Z325EU07 - Probabilités et Statistiques

Introduction aux Probabilités

Hervé Kerivin

Bureau : B133, Institut d'Informatique - ISIMA

Téléphone : 04 73 40 50 37

E-mail: herve.kerivin@uca.fr

Déroulement du cours

- Nombre de crédits : 3
- Organization :
  - 10h30 de CM (Hervé Kerivin)
  - 10h30 de TD - 2 groupes (Hervé Kerivin)
  - 12h de TP - 3 groupes (Amina Chorfi et Yves-Jean Daniel)
- Contrôles des connaissances :
  - Première session (Examen terminal : 75%, TP : 25%)
  - Deuxième session (Examen terminal : 100%)
  - Régime Spécial d'Étude (RSE) (Examen terminal : 100%)

Contenu du Cours

- Objectifs : Introduction aux concepts principaux des probabilités et statistiques et à leur utilisation en informatique
  - connaissances sur les lois de probbilités discrètes
  - construction d'une simulation et analyse des résultats d'une expérience
  - modélisation de systèmes Markoviens à états et recherche de leur convergence vers des états stationnaires
- Programme du cours
  1. Introduction aux probabilités
  2. Probabilités conditionnelles
  3. Variables aléatoires discrètes
  4. Couple de variables aléatoires discrètes
  5. Simulation et analyse de résultats
  6. Introduction aux files d'attente
  7. Introduction aux chaînes de Markov

Ressources Bibliographiques Utilisées

- Introduction to Probability Theory with Contemporary Applications, L.L. Helmes, Dover Publications, Inc., Mineola, New York
- Basic Probability Theory, R.B. Ash, Dover Publications, Inc., Mineola, New York
- Introduction to Probability, J.E. Freund, Dover Publications, Inc., New York
- Queueing Systems Volume 1: Theory, L.K. Kleinrock, Wiley-Interscience, New York
- Cours de Probabilités et Statistiques, A. Perrut, Université Claude Bernar Lyon 1
- Cours de Probabilités, F. Delarue, Université Sophia-Antipolis
- Introduction au Calcul des Probabilités, L. Mazliak, Université Paris VI
- Probabilités et Statistiques, S. Gire et A.R. Mahjoub, Université de Bretagne Occidentale

Expérience Aléatoire

Expérience aléatoire

Une expérience aléatoire (ou épreuve) est tout phénomène dont on ne peut pas prédire l'issue avec certitude

Exemples

- lancer d'une pièce
- lancer d'un dé à six faces
- lancer d'une pièce trois fois de rang

Ensemble fondamental Ω

L'ensemble fondamental Ω (ou univers) est l' ensemble de toutes les issues possibles d'une expérience aléatoire

Exemples

- lancer d'une pièce $\Omega = \{P, F\}$
- lancer d'un dé à six faces $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- lancer d'une pièce trois fois de rang
  $\Omega = \{PPP, FPP, PFP, PPF, PFF, FPF, FFP, FFF\}$

Évènement

Évènement élémentaire ω

Un évènement élémentaire ω est toute issue d'une expérience aléatoire, i.e.,tout élément de Ω

Exemples

- lancer d'une pièce : P et F
- lancer d'un dé à six faces : $1, 2, 3, 4, 5$ et 6
- lancer d'une pièce trois fois de rang : PPP, FPP, PFP, PPF, PFF, FPF, FFP et FFF

Évènement

Un évènement, représenté par une lettre majuscule, est tout sous-ensemble de Ω, i.e., toute réunion d'élément élémentaire

Exemples

- lancer d'une pièce: $A = \{P\}$ "obtenir un pile"
- lancer d'un dé : $B = \{2, 4, 6\}$ "obtenir un chiffre pair"
- lancer d'une pièce trois fois de rang : $C = \{PFP, PFF, FFP, FFF\}$ "obtenir un face au deuxième lancer"

Ensembliste vs Probabiliste

- L'ensemble des évènements coïncide avec l'ensemble $\mathcal{P}(\Omega)$ des parties de l'ensemble fondamental Ω
- Un évènement est réalisé si un des évènements élémentaires le constituant est réalisé

notation	terme ensembliste	terme probabiliste
Ω	ensemble plein	évènement certain
$\emptyset$	ensemble vide	évènement impossible
ω	élément de Ω	évènement élémentaire
A	sous-ensemble de Ω	évènement
$\omega \in A$	ω appartient à A	ω réalise A
$A \subset B$	A inclus dans B	A implique B
$A \cup B$	union de A et B	A ou B
$A \cap B$	intersection de A et B	A et B
A^C ou $\overline{A}$	complémentaire de A	évènement contraire de A
$A \cap B = \emptyset$	A et B disjoints	A et B incompatibles

Probabilité d'un Évènement

- Étant donnés
  - une expérience aléatoire d'univers Ω
  - un évènement $A \subset \Omega$
- Supposons que
  - l'expérience aléatoire est répétée N fois
  - $N(A)$ correspond au nombre de fois où l'évènement A est réalisé

Fréquence relative

La fréquence relative de A est égale au ratio $\frac{N(A)}{N}$

Probabilité de A

La fréquence relative semble se stabiliser près d'une valeur rélle $P(A)$ lorsque N devient très grand (loi empirique) ; le nombre $P(A)$ est appelé la probabilité de l'évènement A

Probabilités

Probabilité

On appelle (mesure de) probabilité toute application P sur $\mathcal{P}(\Omega)$ telle que

1. $P(A) \in [0, 1]$ pour tout évènement $A \in \mathcal{P}(A)$
2. $P(\Omega) = 1$ (i.e., proriété de normalisation)
3. $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ pour toute paire d'évènements incompatibles A et B (propriété d'additivité)

Espace de probabilité

Le couple (Ω, P) s'appelle espace de probabilité

Additivité : $P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$ pour toute séquence $A_1, \ldots, A_n$ d'évènements deux à deux incompatibles

Probabilité (Definition #2)

Une (loi de) probabilité sur l'ensemble $\Omega = \{w_1, \ldots, w_n\}$ est la donnée de $(p_1, \ldots, p_n) \in [0, 1]^n$ tel que $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$

Exemple

Un entraineur de football pense qu'il y a 3 chances sur 2 que son équipe remporte le prochain match, tandis que les cotes contre une defaite ou un nul de son équipe sont de 4 contre 1 et de 9 contre 1, respectivement.

1. Décrire l'ensemble des évènements élémentaires.
2. Quelles sont leurs probabilités ?
3. Définissent-elles une loi de probabilité ?

