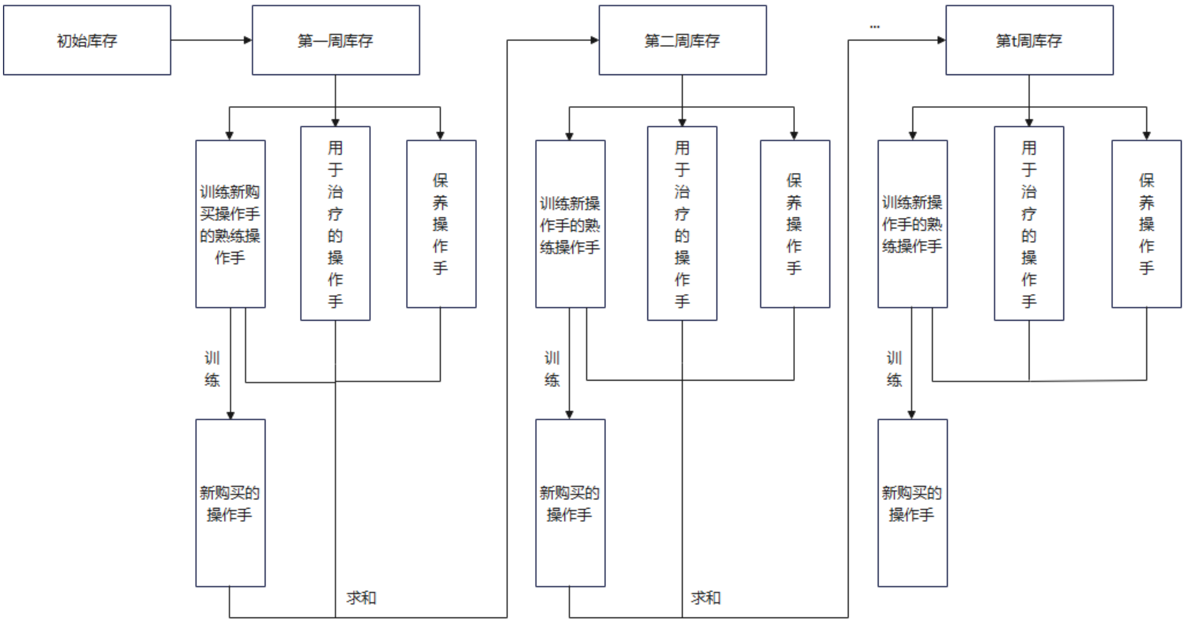


图 2：操作数的递归流程

结合图 2 的递推过程，在这里对第二周的库存关系以及供求关系进行推广，即对于第 t 周（$t=2\sim8$）来说，应满足如下关系式：

$$P_{t-1}+V_{t-1}+\left(\left[\frac{P_{t-1}}{10}\right]+1\right)+4x_{t-1}=V_t+\left(\left[\frac{P_t}{10}\right]+1\right)+4x_t(t\geq 2) \qquad (5-4)$$

$$P_t+V_t+\left(\left[\frac{P_t}{10}\right]+1\right)\geq 4x_{t+1}+(\left[\frac{P_{t+1}}{10}\right]+1) \qquad (5-5)$$

结合第 1 周以及 2~8 周的不同关系，可以得到如下的操作手模型：

$$\begin{cases} P_0=4x_1+V_1+\left(\left[\frac{P_1}{10}\right]+1\right)\ (t=1) \\ P_{t-1}+V_{t-1}+\left(\left[\frac{P_{t-1}}{10}\right]+1\right)+4x_{t-1}=V_t+\left(\left[\frac{P_t}{10}\right]+1\right)+4x_t\ \ (t=2\sim8) \\ P_t+V_t+\left(\left[\frac{P_t}{10}\right]+1\right)\geq 4x_{t+1}+(\left[\frac{P_{t+1}}{10}\right]+1)\ (t=1\sim8) \end{cases} \qquad (5-6)$$

为了满足最下的成本，采购量应当有所限制，在这里用 1~8 周用于医疗治疗的操作手的最大值为限制，即就算需要采购大数量的操作手也应当小于医疗需求的最大值，否则很可能会造成浪费即：

$$0\leq P_t\leq 4\max\{x\} \qquad (5-7)$$

并且为了减少浪费量，对于一部分没有使用而培养的操作手V_t也应有所限制，即：

$$4x_{t-1}\leq V_t\leq 4\max\{x\} \qquad (5-8)$$

5.2.2 容器艇模型的建立

一个血管机器人将会使用一个容器艇，在已经知道该医院 1~8 周血管机器人使用

量x_t的情况下，可以得到相应的容器艇的使用量为x_t，采用与操作手模型同样的分析方法。

- **第一周的使用情况：**

目前已有的库存量Q_0为 13，而第一周的容器艇使用量为 11，相比于操作数这里不需要考虑隔周使用的情况，那么这 13 个容器艇在第二周可以直接使用，而第二周的容器艇使用量为 5，在利益最大化的情况下完全不需要另购一批容器艇，那么可以得到第一周的库存关系为：

$$Q_0 = U_1 + x_1 \tag{5-9}$$

其中，U_1为第一周用于保养的容器艇的数目量，x_1为第一周容器艇的使用量。

在忽略第二周的实际使用情况下，对于第一周的所需的购买量，应当满足买入的量与现有的容器艇的数目的和他与第二周的使用量即可以得到如下的供求关系：

$$Q_1 + x_1 + U_1 \geq x_2 \tag{5-10}$$

- **第二周的使用情况：**

相比于操作手，容器艇在新购入后不需要再拿出一批熟练的容器艇来“指导”新购入的容器艇，但对于新购入的容器艇仍需调试一周才可投入使用。那么对于第二周，在假设第一周有额外购入的情况下，第二周的库存量由三个部分组成，第一周购入容器艇的量Q_1、第一周用于保养容器艇的量U_1、以及第一周用于血管机器人的量x_1，这里需要注意的是与操作手不同的是容器艇不需要考虑隔周使用的问题，那么当前两周每周的最大需求量大于第三周的需求量时，就不要再额外购买容器艇。即满足：

