Théorie des langages II - TD1

Wassim SAIDANE, Anthony BERTRAND

Question 1

Montrer que le langage $a^n b^n$(pour $n \geq 1$) n'est pas rationnel. Concevoir un automate à pile qui reconnît ce langage.

Langage rationnel [1] :

- Ce sont les langages décrits par les expressions régulières ou rationnelles, d'où le nom de langages réguliers.
- Ce sont les langages obtenus, à partir des lettres et de l'ensemble vide, par les opérations rationnelles, à savoir l'union, le produit et l'étoile de Kleene, d'où le nom de langages rationnels.
- ce sont les langages reconnus par des automates finis, d'où le nom de langages reconnaissables.

Soit le langage $L = \{a^n b^n \mid n \geq 1\}$ sur l'alphabet $A = \{A, B\}$. Supposons par l'absurde que L est rationnel.
Par le lemme d'itération, $\{\exists x, y, z$ |w=xyz$\}$, $\mid xy \mid \leq p, \mid y \mid \geq 1$ et $\forall i \geq 0, xy'z \in L$.
Comme $\mid xy \mid \supseteq p$, alors $w = a^l a^{l'} a^{l''} b^p$ où $x = a^l$, $y = a^{l'}$, $z = a^l b^p$ $l' \geq 1$. Si on applique la proposition 4 ($\forall i \geq 0, xy^i z \in L$) du lemme d'itération avec $i = 0$ on obtient $a^l a^{l''} b^p \in L$, or $l + l'' < P$. $(l + l' + l'' = p, l' \geq 1)$
CONTRADICTION.
L n'est donc pas un langage rationnel.

Pour définir l'automate à pile, nous allons définir des règles de transition (q, y, z, p, h) où :

- q est l'état de départ
- y est la lettre utilisée
- z est le symbole qu'on dépile
- p est l'état d'arrivé
- h est le symbole qu'on empile

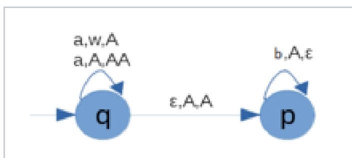
1. D'après wikepedia

Par exemple, soit les 4 règles suivantes :

1. (q, a, ω, q, A)
2. (q, a, A, q, AA)
3. (q, ϵ, A, p, A)
4. (p, n, A, p, ϵ)

La première règle nous dit qu'en prenant 'a' à partir de l'état 'q', on reste en 'q' en n'ayant rien dépilé mais en ayant empilé 'A'. Il n'y a pas d'état final, la reconnaissance du mot se fait par pile vide (sauf le mot vide car $n \geq 0$)

Voici la représentation de l'automate à pile (MERCI WIKIPEDIA) :



Question 2

Montrer que le langage des mots composés avec autant de 'a' que de 'b' n'est pas rationnel. Concevoir un automate à pile qui reconnaît ce langage.

Soit le langage $L = \{w \in \Sigma^* \mid |w|_a = |w|_b\}$, prenons un entier n quelconque tel que $|w| \geq n$.
On considère $\omega = a^n.b^n = \underbrace{a\ldots a}_{n}.\underbrace{b\ldots b}_{n}$. On a donc $\mid w \mid = 2n \geq n$.

Par le lemme d'itération, $\{\exists x, y, z \mid \text{w=xyz}\}, \mid xy \mid \leq n$. On a $w = a^l a^{l'} a^{l''} b^n$ où $a =^l, y^{l'}, z = a^l b^n$ avec $Y > 0$ puisque $y \neq \epsilon$.
Prenons $k = 2$, on a : $m \overset{def}{=} x \cdot y^2 \cdot z = a^X \cdot a^{2y} \cdot a^{z_1} \cdot b^n$ et $|m|_a = X + 2Y + Z_1 = \underbrace{X + Y + Z_1}_{n} + Y = n + Y$ et $|m|_b = n$.

Alors $\underbrace{\mid m_a \mid}_{n+Y} \neq \underbrace{\mid m_b \mid}_{n}$ puisque $Y > 0$.
CONTRADICTION
L n'est donc pas rationnel.