Probabilités et Statistiques

Table des matières

1 Introduction aux probabilités **1**
1.1 Expérience aléatoire . . . 1
1.2 Ensemble fondamental Ω . . . 1
1.3 Evènement élémentaire ω . . . 1
1.4 Evenement . . . 1
1.5 Ensembliste vs Probabiliste . . . 1
1.6 Probabilités . . . 2
1.6.1 Probabilité . . . 2
1.6.2 Espace de probabilité . . . 2
1.6.3 Probabilité (def 2) . . . 2
1.6.4 Exemple . . . 2
1.7 Univers non dénombrable . . . 2
1.7.1 Fréquence relative . . . 2
1.7.2 Probabilités de A . . . 2
1.8 Espace probabilisé . . . 3
1.8.1 α-algèbre . . . 3
1.9 Propriétés des probabilités . . . 3
1.9.1 Inégalité de Boole . . . 3
1.9.2 Formule de Poincaré . . . 3
1.10 Loi uniforme . . . 3
1.10.1 Définition . . . 3
1.10.2 Propriété . . . 3
1.11 Cardinaux et suites . . . 4
1.11.1 Proposition . . . 4
1.11.2 Suite de longueur r . . . 4
1.11.3 Théorème . . . 4
1.12 Permutations . . . 4
1.12.1 Principe de dénombrement . . . 4
1.12.2 Permutation . . . 4
1.12.3 Théorème . . . 4
1.13 Arrangement . . . 4
1.13.1 Définition . . . 4
1.13.2 Théorème . . . 4
1.14 Combinaisons . . . 5

1.14.1 Définition 5
1.14.2 Théorème 5
1.14.3 Exemple 5
1.14.4 Propositions 5
1.14.5 Théorème (Formule du binôme de Newton) 5
1.14.6 Théorème (nombre de parties d'un ensemble) 5
1.15 Discernables vs Indiscernables 5
1.15.1 Théorème 5
1.15.2 Exemple : anagramme 5
1.15.3 Théorème 6
1.15.4 Répétions indépendantes 6

2 Probabilités conditionnelles 6
2.1 Probabilité conditionnelle 6
2.2 évènement indépendant 6
2.2.1 Proposition 6
2.2.2 remarque 6
2.3 Famille d'évènements mutuellement indépendants 7
2.3.1 Définition 7
2.3.2 Remarque 7
2.4 Système complet d'évènement 7
2.4.1 Définition 7
2.4.2 Proposition 7
2.4.3 Théorème des probabilités totales 7
2.5 Formules de Bayes 7
2.5.1 Définition 7
2.5.2 Corollaire 7

3 Probabilités conditionnelles 8

4 Variables aléatoires discrètes 8

5 Couple de variables aléatoires 8

6 Estimation et intervalles de confiance 8

7 Regression linéaire 8

Modalités d'examen

- Première session (Examen terminal : 75% (10 décembre), TP : 25%)
- Deuxième session (Examen terminal : 100%)

1 Introduction aux probabilités

1.1 Expérience aléatoire

Définition : Une expérience aléatoire (ou épreuve) est tout phénomène dont on ne peut pas prédire l'issue avec certitude. Exemples :

- Lancer d'une pièce
- Lancer d'un dé à six faces
- Lancer d'une pièce trois fois de rang

1.2 Ensemble fondamental Ω

L'ensemble fondamental ou Univers est l'ensemble de toutes les issues possible d'une expérience aléatoire.

1.3 Evènement élémentaire ω

Définition : Un événement élémentaire ω est toute issue d'une expérience aléatoire, i.e tout élément ω.

1.4 Evenement

Définition : Un évènement, représenté par une lettre majuscule, est tout sous-ensemble de Ω, i.e toute réunion d'éléments élémentaires.