$$\max\{x_1，x_2\} > x_3, 则\ Q_2 = 0 \tag{5-11}$$

那么此时对于第二周的库存量为：

$$U_1 + x_1 + Q_1$$

对于容器艇的消耗量，主要用于本周血管机器人的需求x_2以及多余部分接受保养的机器人U_2，那么总的消耗量为：

$$x_2 + U_2$$

由供求平衡可以得到第二周的库存关系为：

$$U_1 + x_1 + Q_1 = x_2 + U_2 \tag{5-12}$$

并且对于第二周的购入量同第一周一样也应当满足下一周的需求，即供求关系应满足：

$$Q_2 + x_2 + U_2 \geq x_3$$

- **模型推广：**

对于 3~8 周来说，库存量的来源以及消耗的去处均与第二周相似，仅仅是每周用于医疗治疗的需求量不同，具体过程见图 3：

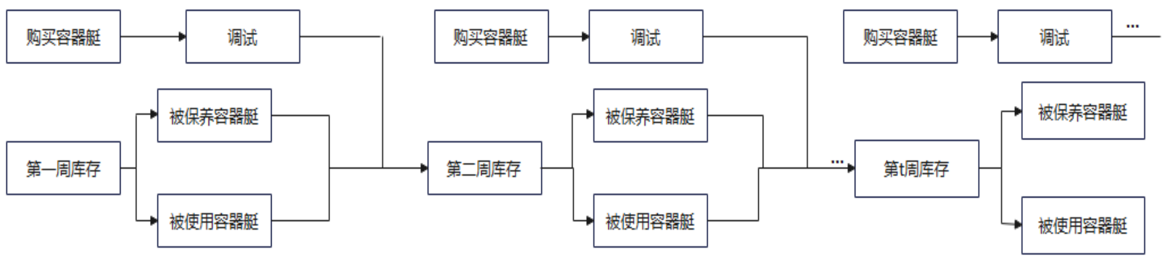


图 3：容器艇的递归流程

结合图 2 的递推过程，在这里对第二周的库存关系以及供求关系进行推广，即对

于第 t 周来说，应满足如下关系式：

$$U_{t-1}+x_{t-1}+Q_{t-1}=x_t+U_t \tag{5-13}$$

$$Q_t+x_t+U_t \geq x_{t+1} \tag{5-14}$$

综上所述可以得到容器艇模型为：

$$\begin{cases} Q_0=U_1+x_1\ \ (t=1) \\ U_{t-1}+x_{t-1}+Q_{t-1}=x_t+U_t\ \ (t=2\sim8) \\ Q_t+x_t+U_t \geq x_{t+1}\ \ (t=1\sim8) \end{cases} \tag{5-15}$$

与操作手不同的是容器艇不需要考虑隔周使用的问题，那么当本周或是前几周容器艇的最大需求量大于下一周的需求量时，就不要再额外购买容器艇。即满足：

$$\max\{x_1，x_2 \ldots x_t\} > x_{t+1}, \text{则 } Q_t=0 \tag{5-16}$$

在这里引入约束条件，需要注意的是在库存关系中，对于第 t 周U_{t-1}、x_{t-1}、Q_{t-1}、x_t均为定值因此不需要对U_t进行限制，那么在这里仅对购买量进行限制，容器艇的购买量应当不超过这 t 周的最大需求量即：

$$0 \leq Q_t \leq \max\{x_t\} \tag{5-17}$$

5.2.3 目标方程的确立

本问主要是为了解决在满足医疗需求的情况下，成本最小化，由附件 1 可得，血管机器人的成本主要在购买容器艇，购买操作手，操作手保养，容器艇保养以及操作手（含“熟练工”）训练五个方面

A.购买容器艇：

单个容器艇的成本为 200 元/个，根据每周需要购入的容器艇数量Q_{t}，可得购买容器艇的成本为：

$$n_1=200Q_{\mathrm{t}}$$

B.购买操作手：

单个容器艇的成本为 100 元/个，根据每周需要购入的操作手数量P_{t}，可得购买容器艇的成本为：

$$n_2=100P_{\mathrm{t}}$$

C.容器艇保养：

单个容器艇保养的成本为 10 元/个/周，根据每周需要保养的容器艇数量U_{t}，可得购买容器艇的成本为：

$$n_3=10U_{\mathrm{t}}$$

D.操作手保养：

单个操作手保养的成本为 5 元/个/周，根据每周需要保养的操作手数量V_{t}，可得购买容器艇的成本为：

$$n_4=5V_{\mathrm{t}}$$

E.操作手训练：

单个操作手训练的成本为 5 元/个，每周购置的操作手的数目P_{t}，而这里不仅仅需要考虑新购入的而且还需要考虑“熟练工”的花费，由上文可得“熟练工”的数目为$\left[\frac{P_t}{10}\right]+1$，那么操作手训练的成本为：

$$n_5=10((\left[\frac{P_t}{10}\right]+1)+P_{\mathrm{t}})$$

所以总的成本 Z 为：

$$Z_t = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + n_5$$

即：

$$Z_t = 200Q_1 + 100P_{\mathrm{t}} + 10U_{\mathrm{t}} + 5V_{\mathrm{t}} + 10\left(\left(\left[\frac{P_t}{10}\right] + 1\right) + P_{\mathrm{t}}\right) \tag{5-18}$$

5.2.4 模型汇总

要使总成本最小，即满足：

$$min\ Z_t = 200Q_1 + 100P_{\mathrm{t}} + 10U_{\mathrm{t}} + 5V_{\mathrm{t}} + 10\left(\left(\left[\frac{P_t}{10}\right] + 1\right) + P_{\mathrm{t}}\right)$$

综上所述，每周购买容器艇以及操作手的多目标规划模型汇总如下：

$$min\ Z_t = 200Q_1 + 100P_{\mathrm{t}} + 10U_{\mathrm{t}} + 5V_{\mathrm{t}} + 10\left(\left[\frac{P_t}{10}\right] + 1 + P_{\mathrm{t}}\right)$$

$$s.t.\ \begin{cases} \begin{cases} P_0 = 4x_1 + V_1 + \left(\left[\frac{P_1}{10}\right] + 1\right)\ (t=1) \\ P_{t-1} + V_{t-1} + \left(\left[\frac{P_{t-1}}{10}\right] + 1\right) + 4x_{t-1} = V_t + \left(\left[\frac{P_t}{10}\right] + 1\right) + 4x_t\ \ (t = 2\sim 8) \\ P_t + V_t + \left(\left[\frac{P_t}{10}\right] + 1\right) \geq 4x_{t+1} + \left(\left[\frac{P_{t+1}}{10}\right] + 1\right)\ (t = 1\sim 8) \end{cases} \\ 0 \leq P_t \leq 4\max\{x_t\} \\ 4x_{t-1} \leq V_t \leq 4\max\{x_t\} \\ \begin{cases} Q_0 = U_1 + x_1\ \ (t=1) \\ U_{t-1} + x_{t-1} + Q_{t-1} = x_t + U_t\ \ (t = 2\sim 8) \\ Q_t + x_t + U_t \geq x_{t+1}\ \ (t = 1\sim 8) \end{cases} \\ 0 \leq Q_t \leq \max\{x_t\} \\ \max\{x_1,\ x_2 \dots x_t\} > x_{t+1}, \text{则 } Q_t = 0 \end{cases} \tag{5-19}$$

