# Probabilités et Statistiques TD1

## Exercice 1

$\Omega = \{rouge, jaune, bleu, vert, blanche\}$

## Exercice 2

$\mid \Omega \mid = 2^n$

## Exrcice 3

$\Omega = \{1 \textbf{ et } 1, 1 \textbf{ et } 2, 1 \textbf{ et } 3, 1 \textbf{ et } 4, 1 \textbf{ et } 5, 1 \textbf{ et } 6, 2 \textbf{ et } 1, 2 \textbf{ et } 2, ...\}$

## Exercice 4

$\Omega = \{$On lance la pièce 4 fois$\}$
$\mid \Omega \mid = 2^4 = 16$
A="Avoir trois face"={FFFP,FFPF,FPFF,PFFF} donc $\mid A \mid$=4
$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$

## Exercice 5

$\Omega = \{$Une pièce est lancé 2 fois$\}$
$\mid \Omega \mid = 2^2 = 4$
A="Obtenir au moins un coté face"=$\{PF, FF, FP\}$
$\mid A \mid = \Omega \setminus \{PP\} = 3$
$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{3}{4}$

## Exercice 6

Soit A et B on prend deux évênements incompatibles c'est à dire $A \cap B = \emptyset$ et si A et B étaient indépendants alors $P(A \cap B) = P(A)P(B)$
donc $P(\emptyset) = P(A)P(B)$ ce qui signifie que $A = \emptyset$ ou $B = \emptyset$ ce qui est impossible.

## Exercice 7

$\Omega = \{$deux nombres compris entre 1 et 6$\}$
$\mid \Omega \mid = 6^2 = 36$
$A = \{$La somme de deux nombres compris entre 1 et 6 est supérieur ou égal 10$\} = \{$4+6,5+5,5+6,6+4,6+5,6+5$\}$
donc $\mid A \mid = 6$
$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

## Exercice 8

$\Omega$="Les dates de naissance des n étudiants"$=\{x_1, x_2, ..., x_n\}$
$\mid \Omega \mid = 365^n$
$A = \{(x_1, x_2, ..., x_n) : x_i \neq x_j, \forall i \neq j\}$
$\mid A \mid = A_{365}^n = \frac{(365)!}{(365-n)!}$
La probabilité est $\frac{|A|}{|\Omega|} \approx 0.29$

## Exercice 9

$\Omega = \{$Tirer cinq cartes sans remises$\}$
$\mid \Omega \mid = \binom{52}{5} = \frac{52!}{5!47!}$
A$=\{\{x, x, y, y, z\} : x, y, z$ valeurs distinctes$\}$
$A = \binom{13}{2} \times \binom{4}{2} \times \binom{4}{2} \times 11 \times 4$
$\frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{1}{20}$

## Exercice 10

$\binom{19}{5} = \frac{19!}{5!14!} = 11628$ groupes peuvent être constituer
$\binom{18}{5} = \frac{18!}{5!13!} = 8\ 568$ groupes qui n'ont pas de proviseur
La proportion est donc $\frac{11628}{8568} = 0.73 \approx 74\%$

## Exercice 11

### a.

$8! = 40320$

### b.

$(8/2)! = 4! = 24$

### c.

$4! \times 2^4 = 24 \times 16 = 384$

### d.

$4! \times 4! \times 2 = 24 \times 2 = 48$

### e.

$4! \times 4! \times 2 = 24 \times 2 = 48$

## Exercice 12

### a.

$\Omega = \{52 \text{ cartes}\}$
$\mid \Omega \mid = 52^{10}$
$A = \{\text{Aucune des 10 cartes soient du même types}\}$ $\mid A \mid = 52 \times 48 \times 44 \times 40 \times 36 \times 32 \times 28 \times 24 \times 20 \times 16$
$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} \approx 0.0075 = 0.75\%$