1.5 Ensembliste vs Probabiliste

- L'ensemble des évènements coïncide avec l'ensemble $p(\Omega)$ des parties de l'ensemble fondamental Ω.
- Un évènement est réalisé si un des évènements élémentaires le constituant est réalisé
- Etant donnés
  - Une expérience aléatoire d'univers Ω
  - Un évènement A $\in \Omega$
- Supposons que
  - L'expérience aléatoire est répétée N fois
  - N(A) correspond au nombre de fois où l'évènement A est réalisé

1.6 Probabilités

1.6.1 Probabilité

On appelle (mesure de) probabilité toute application P sur $P(\Omega)$ telle que :

- P(A) $\in$ [0,1] pour tout évènement $A \in p(\Omega)$
- P(Ω)=1 (i.e propriété de normalisation)
- P($A \cup B$)=P(A)+P(B) pour toute paire d'évènements incompatibles A et B (propriété d'additivité)

1.6.2 Espace de probabilité

Le couple (Ω, P) s'appelle espace de probabilité

1.6.3 Probabilité (def 2)

Une (loi de) probabilité sur l'ensemble Ω=$w_1, ..., w_n$ est la donnée de $(p_1, ..., p_n)$ $\in [0,1]^n$ tel que $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$

1.6.4 Exemple

Un entraineur de football pense qu'il y a 3 chances contre 2 que son équipe remporte le prochain match, tandis que les cotes contre une défaite ou un nul de son équipe sont de 4 contre 1 et de 9 contre 1, respectivement.

- Décrire l'ensemble des évènements élémentaires. Ω=victoire,nul,défaite
- Quelles sont leurs proba ? P(Victoire)=3/5, P(nul)=1/5, P(défaite)=1/10
- Définissent-elles une loi de probabilité ? P(victoire)+p(nul)+p(défaite)>1 donc non

1.7 Univers non dénombrable

- Expérience aléatoire avec un nombre infini d'issues (e.g, lancer un dé jusqu'à obtenir un pile)
- Propriété d'additivé

1.7.1 Fréquence relative

la fréquence relative de A est égale au ratio $N(A)/N$

1.7.2 Probabilités de A

La fréquence relative semble se stabiliser près d'une valeur réelle P(a) lorsque N devient très grand (loi empyrique) : le nombre A...
Propriété d'additivité : $P(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$

1.8 Espace probabilisé

1.8.1 α-algèbre

Une collection A de sous ensembles de Ω est un α-algèbre (ou tribu) si :
- $\Omega \in A$
- A $\in A$ implique A$^c \in A$
- Ab $= A$
- si Ai est une séquence finie ou infinie de Ab alors UiAi(?) $\in$ Ab

Un espace probabiliste est un triplet (R, Ab, P) ou ab est α-algébre non vide de sous ensembles de Ω et P est une application de Ab dans |R telle que :
- P(Ω) = 1
- 0 $\leq$ P(A) $\leq$ 1

1.9 Propriétés des probabilités

A_1,...,A_n $\in$ A, implique $\cup_{i=1}^n$ A_i $\in$ A_i, et $\cap_{i=1}^n$ A_i $\in$ A
P($\emptyset$)=0
P(A^C)=1-P(a)
P(A) $\leq$ P(B) pour A,B $\in$ A, , A c B
P(A$\cup$B)=P(A)+P(B)-P(A$\cap$B)

1.9.1 Inégalité de Boole

Si A_i est une séquence d'événements, alors P($\cup$ A_i) $\leq \sum$ P(A_i)

1.9.2 Formule de Poincaré

P($\cup_{r=1}^n$ A_i)=$\sum_{i=1}^n$(-1) ...