5.3 基于遗传算法的规划模型的求解

5.3.1 算法求解

在由多个个体组成的群体中，染色体作为 DNA 的载体，是遗传信息的重要载体。对每个人来说，他们的染色体来自他们的父母。考虑到生物进化的长期过程以及遗传信息从父母到后代的传递，染色体复制、交叉和变异将会发生。根据达尔文提出的“适者生存”的进化规律，最终会出现一群更适应环境的个体。遗传算法作为一种全局优化的自调整算法，模拟了生物体的进化过程以及自然选择和遗传学中的复制、交叉和变异现象[1]。从代表问题所有潜在解决方案集的初始群体（群体由一定数量的由基因编码的个体组成）开始，对群体重复“复制”、“交叉”和“变异”操作，估计每个个体的适应值，并根据“适者生存”的进化规则，在进化过程中获得种群中最接近最优解的个体，继续上述操作，最后对上一代种群中的最优个体进行解码，得到满足要求的最优解。遗传算法的操作步骤如下：

遗传算法求解过程
Step1.确定适应度函数的取值范围、精度以及染色体编码长度。
Step2.对染色体进行编码，确立种群数量，以及发生交叉、变异的概率等。
Step3.初始化种群：及随机生成第一代种群及随机生成第一段操作数。
Step4.利用适应度函数评价种群，判断是否满足停止条件，若满足则出最优解；否则继续进行操作

Step5.对种群进行选择、交叉、变异操作，得到下一代种群，重复第 4 步操作直至得到最优解。

具体过程如图 4 所示[2]：

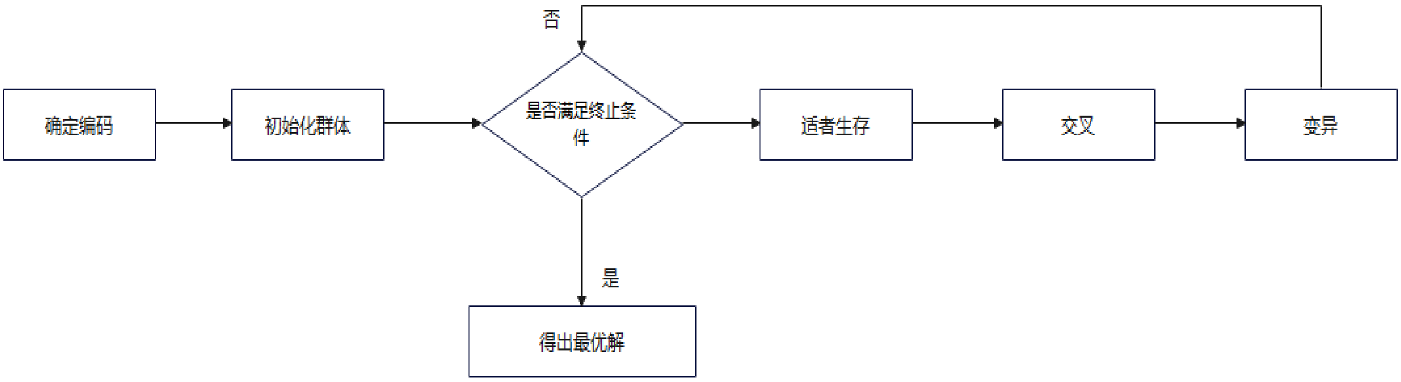


图 4：遗传算法流程图

最终通过遗传算法可以得到最佳适应度，也就是算法找到的全局最优解即这里所要求的每周的购买结果。

5. 3. 2 求解结果展示

表 1：问题 1 相关结果数据

	第一周	第二周	第三周	第四周	第五周	第六周	第七周	第八周
需求 x	11	5	4	7	16	6	2	7
每周购买的操作手P_t	30	12	3	23	1	1	0	3
每周购买的容器艇U_t	0	0	0	8	0	0	0	0
每周成本 Z	3375	1725	825	4565	465	775	700	980

从表中可以得到每周需要购买的操作手P_t的购买量、每周需要购买的容器艇U_t的购买量、以及每周所需的成本。经验算结果符合实际需求，可以代入实际考虑。

六、 问题二模型的建立与求解

6. 1 模型的建立

问题一所建立的模型是在理想情况下容器艇以及操作手的购买情况，然而在实际情况下，血管机器人在患者血管中存在一定的风险，当碰到巨噬细胞时，如果躲避不及，将会完全损毁，无法回收，这就导致每周该医院所需的容器艇以及操作手的数量更多。当每周有 20%的血管机器人损毁时，那么这一部分的容器艇以及操作手将不能被重复利用，在理想情况下，上一周用完的容器艇x_t以及操作手$4x_t$均可以被直接使用，在存在损耗后，仅$0.8x_t$的容器艇以及$3.2x_t$的操作手可以被回收，在这里对第一问中的模型进行改进。

6. 1. 1 操作手模型的改进

对于库存关系来说，当考虑到每周有 20%的损失时，首先对于第 1 周来说，此时的库存关系中不包含第一周回收时的操作手数量因此不做改变，而对于第 t 周来说，用于医疗治疗的机器人的数量为$4x_t$，然而当这周结束后可以回收的仅为$3.2x_t$，那么对于第 t 周的库存关系来说，此时第 t 周在非理想状态下，正在保养的 t−1 周的操作手的数量为$3.2x_{t-1}$。那么此时式（5~4）变为如下关系式：

$$P_{t-1}+V_{t-1}+\left(\left[\frac{P_{t-1}}{10}\right]+1\right)+3.2x_{t-1}=V_t+\left(\left[\frac{P_t}{10}\right]+1\right)+4x_t\ \ (t=2\sim104)\quad(6-1)$$

对于供求关系来说，每周的需求量不会因为使用时发生损失而有所变化，因此第一问中的供求关系不发生变化。这里相比第一问理想状态下所建立的模型，保养量V_t因为回收数目发生变化，因此对于V_t的约束也因此发生改变：

$$3.2x_{t-1}\le V_t\le 4\max\{x_t\}\quad(6-2)$$

6.1.2 容器艇模型的改进

容器艇相比于操作手不考虑隔周使用的问题，首先对于第一周来说由于第一周不涉及回收的容器艇数量的问题，因此库存关系并未发生改变，而对于供求关系来说，理想状态下可以回收的容器艇的数目为x_1，但是在考虑巨噬细胞所带来的损耗后，此时可以回收的容器艇的数目为$0.8x_t$，这就导致医院所拥有的总的容器艇的数目减少，对于第 t 周也是如此，此时供求关系发生变化：

$$Q_t+0.8x_t+U_t\ge x_{t+1}\ \ (t=1\sim104)\quad(6-3)$$

而对于库存关系来说除去第一周，其余周也因为巨噬细胞的影响而导致回收数目减少导致原式发生变化：

$$U_{t-1}+0.8x_{t-1}+Q_{t-1}=x_t+U_t\ \ (t=2\sim104)\quad(6-4)$$

考虑到每周会产生损耗因此不能将每周需求量的最大值作为与下一周的比较标准来恒定是否在本周进行购置，因此在这里对购置条件进行了变更，当本周可以使用的容器艇的总量大于下一周的需求量时，便不采购新的容器艇，即满足：

$$0.8x_t+U_t\ge x_{t+1}\text{，则 }Q_t=0\quad(6-5)$$

6.1.3 模型汇总

考虑到损毁个数按四舍五入取整的问题，在这里引入了四舍五入函数$H(\alpha)$：

$$H(\alpha)=\begin{cases}[\alpha]\text{，} & \alpha\text{的小数部分小于等于 4}\\ [\alpha]+1\text{，} & \alpha\text{的小数部分大于 4}\end{cases}\quad(6-6)$$

