Departamento de Eletrónica, Telecomunicações e Informática

Universidade de Aveiro

Sistemas Multimédia

2022/2023

Guião 02

I. Sinais Compostos por Sinusoides

1. Determine o período, a frequência e o valor máximo (valor de pico) de cada um dos seguintes sinais periódicos. Verifique visualmente no MATLAB.
   a) $x(t) = 2\sin(4\pi t)$
   b) $y(t) = \sin(10\pi t + \pi/2)$
   c) $p(t) = \sin(20\pi t + 70\pi/180) + \sin(20\pi t + 200\pi/180)$
   d) $z(t) = \sin(6\pi t) + \sin(8\pi t)$
   e) $w(t) = \sin(6\pi t) + \sin(8\pi t + 0.1)$
   f) $q(t) = \sin(6\pi t) + \sin(7\pi t) + \sin(8\pi t)$

2. Com base no que verificou na alínea 1, obtenha a relação que determina o período de um sinal genérico descrito por:
$$x(t) = \sum_{n=1}^{N} A_n \sin(2\pi f_n t + \phi_n).$$

3. Determine a potência associada a cada um dos sinais representados na alínea 1. Desenvolva uma função no MATLAB que, aceitando como argumentos de entrada o vetor de amostras de um sinal, x, o período de amostragem referente a esse sinal, T_a, e o período do sinal, T, retorna a potência associada ao sinal.

4. Considere um conjunto de sinais definidos pela expressão da alínea 2, onde $N = 3$, $A_1 = A_2 = A_3 = 1$, e $f_1 = 10Hz, f_2 = 20Hz\ e\ f_3 = 30\ Hz$. Testando diferentes valores para $\phi_n,\ n = 1{,}2{,}3$, determinados aleatoriamente entre $]-\pi;\pi]$, mostre que as realizações obtidas para o sinal $x(t)$ são muito distintas entre si (e que o valor de pico varia notoriamente), mas que todas mantêm a mesma potência. Explique esta observação.

II. Revisão sobre Números Complexos

1. Considere os números complexos $p = 2 + j3$ e $q = 2 - j3$.
   a) Represente-os na forma polar.
   b) Determine (e represente no plano complexo) o resultado das operações: $p + q$, $p - q$, $p * q$, p/q, $\sqrt{p}$, e $\sqrt{-p-q}$.

2. Efetue as seguintes operações, determinando o respetivo resultado final:
   a) $\frac{1-j}{2+j}+\frac{3+j}{4+j2}$
   b) $\frac{1-j}{2+j}+\frac{2+j}{2-j2}$
   c) $2e^{j\frac{\pi}{2}}+2e^{-j\frac{\pi}{2}}$
   d) $1+j+\sqrt{2}e^{j\frac{7\pi}{4}}$

3. Utilizando a relação de Euler, demonstre que:

$$\cos(\omega t)=\frac{e^{j\omega t}+e^{-j\omega t}}{2} \qquad \text{e que} \qquad \sin(\omega t)=\frac{e^{j\omega t}-e^{-j\omega t}}{2j}.$$

4. Usando relações trigonométricas conhecidas, mostre que

$$\cos(\omega_1 t)\cos(\omega_2 t)=\frac{1}{2}\left[\cos\big((\omega_1-\omega_2)t\big)+\cos\big((\omega_1+\omega_2)t\big)\right]$$

5. Considere a equação geral de coeficientes reais:

$$a_2x^2+a_1x+a_0=0.$$

   Que condições devem ser verificadas para que esta equação tenha como solução números imaginários puros?

6. Mostre que a multiplicação de um número complexo pelo seu conjugado é igual ao quadrado do seu módulo.

II - Revisão sobre números complexos

① - a) $p = 2+3j = \sqrt{13}\, e^{j \arctan\left(\frac{3}{2}\right)}$

$$|p| = \sqrt{2^2+3^2} = \sqrt{13}$$

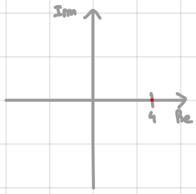
$$\phi = \arctan\left(\frac{3}{2}\right)$$

$$q = 2-3j = \sqrt{13}\, e^{-j \arctan\left(\frac{3}{2}\right)}$$

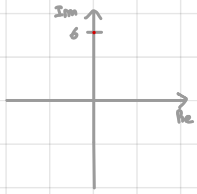
$$|q| = \sqrt{2^2+(-3)^2} = \sqrt{13}$$

$$\phi = \arctan\left(\frac{-3}{2}\right) = -\arctan\left(\frac{3}{2}\right)$$

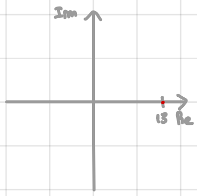
b) $p+q = 2+3j + 2-3j = 4$



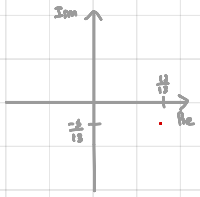
$$p-q = 2+3j-(2-3j) = 2+3j-2+3j = 6j$$



$$p \times q = (2+3j)(2-3j) = 2^2+3^2 = 13$$



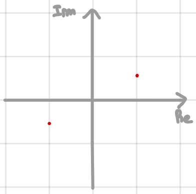
$$\frac{p}{q} = \frac{2+3j}{2-3j} = \frac{(2+3j)^2}{(2-3j)(2+3j)} = \frac{4+12j+9j^2}{2^2+3^2} = \frac{-5+12j}{13} = -\frac{5}{13} + \frac{12}{13}j$$



