Fonction de Répartition - Propriétés

Supposons $X(\Omega) = \{x_0, \ldots, x_n\}$ avec $x_k < x_{k+1}$, $k \in \{0, \ldots, n-1\}$

$$F(X) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < x_0 \\ P(X = x_0) + \ldots + P(X = x_k) & \text{si } x \in [x_k, x_{k+1}[\\ 1 & \text{si } x \geq x_n \end{cases}$$

Propriétés

1. La fonction de répartition est finie et croissante
2. La fonction de répartition est une fonction en escalier. À chaque valeur de x dans $X(\Omega)$, la hauteur du saut est $P(X = x)$

Variables de même loi

Deux variables aléatoires X et Y ont la même loi de probabilité si elles ont la même fonction de répartition

Remarque

$P(X \in [x, y]) = P(X \leq y) - P(X < x)$

Fonction de Répartition - Cas Continu

- Variable aléatoire continue : Impossibilité de définir la probabilité pour un point

$\Longrightarrow$ impossibilité de définir une loi de probabilité

Densité de probabilité et fonction de répartition

Soit X une variable aléatoire continue et F sa fonction de répartition.
On appelle densité de probabilité la fonction f telle que $f(x) = F'(x)$ (en supposant que F soit dérivable) avec $f(x) > 0$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$

Remarques

1. f représente la manière dont les valeurs de X sont réparties
2. f ne représente pas la probabilité de l'évènement $(X = x)$ car $P(X = x) = 0$
3. $F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du$
4. Enlever un nombre d'un intervalle ne change pas la probabilité (pas vrai pour le cas discret)

$$\begin{aligned} P(a \leq X \leq b) &= P(a < X \leq b) = P(a \leq X < b) = P(a < X < b) \\ &= \int_a^b f(u)du = F(b) - F(a) \end{aligned}$$

Théorème du Transfert - Exemple

Trois boules sont tirées aléatoirement dans une urne contenant 10 boules blanches et 5 boules rouges.

- $\Omega = \{\text{sous-ensemble de trois boules}\}$, $|\Omega| = \binom{15}{3} = 455$, équiprobabilité
- $E[X]$ pour X nombre de boules blanches tirées
  - $X(\Omega) = \{0, 1, 2, 4\}$ est fini $\Longrightarrow E[X]$ existe
  - $E[X] = 0.P(X = 0) + 1.P(X = 1) + 2.P(X = 2) + 3.P(X = 3)$
  - $P(X = 1) = \frac{\binom{5}{2}\binom{10}{1}}{\binom{15}{3}}$, $P(X = 2) = \frac{\binom{5}{1}\binom{10}{2}}{\binom{15}{3}}$, $P(X = 3) = \frac{\binom{10}{3}}{\binom{15}{3}}$

  $\Longrightarrow E[X] = \frac{100+2*255+3*120}{455} = \frac{910}{455} = 2$
- $E[X^2]$
  - Théorème du transfert avec X et $g(x) = x^2$
  - $E[X^2] = 0.P(X = 0) + 1.P(X = 1) + 2^2.P(X = 2) + 3^2.P(X = 3)$

  $\Longrightarrow E[X^2] = \frac{100+4*255+9*120}{455} = \frac{2200}{455} = \frac{440}{91}$

Remarque

$E[X^2] \neq E[X]^2$

Fonctions de Variables Aléatoires

Remarque

Si $X_1, \ldots, X_n$ sont n variables aléatoires sur un même espace de probabilité et ψ est une fonction réelle à n variables, alors $\psi(X_1, \ldots, X_n)$ est une variable aléatoire sur le même espace avec $\psi(X_1, \ldots, X_n)(\omega) = \psi(X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega))$

Exemple :

- X et Y variables aléatoires sur (Ω, P)
- $X^2 + \max(X, Y^3)$ variable aléatoire (Ω, P) avec

$$\begin{array}{rccc} \psi & : & \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & (x, y) & \longmapsto & x^2 + \max(x, y^3) \end{array}$$