Univers Non Dénombrable

- Expérience aléatoire avec un nombre infini d'issues (e.g., lancer un dé jusqu'à obtenir un Pile
- Propriété d'additivité
$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$
pour toute séquence infinie $\{A_i\}$ d'évènements deux à deux incompatibles, est-elle valide ?
- Impossibilité de garantir à la fois
    1. propriété d'additivité ci-desssus est valide
    2. $P(A)$ a un sens pour tout évènement A
- Abandon du dernier point, i.e., $P(A)$ peut ne pas avoir de sens pour un évènement A

Espace Probabilisé

σ-algèbre

Une collection $\mathcal{A}$ de sous-ensemblles de Ω est un σ-algèbre (ou tribu) si

1. $\Omega \in \mathcal{A}$
2. $A \in \mathcal{A}$ implique $A^C \in \mathcal{A}$
3. si $\{A_i\}$ est une séquence finie ou infinie de $\mathcal{A}$, alors $\bigcup_i \in \mathcal{A}$

Espace probabilisé

Un espace probabilisé est un tiplet $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ où $\mathcal{A}$ est un σ-algèbre non-vide de sous-ensemble de Ω et P est une application de $\mathcal{A}$ dans $\mathbb{R}$ telle que

1. $P(\Omega) = 1$
2. $0 \leq P(A) \leq 1$ pour tout $A \in \mathcal{A}$
3. si $\{A_i\}$ est une séquence finie ou infinie d'évènements deux à deux disjoints de $\mathcal{A}$, alors $P(\bigcup A_i) = \sum P(A_i)$

Propriétés des Probabilités

$$A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A} \text{ implique } \bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{A} \text{ et } \bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{A}$$

$$P(\emptyset) = 0$$

$$P(A^C) = 1 - P(A)$$

$P(A) \leq P(B)$ pour $A, B \in \mathcal{A}$, $A \subset B$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Inégalité de Boole

Si $\{A_i\}$ est une séquence d'évènements, alors $P(\bigcup A_i) \leq \sum P(A_i)$

Formule de Poincaré

$$P(\bigcup_{r=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{r+1} \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_r \leq n} P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \ldots \cap A_{i_r})$$

Exemples

- Consider n lancer d'une pièce et soit A l'évènement "Face a été obtenu au moins une fois". Quelle est la valeur de $P(A)$?
- Une carte est sélectionnée aléatoirement d'un jeu de 52 cartes. Quelle est la probabilité que la carte sélectionnée soit un roi ou un pique ?
- Considérons trois évènements A, B et C pour lesquels $P(A) = \frac{1}{3}$, $P(B) = \frac{1}{4}$, $P(C) = \frac{1}{2}$, $P(A \cap B) = \frac{1}{8}$, $P(A \cap C) = \frac{1}{8}$, $P(B \cap C) = \frac{5}{32}$ et $P(A \cap B \cap C) = \frac{1}{32}$. Calculer $P(A \cup B \cup C)$

Loi Uniforme

Loi uniforme

Soit Ω un ensemble fini. Une loi est dite uniforme (ou equiprobable) si les probabilités de tous les évènements élémentaires sont les mêmes, i.e., valent $\frac{1}{|\Omega|}$

Propriété

Pour tout évènement A, $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$

Exemple : Considérons un bol contenant cinq jetons numérotés $1, 2, 3, 4$ et 5 et l'épreuve consistant à tirer sans remise deux jetons du bol. Quelle est la probabilité de l'évènement "le numéro du premier jeton tiré est inférieur à celui du deuxième" ?

Cardinaux et Suites

Proposition

Soient A et B deux ensembles finis.

1. $|A \times B| = |A|.|B|$ (multiplicité)
2. $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$ (inclusion-exclusion)

Suite de longueur r

Soit A un ensemble fini. Une suite ordonnée de longueur r avec remise constituée d'éléments de A est un r-uplet, ou r-liste, $(a_1, \ldots, a_r)$ avec $a_i \in A$ pour tout $i \in \{1, \ldots, r\}$. L'ensemble A est appelé population.

Théorème

Le nombre de suites de longueur r avec remise d'une population de cardinalité n est n^r.

Exemple: Un dé est lancé trois fois de rang.

- évènement élémentaire = suite ordonnée de longueur 3 avec remise de la population $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- nombre d'évènements élémentaires = 6^3

Permutations

Principe de dénombrement

Considérons deux expériences aléatoires produisant n et m issues différentes, respectivement. Au total, pour les deux expériences aléatoires prises ensembles, il existe nm issues possibles.

Permutation

Soit A un ensemble fini. Une permutation de A est une manière d'ordonner (i.e., arranger) les éléments de A.

Théorème (nombre de permutations)

Le nombre de permutations d'une population de cardinalité n est $n!$.

Exemple : Problème du voyageur de commerce

- Un représentant commercial doit rendre visite à ses 50 clients . Combien de tours (i.e., trajets) différents sont possibles ?
- population $A = \{1, 2, \ldots, 50\}$
- tour = permutation de A
- $50! \approx 3 \times 10^{64}$

Arrangements

Arrangement

Soit A un ensemble fini. Un arrangement de r éléments pris parmi A est une suite ordonnée de longueur r constituée d'éléments de A sans remise, i.e., un r-uplet, ou r-liste, $(a_1, \ldots, a_r)$ avec $a_i \in A \setminus \{a_1, \ldots, a_{i-1}\}$ pour tout $i \in \{1, \ldots, r\}$.

Théorème (nombre d'arrangements)

Le nombre d'arrangements de r éléments pris parmi n est $(n)_r = A_n^r = \frac{n!}{(n-r)!}$.

Exemple

- Tiercé dans l'ordre pour 20 chevaux
- pas d'ex aequo
- $n = 20$, $p = 3$
- $(20)_3 = A_{20}^3 \approx 4 \times 10^{20}$

Combinaisons

Combinaison

Soit A un ensemble fini. Une combinaison de r éléments pris parmi A est un sous-ensemble de cardinalité r constitué d'éléments de A sans remise, i.e., $\{a_1, \ldots, a_r\}$ avec $a_i \in A \setminus \{a_1, \ldots, a_{i-1}\}$ pour tout $i \in \{1, \ldots, r\}$.

Théorème (nombre de combinaisons)

Le nombre de combinaisons de r éléments pris parmi n est $\binom{n}{r} = C_n^r = \frac{n!}{(n-r)!r!}$.

Exemple

- Une main au poker est constituée de 5 cartes distribuées d'un jeu de 52 cartes. Combien y a-t-il de mains possibles ?
- ordre n'a pas d'importance dans une main
- $n = 52$, $p = 5$
- $\binom{52}{5} = C_{52}^5 = 2\ 598\ 960$

Formule du Binôme de Newton

Proposition

Pour tout entier positif n et pour tout entier $r \leq n$

- $\binom{n}{0} = 1$
- $\binom{n}{r} = 0$ si $r < 0$
- $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$
- $\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r} + \binom{n-1}{r-1}$
- $\binom{n}{r} = \frac{n}{r}\binom{n-1}{r-1}$

Théorème (Formule du binôme de Newton)

Soient a et b deux réels et n un entier strictement positif

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Théorème (nombre de parties d'un ensemble)

Soit Ω un ensemble fini de cardinalité n. Le nombre de parties de Ω, i.e., la cardinalité de $\mathcal{P}(\Omega)$, vaut 2^n.

Discernables vs Indiscernables

Théorème

Considérons n objets parmi lesquels n_1 sont indiscernables, n_2 sont indiscernables,$\cdots$, n_p sont indiscernables. Le nombre de permutations différentes de ces n éléments est $\frac{n!}{n_1!n_2!\ldots,n_p!}$.

