Théorie des graphes - Chapitre 1 : Les graphes

Table des matières

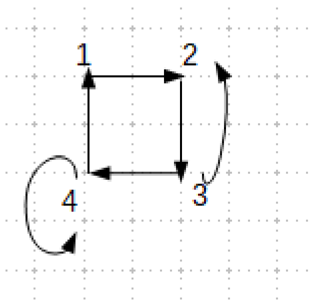
Modalité d’examen

L’UE de théorie des graphes est à 6 ECTS (Système européen de transfert et d’accumulation de crédits.
L’évaluation se fera en contrôle continue.
Ecrit n°1 (Début novembre) -> 33%
Ecrit n°2 (Fin décembre)-> 33%
Projet (TP) -> 33%

1 Introduction

Un graphe (fini) est défini sur un ensemble de sommet et par un ensemble d’arêtes tel que $E \subseteq V \times V$

Exemple 1 :
$G = (V, E)$
$V = \{1, 2, 3, 4\}$
$E = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 1), (1, 3)\} \cup \{(3, 2), (4, 4)\}$
$(1, 2) \neq (2, 1)$



Il s’agit d’un graphe orienté.

Exemple 2 :
$H = (w, F)$
$w = \{a, b, c, d\}$
$F = \{\{a, b\}, \{b, c\}, \{c, d\}\}$

2 Historique

1726 : Leonard Eules
Problème des 7 ponts Konigsberg
Si on part d'un pont particulier sur le bord de la rivière est ce qu'on peut revenir à ce même point en passant exactement une fois sur chacun des points.

1850 : Hamilton
Peut on trouver un cheminement sur un graphe en passant exactement une fois sur chaque sommet.

3 Application

- Trouver un plus court chemin d'un point A à un point B.

- Minimiser le nombre de fréquence nécessaire pour un réseau de téléphonie mobile.

4 Point de vue

- Algorithmique

- Algébrique

- Probabiliste

- Combinatoire

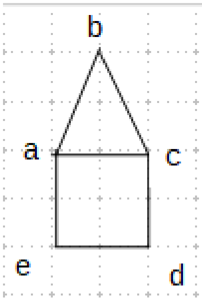
5 Définition usuelle

5.1 Boucle

Une arête dont le point de départ est le point d'arrivée.

5.2 Voisinage d'un somment

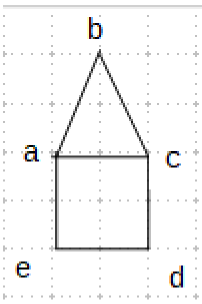
L'ensemble des sommets w tel que $v.w \in E(G)$
$N_G(v) = \{w \mid \{v, w\} \in E(G)\}$
Voisinage fermé noté : $V_G[v] = N_G(v) \cup \{v\}$



$N(a) = \{b, c, e\}$
$N[a] = \{b, c, e, a\}$
Voisinage entrant : $N^-(a) = \{y \in V \mid yx \in E\}$
Voisinage sortant : $N^+(a) = \{y \in V \mid xy \in E\}$

5.3 Degrés d'un sommet

Le degré de v noté $d_G(v)$, est le nombre de voisin de v.
$d_G(v) =\mid v(v) \mid$

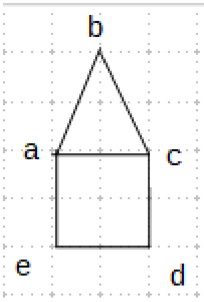


$d_G(a) = 3$

5.4 Degrés d'un graphe

Le degrés minimum d'un graphe noté $\delta(G)$, est le nombre minimum de voisins pour un sommet dans le graphe.
$\delta(G) = min \mid d(v) \mid v \in V(G)\}$

Le degrés maximum d'un graphe noté $\Delta(G)$, est le nombre maximum de voisins pour un sommet dans le graphe.
$\Delta(G) = max \mid d(v) \mid v \in V(G)\}$



$\delta(G) = 2$
$\Delta(G) = 3$

5.5 Chemin

Un chemin P est une séquence linéaire du sommets $(v_1, v_2, \ldots, v_k)$ tous les v_i sont distincts. $v_i, v_{i+1}\} \in E(G)$ pour tous les $i \in \{1, \ldots, k-1\}$.

5.6 Cycle

Un cycle est une séquence circulaire $(v_1, v_2, \ldots, v_k, v_1)$
$v_i, v_i + 1(\%k) \in E(G)$

5.7 Marche

Une marche (fermé) est une séquence d'arêtes qui sont consécutives sans contrainte de répétions.

5.8 Sous-graphe

Un sous-graphe est un graphe partiel.
Soit $G = (V, E)$ est un graphe, $H = (W, F)$ est un sous-graphe de G si $W \subseteq V \mathsf{et} F \subseteq E$

Soit $G = (V, E)$ est un graphe, $H = (W, F)$ est un sous-graphe induit de G si $W \subseteq F$ et $F = E \cap (w \times w)$
H est souvent induit si on peut obtenir H à partir de G en supprimant des sommets

5.9 Mineur de graphe

Soit $G = (V, E)$ est un graphe, $H = (W, F)$ si H peut être obtenue à partir de G alors :
- Supprimer des sommets isolés
- Supprimer des arêtes
- Contracter d'arêtes

5.10 Complémentaire de graphe

Soit $G = (V, E)$ un graphe non orienté. Le complémentaire de G noté $\overline{G}$ avec $\overline{G} = (V, \overline{G})$.
$\overline{E} = \binom{V}{2} \backslash 2$
$\overline{G} = (V, \overline{G})$ est l'ensemble des couples $v_i, v_j \forall v_i, v_j \in V$ et $v_i \neq v_j$

5.11 Isomorphisme de graphe

Deux graphes qui sont « égaux ».
$G = (V, E)$ et $H = (W, E)$ sont isomorphe si et seulement si il existe une fonction bijective $v \to w$ tel que u,v $\in E(G)$ si et seulement si $\varphi(u), \varphi(v) \in E(H)$.
G isomorphe à H noté G $\sim H$.

