Théorie des langages II

Wassim SAIDANE

01/03/2021

Note :

Ce cours est ma prise de note du cours de L3 infos de Théorie des langages II de Mamadou Kante

Chapitre 0 : Langages rationnels et reconaissables

Si A est un ensemble fini, on note $A*$ l'ensemble des mots finis (un mot = séquance de lettre). On appelle A un alphabet et les éléments de A des lettres.
On notera ϵ : le mot vide.
On appel L un langage est un sous ensemble de $A*$.
Rappel : La concaténation de mots dera notée ".".
Voici les opérations dur les langages :
- Union (notée $\bigcup$) :
$L \bigcup L' = \{u \in A* \mid u \in L \text{ ou } u \in L'\}$
- Produit (notée .) ou concaténation : $L.L' = \{uv \in A* \mid u \in L, v \in L'\}$
- Itération de Leene (notée $*$) :
$L* = \bigcup_{i \geq 0} L^i$ où $L^0 = \{\epsilon\}$, $L^i = L.L^{i-1} (i \geq 1)$ - $L^+ = \bigcup_{i \geq 0} L^i$

Une expression rationnelle est définie inductivelement :
- $\emptyset$ est une expression rationnelle.
- a est une expression rationnelle $\forall a \in A$
- Si r_1 et r_2 sont des expressions rationnellles, alors $r_1 + r_2$ et $r_1.r_2$ sont des expressions rationnelles.
- Si r est une expression rationnelle, alors $r*$ l'est aussi.

Si r est une expression rationnelle, alors son langage noté $L(r)$ est défini ainsi :

$$L(r) = \begin{cases} \phi & \text{si } r = \\ \alpha\{a\} \text{ si } r & = a \\ L(r_1) U L(r_2) & \text{si } r = r_1 + r_2 \\ L(r_1) \cdot L(r_2) & \text{si } r = r_1 \cdot r_2 \\ L(s)^* & \text{si } r = s^* \end{cases}$$

Un langage L est dit **rationnel** s'il existe une expression rationnelle r telle que $L = L(r)$

Automate à états finis Un automate (à états finis) est un tuple $(\Sigma, Q, \delta, I, F)$

tel que :
- Σ : Alphabet
- Q : Il s'agit d'un ensemble fini appelé ensemble des états.
- $I \subseteq Q$: Ensemble des états initiaux.
- $F \subseteq Q$: Ensemble des états finaux.
- $\delta : Q \times \Sigma \rightarrow 2^Q$ [$2^Q = P(Q)$: tous les sous-ensembles de Q]

Un automate A=$(\Sigma, Q, \delta, I, F)$ est :
- Déterministe si $\forall q \in Q, a \in \Sigma, \mid \delta(q,a) \mid \leq 1$
- Complet si $\forall q \in Q, a \in \Sigma, \mid \delta(q,a) \mid \geq 1$

Si un automate n'est pas déterministe, on dit que c'est un **automate non déterministe**.
Une exécution d'un automate $A = (\Sigma, Q, \delta, I, F)$ sur un mot $u = u_1, u_2, ..., u_n$ est une séquance $(q_0, q_1, ..., q_n)$ d'états telle que :
- $q_0 \in I$
- $\forall 1 \leq i \leq n, q_i = \delta(q_{i-1}, u_i)$

Un mot u est **reconnu/accepter** par un automate $A = (\Sigma, Q, \delta, I, F)$ s'il existe une exécution $(q_0, q_1, .., q_n)$ de A sur $u = u_1, u_2, ..., u_n$ telle que $q_n \in F$. On parlera d'**exécution acceptante sur u par A**.

Le langage d'un automate A, noté $L(A)$, c'est l'ensemble des mots u acceptées par A.
Un langage L est dit **reconnaissable** s'il existe un automate tel que $L = L(A)$.

<u>Théorème 0.1 :</u>
1) Pour tout langage reconnaissabe L, il existe un <u>automate déterministe A</u> tel que $L = L(A)$.
2) $\forall$ l'alphabet Σ, Recog(Σ^*)=Rat(Σ^*)
Recog = l'ensemble des langages reconaissables
Rat = L'ensemble des langages rationnels.