Exemple : Anagramme

- nombre d'anagrammes de PROBA ? $5! = 120$
- nombre d'anagrammes de STAT ? $\frac{4!}{2!} = 12$

Théorème

Le nombre de possibilités de distribuer r boules indiscernables dans n boites vaut $\binom{n+r-1}{r}$

Exemple

- Quel est le nombre de dominos dans une jeu de dominos ?
- $n = 7$ boites numérotées $0, 1, \ldots, 6$
- $r = 2$
- $\binom{7+2-1}{2} = 28$

Exemples

- Un dé est lancé n fois de rang. Quelle est la probabilité qu'aucun 1 n'apparaisse ?
- Une pièce est lancée $2n$ fois de rang. Quelle est la probabilité que les nombres de Face et Pile soit egaux ?
- Une main au poker est constituée de 5 cartes distribuées d'un jeu de 52 cartes. Quelle est la probabilité d'avoir une quinte flush royale, i.e., 10,valet,dame,roi,as de la même couleur ?
- Une machine produit 100 éléments quotidiennement. Supposons qur 10 de ces éléments soit défectueux. Quelle est la probabilité qu'un échantillon aléatoire de 5 éléments de la production journalière contiennent 3 éléments défectueux ?

Différence de Modélisation

Considérons le résultat du loto (i.e., trouver 6 numéros parmi 49)

- Première modélisation : on regarde le tirage en direct
  - arrangement de 6 nombres pris parmi $\{1, \ldots, 49\}$
  - 6-uplet $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$
  - nombre de tirages différents : $(49)_6 = A_{49}^6 = 10\,068\,347\,520$
- Deuxième modélisation : on regarde le résultat du tirage sans considérer l'ordre de sortie des numéros
  - combinaison de 6 nombres parmi $\{1, \ldots, 49\}$
  - sous-ensemble $\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$
  - $\binom{49}{6} = C_{49}^6 = 13\,983\,816$

Probabilités Égales ou Pas

1. Une pièce est lancée jusqu'à obtenir Face avec un maximum de deux lancers.
   - Trois évènements élémentaires $\Omega = \{F, PF, PP\}$
   - Loi de probabilité #1 (M. de Roverbal) : $P(\omega) = \frac{1}{3}$ pour tout $\omega \in \Omega$
   - Loi de probabilité #2 (Pascal) : $P(F) = \frac{1}{2}$, $P(PF) = \frac{1}{4}$, $P(PP) = \frac{1}{4}$

Répétitions indépendantes

Supposons qu'une expérience aléatoire, modélisée par un univers Ω et une probabilité P, est répétée N fois. Le nouvel univers est $\Omega^N = \Omega \times \ldots \Omega$ et la probabilité associée est $P^N((\omega_1, \ldots, \omega_N)) = P(\omega_1) \ldots P(\omega_N)$

2. Une paire de dés est lancée. Quelle est la probabilité que la somme des faces soit supérieure ou égale à 8 ?
   - $\Omega = \{2, 3, 4, \ldots, 12\}$
   - $P(2) = \frac{1}{36}, P(3) = \frac{2}{36}, P(4) = \frac{3}{36}, P(5) = \frac{4}{36}, P(6) = \frac{5}{36} P(7) = \frac{6}{36}$
     $P(8) = \frac{5}{38}, P(9) = \frac{4}{36}, P(10) = \frac{3}{36}, P(11) = \frac{2}{36}, P(12) = \frac{1}{36}$
   - $A = \{8, 9, 10, 11, 12\}$
   - $P(A) = P(8) + P(9) + P(10) + P(11) + P(12) = \frac{5}{12}$

Probabilité Conditionnelle

Probabilité conditionnelle

Étant donnés deux évènements A et B avec $P(B) > 0$, la probabilité conditionelle de A sachant que B est réalisé est

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

- La probabilité conditionnelle schant B, $P(.|B)$ est une nouvelle probabilité
- Si $P(B) = 0$, alors on a usuellement $P(A|B) = 0$
- $P(A \cap B) = P(A|B)P(B) = P(A|B)P(A)$

Exemple

- Une urne contient 10 boules rouges et 10 boules blanches. Une expérience aléatoire consiste à sélectionner une boule dans l'urne, de le remplacer par une boule de l'autre couleur qui est mise dans l'urne, puis de sélectionner une deuxième boule dans l'urne. Quelle est la probabilité de tirer deux boules rouges ?

Évènements Indépendants

Évènement indépendant

Deux évènements A et B, où $P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$, sont indépendants si l'une des conditions suivantes est satisfaite

(i) $P(A \cap B) = P(A)P(B)$
(ii) $P(A|B) = P(A)$
(iii) $P(B|A) = P(B)$

Exemple

- Considérons le lancer de deux dés, un rouge et un blanc. Soient R_i, $i \in \{1, \ldots, 6\}$, l'évènement "le dé rouge tombe sur i" et B_j, $j \in \{1, \ldots, 6\}$, l'évènement "le dé blanc tombe sur j". Montrer que n'importe quelle paire R_i et B_j est indépendante.
- $P(R_i \cap B_j) = P((i,j)) = \frac{1}{36} = \frac{1}{6}.\frac{1}{6} = P(R_i)P(B_j)$

Évènements Indépendants (cont'd)

Proposition

Il est équivalent de dire

(i) A et B sont indépendants
(ii) A^C et B sont indépendants
(iii) A et B^C sont indépendants
(iv) A^C et B^C sont indépendants

A et B indépendants $\Longrightarrow$ la connaissance de la réalisation de l'un n'influence pas la probabilité de l'autre

Remarque

Deux évènements incompatibles A et B, où $P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$, ne sont jamais indépendants

Famille d'Évènements Mutuellement Indépendants

Famille d'évènements mutuellement indépendants

Soient A_i, $i \in I$ où I est un ensemble d'indices possiblement infini, une famille d'évènements. Les évènements A_i sont mutuellement indépendants si et seulement si pour chaque ensemble fini d'indices distincts $i_1, \ldots, i_k \in I$, nous avons

$$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1})P(A_{i_2}) \ldots P(A_{i_k})$$

Remarque

La condition $P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_n}) = P(A_{i_1})P(A_{i_2}) \ldots P(A_{i_n})$ n'implique pas la condition analogue pour toute sous-famille d'évènements

Exemple

- lancer de deux dés
- univers $\Omega = \{(i,j) : i,j = 1,2,\ldots,6\}$ avec $P(\omega) = \frac{1}{36}$ pour tout $\omega \in \Omega$

1. évènements $A = \{\text{premier dé} = 1, 2 \text{ ou } 3\}$,
   $B = \{\text{premier dé} = 3, 4 \text{ ou } 5\}$, $C = \{\text{somme des deux dés} = 9\}$
2. évènements $A = \{\text{premier dé} = 1, 2 \text{ ou } 3\}$,
   $B = \{\text{premier dé} = 4, 5 \text{ ou } 6\}$, $C = \{\text{somme des deux dés} = 7\}$

Théorème des Probabilités Totales

Système complet d'évènements

Tout famille A_i, $i \in I$, finie ou pas, d'évènements vérifiant les conditions

(i) $A_i \cap A_j = \emptyset$ pour tout $i \neq j$

(ii) $\bigcup_{i \in I} A_i = \Omega$

est appelé système complet d'évènements

Proposition

Soit A_i, $i \in I$, un système complet d'évènements. Alors $P(A) = \sum_{i \in I} P(A \cap A_i)$.