Exemples
- Considerons n lancer d'une pièce et soit A l'évènement "Face à été obtenu au moins une fois". Quelle est la valeur de $P(A)$? P(A)=1-P(A^c)=1-$\frac{1}{2^n}$
- Une carte est sélectionnée aléatoirement d'un jeu de 52 cartes. Qeulle est la probabilité que la carte sélectionnée soit un roi un pique ? A=roi, B=pique $P(A \cup B)$=$P(A) + P(B) - P(A \cap B)$=$\frac{4}{52}$+$\frac{13}{52}$-$\frac{1}{52}$=$\frac{4}{13}$

1.10 Loi uniforme

1.10.1 Définition

Soit Ω un ensemble fini. Une loi est dite uniforme (ou quiprobable) si les probabilités de tous les éènements élémentaires sont les mêmes, i.e, valent $\frac{1}{|\Omega|}$

1.10.2 Propriété

Pour tout évènement A, $P(A)$=$\frac{|A|}{|\Omega|}$

1.11 Cardinaux et suites

1.11.1 Proposition

- $| A \times B |=| A |.| B |$
- $| A \cup B |=| A |+| B |$ - $| A \cap B |$

1.11.2 Suite de longueur r

Soit A un ensemble fini. Une suite ordonnée de longueur r avec remise constituée d'éléments de A est un r-uplet, r-liste, $(a_1,...,a_r)$ avec $a_i \in$ A pour tout i appartenant à $1, ..., n$. L'ensemble A est appelé population.

1.11.3 Théorème

Le nombre de suites de longueurs r avec remise d'une population de cardinalité n est n^r

1.12 Permutations

1.12.1 Principe de dénombrement

Considérons deux expériences aléatoires produisant n et m issues différentes, respectivement. Au total, pout les deux expéreinces aléatoires prises ensembles, il existe nm issues possibles.

1.12.2 Permutation

Soit A un ensemble fini. Une permutatuin de A est une manière d'ordonner les éléments de A.

1.12.3 Théorème

Le nombre de permutations d'une population de cardinalité n est n!

1.13 Arrangement

1.13.1 Définition

Soit A un ensemble fini. Un arrangement de r éléments pris parmi A est une suite ordonnée de longueur r constituée d'élements de A sans remise, i.e, un r-uplet ou r-liste, $(a_1, ..., a_r)$ avec $A \setminus \{a_1, ..., a_{i-1}\}$ pour tout $i \in \{1, ..., r\}$.

1.13.2 Théorème

Le nombre d'arrangements de r éléments pris parmis n est $(n)_r = A_n^r = \frac{n!}{(n-r)!}$

1.14 Combinaisons

1.14.1 Définition

Soit A un ensemble fini. Une combinaison de r éléments pris parmi A est un sous-ensemble de cardinalité r constitué d'éléments de A sans remise, i.e, $(a_1, ..., a_r)$ avec $A \backslash a_1, ..., a_{i-1}$ pour tout $i \in 1, ..., r$

1.14.2 Théorème

Le nombre de commbinaison de r éléments pris parmi n est $\binom{n}{r} = C_n^r = n!/((n-r)!r!$

1.14.3 Exemple

Une main au poker estconstituée de 5 cartes distribuées d'un jeu de 52 cartes. Combien y a t-il de mains possibles ? *ordre pas d'importances *n = 52 / r = ? * ?

1.14.4 Propositions

Pour tout entier n positif et pour tout r <= n :
* $\binom{n}{0} = 1$
* $\binom{n}{r} = 0$ si $r < 0$
* $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$
* $\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r} + \binom{n-1}{r-1}$
* $\binom{n}{r} = \frac{n}{r}\binom{n-1}{r-1}$

1.14.5 Théorème (Formule du binôme de Newton)

Soient a et b deux réels et n un entier strictement positif
$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$

1.14.6 Théorème (nombre de parties d'un ensemble)

Soit Ω le nombre de parties de Ω, i.e, la cardinalité de $P(\Omega)$, vaut 2^n.

1.15 Discernables vs Indiscernables

1.15.1 Théorème

Considérons n objets parmis lesquels n_1 sont indiscernables, n_2 sont indiscernables, ..., n_p sont indiscernables. Le nombre de permutations différentes de ces éléments est $\frac{n!}{(n_1!n_2!...n_p!)}$

1.15.2 Exemple : anagramme

nombre d'anagramme de PROBA ? 5!/(1!1!1!1!1!) = 120
nombre d'anagramme de STAT ? 4!/(1!2!1!) = 12

1.15.3 Théorème

Le nombre de possibilités de distribuer r boules indiscernables dans n boites vaut $\binom{n+r-1}{r}$.