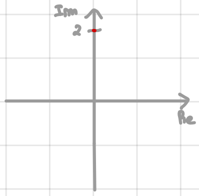
$$\sqrt{p} = \sqrt{\sqrt{13}}\, e^{j\frac{\arctan\left(\frac{3}{2}\right)+2k\pi}{2}}, \quad k \in \{0,1\} = \sqrt[4]{13}\, e^{j\frac{\arctan\left(\frac{3}{2}\right)+2k\pi}{2}}, \quad k \in \{0,1\}$$

$$k=0 \rightarrow \sqrt[4]{13}\, e^{j\frac{\arctan\left(\frac{3}{2}\right)}{2}}$$

$$k=1 \rightarrow \sqrt[4]{13}\, e^{j\frac{\arctan\left(\frac{3}{2}\right)+2\pi}{2}}$$



$$\sqrt{-p-q} = \sqrt{-(2+3j)-(2-3j)} = \sqrt{-2-3j-2+3j} = \sqrt{-4} = 4\sqrt{-1} = 2j$$



2 – a) $\frac{1-j}{2+j} + \frac{3+j}{4+2j} = \frac{2-2j}{4+2j} + \frac{3+j}{4+2j} = \frac{5-j}{4+2j} = \frac{(5-j)(4-2j)}{4^2+2^2} = \frac{20-10j-4j+2j^2}{20} = \frac{18-14j}{20} = \frac{9}{10} - \frac{7}{5}j$

b) $\frac{1-j}{2+j} + \frac{2+j}{2-2j} = \frac{(1-j)(2-2j)+(2+j)(2+j)}{(2+j)(2-2j)} = \frac{2-2j-2j+2j^2+4+2j+2j+j^2}{4-4j+2j-2j^2} = \frac{6+3j^2}{4-2j-2j^2} = \frac{6-3}{4-2j+2} = \frac{3}{6-2j} = \frac{3(6+2j)}{6^2+2^2} = \frac{18+6j}{40} = \frac{9}{20} + \frac{3}{20}j$

c) $2e^{j\frac{\pi}{2}} + 2e^{-j\frac{\pi}{2}} = 2j + (-2j) = 0$

$$2e^{j\frac{\pi}{2}} = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)j\right) = 2(0+j) = 2j$$

$$2e^{-j\frac{\pi}{2}} = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)j\right) = 2(0-j) = -2j$$

d) $1+j+\sqrt{2}e^{j\frac{7\pi}{4}} = 1+j+1-j = 2$

$$\sqrt{2}e^{j\frac{7\pi}{4}} = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{7\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{7\pi}{4}\right)j\right) = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \left(-\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)j\right) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}j\right) = 1-j$$

3 – $\cos(wt) = \frac{e^{jwt}+e^{-jwt}}{2} = \frac{1}{2}\left(\cos(wt)+\sin(wt)j + \cos(-wt)+\sin(-wt)j\right) = \frac{1}{2}\left(\cos(wt)+\sin(wt)j+\cos(wt)-\sin(wt)j\right) = \frac{1}{2} \times 2\cos(wt) = \cos(wt)$

$\sin(wt) = \frac{e^{jwt}-e^{-jwt}}{2j} = \frac{1}{2j}\left(\cos(wt)+\sin(wt)j - (\cos(-wt)+\sin(-wt)j)\right) = \frac{1}{2j}\left(\cos(wt)+\sin(wt)j - (\cos(wt)-\sin(wt)j)\right) = \frac{1}{2j}\left(\cos(wt)+\sin(wt)j - \cos(wt)+\sin(wt)j\right) =$

$= \frac{1}{2j} \times 2\sin(wt)j = \sin(wt)$

4 – $\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$

$\cos(x-y) = \cos(x)\cos(y) + \sin(x)\sin(y)$

$\downarrow$

$\cos(x+y) + \cos(x-y) = 2\cos(x)\cos(y)$

$$\cos(w_1 t)\cos(w_2 t) = \frac{1}{2}\left[\cos((w_1 - w_2)t) + \cos((w_1 + w_2)t)\right] \Leftrightarrow 2\cos(w_1 t)\cos(w_2 t) = \cos(w_1 t - w_2 t) + \cos(w_1 t + w_2 t) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos(w_1 t + w_2 t) + \cos(w_1 t - w_2 t) = 2\cos(w_1 t)\cos(w_2 t)$$

5 — Seja $x = bj$, $b \neq 0$, temos que $x = bj$, logo:

$$a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0 \Leftrightarrow a_2 (bj)^2 + a_1 bj + a_0 = 0 \Leftrightarrow a_2(-b^2) + a_1 bj + a_0 = 0$$

$$\begin{cases} a_2(-b^2) + a_0 = 0 \\ a_1 b \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b^2 = \frac{a_0}{a_2} \\ a_1 \neq 0 \end{cases} \wedge \begin{cases} b^2 = \frac{a_0}{a_2} \\ b \neq 0 \end{cases}$$

6 —
$$z = |z| e^{i\theta}$$
$$\bar{z} = |z| e^{-i\theta}$$

$$z \times \bar{z} = |z| e^{i\theta} \times |z| e^{-i\theta} = |z|^2 e^{i\theta - i\theta} = |z|^2$$