$P(A)$ est est calculée par un système complet d'évènements dans lequel A se réalise

Théorème des probabilités totales

Soit A_i, $i \in I$, un système complet d'évènements. Alors pour tout évènement A, nous avons

$$P(A) = \sum_{i \in I} P(A_i) P(A|A_i)$$

$P(A)$ est la somme pondérée des probabilités conditionnelles $P(A|A_i)$

Exemple

Trois paniers U_1, U_2 et U_3 contiennent chacun a_i pommes sucrées et b_i pommes amères indiscernables, $i = 1, 2, 3$. On choisit un panier au hasard et trois pommes dans le pannier choisi. Quelle est la probabilité d'avoir choisi exactement deux pommes amères ?

Formules de Bayes

Formule de Bayes

Soit A_i, $i \in I$, un système complet d'évènements. Alors pour tout évènement A, nous avons

$$P(A_k|A) = \frac{P(A|A_k)P(A_k)}{\sum_{i\in I} P(A|A_i)P(A_i)}$$

Corollaire

(i) $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B|A)P(C|A \cap B)$

(ii) $P(A|B) = \frac{P(A)P(B|A)}{P(B)} = \frac{P(A)P(B|A)}{P(A)P(B|A)+P(A^C)P(B|A^C)}$

Exemple : Deux opérateurs O_1 et O_2 saisissent 100 et 200 tableaux de données respectivement. Les tableaux saisis par O_1 comportent des fautes dans 5.2% des cas et ceux de O_2 dans 6.7% des cas. Un tableau est choisi au hasard et il comporte des fautes. Quelle est la probabilité que l'opérateur 0_1 ait saisi ce tableau

Structure Arborescente

Structure arborescente

L'univers d'une expérience aléatoire est structurée en branches et les probabilités conditionnelles sont les probabilités de passer d'un noeud de l'arbre à un autre

Remarque

- Formules des probabilités totales : suivi des étapes de l'expérience aléatoire dans l'ordre chronologique (i.e., racine vers feuilles)
- Formules de Bayes : suivi des étapes de l' expérience aléatoire dans l'ordre inverse (i.e., feuille vers racine)

Exemple: Considérons deux pièces, une normale (i.e., équilibrée) et une avec deux côtés Face. Choisissons une des deux pièces au hasard et lançons la une fois. Supposons que la probabilité de choisir la pièce équilibrée est de $\frac{3}{4}$. Sachant que la pièce lancée est tombée sur Face, quelle est la probabilité que la pièce à deux côtés Face ait été choisie ?

Z325EU07 - Probabilités et Statistiques

Variables Aléatoires Discrètes

Hervé Kerivin

Bureau : B133, Institut d'Informatique - ISIMA

Téléphone : 04 73 40 50 37

E-mail: herve.kerivin@uca.fr

Variables Aléatoires

Objectif : Étudier des grandeurs numériques pendant une expérience aléatoire

Considérons un espce de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, P)$

Variable aléatoire

Une variable aléatoire est une application $X : \Omega \to \mathbb{R}$

Exemples

- Choisir aléatoirement une personne dans la population et mesurer sa taille, son poids, ou son âge
- Pierre et Paul jouent à Pile ou Face. Si la pièce tombe sur Pile, Pierre donne 1 euro à Paul, sinon il reçoit 1 euro de Paul. Variable aléatoire : gain de Pierre. Application $X : \{\text{Pile,Face}\} \to \{1, -1\}$

Ensemble des valeurs

L'ensemble des valeurs d'une variable aléatoire X sera noté $X(\Omega)$

Variables Aléatoires et Évènements

- Un pièce est lancée trois fois et comptons le nombre X de fois où le côté Face apparaît.
- Ensemble fondamental : $\Omega = \{(e_1, e_2, e_3) : e_i \in \{P, F\}, i = 1, 2, 3\}$
- Pour tout évènement élémentaire ω, on associe $X(\omega)$

ω	(F,F,F)	(F,F,P)	(F,P,F)	(P,F,F)	(F,P,P)	(P,F,P)	(P,P,F)	(P,P,P)
valeur de X	3	2	2	2	1	1	1	0

- Pour chaque valeur x prise par X, on lui associe tous les évènements élémentaires associés

x	3	2	1	0
évènement	$\{(F,F,F)\}$	$\{(F,F,P),(F,P,F),(P,F,F)\}$	$\{(F,P,P),(P,F,P),(P,P,F)\}$	$\{(P,P,P)\}$

Évènement assoié à une valeur de X

L'ensemble des évènements élémentaires associés à une valeur x d'une variable aléatoire X est l'évèvement $(X = x) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) = x\}$

Autres évènements possibles : $(X \leq x) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\}$, $(x_1 < X \leq x_2) = \{\omega \in \Omega : x_1 < X(\omega) \leq x_2\}$, etc.

Propriété

Les évènements $(X = x)$, $x \in X(\Omega)$, forment un système complet d'évènements

Variables Aléatoires Discrètes

Variable aléatoire discrète

Une variable aléatoire qui prend ses valeurs dans un ensemble dénombrable est dite discrète

Exemple :

- Lancer de deux dés successivement avec $\Omega = \{(i,j) : 1 \leq i,j \leq 6\}$
- $X : \Omega \rightarrow \{2,3,\dots,12\}$ avec $X((i,j)) = i + j$ est une variable aléatoire discrète

Variable aléatoire continue

Une variable aléaoire qui n'est pas discrète est dite continue

Exemple :

- Choisir une personne dans une population et mesurer sa taille et son poids ; $\Omega = \{(t,p) \in \mathbb{R}_+^2\}$
- $X_1 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$ avec $X_1((t,p)) = t$ est une variable aléatoire continue
- $X_2 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$ avec $X_2((t,p)) = p$ est une variable aléatoire continue
- $X_3 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$ avec $X_3((t,p)) = 2t + \sqrt[3]{p}$ est une variable aléatoire continue

Loi de Probabilité

Loi de probabilité

On appelle loi de probabilité (ou distribution) d'une variable aléatoire discrète X la fonction de $\mathbb{R}$ dans $[0,1]$ qui à toute valeur x possible associe la probabilité $P(X = x)$

Exemple

- Lancer de deux dés successivement avec $\Omega = \{(i,j) : 1 \leq i,j \leq 6\}$
- $X : \Omega \to \{2, 3, \ldots, 12\}$ avec $X((i,j)) = i + j$
- Equiprobabilité : $P(\omega) = \frac{1}{36}$ pour tout $\omega \in \Omega$
- Loi de probabilité de X

valeur de X	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
probabilité	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Remarques

$(X = x)$, $x \in X(\Omega)$ forment un système complet d'évènements $\Longrightarrow$ $\sum_{x \in X(\Omega)} P(X = x) = 1$