<u>Remarque :</u> Les deux points du théorème sont constructifs.
- Si A est un automate, on peut construire un automate déterministe A' tel que $L(A) = L(A')$.
<u>Conséquance :</u> Pour un automate A, savoir si $u \in L(A)$ peut se faore en temps : $f(\mid Q \mid) + 2^{O(\mid Q \mid)}. \mid u \mid$
$f(\mid Q \mid)$: Temps pour construire l'automate déterministe.
$2^{O(\mid Q \mid)}$: Temps pour tester si un mot u est accepté (le nombre d'états $\leq 2^{\mid Q \mid}$).
$\mid u \mid$: Nombre de lettres du mot u.

Preuve de la proposition 1 : si $A = (\Sigma, Q, \delta, I, F)$ est un automate, alors on peut construire un automate déterministe $A' = (\Sigma, Q', \delta', \{\%\}, F')$
où $\mid Q' \mid \leq 2^{\mid Q \mid}$.

Preuve de la proposition 2 : Pour tout automate A, on peut construire une expression rationnelle r telle que $L(A) = L(r_A)$.
Inversement, pour toute expression rationnelle r, on peut construire un automate A_r tel que :
$L(A_r) = L(r)$.
Pour passer des expresiions rationelles aux automates, on définis des opérations sur les automates qui correspondent aux opérations sur les expressions rationnelles.

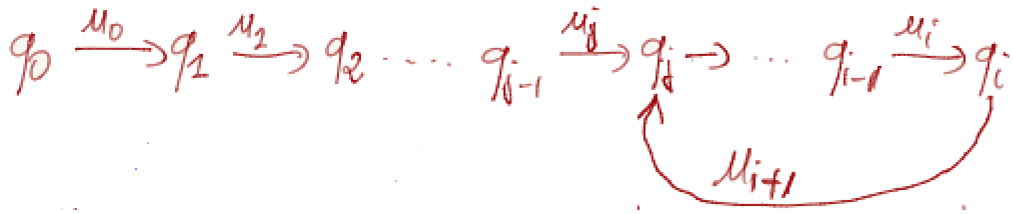
Expressions rationnelles	Automates
$r_1 + r_2$	- on exécute sur 1 des 2 automates
$r_1 \cdot r_2$	- 1 état final de l'automate de r_1, en fait 1 transition vide vers 1 état initial de l'automate de r_2.
r^*	- ajouter 1 transition vide d'1 état final vers 1 état initial.

Tous les langages ne sont pas rationels.
Mais, comment montrer qu'un langage n'est pas rationnel ?
Exemple de langage non rationnel :
- $\{0^n 1^n : n \geq 1\}$
- palindromes
- $\{1^P : p\text{premier}\}$

Pour convaincre, on utilise le lemme de pompage (appelé aussi lemme d'itération).

Lemme d'itération des langages rationnels : Soit L un langage reconaissables. Alors il existe un entier p (appelé longueur d'itération) tel que pour tout mot S de taille $\geq p, s$ admet une décomposition en facteurs x, y, z :
1) $s = xyz$
2) $\mid y \mid > 0$
3) $\mid xy \mid \leq p$
4) $\forall i \geq 0, xy^i z \in L$

Idée de preuve
Soit $A = (\Sigma, Q, \delta, I, F)$ un automate reconnaissant L. Si un mot u est tel que $\mid u \mid > Q$, u est reconnu par B, alors il existera forcément un état $q \in Q$ visite deux fois. Si on regarde l'exécution de B sur u.



Exemple d'utilisation sur $L = \{0^n 1^n : n \geq 1\}$
Preuve par l'absurde :
On va supposer L reconnaissable, notons p la longueur d'itération. On va chercher un mot $w \in L$, ensuite on applique le lemme d'itérations sur w, on montre ensuite qu'on pourra trouver un mot w', qui est construit à partir du lemme d'itération avec $w' \notin L$ et pourtant devrait appartenir à L.

Prenons $w = 0^p 1^p$. Par le lemme d'itération, $\exists x, y, z$ tel que $w = xyz$, $\mid xy \leq p, \mid y \mid \geq 1$ et $\forall i \geq 0, xy'z \in L$.
Comme $\mid xy \mid \supseteq P$, alors $w = 0^l 0^{l'} 0^{l''} 1^p$ où $x = 0^l$, $y = 0^{l'}$, $z = 0^l 1^p$ $l' \geq 1$. Si on applique la proposition 4 du lemme d'itération avec $i = 0$ on obtient $0^l 0^{l''} 1^p \in L$, or $l + l'' < P$. $(l + l' + l'' = p, l' \geq 1)$
CONTRADICTION.