Théorie des graphes - Chapitre 2 : Décomposition en cycles et tour Euleriens

Table des matières

1 Caractérisation des graphes bipartis

Théorème

Un graphe est bipartis si et seulement si il ne contient pas de cycle impair.

Démonstration

$\Rightarrow$

Si le graphe a un cycle impair alors il n'est pas biparti.

$\Leftarrow$

Si le graphe n'a pas de cycle impairs tous les cycles du graphes sont pairs.
Si le graphe est biparti toutes les composantes connexe du graphe sont biparti donc on peut analyser sur les cas connexes. (1)
Soit un graphe $G = (V, E)$ connexe par (1).
Prenons un sous arbre couvrant $T = (V, F)$ de G.
On l'enracine en un sommet quelconque.
On peut définir un nombre partiel sur les sommets du graphe.
deux sommets x et y sont comparables sans T si x est sur le chemin de y à T.
Partition des sommets qui est obtenu à partir d'un arbre couvrant et une racine arbitraire r.
A sommets distant paire de r dans T.
B sommets distant impaire de r dans T.
Pour toute arête x et y de G.
x et y sont dans deux partie différentes.

Étude de cas

1- $x, y \in E(T)$

Par construction sans perte de généralisé y est à distance paire de r et comme x est relié à y x est à distance impaire de r donc x et y sont dans deux parties différentes.

2- Si $x, y \in E(G) \backslash E(I)$

$xy + T$ contient un cycle qui passe par x y.
Si x et y sont dans le même ensemble, la parité su chemin qui relie x à y dans l'arbre sera paire forme un cycle impaire.
x et y sont dans deux ensembles différents.

2 Décomposition en cycles

La décomposition F d'un graphe $G = (V, E)$ est une partition des arêtes de G. $F = \{F_1, F_2, \dots, F_k\}$.
$(F_1 \subseteq E(G); F_i \cap F_j = \emptyset \; \forall_{i,j} \in \{1, ..., k\}, i \neq j\} \cup F_i = E(G))$.
Tous les membres F_i de F respectent une condition (2). (2) est un chemin dont chaque arête forment eux mêmes un chemin.
Tous graphe admet une décomposition en chemin.

Lemme

Soit $G = (V, E)$ un graphe non orienté, si $\delta(g) \geq 2$ alors G contient au moins un cycle.

Preuve

Si G contient une boucle c'est vrai, si G ne contient pas de boucle on prend un chemin $P = v_1, v_2, \dots, v_k$ de longueur maximum.
v_{k+1} n'est pas un autre sommet que les sommets du chemin si non le chemin n'est pas maximum.
v' est un sommet dans $\{v_1, v_2, \dots, v_{k-2}\}$.
$v = v_j$.
$(v_k, v_j, v_{j+1}, \dots, v_{k-1}, v_k)$ forme un cycle.

Définition

Un graphe $G = (V, E)$ est pair si et seulement si pour chaque sommet v de G on a $d(v)$ pair.
Si G admet une décomposition en cycle alors G est pair.

Preuve

Pour chaque cycle C_i de décomposition, quel que soit le sommet v de G.
$d(C_i) = 2$ si $v \in C_i$, 0 si $v \notin C_i$.

Théorème de Veblen

G admet une décomposition en cycle si et seulement si G est pair.

Preuve

$\Rightarrow$

Prouvé dans la définition précédente

$\Leftarrow$

Par induction descendent sur le nombre de sommets,
Notre graphe, tous les sommets sont de dégrée strictement positif.
Si G est pair à degré positif $\delta(G) \geq 2$ par la lemme précédente G possède un cycle C.
$G' = G \setminus C$
G' est un graphe pair car tous les sommets v de c on $d_{G'}(v) = d_G(v) - 2$.
On considère G"=G'-tous les sommets de degré 0.
On peut ré appliquer la procédure sur G".

3 Graphe Eulérien

Définition

Un graphe est eulérien si et seulement si il admet une marche fermée qui passe exactement une fois sur chaque arêtes.

Notation

Soit x et y deux sous-ensembles de sommets(pas forcément disjoint) on note E[x,y] l'ensemble des arêtes qui ont une extrémités dans x et l'autre dans y. Le nombre d'arêtes E[x,y]=(?).
Quand y=V $\setminus X$.
E=[x,y]=$\partial(x) = \partial(y)$

Définition

Une arête e de G (connexe) est dite décontractante si et seulement si G est déconnecté.

Proposition

Une arête e est déconnectante si et seulement si elle ne participe à aucun cycle de G.

Problématique

Quels sont les graphes qui admettent un tour Eulerien ?

Condition nécessaire

Si on a tour eulérien pour tout sommet v le tour va arriver sur v autant de fois qu'il part de v donc le degré de v est pair.

3.1 Algorithme de Fleury

Algorithm 1 Fleury(G,u) : w

Require: G un graphe connexe et pair ; u un sommet de G.
Ensure: C un tour eulérien qui commence à u et termine à u.

```
// Var
F : Un sous graphe de G.
x : Sommet de G.
C : Chaîne de G.
// Init
C ← u
x ← u
F ← G
// process
while δ_F(x) ≠ 0 do
   Choisir une arêtes e = xy tel que e n'est pas un isthme de F sauf si c'est la seule possibilité.
   C ← Cey
   x ← y
   F ← F \ E
end while
return C
```

isthme [1]

3.1.1 Complexité

Voir TD2

3.1.2 Théorème

Si G est pair alors l'algorithme de Fleury calcule un tour Eulerien de G.

1. Déconnéctante