那么对于每周损毁的个数首先带到取整函数中得到数据处理后的损毁的个数，然后将这个值带入到模型中得到相应的值

结合上述对于操作手模型以及容器艇模型的改进，改进后的模型如下：

$$min\ Z_t=200Q_1+100P_{\mathrm{t}}+10U_{\mathrm{t}}+5V_{\mathrm{t}}+10\left((\left[\frac{P_t}{10}\right]+1)+P_{\mathrm{t}}\right)$$

$$
s.t.\begin{cases}
\begin{cases}
P_0 = 4x_1 + V_1 + \left(\left[\dfrac{P_1}{10}\right] + 1\right)\ (t=1) \\
P_{t-1} + V_{t-1} + \left(\left[\dfrac{P_{t-1}}{10}\right] + 1\right) + H(3.2x_{t-1}) = V_t + \left(\left[\dfrac{P_t}{10}\right] + 1\right) + 4x_t\ \ (t = 2\sim104) \\
P_t + V_t + \left(\left[\dfrac{P_t}{10}\right] + 1\right) \geq 4x_{t+1} + (\left[\dfrac{P_{t+1}}{10}\right] + 1)\ (t = 1\sim104)
\end{cases} \\
0 \leq P_t \leq 4\max\{x_t\} \\
H(3.2x_{t-1}) \leq V_t \leq 4\max\{x_t\} \\
\begin{cases}
Q_0 = U_1 + x_1\ \ (t=1) \\
U_{t-1} + H(0.8x_{t-1}) + Q_{t-1} = x_t + U_t\ \ (t = 2\sim104) \\
Q_t + H(0.8x_t) + U_t \geq x_{t+1}\ \ (t = 1\sim104)
\end{cases} \\
0 \leq Q_t \leq \max\{x_t\} \\
H(0.8x_t) + U_t \geq x_{t+1}\text{，则 } Q_t = 0 \\
H(\alpha) = \begin{cases} [\alpha]\text{，} & \alpha\text{的小数部分小于等于 4} \\ [\alpha] + 1\text{，} & \alpha\text{的小数部分大于 4} \end{cases}
\end{cases} \tag{6-7}
$$

6.2 模型的求解

求解方法与问题一所用的方法一致，最终结果如表 2 所示：

表 2：问题 2 相关结果数据

周次	购买容器艇的数量	购买操作手的数量	保养操作手的数量	保养容器艇的数量	参与训练的操作手数量（含“熟练工”和“新手”）	总成本（单位：元）
第 12 周	5	19	27	1	21	3255
第 26 周	0	0	99	9	0	585
第 53 周	5	65	109	0	72	8765
第 78 周	16	40	173	0	44	8505
第 101 周	12	79	310	0	87	12720
第 102 周	17	35	346	0	39	9020
第 103 周	25	92	308	0	102	16760
第 104 周	0	0	309	0	0	1545
1~104 周（总计）	879	3840	13125	131	4254	669275

从表中可以得到 1~104 周（总计）所需要购买容器艇 879 个，购买操作手的数目为 3840 个，总计成本为 669275 元。表 3 为该方案下 1~8 周的购买情况：

表 3：问题 2 中 1~8 周结果

周次	购买容器艇的数量	购买操作手的数量	保养操作手的数量	保养容器艇的数量	参与训练的操作手数量（含“熟练工”和“新手”）	总成本（单位：元）
第 1 周	0	20	4	2	22	2260
第 2 周	0	0	41	6	0	265
第 3 周	0	0	41	6	0	265

第 4 周	8	38	22	2	42	5950
第 5 周	0	2	21	0	3	335
第 6 周	0	0	51	7	0	325
第 7 周	0	0	50	7	10	320
第 8 周	3	14	36	4	16	2380

对比问题一可以发现容器艇以及操作手的购买方案几乎没有发生改变，在经过计算验证得出该方案可以满足 1~8 周的医疗治疗需求，并且由于设定了更为准确的约束条件，使得该方案即使是在有损耗的情况下血管机器人的购买量的成本相较于第一问较少，经比较该方案较第一问更为合理。

七、 问题三模型的建立与求解

7.1 模型的建立

相较于第二问，仅仅有两个条件发生改变，每名熟练操作手可以“指导”新操作手的数量不再为“指导”10 个而是调整为不超过 20 个，并且每周血管机器人损毁率由 20%转变为 10%。那么对于第 t 周可以回收的操作手为$3.6x_t$，容器艇为$0.9x_t$，而用于“指导”的操作手的数目变为$\left[\frac{P_t}{20}\right]+1$，其余条件均未发生变化，此时的模型为：

$$minZ_t = 200Q_1 + 100P_t + 10U_t + 5V_t + 10\left(\left(\left[\frac{P_t}{10}\right]+1\right)+P_t\right)$$

$$s.t.\begin{cases}\begin{cases}P_0 = 4x_1 + V_1 + \left(\left[\frac{P_1}{20}\right]+1\right)\ (t=1)\\ P_{t-1} + V_{t-1} + \left(\left[\frac{P_{t-1}}{20}\right]+1\right) + H(3.6x_{t-1}) = V_t + \left(\left[\frac{P_t}{20}\right]+1\right) + 4x_t\ \ (t=2\sim104)\\ P_t + V_t + \left(\left[\frac{P_t}{20}\right]+1\right) \geq 4x_{t+1} + \left(\left[\frac{P_{t+1}}{20}\right]+1\right)(t=1\sim104)\end{cases}\\ 0 \leq P_t \leq 4\max\{x_t\}\\ H(3.6x_{t-1}) \leq V_t \leq 4\max\{x_t\}\\ \begin{cases}Q_0 = U_1 + x_1\ \ (t=1)\\ U_{t-1} + H(0.9x_{t-1}) + Q_{t-1} = x_t + U_t\ \ (t=2\sim104)\\ Q_t + H(0.9x_t) + U_t \geq x_{t+1}\ \ (t=1\sim104)\end{cases}\\ 0 \leq Q_t \leq \max\{x_t\}\\ H(0.9x_t) + U_t \geq x_{t+1}\text{,则 } Q_t = 0\\ H(\alpha) = \begin{cases}[\alpha]\text{，} & \alpha\text{的小数部分小于等于 4}\\ [\alpha]+1\text{，} & \alpha\text{的小数部分大于 4}\end{cases}\end{cases} \quad (7-1)$$