1.15.4 Répétions indépendantes

Supposons qu'une expérience aléatoire, modélisée par un univers Ω et une probabilité P, est répétée N fois. Le nouvel univers est $\Omega^N = \Omega \times ...\Omega$ et la probabilité associée est $P^N((\omega_1, ..., \omega_N)) = P(\omega_1)...P(\omega_N)$

2 Probabilités conditionnelles

2.1 Probabilité conditionnelle

Etant données deux évènements A et B avec $P(B) > 0$, la probabilité conditionelle de A sacahnt que B est réalisé est $P(A \mid B) = P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

. La probabilité conditionnelle sachant B, $P(. \mid B)$ est une nouvelle probabilité
. Si $P(B) = 0$, alors on a usuellement $P(A \mid B) = 0$
. $P(A \cap B) = P(A \cap B)P(B) = P(B \cap A)P(A)$ [Erreur sur le slide du prof]

2.2 évènement indépendant

Deux évênements A et B, où $P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$, sont indépendants si l'une des conditions suivantes est satisfaite

. $P(A \cap B) = P(A)P(B)$
. $P(A \cap B) = P(A)$
. $P(B \mid A) = P(B)$

2.2.1 Proposition

Il est équivalent de dire

. A et B sont indépendants
. A^C et B sont indépendants
. A et B^C sont indépendants
. A^C et B^C sont indépendants

2.2.2 remarque

Deux évênements incompatibles A et B, où $P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$, ne sont jamais indépendants. $P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = 0$ car incompatibilité implique $P(A \cap B) = 0$

2.3 Famille d'évènements mutuellement indépendants

2.3.1 Définition

Soient $A_i, i \in I$ où I est un ensemble d'indices possiblement infini, une famille d'évênments. Les évènements A_i sont mutuellement indépendants si et seulement si pour chaque ensemble fini d'indices distincts $i_1, .., i_k \in I$, nous avons $P(A_{i1} \cap A_{i2} \cap ... \cap A_{ik}) = P(A_{i1})P(A_{i2})...P(A_{ik})$

2.3.2 Remarque

La condition $P(A_{i1} \cap A_{i2} \cap ... \cap A_{ik}) = P(A_{i1})P(A_{i2})...P(A_{ik})$ n'applique pas de condition analogue pour toute sous-famille d'evènements.

2.4 Système complet d'évènement

2.4.1 Définition

Tout famille $A_i, i \in I$, finie ou pas, d'évènements vérifiant les conditions

. $A_i \cap A_j = \emptyset$ pour tout $i \neq j$

. $\cup_{i \in I} A_i = \Omega$ est appelé système complet d'évènements

2.4.2 Proposition

Soit $A_i, i \in I$, un système complet d'évènements. Alors $P(A) = \sum_{i \in I} P(A \cap A_i)$

P(A) est calculée par un système complet d'évènemments dans lequel A se réalise.

2.4.3 Théorème des probabilités totales

Soit $A_i, i \in I$ un système complet d'évènements. Alors pour tout évènement A, nous avons $P(A) = \sum_{i \in I} P(A_i)P(A \mid A_i)$

2.5 Formules de Bayes

2.5.1 Définition

Soit A_i, $i \in I$, un système complet d'vènements. Alors pour tout évènement A, nous avons $P(A_k \mid A) = \frac{P(A|A_k)P(A_k)}{\sum_{i \in I} P(A|A_i)P(A_i)}$

2.5.2 Corollaire

. $P(A \cap B \cap B \cap C) = P(A)P(B \mid A)(P(C \mid A \cap B)$

. $P(A \mid B) = \frac{P(A)P(B|A)}{P(B)} = \frac{P(A)P(B|A)}{P(A)P(B|A) + P(A^C)P(B|A^C)}$

3 Probabilités conditionnelles

4 Variables aléatoires discrètes

5 Couple de variables aléatoires

6 Estimation et intervalles de confiance

7 Regression linéaire