Fonction de Répartition

Autre objet permettant de caractériser la loi d'une variable aléatoire

Fonction de répartition

La fonction de répartition d'une variable aléatoire discrète X est l'application F de $\mathbb{R}$ dans $[0,1]$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $F(x) = P(X \leq x)$

Exemple

- Lancer de deux dés successivement ; $X : \Omega \to \{2, 3, \ldots, 12\}$ avec $X((i,j)) = i + j$
- Fonction de répartition $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 2 \\ \frac{1}{36} & \text{si } 2 \leq x < 3 \\ \frac{3}{36} & \text{si } 3 \leq x < 4 \\ \frac{6}{36} & \text{si } 4 \leq x < 5 \\ \frac{10}{36} & \text{si } 5 \leq x < 6 \\ \frac{15}{36} & \text{si } 6 \leq x < 7 \\ \frac{21}{36} & \text{si } 7 \leq x < 8 \\ \frac{26}{36} & \text{si } 8 \leq x < 9 \\ \frac{30}{36} & \text{si } 9 \leq x < 10 \\ \frac{33}{36} & \text{si } 10 \leq x < 11 \\ \frac{35}{36} & \text{si } 11 \leq x < 12 \\ 1 & \text{si } x \geq 12 \end{cases}$

Fonction de Répartition - Propriétés

Supposons $X(\Omega) = \{x_0, \ldots, x_n\}$ avec $x_k < x_{k+1}$, $k \in \{0, \ldots, n-1\}$

$$F(X) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < x_0 \\ P(X = x_0) + \ldots + P(X = x_k) & \text{si } x \in [x_k, x_{k+1}[\\ 1 & \text{si } x \geq x_n \end{cases}$$

Propriétés

- (i) La fonction de répartition est finie et croissante
- (ii) La fonction de répartition est une fonction en escalier. À chaque valeur de x dans $X(\Omega)$, la hauteur du saut est $P(X = x)$
- (iii) La fonction de répartition est continue à droite et admet une limite à gauche en tout point x égale à $P(X < x)$
- (iv) $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$ et $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$

Espérance

- Espérance = indicateur de position

Espérance

Soit X une variable aléatoire discrète avec $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \ldots\}$, fini ou infini.
L'espérance de X, noté $E[X]$, est le réel

$$E[X] = \sum_i x_i P(X = x_i)$$

à condition que cette série converge absolument

- Espérance d'une variable aléatoire discrète X = moyenne des valeurs que peut prendre X pondérée par les probabilités de ces valeurs

$\Longrightarrow$ espérance correspond à une valeur moyenne autour de laquelle sont réparties les valeurs que peut prendre X

- Exemple : Lancer de deux dés successivement ; $X : \Omega \to \{2, 3, \ldots, 12\}$ avec $X((i,j)) = i + j$

$$E[X] = 2.\frac{1}{36} + 3.\frac{2}{36} + 4.\frac{3}{36} + 5.\frac{4}{36} + 6.\frac{5}{36} + 7.\frac{6}{36} + 8.\frac{5}{36} + 9.\frac{4}{36} + 10.\frac{3}{36} + 11.\frac{2}{36} + 12.\frac{1}{36} = 7$$

Espérance - Remarques

- Série convergente mais pas absolument : un réarrangement des termes de la série peut changer la valeur de la série (on parle se série semi-convergente)
- Une série $\sum u_n$ converge absolutment si la série $\sum |u_n|$ converge
- Série absolument convergente $\Longrightarrow$ l'ordre dans lequel les valeurs de X sont listées n'a pas d'importance

Propriété

Toute variable aléatoire discrète finie admet une espérance

Remarque

Si X est une variable aléatoire et g est une fonction réelle sur $\mathbb{R}$, alors $Y = g(X)$ est aussi une variable aléatoire

Théorème du transfert

Pour toute fonction réelle g sur $\mathbb{R}$, on a

$$E[g(X)] = \sum_i g(x_i)P(X = x_i)$$

à condition que cette série converge absolument

Exemple

Remarque

Si $X_1, \ldots, X_n$ sont n variables aléatoires sur un même espace de probabilités et ψ est une fonction rélle à n variables, alors $\psi(X_1, \ldots, X_n)$ est une variable aléatoire avec $\psi(X_1, \ldots, X_n)(\omega) = \psi(X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega))$

Trois boules sont tirées aléatoirement dans une urne contenant 10 boules blanches et 5 boules rouges. Si X est le nombre de boules blanches tireées, trouver $E[X]$

- $\Omega = \{\text{sous-ensemble de trois boules}\}$ avec $|\Omega| = \binom{15}{3} = 455$
- équiprobabilité
- $X(\Omega) = \{0, 1, 2, 4\}$ est fini $\Longrightarrow E[X]$ existe
- $E[X] = 0.P(X=0) + 1.P(X=1) + 2.P(X=2) + 3.P(X=3)$
- $P(X=1) = \frac{\binom{5}{2}\binom{10}{1}}{\binom{15}{3}} = \frac{100}{455}$, $P(X=2) = \frac{\binom{5}{1}\binom{10}{2}}{\binom{15}{3}} = \frac{225}{455}$,

  $P(X=3) = \frac{\binom{10}{3}}{\binom{15}{3}} = \frac{120}{455}$

$\Longrightarrow E[X] = \frac{100+2*255+3*120}{455} = \frac{910}{455} = 2$

Variables Aléatoires Indépendantes - Propriétés

$(\Omega, \mathcal{A}, P)$ espace probabilisé

Variables aléatoires indépendantes

Les variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont dites indépendantes si pour tous $x_1, x_2, \ldots, x_n$, les évènements $(X_1 = x_1), (X_2 = x_2), \ldots, (X_n = x_n)$ sont indépendants, i.e.,

$$P[X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_n = x_n] = P[X_1 = x_1]P[X_2 = x_2] \ldots P[X_n = x_n]$$

- Si X et Y ne sont pas indépendants, connaître les lois de X et Y ne suffit pas pour connaître celle de (X, Y) qui est la donnée pour tous x et y de $P[(X, Y) = (x, y)] = P[X = x, Y = y]$
- Exemple
  - lancer de deux dés, un rouge et un blanc
  - Soient X le nombre de points du dé rouge et Y celui du dé blanc
  - $P(X = x) = \frac{1}{6}$ pour tout $x \in \{1, \ldots, 6\}$
  - $P(X = y) = \frac{1}{6}$ pour tout $y \in \{1, \ldots, 6\}$
  - $P(X = x, Y = y) = \frac{1}{36} = P(X = x)P(Y = y)$ pour tous $x \in \{1, \ldots, 6\}$ et $y \in \{1, \ldots, 6\}$
  - X et Y sont des variables aléatoires indépendantes

Variables Aléatoires Indépendantes

Proposition

Soient $X_1, X_2, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes et $A_1, A_2, \ldots, A_n$ des ensembles de réels. Alors

$$P(X_1 \in A_1, X_2 \in A_2, \ldots, X_n \in A_n) = P(X_1 \in A_1)P(X_2 \in A_2)\ldots P(X_n \in A_n)$$