- $(X^2 + \max(X, Y^3))(\omega) = X(\omega)^2 + \max(X(\omega), Y(\omega)^3$ pour tout $\omega \in \Omega$

Loi Conjointe et Loi Marginale

- $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ espace probabilisé
- X et Y deux variables aléatoires discrètes

Loi conjointe

La loi conjointe de X et Y (ou loi du couple (X, Y)) est la fonction réelle $P_{X,Y} : \Omega(X) \times \Omega(Y) \to [0, 1]$ telle que

$$P_{X,Y}(x, y) = P((X = x) \cap (Y = y)) = P(X = x, Y = y) \forall x \in \Omega(X) \text{ et } y \in \Omega(Y)$$

- Les évènements $(Y = y), y \in \Omega(Y)$, forment un système complet d'évènements

Loi marginale

La loi marginale de X (à partir de la loi conjointe) est la loi de X, c'est-à-dire pour tout $x \in \Omega(X)$

$$P(X = x) = \sum_{y \in \Omega(Y)} P(X = x, Y = y).$$

Remarque

Il n'est pas possible en général de déduire la loi conjointe à partir des lois marginales

Loi Conjointe et Loi Marginale - Exemple # 1

Deux dés sont lancés simulatanément. Soient

- X la variable aléatoire correspondant au plus grand des deux chiffres
- Y la variable aléatoire correspondant au plus grand des deux chiffres
- Loi conjointe
  - $\Omega(X) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \Omega(Y) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
  - $P(X = x, Y = y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < y \\ \frac{1}{36} & \text{si } x = y \\ \frac{1}{18} & \text{si } x > y \end{cases}$
- Loi marginale

Y \ X	1	2	3	4	5	6	$P(Y = y)$
1	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{11}{36}$
2	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{9}{36}$
3	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{7}{36}$
4	0	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{5}{18}$
5	0	0	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{3}{36}$
6	0	0	0	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$
$P(X = x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{11}{36}$	

Y -> plus petit (pas plus grand)

Loi Conjointe et Loi Marginale - Exemple # 2

Suite de lancers d'une pièce non-équilibrée avec $P(Pile) = \frac{3}{4}$. Soient

- X la variable aléatoire correspondant à la longueur de la première suite de valeurs identiques
- Y la variable aléatoire correspondant à la longueur de la deuxième suite de valeurs identiques
- Lois marginales
  - $\Omega(X) = \mathbb{N}^*$ et $\Omega(Y) = \mathbb{N}^*$
  - $P(X = x) = \left(\frac{3}{4}\right)^x \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^x \frac{3}{4} = \frac{3^x+3}{4^{x+1}}$
  - Loi marginale de Y : plus simple de passer par la loi conjointe
  - $P(X = x, Y = y) = \left(\frac{3}{4}\right)^x \left(\frac{1}{4}\right)^y \frac{3}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^x \left(\frac{3}{4}\right)^y \frac{1}{4} = \frac{3^{x+1}+3^y}{4^{x+y+1}}$
  - $P(Y = y) = \sum_{x=1}^{+\infty} P(X = x, Y = y) = \sum_{x=1}^{+\infty} \frac{3^{x+1}+3^y}{4^{x+y+1}}$
  - $P(Y = y) = \frac{1}{4^y} \sum_{x=1}^{+\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^{x+1} + \left(\frac{3}{4}\right)^y \sum_{x=1}^{+\infty} \frac{1}{4^{y+1}}$
  - $P(Y = y) = \frac{1}{4^y} \left(\frac{3}{4}\right)^2 \frac{1}{1-\frac{3}{4}} + \left(\frac{3}{4}\right)^y \frac{1}{4^2} \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{3^2+3^{y-1}}{y^{y+1}}$

Variables Aléatoires Indépendantes - Vecteur Aléatoire

- $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ espace probabilisé
- $X_1, \ldots, X_n$ n variables aléatoires discrètes

