Théorie des langages II - TD1

Wassim SAIDANE

Question 1

Montrer que le langage $a^n b^n$(pour $n \geq 1$) n'est pas rationnel. Concevoir un automate à pile qui reconnît ce langage.

Langage rationnel [1] :

— Ce sont les langages décrits par les expressions régulières ou rationnelles, d'où le nom de langages réguliers.
— Ce sont les langages obtenus, à partir des lettres et de l'ensemble vide, par les opérations rationnelles, à savoir l'union, le produit et l'étoile de Kleene, d'où le nom de langages rationnels.
— ce sont les langages reconnus par des automates finis, d'où le nom de langages reconnaissables.

Soit le langage $L = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$ sur l'alphabet $A = \{A, B\}$. Supposons par l'absurde que L est rationnel.
Par le lemme d'itération, $\{\exists x, y, z$ |w=xyz$\}$, $\mid xy \mid \leq p, \mid y \mid \geq 1$ et $\forall i \geq 0, xy'z \in L$.
Comme $\mid xy \mid \supseteq p$, alors $w = a^l a^{l'} a^{l''} b^p$ où $x = a^l$, $y = a^{l'}$, $z = a^l b^p$ $l' \geq 1$. Si on applique la proposition 4 ($\forall i \geq 0, xy^i z \in L$) du lemme d'itération avec $i = 0$ on obtient $a^l a^{l''} b^p \in L$, or $l + l'' < P$. $(l + l' + l'' = p, l' \geq 1)$
CONTRADICTION.
L n'est donc pas un langage rationnel.

1. D'après wikepedia