Exemple : $P(X \geq x, Y \geq y) = P(X \geq x)P(Y \geq y)$

Proposition

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes. Soit $Z = X + Y$. Alors

$$P[Z = z] = \sum_{x \in X(\Omega)} P[X = x]P[Y = z - x] = \sum_{y \in Y(\Omega)} P[X = z - y]P[Y = y]$$

Proposition

Considérons une collection $X_1, \ldots, X_n, X_{n+1}, \ldots, X_{n+m}$ de variables aléatoires indépendantes. Soient g et h deux fonctions réelles à n et m variables, respectivement. Alors $g(X_1, \ldots, X_n)$ et $h(X_{n+1}, \ldots, X_{n+m})$ sont des variables aléatoires indépendantes

Formules des Probabilités Totales

Formule des probabilités totales

Soient X et Y deux variables aléatoires. Pour tout $x \in X(\Omega)$,

$$P(X = x) = \sum_{y \in Y(\Omega)} P(X = x | Y = y) P(Y = y)$$

Exemple:

- lancer de deux dés, un rouge et un blanc
- Soient X le nombre de points du dé rouge et Y celui du dé blanc
- Soit $Z = X + Y$. Quelle est la loi de Z ?
- Évènements $(Y = y)$ pour $y \in \{1, \ldots, 6\}$ = systèmes complets d'évènements
- Pour tout $z \in \{2, \ldots, 12\}$

$$\begin{aligned} P(Z = z) &= \sum_{y=1}^{6} P(Z = z | Y = y) P(Y = y) = \frac{1}{6} \sum_{y=1}^{6} P(X + y = z | Y = y) \\ &= \frac{1}{6} \sum_{y=1}^{6} P(X = z - y | Y = y) \\ &= \frac{1}{6} \sum_{y=1}^{6} P(X = z - y) \end{aligned}$$

car X et Y sont indépendantes (pour la dernière égalité)

Espérance - Propriété

Proposition

Si X est une varible aléatoire ayant une espérance (finie) et c est un réel, alors

(i) Si $P[X \geq 0] = 1$ alors $E[X] \geq 0$

(ii) Si $P[X = c] = 1$ alors $E[X] = c$

(iii) $E[cX] = cE[X]$

Proposition

Pour toutes variables aléatoires X et Y et tous réels a et b,
$E[aX + bY] = aE[X] + bE[Y]$

Proposition

Pour toutes variables aléatoires indépendantes X et Y, $E[XY] = E[X]E[Y]$

Variance et Écart Type

- Variance = indicateur de dispersion

Variance

Soit X une variable aléatoire discrète avec $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots\}$, fini ou infini, admettant une espérance. La variance de X, noté $\mathrm{var}(X)$, est le réel

$$\mathrm{var}(X) = E[(X - E[X])^2] = \sum_i (x_i - E[X])^2 P(X = x_i) = E[X^2] - E[X]^2$$

à condition que cette série converge

Écart type

Soit X une variable aléatoire discrète admettant une variance. L'écart type de X, noté σ_X, est le réel $\sigma_X = \sqrt{\mathrm{var(X)}}$

- Écart type (ou variance) d'une variable aléatoire discrète X = mesure (très grossière) de la dispersion des valeurs que peut prendre X autour de sa moyenne (espérance)

$\Longrightarrow$ plus l'écart type est petit, plus il y a des chances que X soit proche de son espérance

Exemple

- Lancer de deux dés successivement ; $X : \Omega \to \{2, 3, \ldots, 12\}$ avec $X((i, j)) = i + j$
  - $\text{var}(X) = E[X^2] - E[X]^2$
  - On a calculé $E[X] = 7$
  - X^2 est une variable aléatoire (i.e., $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ avec $g(x) = x^2$)
  - Théorème du transfert: $E[X^2] = \sum_{i=2}^{12} i^2 P(X = i)$
    $E[X^2] = 4.\frac{1}{36} + 9.\frac{2}{36} + 16.\frac{3}{36} + 25.\frac{4}{36} + 36.\frac{5}{36} + 49.\frac{6}{36} + 64.\frac{5}{36} + 81.\frac{4}{36} + 100.\frac{3}{36} + 121.\frac{2}{36} + 144.\frac{1}{36} = \frac{1974}{36} \approx 54.83$
  - $\text{var}(X) = \frac{1974}{36} - 7^2 = \frac{210}{36} = \frac{35}{6} \approx 5.83$
  - $\sigma_X = \sqrt{\frac{35}{6}} \approx 2.415$

Variance - Propriété

Proposition

Si X est une varible aléatoire discrète finie ayant une variance nulle, alors X est une variable aléatoire constante

Proposition

Si X est une varible aléatoire admettant une variance, alors pour tous $A, b \in \mathbb{R}$ on a $\mathrm{var}(aX + y) = a^2 \mathrm{var}(X)$

Proposition

Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes, alors $\mathrm{var}(X + Y) = \mathrm{var}(X) + \mathrm{var}(Y)$

Proposition

Si $X_1, \ldots, X_n$ sont des variables aléatoires (deux à deux) indépendantes. Alors $\mathrm{var}(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{var}(X_i)$

Covariance

Covariance

Soient X et Y deux variables aléatoires telles que $E[X^2]$ et $E[Y^2]$ existent. La covariance de X et Y, notée $\mathrm{cov}(X, Y)$, est définie par
$\mathrm{cov}(X, Y) = E[(X - E[X])((Y - E[Y])] = E[XY] - E[X]E[Y]$

Proposition

(i) $\mathrm{cov}(X, c) = E[(X - E[X])((c - c)] = 0$

(ii) $\mathrm{cov}(X, Y) = \mathrm{cov}(Y, X)$

(iii) $\mathrm{cov}(aX_1 + bX_2, Y) = a.\mathrm{cov}(X_1, Y) + b.\mathrm{cov}(X_2, Y)$ pour $a, b \in \mathbb{R}$

(iv) $\mathrm{cov}(X, aY_1 + bY_2) = a.\mathrm{cov}(X, Y_1) + b.\mathrm{cov}(X, Y_2)$ pour $a, b \in \mathbb{R}$

(v) $\mathrm{cov}(aX, bY) = ab.\mathrm{cov}(X, Y)$ pour $a, b \in \mathbb{R}$

(vi) $\mathrm{cov}(X, X) = E[X^2] - E[X]^2 = \mathrm{var}(X)$

(vii) $\mathrm{cov}(X, Y) = 0$ si X et Y sont indépendants

Proposition

Si $X_1, \ldots, X_n$ sont des variables aléatoires. Alors
$\mathrm{var}(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{var}(X_i) + 2 \sum_{1 \leq i,j \leq n} \mathrm{cov}(X_i, X_j)$

Loi Uniforme

Loi uniforme (cas discret)

Une variable aléatoire discrète X suit une loi uniforme sur $\{1, \ldots, n\}$, notée $\mathcal{U}(n)$, si $P(X = i) = \frac{1}{n}$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$