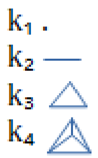
6 Fonction de graphes remarquable

6.1 Stable ou ensemble indépendant

Ensemble de sommet qui ne contient qui ne contient pas d'arêtes.
$S = (V, E)$ est un ensemble de sommet où $E = \emptyset$

6.2 Clique complémentaire des stables

$K = (V, E)$ $E = \binom{V}{2}$ toutes les arêtes sont présents dans le graphe une clique sur n sommets notée k_n.



6.3 Forêts

Un graphe sans cycle

6.4 Arbre

Un graphe sans cycle et connexe

6.5 Graphe biparti

Un graphe $G = (v, E)$ pour lequel on peut partitionner.
$V = A \cup B(A \cap B = \emptyset)$
tel que G[A] (le graphe induit par A) et G[B] forment des stables.

6.6 Graphe connexe

Un graphe $G' = (V, E)$ est connexe si et seulement si entre chaque paire de sommets a, b il existe un chemin dans G qui relie les sommets a et b.

6.7 Composante connexe

Une composante connexe de graphe $G = (v, E)$ est un sous ensemble maximal S de sommets de G tel que G[S] est connexe.
Remarque : L'ensemble des composantes connexes d'un graphe forment une partition des sommets. Cette partition est unique.

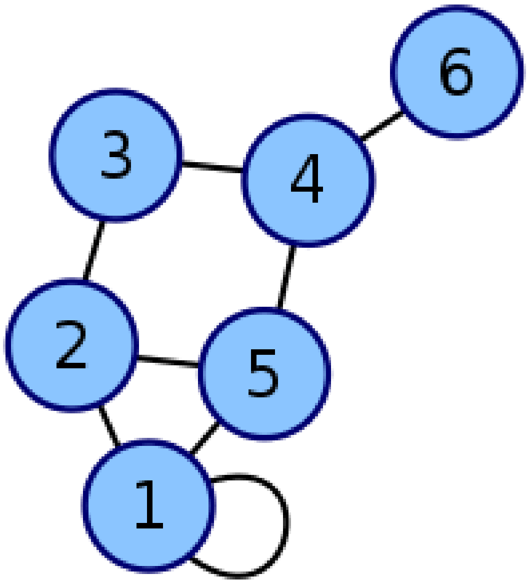
7 La représentation des graphes en machine

7.1 La matrice adjacence

Soit M avec n lignes et n colonnes.
Chaque lignes et chaque colonnes représentent un sommet.

$$M_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } (v_i, v_j) \in E \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Exemple :



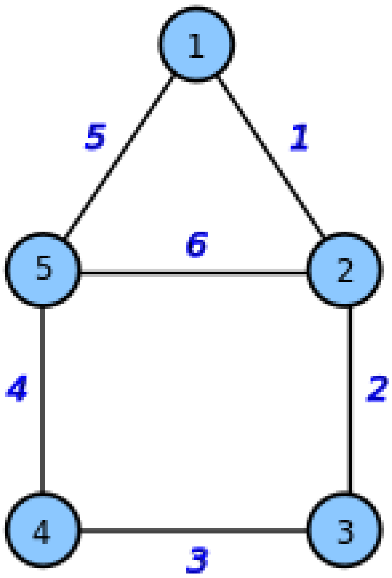
$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Soit G un graphe avec n sommets et m arrêtes.
- espace : $O(n^2)$
- Tester l'adjacence de deux sommets : $O(1)$
- Connaître les voisins : $O(n)$

7.2 La matrice d'incidence

Les lignes représentent les sommets et les colonnes représentent les arêtes. le coefficient de la matrice d'incidence en ligne i et en colonne j vaut :

1 si le sommet v_i est une extrémité de l'arête x_j
2 si l'arête x_j est une boucle sur v_i
0 sinon
Exemple :

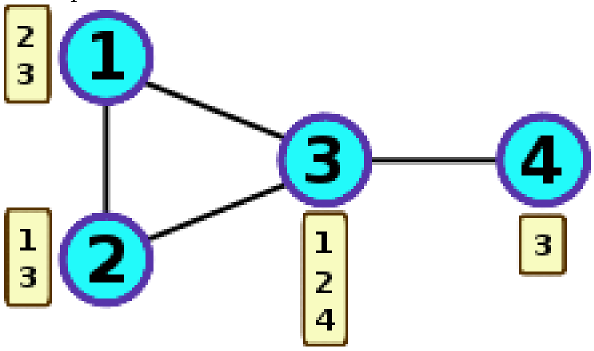


Prenons le cas du graphe ci-contre. Il possède 5 sommets et 6 arêtes, la matrice d'incidence aura donc 5 lignes et 6 colonnes :
le sommet 1 est l'aboutissement des arêtes 1 et 5
le sommet 2 est l'aboutissement des arêtes 1, 2 et 6
le sommet 3 est l'aboutissement des arêtes 2 et 3
le sommet 4 est l'aboutissement des arêtes 3 et 4
le sommet 5 est l'aboutissement des arêtes 4, 5 et 6

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

7.3 Liste adjacente

Une première liste qui correspond au sommet.
Pour chaque sommet on la liste des voisins.
Exemple :



Soit G un graphe avec n sommets et m arrêtes.
- Espace : $O(n+m)$
- Tester l'adjacence de deux sommets : $O(min\{d(u), d(v)\})$
- Connaître les voisins : $O(d(v))$