7.2 模型的求解

求解方法与问题一所用的方法一致，最终结果如表 4 所示：

表 4：问题 3 相关结果数据

周次	购买容器艇的数量	购买操作手的数量	保养操作手的数量	保养容器艇的数量	参与训练的操作手数量（含“熟练工”和“新手”）	总成本（单位：元）

第 12 周	2	8	39	4	9	1525
第 26 周	0	0	118	11	0	700
第 53 周	0	50	128	0	53	6170
第 78 周	9	19	197	2	20	4905
第 101 周	1	39	357	0	41	6295
第 102 周	7	0	394	0	0	3370
第 103 周	16	44	363	0	47	9885
第 104 周	0	0	348	0	0	1740
1~104 周（总计）	479	2293	16066	318	2431	432930

从表中可以得到 1~104 周共需购买容器艇 479 个，操作手 2293 个，总成本为 432930 元。在经过计算验证得出该方案满足实际要求。与问题二的结果进行比较，发现在该条件下所消耗的成本更低。

八、 问题四模型的建立与求解

8.1 模型的建立

8.1.1 优惠模型的建立

问题四在问题三的基础上引入了一个购买上的优惠政策，对于容器艇以及操作手不同的购买量有不同程度的优惠。这里以第 t 周对优惠模型进行了建立。

- **容器艇：**

这里认为在不同政策下容器艇的购买成本为$f_t(Q_t)$。那么对于容器艇来说当一次性购买量不超过 5 个时的单价为 200 元/个，即满足：

$$f_t(Q_t) = 200Q_t\ ,\quad 0 \le Q_t \le 5 \tag{8-1}$$

当容器艇一次性购买量超过 5 个但不超过 10 个时，超过 5 个的那部分单价为 180 元/个，既满足：

$$f_t(Q_t) = 1000 + 180(Q_t - 5),\quad 5 \le Q_t \le 10 \tag{8-2}$$

容器艇一次性购买量超过 10 个时，超过 10 个的那部分单价为 160 元/个,既满足：

$$f_t(Q_t) = 1900 + 160(Q_t - 10),\quad Q_t \ge 10 \tag{8-3}$$

对上面的三个式子进行汇总即可得到最终容器艇的优惠模型：

$$f_t(Q_t) = \begin{cases} 200Q_t\ , & 0 \le Q_t \le 5 \\ 1000 + 180(Q_t - 5)\ , & 5 \le Q_t \le 10 \\ 1900 + 160(Q_t - 10)\ , & Q_t \ge 10 \end{cases} \tag{8-4}$$

- **操作手：**

这里认为在不同政策下操作手的购买成本为$I_t(P_t)$。那么对于操作手来说当一次性购买量不超过 20 个时的单价为 100 元/个，即满足：

$$I_t(P_t) = 100P_t,\quad 0 \le P_t \le 20 \tag{8-5}$$

当操作手一次性购买量超过 20 个但不超过 40 个时，超过 20 个的那部分单价为 90 元/个，既满足：

$$I_t(P_t) = 2000 + 90(P_t - 20),\quad 20 \le P_t \le 40 \tag{8-6}$$

操作手一次性购买量超过 40 个时，超过 10 个的那部分单价为 80 元/个,既满足：

$$I_t(P_t) = 3800 + 80(P_t - 40),\quad P_t \ge 40 \tag{8-7}$$

对上面的三个式子进行汇总即可得到最终操作手的优惠模型：

$$I_t(P_t)=\begin{cases}100P_t\,, & 0\le P_t\le 20\\ 2000+90(P_t-20)\,, & 20\le P_t\le 40\\ 3800+80(P_t-40)\,, & P_t\ge 40\end{cases} \tag{8-8}$$

8.1.2 模型汇总

对于最终所有的成本来说购买容器艇以及操作手的花费不再为$200Q_1$、$100P_{\mathrm{t}}$而转变为$I_t(P_t)$、$f_t(Q_t)$，将上述的改进条件带入到问题三中，最终可以得到如下模型：

$$min\ Z_t=I_t(P_t)+f_t(Q_t)+10U_{\mathrm{t}}+5V_{\mathrm{t}}+10\left(\left(\left[\frac{P_t}{10}\right]+1\right)+P_{\mathrm{t}}\right)$$

$$s.t.\begin{cases}\begin{cases}P_0=4x_1+V_1+\left(\left[\frac{P_1}{20}\right]+1\right)\ (t=1)\\ P_{t-1}+V_{t-1}+\left(\left[\frac{P_{t-1}}{20}\right]+1\right)+H(3.6x_{t-1})=V_t+\left(\left[\frac{P_t}{20}\right]+1\right)+4x_t\ \ (t=2\sim104)\\ P_t+V_t+\left(\left[\frac{P_t}{20}\right]+1\right)\ge 4x_{t+1}+\left(\left[\frac{P_{t+1}}{20}\right]+1\right)(t=1\sim104)\end{cases}\\ 0\le P_t\le 4\max\{x_t\}\\ H(3.6x_{t-1})\le V_t\le 4\max\{x_t\}\\ \begin{cases}Q_0=U_1+x_1\ \ (t=1)\\ U_{t-1}+H(0.9x_{t-1})+Q_{t-1}=x_t+U_t\ \ (t=2\sim104)\\ Q_t+H(0.9x_t)+U_t\ge x_{t+1}\ \ (t=1\sim104)\end{cases}\\ 0\le Q_t\le \max\{x_t\}\\ H(0.9x_t)+U_t\ge x_{t+1}\,,\text{则 } Q_t=0\\ H(\alpha)=\begin{cases}[\alpha]\,, & \alpha\text{的小数部分小于等于 4}\\ [\alpha]+1, & \alpha\text{的小数部分大于 4}\end{cases}\\ f_t(Q_t)=\begin{cases}200Q_t\,, & 0\le Q_t\le 5\\ 1000+180(Q_t-5)\,, & 5\le Q_t\le 10\\ 1900+160(Q_t-10)\,, & Q_t\ge 10\end{cases}\\ I_t(P_t)=\begin{cases}100P_t\,, & 0\le P_t\le 20\\ 2000+90(P_t-20)\,, & 20\le P_t\le 40\\ 3800+80(P_t-40)\,, & P_t\ge 40\end{cases}\end{cases} \tag{8-9}$$

8.2 模型的求解

求解方法与问题一所用的方法一致，最终结果如表 5 所示：

表 5：问题 4 相关结果数据

周次	购买容器艇的数量	购买操作手的数量	保养操作手的数量	保养容器艇的数量	参与训练的操作手数量（含“熟练工”和“新手”）	总成本（单位：元）
第 12 周	2	8	39	4	9	1525
第 26 周	0	0	117	11	0	695
第 53 周	0	49	128	0	52	5680
第 78 周	9	19	197	2	20	4825
第 101 周	1	39	356	0	41	6100
第 102 周	7	0	393	0	0	3325
第 103 周	16	45	362	0	48	9350

第 104 周	0	0	348	0	0	1740
1~104 周（总计）	479	2293	16028	319	2431	401500

从表中可以得到 1~104 周共需购买容器艇 479 个，操作手 2293 个，总成本为 401500 元，与第三问相比购入的操作手数量以及容器艇的数量均为发生改变，但是可以发现在优惠政策下，对比第三问的成本 432930 元，可以看出第四问的成本有一定程度的降低，优惠政策发挥了明显的作用。