Loi unuforme (cas discret) - Espérance et variance

(i) $E[X] = \frac{n+1}{2}$

(ii) $\mathrm{var}(X) = \frac{n^2-1}{12}$

Loi de Bernoulli

Loi de Bernoulli

Une variable aléatoire X suit une loi de Bernoulli de paramètre p, notée $\mathcal{B}(1, p)$, si $\Omega(X) = \{0, 1\}$ et $P(X = 1) = p$

Loi unforme (cas continu) - Espérance et variance

(i) $E[X] = p$

(ii) $\mathrm{var}(X) = pq$ avec $q = 1 - p$

Loi binomiale

Loi binomiale

Une variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètre (n, p), où $n \in \mathbb{Z}_+^*$ et $0 \leq p \leq 1$, notée $\mathcal{B}(n, p)$, si $\Omega(X) = \{0, 1, \ldots, n\}$ et $P[X = i] = \binom{n}{i} p^i q^{n-i}$ où $q = 1 - p$

Remarque

Toute variable aléatoire suivant une loi binomiale peut se décomposer en un somme de variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli indépendantes et de même loi $\mathcal{B}(p)$

Loi uniforme (cas continu) - Espérance et variance

(i) $E[X] = np$

(ii) $\mathrm{var}(X) = npq$

Proposition

Soient $X_1, \ldots, X_k$ des variables aléatoires indépendantes. Si chaque X_i suit une loi binomiale de paramètres n_i et p, alors $X_1 + \ldots + X_k$ suit une loi binomiale de paramètres $n_1 + \ldots + n_k$ et p

Loi Géométrique

- Loi binomiale : on réalise un nombre fixé d'essais
- Loi géométrique : on s'arrête au premier succès

Loi géométrique

Une variable aléatoire X suit une loi géométrique de paramètre p, où $0 < p \leq 1$, notée $\mathcal{G}(p)$, si $X(\Omega) = \mathbb{Z}_+^*$ et $P(X = i) = pq^{i-1}$ où $q = 1 - p$

Loi géométrique - Espérance et variance

$E[X] = \frac{1}{p}$ et $\mathrm{var}(X) = \frac{q}{p^2}$

Loi de Pascal

Une variable aléatoire X suit une loi de Pascal de paramètre (r, p), où $0 < p \leq 1$, notée $\mathcal{G}(r, p)$, si $X(\Omega) = \{r, r+1, \ldots\}$ et $P(X = i) = \binom{i-1}{r-1} p^r q^{i-r}$ où $q = 1 - p$

- Loi de Pascal : on s'arrête au r ème succès

Loi de Pascal - Espérance et variance

$E[X] = r\frac{1}{p}$ et $\mathrm{var}(X) = r\frac{q}{p^2}$

Loi de Poisson

Loi de Poisson

Une variable aléatoire X suit une loi de Poisson de paramètre λ, où $\lambda > 0$, notée $\mathcal{P}(\lambda)$, si $X(\Omega) = \mathbb{Z}_+$ et $P[X = i] = e^{-\lambda}\frac{\lambda^i}{i!}$

Loi de Poisson - Espérance et variance

$E[X] = \lambda$ et $\text{var}(X) = \lambda$

- La loi de Poisson est une "approximation" de la loi binomiale quand np est petit (e.g., $np \leq 10$) et n est grand (e.g., $n \geq 50$)
- Utilisation de la loi de Poisson :
  - nombre de tâches arrivant sur un serveur pendant une minute
  - nombre de globules rouges par ml de sang
  - nombre d'accidents de travail dans une entreprise pendant une année

Proposition

Soient $X_1, \ldots, X_k$ des variables aléatoires indépendantes. Si chaque X_i suit une loi de Poisson de paramètre λ_i, alors $X_1 + \ldots + X_k$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda_1 + \ldots + \lambda_k$

Fonction de Répartition - Cas Continu

- Variable aléatoire continue
- Impossibilité de définir la probabilité pour un ”point”

$\Longrightarrow$ Impossibilité de définir une loi de probabilité

Densité de probabilité et fonction de répartition

Soit X une variable aléatoire continue et F sa fonction de répartition. On appelle densité de probabilité la fonction f telle que $f(x) = F'(x)$ (en supposant que F soit dérivable) avec $f(x) \geq 0$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$

Remarques

(i) f ne représente pas la probabilité de l'évènement $(X = x)$ car $P(X = x) = 0$

(ii) Il faut garder à l'esprit $P(x \leq X \leq x + \Delta x) = f(x)\Delta x$, i.e., $f(x)$ est la limite quand $\Delta x \to 0$ de la probabilité moyenne dans $[x, x + \Delta x]$

(iii) $F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du$

(iv) $P(a \leq X \leq b) = P(a < X \leq b) = \int_{a}^{b} f(u)du = F(b) - F(a)$

Espérance - Cas Continu

Espérance d'une variable aléatoire continue

Soit X une variable aléatoire continue de densité f. L'espérance de X, noté $E[X]$, est le réel

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} uf(u)du$$

à condition que cette intégrale converge absolument

Loi uniforme (cas continu)

Une variable aléatoire continue X suit une loi uniforme sur $[a, b]$, notée $\mathcal{U}(a, b)$, si sa densité de probabilité est $f(x) = \frac{1}{b-a}$ si $a \leq x \leq b$ et 0 sinon

Loi uniforme (cas continu) - Espérance et variance

(i) $E[X] = \frac{a+b}{2}$

(ii) $\text{var}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$

Loi Normale

Loi normale

Une variable aléatoire X suit une loi normale de paramètres (m, σ), notée $\mathcal{N}(m, \sigma)$ si sa densité de problabilité est

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2}$$

- Loi normale aussi appelée loi de Laplace-Gauss
- Une des lois les plus importantes
- Pas de forme analytique pour sa fonction de répartition $\Rightarrow$ $F(x) = P(X \leq x)$ doit être lu dans un table (ou calculé par un logiciel)
- Courbe de la densité = courbe en forme de cloche (i.e., gaussienne)

Loi normale - espérance et variance

$E[X] = m$ et $\mathrm{var}(X) = \sigma^2$

- Courbe de densité : symétrie par rapport à l'axe $x = m$; plus σ est grand, plus elle est "étalée"

Loi Normale - Somme

Utilisation de la loi normale

- description de la durée de vie d'une pièce en mécanique
- répartition des erreurs de mesures en physique
- poids des personnes en sociologie
- notes à un examen

Somme de variables aléatoires normales

Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléaroires mutuellement indépendantes qui suivent des lois normales de paramètres (m_i, σ_i), respectivement. Alors pour tous les réels $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, on a

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i X_i \sim \mathcal{N}(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i m_i, \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 \sigma_i^2})$$

Variables Centrées Réduites

Variable centrée réduite

Soit X une variable aléatoire admettant une espérance et une variance non nulle. La variable

$$Y = \frac{X - E[X]}{\sigma_X}$$

est la variable centrée réduite associée à X

Variable centrée réduite - Espérance et variance

$E[Y] = 0$ et $\text{var}(Y) = 1$

- centrer une variable : soustraire son espérance pour chacune des valeurs
- réduire une variable : diviser toutes ses valeurs par son écart type
- données indépendantes de l'unité ou de l'échelle choisie
- variables ayant même moyenne et même dispersion.
- objectif : pouvoir mieux comparer les variations
- centrer-réduire est une action souvent utilisée dans l'analyse de données