Loi d'un vecteur

La loi du vecteur $X = (X_1, \ldots, X_n)$ est la fonction est la fonction réelle $P_{X_1,\ldots,X_n} : \Omega(X_1) \times \cdots \times \Omega(X_n) \to [0, 1]$ telle que $\forall\, x_i \in \Omega(X_i), i = 1, \ldots, n,$

$$\begin{aligned} P_{X_1,\ldots,X_n}(x_1, \ldots, x_n) &= P((X_1 = x_1) \cap \cdots \cap (X_n = x_n)) \\ &= \; = P(X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n) \end{aligned}$$

Loi marginale

La loi marginale de X_1 (à partir de la loi de X) est la loi de X_1, c'est-à-dire pour tout $x_1 \in \Omega(X_1)$

$$P(X_1 = x_1) = \sum_{(x_2,\ldots,x_n)\in\Omega(X_2)\times\cdots\times\Omega(X_n)} P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_n = x_n).$$

Variables Aléatoires Indépendantes

$(\Omega, \mathcal{A}, P)$ espace probabilisé

Couple de variables aléatoires indépendantes

Deux variables aléatoires X et Y sont indépendantes si $\forall\, x \in \Omega(X)$ et $y \in \Omega(Y)$

$$P(X = x, Y = y) = P(X = x)P(Y = y)$$

Variables aléatoires indépendantes deux à deux

Les variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ sont indépendantes deux à deux si $\forall\ 1 \le i, j \le n, i \ne j$ le couple (X_i, X_j) est indépendant

Variables aléatoires mutuellement indépendantes

Les variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont mutuellement indépendantes si $\forall\ (x_1, \ldots, x_n) \in \Omega(X_1) \times \cdots \times \Omega(X_n)$,

$$P(X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n] = P(X_1 = x_1) \ldots P(X_n = x_n)$$

Remarque

Si X et Y ne sont pas indépendantes, connaître les lois de X et Y ne suffit pas pour connaître celle de (X, Y)

Variables Aléatoires Indépendantes - Exemples

- Exemple #1 :
  - $P(X = 3) = \frac{5}{36}$
  - $P(Y = 5) = \frac{3}{36}$
  - $P(X = 3. Y = 5) = 0 \ne \frac{5}{36} \cdot \frac{3}{36}$
  - X et Y ne sont pas inépendantes
- Exemple #2 :
  - $P(X = 1) = \frac{3+3}{4^2} = \frac{3}{8}$
  - $P(Y = 1) = \frac{3^2+1}{4^2} = \frac{5}{8}$
  - $P(X = 1, Y = 1) = \frac{3^2+3}{4^3} = \frac{3}{16} \ne \frac{3}{8} \cdot \frac{5}{8}$
  - X et Y ne sont pas inépendantes

Variables Aléatoires Indépendantes - Exemples

Considérons une séquence de deux bits et les trois variables aléatoires suivantes

- B_i la valeur du $i^{\text{ème}}$ bit, $i = 1, 2$
- $B_3 = B_1$ xor B_2
  - $\Omega = \{00, 01, 10, 11\}$ avec équiprobabilité
  - $B_i(\Omega) = \{0, 1\} \forall\, i = 1, 2, 3$
  - $P(B_i = 0) = P(B_i = 1) = \frac{1}{2} \forall\, i = 1, 2, 3$
  - B_1, B_2 et B_3 sont indépendants deux à deux
    - $P(B_i = b_i, B_j = b_j) = \frac{1}{4} \forall 1 \leq i, j \leq 3, i \neq j, b_i \in B_i(\Omega), b_j \in B_j(\Omega)$
    - $P(B_i = b_i)P(B_j = b_j) = \frac{1}{4} \forall 1 \leq i, j \leq 3, i \neq j, b_i \in B_i(\Omega), b_j \in B_j(\Omega)$
  - B_1, B_2 et B_3 ne sont pas mutuellement indépendants
    - $P(B_1 = 0, B_2 = 1, B_3 = 0) = 0 \neq P(B_1 = 0)P(B_2 = 1)P(B_3 = 0)$