九、 问题五模型的建立与求解

9.1 数据的预测

本文首先需要依据附件一当中已有的 1~104 周血管机器人数目去预测第 105~112 周的血管机器人的使用需求，这里采用循环神经网络算法（RNN）来对 105~112 周的数据进行了预测。具体操作流程如下：

循环神经网络算法（RNN）
Step1.数据加载。 **Step2.**数据预处理，将数据规范化，将数据标准化到 0~1 之间，生成时间序列所用的数据集。其中数据集 X 表示前 n 个序列，数据集 Y 表示下个月的真实值，这里对所有的数据进行切分，70%用于训练，30%用于测试。 **Step3.**定义 RNN 模型。 **Step4.**对附件 1 当中已有的血管机器人使用情况的 70%进行训练。设置损失函数 MSELoss，设置优化器 Adam、学习率为 0.01%，迭代次数 1000 次。每次迭代的过程中，进行向前传播，计算损失函数，梯度清零，反向传播。 **Step5.**对训练出的结果进行预测与剩余的 30%测试数据中进行对比，直至与 30%测试数据的偏差最小，即为最优的关系。 **Step6.**将 105~112 带入到得到的关系中即可预测得到对应的值。

在数据预测试，本文通过 Python 程序对数据进行了训练，最终得到的预测结果如图 5 所示：

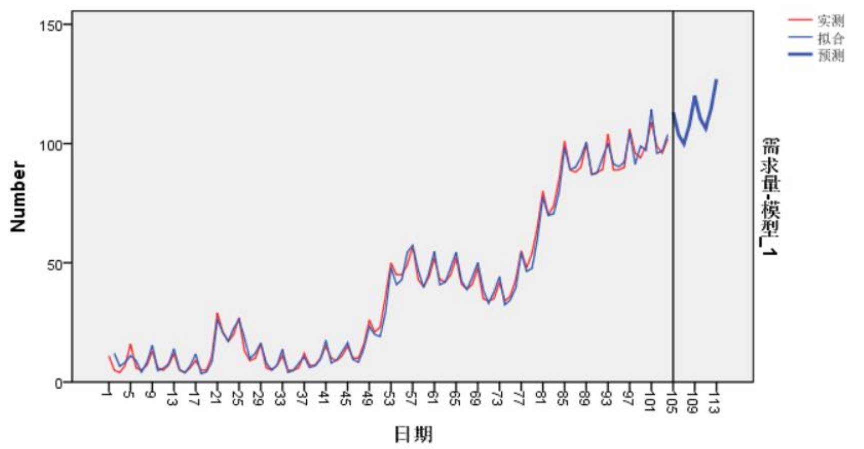


图 5：预测结果分析

通过图片以及原有的 1~104 周数据不难发现，前 104 周训练以及预测的结果基本

与现存数据相似。分析趋势：在 77 周开始，医用血管及人的数量明显上升，虽然中途出现些许波动，但总体趋势并未发生改变，并且通过图像前 104 周的波动趋势可以间接得到新预测出的数据在未出现突变的情况下，基本符合第 105~112 周的需求，具体数据如表 6 所示：

表 6：105-112 周数据

	第 105 周	第 106 周	第 107 周	第 108 周	第 109 周	第 110 周	第 111 周	第 112 周
血管机器人数目（个）	113	104	100	108	120	110	106	115

9.2 模型的建立

对于方案 2 模型的建立直接将 1~112 周的血管机器人的使用量带入到问题四所建立的模型中即可得到最终的结果。

对于方案 1 由于第 105 周可以购买直接使用的容器艇以及操作手,因此单独考虑。首先通过问题四可以知道 104 周结束后医院的库存情况，如表 7 所示：

表 7：105-112 周数据

周次	购买容器艇的数量	购买操作手的数量	保养操作手的数量	保养容器艇的数量	参与训练的操作手数量（含“熟练工”和“新手”）	总成本
第 104 周	0	0	348	0	0	1750

从表中可以看出，第 104 周用于培训的操作手$\left(\left[\frac{P_{104}}{20}\right]+1\right)$的数量,以及第 104 周保养的容器艇$U_{104}$的数量均为 0，而参与保养的操作手$V_{104}$的数目为 348 个。

由于在问题四当中，模型求解部分默认考虑 105 周的需求量为 0，因此在 104 周没有进行额外的购买，即Q_{104}、P_{104}的值也为 0。那么对于 105 周的库存来说，能用的部分为 105 周直接购买的可以直接使用的容器艇Q_{new105}以及操作手P_{new105}，在这里通过购买单价可以看出购买直接可以用的操作手以及容器艇的成本都远大于提前一周购买，因此这里的购买量将不考虑 106 周的需求，对于 106 周的需求仍采用提前一周购买的方式。通过已经预测出的第 105 周血管机器人的个数，可以直接求出第 105 周需要购买的容器艇以及操作手数量，即：

$$Q_{new105}=x_{105}-H(0.9x_{104})=21(\text{个})$$

$$P_{new105}=4x_{105}-V_{104}=104(\text{个})$$

此时直接购买的成本为：

$$Z_{new}=300Q_{new105}+150P_{new105}=21900(\text{元})$$

相比于第四问所建立的模型，第 105 周相当于原模型当中的第 1 周，但是库存关系与供求关系与第一周不同。具体数据见表 8

表 8：第 105 周的数据

	购买的容器艇数量	购买的操作手数量	保养的操作手数量	保养的容器艇数量保养的容	参与训练的操作手数量（含“熟练	总成本

				器艇数量	工”和“新手”)	
新政策	21	104	0	0	0	21900
老政策	2	50	364	0	54	7360
总计	23	154	364	0	54	29260

➢ **容器艇：**

对于第 105 周来说，此时的库存为第 105 周直接购买的可以直接使用的容器艇Q_{new105}，以及第 104 周用完后回收的容器艇$H(0.9x_{104})$，以及 104 周用于保养的操作台U_{104}，这里U_{104}的值为 0。这些量的和应当等于第 105 周的需求量x_{105}以及多出部分用于保养的量U_{105}的和，即满足：

$$Q_{new105}+H(0.9x_{104})+U_{104}=x_{105}+U_{105} \tag{9-1}$$

而对于供求关系来说，为了满足下一周的需求，采用原购买方式的购买量Q_{105}、104 周已用量$H(0.9x_{104})$以及 105 周保养的容器艇的数目U_{105}三者之和应当大于 106 周的需求量，即满足：

$$Q_{105}+H(0.9x_{104})+U_{105}\geq x_{106} \tag{9-2}$$

而对于 106 周之后采用与第四问相同的模式，即可以直接带入到问题四中的模型中。

➢ **操作手：**

对于第 105 周来说，此时的库存为第 105 周直接购买的可以直接使用的容器艇P_{new105}，第 104 周用于保养的操作手V_{104}，第 104 周已经使用过的操作手$H(3.6x_{104})$以及第 104 周用于培训新操作手的熟练操作手($\left[\frac{P_{104}}{20}\right]+1$)。这些量的和应当等于第 105 周的需求量$4x_{105}$、多出部分用于保养的量$V_{105}$以及下一周用于“指导”的老手($\left[\frac{P_{105}}{20}\right]+1$)的和，既满足：

$$H(3.6x_{104})+P_{new105}+V_{104}+(\left[\frac{P_{104}}{20}\right]+1)=4x_{105}+V_{105}+(\left[\frac{P_{105}}{20}\right]+1) \tag{9-3}$$