### b.

$\Omega = \{\text{Tirer 10 cartes parmis les 52}\}$
$\mid \Omega \mid = \binom{52}{10} = \frac{52!}{10!42!}$
$A = \{\text{Au moins neufs cartes de la même couleur}\}$
Posons $A_1$ et $A_2$ tel que $A = A_1 \cup A_2$
avec $A_1 = \{\text{Exactement 9 cartes de la mêmes couleurs}\}$
et $A_2 = \{\text{10 cartes de la mêmes couleurs}\}$
$\mid A_1 \mid = \binom{13}{9} \times 4 \times 39$
$\mid A_2 \mid = \binom{13}{10} \times 4$
$\mid A \mid = \mid A_1 \mid + \mid A_2 \mid = 39 \times 4 \times \binom{13}{9} + 4 \times \binom{13}{10} \times 4$
$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\frac{13!}{9!4!} \times 4 \times 39 + \frac{13!}{10!3!} \times 4}{\frac{52!}{10!42!}}$

## Exercice 13

$(A \cap A_1) \cup (A \cap A_2) \cup ... \cup (A \cap A_3) = A \cap (A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n)$ (par factorisation)

## Exercice 14

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) - P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B) + P(A \cup B) \\ &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \end{aligned}$$

## Exercice 15

$A$ et $B$ indépendants signifie que $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \iff P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$

### Cas #1

$P(A) = 0.1$, $P(B) = 0.9$, $P(A \cup B) = 0.91$
$P(A) \times P(B) = 0.1 \times 0.9 = 0.09$
$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = 0.1 + 0.9 - 0.91 = 0.09 = P(A) \times P(B)$
$A$ et $B$ sont donc indépendant.

### Cas #2

$P(A) = 0.4$, $P(B) = 0.6$ et $P(A \cup B) = 0.76$
$P(A) \times P(B) = 0.4 \times 0.6 = 0.24$
$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = 0.4 + 0.6 - 0.76 = 0.24 = P(A) \times P(B)$
$A$ et $B$ sont donc indépendant.

### Cas #3

$P(A) = 0.5$, $P(B) = 0.3$ et $P(A \cup B) = 0.73$ $P(A) \times P(B) = 0.5 \times 0.3 = 0.15$
$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = 0.5 + 0.3 - 0.75 = 0.05 \neq P(A) \times P(B)$
$A$ et $B$ ne sont donc pas indépendant.

## Exercice 16

$A$ et $B$ sont indépendants celà signifie que $P(A) \times P(B) = P(A \cap B)$
$P(A) = P(\omega_1) + P(\omega_2) = \frac{1}{2}$ et $P(A) = P(\omega_2) + P(\omega_3) = \frac{1}{2}$
$P(A) \times P(B) = \frac{1}{4} = P(\omega_2) = P(A \cap B)$
De la même manière on détermine que (A et C) et (B et C) sont des couples indépendants.
$P(A) \times P(B) \times P(C) = \frac{1}{6} \neq \emptyset = P(A \cap B \cap C)$

## Exercice 17

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
$P(1) = P(3) = P(5) = \lambda$
$P(2) = P(4) = P(6) = 2\lambda$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{6} P(i) = 1 &\Longleftrightarrow 3\lambda + 6\lambda = 1 \\ &\Longleftrightarrow \lambda = \frac{1}{9} \end{aligned}$$

$A = \{\text{Obtenir au moins } 4\} = \{4, 5, 6\}$
$P(A) = P(4) + P(5) + P(6) = \frac{2}{9} + \frac{1}{9} + \frac{2}{9} = \frac{5}{9}$

## Exercice 18

Il existe 9! permutations possibles
Il existe $(9-1)! = 8!$ permutations possibles avec le lanceur en dernière position
$\mid \Omega \mid = 9!$
$\mid A \mid = 8!$
$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{1}{9}$

## Exrcice 19

$\Omega = \{5 \text{ cartes parmis } 52 \text{ cartes}\}$
$\mid \Omega \mid = \binom{52}{5}$

### a.

$A = \{5 \text{ cartes consécutives}\}$
$\mid A \mid = 9 \times 4^5$
$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{4^5}{\frac{52!}{5!47!}} = 4^5 \times \frac{5!47!}{52!}$

### b.

$A = \{3 \text{ cartes de la même vleur} + 2 \text{ cartes}\}$
3 cartes de la mêmes valeurs : 13 possibilités.
Couleurs des trois cartes de mêmes valeurs : $\binom{4}{3} = 4$
2 cartes de mêmes vleurs + 3 valeurs $\neq$ : $\binom{12}{2}$
Couleurs de 2 cartes de valeur $\neq$ : $4^2$