Loi Normale Centrée Réduite

Loi normale centrée réduite

Une variable aléatoire X suit une loi normale centrée réduite, notée $\mathcal{N}(0,1)$ si sa densité de problabilité est

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

- $E[X] = 0$
- $\mathrm{var}(X) = 1$
- $F(0) = \frac{1}{2}$
- $F(-x) = 1 - F(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$
- $-X$ suit une loi normale centrée réduite
- $X \sim \mathcal{N}(m,\sigma) \Rightarrow Z = \frac{X-m}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0,1)$
- $P(a \leq X \leq b) = P(\frac{a-m}{\sigma} \leq Z \leq \frac{b-m}{\sigma}) = F(\frac{b-m}{\sigma}) - F(\frac{a-m}{\sigma})$

Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Inégalité de Markov

Soient X une variable aléatoire admettant une espérance (finie) et $t > 0$. Alors

$$P(|X| \geq t) \leq \frac{E[X]}{t}$$

Théorème - Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Soit X une variable aléatoire admettant une espérance et une variance. Alors pour tout $\epsilon > 0$

$$P(|X - E[X]| \geq \epsilon) \leq \frac{\text{var}(X)}{\epsilon^2}$$

- Probabilité pour que X se trouve à l'extérieur de l'intervalle centré en $E[X]$ et de rayon ϵ est majorée par $\frac{\text{var}(X)}{\epsilon^2}$
- Si $\epsilon^2 \leq \text{var}(X)$ alors on trouve 1 comme majorant

$\Longrightarrow$ efficacité de l'inégalité vient de ϵ^2 grand devant $\text{var}(X)$

Moyenne Empirique

Moyenne empirique

Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes, de même loi, d'espérance m et de variance σ^2. La moyenne empirique de $X_1, \ldots, X_n$ est la variable aléatoire

$$\overline{X_n} = \frac{X_1 + \ldots + X_n}{n}$$

- $E[X_1 + \ldots + X_n] = E[X_1] + \ldots + E[X_n]$
- $\mathrm{var}(X_1 + \ldots + X_n) = \mathrm{var}(X_1) + \ldots + \mathrm{var}(X_n)$

Moyenne empirique - espérance et variance

$E[\overline{X_n}] = m$ et $\mathrm{var}(\overline{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$

Lois des Grands Nombres

Loi (faible) des grands nombres

Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes, de même loi, d'espérance m et de variance σ^2. Quand n est grand, alors $\overline{X_n}$ est proche de m, c'est-à-dire

$$\lim_{n\to\infty} P(|\overline{X_n} - m| > \epsilon) = 0 \quad \forall\, \epsilon > 0$$

- Inégalité de Bienaymé-Tchebychev : $P(|\overline{X_n} - m| > \epsilon) \leq \frac{\text{var}(\overline{x_n})}{\epsilon^2} = \frac{\sigma^2}{\epsilon^2 n}$
- $\overline{X_n}$ convergne en probabilité vers m

Loi (forte) des grands nombres

Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes, de même loi, d'espérance m et de variance σ^2. Quand n tend vers l'infini, alors la probabilité que la moyenne des observations soit égale à m vaut 1, c'est-à-dire

$$P(\lim_{n\to\infty} \overline{X_n} = m) = 1$$

- Pour une variable aléatoire X dont on ne connait pas la loi, la loi des grands nombres permet d'avoir une idée plus ou moins précise de la loi de X

Théorème Central Limite

Deux questions

- Qu'est-ce qu'un grand nombre ?
- Que veut dire proche de m ?

Théorème central limite

Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes, de même loi, d'espérance m et de variance σ^2. La loi de $\overline{X_n}$ tend vers la loi normale $\mathcal{N}(m, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$ quand n tend vers l'infini, ou encore la loi de la variable aléatoire centrée réduite $\frac{\overline{X_n}-m}{\sigma/\sqrt{n}}$ converge vers $\mathcal{N}(0,1)$ quand n tend vers l'infini, i.e., pour tout $z \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n\to\infty} P(\frac{\overline{X_n}-m}{\sigma/\sqrt{n}} \leq z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}} dx$$

- Soit $S_n = X_1 + \ldots + X_n$
- $E[S_n] = nm$ et $\mathrm{var}(S_n) = n\sigma^2$
- $\frac{S_n - nm}{\sigma\sqrt{n}}$ converge vers $\mathcal{N}(0,1)$ quand n tend vers l'infini, i.e., pour tout $z \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n\to\infty} P(\frac{S_n - nm}{\sigma\sqrt{n}} \leq z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}} dx$$

Théorème Central Limite - Exemple

La somme des résultats de 10000 lancers d'un même dé est 35487. Ce dé est-il truqué ?

- Suite $(X_i)_{i \geq 1}$ de variables aléatoires indépendantes de même loi uniforme sur $\{1, \ldots, 6\}$
- $E[X_i] = \frac{1}{6}(1+2+3+4+5+6) = \frac{7}{2}$
- $\text{var}(X_i) = E[X_i^2] - E[X_i]^2 = \frac{1}{6}(1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2) - \frac{7^2}{2^2} = \frac{91}{6} - \frac{49}{4} = \frac{35}{12}$
- $E[S_n] = nE[X_1] = \frac{7n}{2}$ et $\text{var}(S_n) = n\text{var}(X_1) = \frac{35n}{12}$
- Théorème central limite : $\frac{S_n - E[S_n]}{\sqrt{\text{var}(S_n)}} \sim \mathcal{N}(0,1)$ quand $n \to \infty$
- Approximation pour $n = 10000$: $\frac{S_{10000} - \frac{7*10000}{2}}{\sqrt{\frac{35*10000}{12}}}$ égale à $\mathcal{N}(0,1)$
- Pour tout $z > 0$, on a $P(-z \leq \frac{S_{10000} - 35000}{50\sqrt{\frac{35}{3}}} \leq z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-z}^{z} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$
- $z = 2.93$ (car $2.93 * 50 * \sqrt{\frac{35}{3}} = 500.39$
- $P(35000 - 500.39 \leq S_{10000} \leq 35000 + 500.39) = 2F(2.93) - 1 \approx 0.9964$
- Somme obtenue est compatible avec un dé pas truqué

Théorème Central Limit (version 2)

Théorème central limite

Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes, de même loi, d'espérance m_i et de variance σ_i^2, respectivement. La loi de la variable aléatoire $\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - m_i)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2}}$ converge vers $\mathcal{N}(0,1)$ quand n tend vers l'infini

- Si les lois des X_i sont proches d'une loi normale, alors pour tout $n \geq 4$, le théorème central limite donne une bonne approximation
- Si les lois des X_i sont relativement proches d'une loi normale (e.g., loi uniforme), alors pour tout $n \geq 12$, le théorème central limite donne une bonne approximation
- Si les lois des X_i ne sont pas proches d'une loi normale, alors pour tout $n \geq 100$, le théorème central limite donne une bonne approximation