而对于供求关系来说，为了满足下一周的需求，采用原购买方式的购买量Q_{105}以及在第 105 周中保养的量，以及在 105 周用于“指导”的容器艇的数目应当大于 106 周的需求量以及用于指导的熟练操作手的量，即满足：

$$P_{105}+\left(\left[\frac{P_{105}}{20}\right]+1\right)+V_{105}\geq 4x_{106}+(\left[\frac{P_{106}}{20}\right]+1) \tag{9-4}$$

而对于 106 周之后采用与第四问相同的模式，即可以直接带入到问题四中的模型中。

➢ **模型汇总**

对于原目标函数来说还应该考虑这届购买的成本，因此目标函数为

$$min\begin{cases} Z_t=Z_{new}+I_t(P_t)+f_t(Q_t)+10U_{\mathrm{t}}+5V_{\mathrm{t}}+10\left(\left(\left[\frac{P_t}{10}\right]+1\right)+P_{\mathrm{t}}\right),(t=105) \\ Z_t=I_t(P_t)+f_t(Q_t)+10U_{\mathrm{t}}+5V_{\mathrm{t}}+10\left(\left(\left[\frac{P_t}{10}\right]+1\right)+P_{\mathrm{t}}\right),(t=106\sim112) \end{cases}$$

综上所述，最后方案二的模型为：

$$
min\begin{cases} Z_t=Z_{new}+I_t(P_t)+f_t(Q_t)+10U_{\mathrm{t}}+5V_{\mathrm{t}}+10\left(\left(\left[\dfrac{P_t}{10}\right]+1\right)+P_{\mathrm{t}}\right),(t=105) \\ Z_t=I_t(P_t)+f_t(Q_t)+10U_{\mathrm{t}}+5V_{\mathrm{t}}+10\left(\left(\left[\dfrac{P_t}{10}\right]+1\right)+P_{\mathrm{t}}\right),(t=106\sim112) \end{cases}
$$

$$
s.t.\begin{cases}
\begin{cases}
H(3.6x_{104})+P_{new105}+V_{104}+(\left[\dfrac{P_{104}}{20}\right]+1)=4x_{105}+V_{105}+\left(\left[\dfrac{P_{105}}{20}\right]+1\right),(t=105) \\
P_{105}+\left(\left[\dfrac{P_{105}}{20}\right]+1\right)+V_{105}\geq 4x_{106}+\left(\left[\dfrac{P_{106}}{20}\right]+1\right),(t=105) \\
P_{t-1}+V_{t-1}+\left(\left[\dfrac{P_{t-1}}{20}\right]+1\right)+H(3.6x_{t-1})=V_t+\left(\left[\dfrac{P_t}{20}\right]+1\right)+4x_t\,,(t=106\sim112) \\
P_t+V_t+\left(\left[\dfrac{P_t}{20}\right]+1\right)\geq 4x_{t+1}+\left(\left[\dfrac{P_{t+1}}{20}\right]+1\right),(t=106\sim112)
\end{cases} \\
0\leq P_t\leq 4\max\{x_t\} \\
H(3.6x_{t-1})\leq V_t\leq 4\max\{x_t\} \\
\begin{cases}
Q_{new105}+H(0.9x_{104})+U_{104}=x_{105}+U_{105},(t=105) \\
Q_{105}+H(0.9x_{104})+U_{105}\geq x_{106},(t=105) \\
U_{t-1}+H(0.9x_{t-1})+Q_{t-1}=x_t+U_t\,,(t=106\sim112) \\
Q_t+H(0.9x_t)+U_t\geq x_{t+1}\ ,(t=106\sim112)
\end{cases} \\
0\leq Q_t\leq\max\{x_t\} \\
H(0.9x_t)+U_t\geq x_{t+1}\,,\text{则}\ Q_t=0 \\
H(\alpha)=\begin{cases}[\alpha]\,, & \alpha\text{的小数部分小于等于 4} \\ [\alpha]+1, & \alpha\text{的小数部分大于 4}\end{cases} \\
f_t(Q_t)=\begin{cases}200Q_t\ , & 0\leq Q_t\leq 5 \\ 1000+180(Q_t-5)\ , & 5\leq Q_t\leq 10 \\ 1900+160(Q_t-10)\ , & Q_t\geq 10\end{cases} \\
I_t(P_t)=\begin{cases}100P_t\,, & 0\leq P_t\leq 20 \\ 2000+90(P_t-20)\ , & 20\leq P_t\leq 40 \\ 3800+80(P_t-40)\,, & P_t\geq 40\end{cases}
\end{cases}
\qquad (9-6)
$$

9.3 模型的求解

求解方法同第一问一致，那么方案 1 的结果见表 9 所示，方案 2 的结果见表 10 所示：

表 9：方案 1 的相关结果数据

周次	购买容器艇的数量	购买操作手的数量	保养操作手的数量	保养容器艇的数量	参与训练的操作手数量（含“熟练工”和“新手”）	总成本
第 12 周	2	8	39	4	9	1525
第 26 周	0	0	117	11	0	695
第 53 周	18	117	78	0	123	14760
第 78 周	9	19	197	2	20	4825
第 108 周	24	119	356	0	125	17290
第 109 周	1	51	387	1	54	7365

第 110 周	7	0	433	0	0	3525
第 111 周	20	56	402	0	59	11180
第 112 周	0	0	383	0	0	1915
1~112 周（总计）	557	2621	19140	320	2785	485710

表 10：方案 2 的相关结果数据

周次	购买容器艇的数量	购买操作手的数量	保养操作手的数量	保养容器艇的数量	参与训练的操作手数量（含“熟练工”和“新手”）	总成本
第 12 周	2	7	40	4	8	1420
第 26 周	0	0	117	11	0	695
第 53 周	0	50	128	0	53	5770
第 78 周	9	18	197	2	19	4715
第 108 周	23	120	355	0	126	17215
第 109 周	2	51	387	0	54	7555
第 110 周	7	0	433	0	0	3525
第 111 周	20	55	402	0	58	11090
第 112 周	0	0	382	0	0	1910
1~112 周（总计）	578	2724	19134	318	2894	477380

经比较发现方案 2 按照问题四所建立的模型通篇考虑第 1~112 周时的成本 477380 元要低于方案 1 在第 105 周购买直接能用的容器艇以及操作手 485710 元，方案一比方案二的成本高出 8330 元。方案 1 总计购买容器艇 556 个，操作手 2621 个，方案 2 总计购买容器艇 578 个，操作手 2724 个，即在购买更多的情况下，储备更完善的情况下，成本还低，因此对于第 1~112 周来说应当选择方案 2 较为合适。