Variables aléatoires discrètes

Indépendance mutuelle implique indépendance deux à deux, mais pas nécessairement le contraire

Exemple : Soient X, Y et Z trois variables aléatoires discrètes mutuellement indépendantes

$$\begin{aligned} P(X = x, Y = y) &= \sum_{z \in Z(\Omega)} P(X = x, Y = y, Z = z) = \sum_{z \in Z(\Omega)} P(X = x)P(Y = y)P(Z = z) \\ &= P(X = x)P(Y = y) \sum_{z \in Z(\Omega)} P(Z = z) = P(X = x)P(Y = y) \end{aligned}$$

Xor = ou exclusif

Opérations sur des Variables Aléatoires Indépendantes

Somme de deux variables aléatoires indépendantes

Soient $X_1, X_2, \dots, X_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes et $A_1, A_2, \dots, A_n$ des ensembles de réels. Alors

$$P(X_1 \in A_1, X_2 \in A_2, \dots, X_n \in A_n) = P(X_1 \in A_1)P(X_2 \in A_2)\dots P(X_n \in A_n)$$

Exemple : $P(X \geq x, Y \geq y) = P(X \geq x)P(Y \geq y)$

Proposition

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes. Soit $Z = X + Y$. Alors

$$P(Z = z) = \sum_{x \in X(\Omega)} P(X = x)P(Y = z - x) = \sum_{y \in Y(\Omega)} P(X = z - y)P(Y = y)$$

Produit de deux variables aléatoires indépendantes

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes. Soit $T = XY$. Alors

$$P(T = t) = \sum_{\substack{xy = t \\ (x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)}} P(X = x)P(Y = y)$$

Opérations sur des Variables Aléatoires Indépendantes

Proposition

Considérons une collection $X_1, \dots, X_n, X_{n+1}, \dots, X_{n+m}$ de variables aléatoires mutuellement indépendantes. Soient $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ et $h : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ deux fonctions réelles à n et m variables, respectivement. Alors $g(X_1, \dots, X_n)$ et $h(X_{n+1}, \dots, X_{n+m})$ sont des variables aléatoires indépendantes

Exemple

- Lancer de deux dés, un rouge et un blanc
- Soient X le nombre de points du dé rouge et Y celui du dé blanc
- Soit $Z = X + Y$. Quelle est la loi de Z ?
- Évènements $(Y = y)$ pour $y \in \{1, \dots, 6\}$ = systèmes complets d'évènements
- Pour tout $z \in \{2, \dots, 12\}$

$$\begin{aligned} P(Z = z) &= \sum_{y=1}^{6} P(Z = z | Y = y) P(Y = y) = \frac{1}{6} \sum_{y=1}^{6} P(X + y = z | Y = y) \\ &= \frac{1}{6} \sum_{y=1}^{6} P(X = z - y | Y = y) \\ &= \frac{1}{6} \sum_{y=1}^{6} P(X = z - y) \end{aligned}$$

car X et Y sont indépendantes (pour la dernière égalité)

Espérance - Propriété

Proposition

Si X est une variable aléatoire ayant une espérance (finie) et c est un réel, alors

1. (i) Si $P[X \geq 0] = 1$ alors $E[X] \geq 0$
2. (ii) Si $P[X = c] = 1$ alors $E[X] = c$
3. (iii) $E[cX] = cE[X]$

Proposition

Pour toutes variables aléatoires X et Y et tous réels a et b,
$E[aX + bY] = aE[X] + bE[Y]$

Proposition

Pour toutes variables aléatoires indépendantes X et Y, $E[XY] = E[X]E[Y]$

Théorème du transfert

Si X et Y sont deux variables aléatoires discrètes et $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, alors $E[f(X,Y)] = \sum_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)} P(X = x, Y = y) f(x,y)$ à condition que cette série converge