十、 灵敏度分析

由于问题四的模型较为重要既是对前面模型的补充又应用于后面的模型，因此在这里对问题四中的模型进行灵敏度分析。在控制成本最小的问题，每周的需求量直接影响着成本问题，所以对需求量进行随机波动，令其变化率在-5%-5%之间进行求解，利用 MATLAB 绘制需求量与最低成本的关系如图 6 所示：

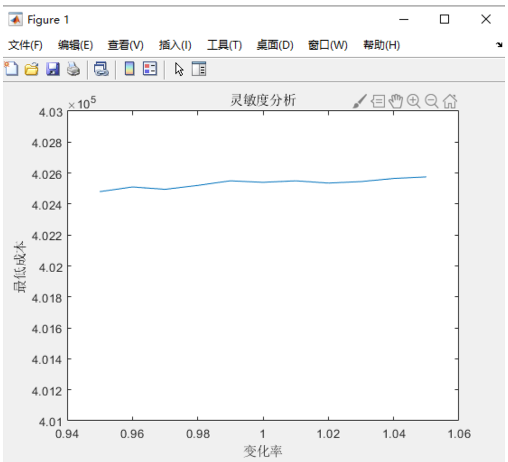


图 6：灵敏度分析结果

需求量在-5%-5%之间波动，最低成本在一定范围内轻微起伏，说明问题四的模型稳定且准确。

十一、 模型的评价、改进与推广

11.1 模型的优点

（1）问题一的模型全面的阐述了递归的过程，明确了容器艇以及操作手使用、购买情况对下周的影响，使得模型更加的可靠

（2）问题一的求解部分采用了遗传算法使得在求解最优的容器艇以及操作手购入量时搜索从群体出发，具有潜在的并行性，可以进行多个周的同时比较，并且使用概率机制进行迭代，使得种群的选择具有随机性，求得的结果更加的可靠。

（3）问题二、三、四的订购方案均从问题一所构建的模型出发，以保障医院最低成本的前提下，考虑到实际情况，且金肯避免主观因素，使得模型结果可信度更高。

（4）问题五在数据预测时选用循环神经网络算法，该算法相较于传统神经网络算法更体现了在时间顺序对于医用血管机器人的影响，使得预测的结果更具可靠性。

11.2 模型的缺点

（1）在建模过程中，对部分约束条件的研究还不够深入，未能分析器影响结果的逻辑性。

（2）选用了遗传算法，需要对数据进行编码，该编码具有主观性，并且找到最优解后仍需要对问题进行编码，加深了求解问题的难度。

11.3 模型的改进方向

该模型对于医用血管机器人的容器艇以及操作手的采购提出了相应的意见，但是在实际情况下，医院血管机器人的采用不仅仅需要考虑成本以及医用需求等因素还会考虑治疗效果，患者需求等方面，因此本模型可以根据实际情况进行完善，是该模型更加符合现实，并且该模型不仅仅可以运用到血管机器人的采购，对于拥有递归关系的采购需求均可以变更使用。

十二、 参考文献

[1]席裕庚,柴天佑,恽为民.遗传算法综述[J].控制理论与应用,1996(06):697~708.
[2]马永杰,云文霞.遗传算法研究进展[J].计算机应用研究,2012,29(04):1201~1206+1210.

附录

附录
介绍：求解规划模型

```
%第 t 周，t=1-8
clear;clc
load xuqiu1.mat
iter = 10^6;
x_max = 109;
x_18_max = 16;
Z_real=+inf;
%x = [11 5 47 16 6 5 7 13 6];
P=[];V=[];U=[];Q=[];Z=[];
P(1) = 20;%第一周的购买操作手量
V(1) = 4;%第一周操作手保养量
%U(1) = 2;%第一周容器仓保养的量
Q(1) = 0;%第一周容器仓购买的量
Z(1) = 2270;
Z_real_t = [2270];

for i = 2:104
    Z_real_t(i) = +inf;
end

P_real_t = [20];
V_real_t = [4];
U_real_t = [2];
Q_real_t = [0];
temp = [0];
rand('state',sum(clock));
tic;

U_real_t = [2];
loss = 0.9;
train = 20;
for t = 2:104
    y = [];
    U_real_t(t) = Q_real_t(t-1)+round(loss*x(t-1))+U_real_t(t-1)- x(t);
    for j = 1:t
        y = [y,x(j)]
    end
    for i_ = 1:iter
```

```
		P(t) = randi([0,4*x(t+1)]);%第 t 周的购买操作手量
		%V(t) = randi([round(4*x(t-1)*loss),4*max(y)]);%第 t 周操作手保养量
		V(t)    =    ceil(P_real_t(t-1)/train)+1+V_real_t(t-1)+P_real_t(t-1)+round(4*x(t-
1)*loss) - 4*x(t) - ceil(P(t)/train)-1;
		Q(t) = randi([0,x_max]);%第 t 周容器仓购买的量
		temp(t) = Q(t);

		P_next = randi([0,4*x(t+1)]);
		%M      =      ceil(P_real_t(t-1)/10)+1+V_real_t(t-1)+P_real_t(t-1)+round(4*x(t-
1)*loss);
		%N = 4*x(t)+ceil(P(t)/10)+V(t)+1;

		A = ceil(P(t)/train)+1+P(t)+V(t);
		B = 4*x(t+1)+ceil(P_next/train)+1;
		if round(loss*x(t))+U_real_t(t)>x(t+1)
			Q(t)=0;
		else
			Q(t)=temp(t);
		end
		if Q(t)+round(loss*x(t))+U_real_t(t) >= x(t+1)
			if A >= B
				%算新的进容器艇的成本
				if (Q(t)>=0) & (Q(t)<=5)
					cost_Q = 200*Q(t);
				elseif (Q(t)>5) & (Q(t)<=10)
					cost_Q = 200*5+180*(Q(t)-5);
				elseif Q(t)>10
					cost_Q = 200*5+180*5+160*(Q(t)-10);
				end
				%算新的进操作手的成本
				if (P(t)>=0) & (P(t)<=20)
					cost_P = 100*P(t);
				elseif (P(t)>20) & (P(t)<=40)
					cost_P = 100*20+90*(P(t)-20);
				elseif P(t)>40
					cost_P = 100*20+90*20+80*(P(t)-40);
				end

				Z(t)                                                                        =
cost_P+cost_Q+5*V(t)+10*U_real_t(t)+10*(ceil(P(t)/train)+P(t)+1);

				if Z(t) < Z_real_t(t)

					Z_real_t(t) = Z(t);
```

```
                    P_real_t(t) = P(t);
                    V_real_t(t) = V(t);
                    Q_real_t(t) = Q(t);

                end


            end
        end
    end
end


C = P_real_t+ceil(P_real_t/train)+1;
toc;
```