L3 GRAPHES - TD 3
PARCOURS EN PROFONDEUR

Exercice 1 Soit G le graphe présenté en Figure 1-(a). et soit H le graphe présenté en Figure 1-(b). Déroulez un exemple du parcours en profondeur sur G puis sur H en partant du sommet a. Donnez, pour chaque sommet les dates de débuts et de fins. Donnez également les forêts de parcours pour chacun des graphes.

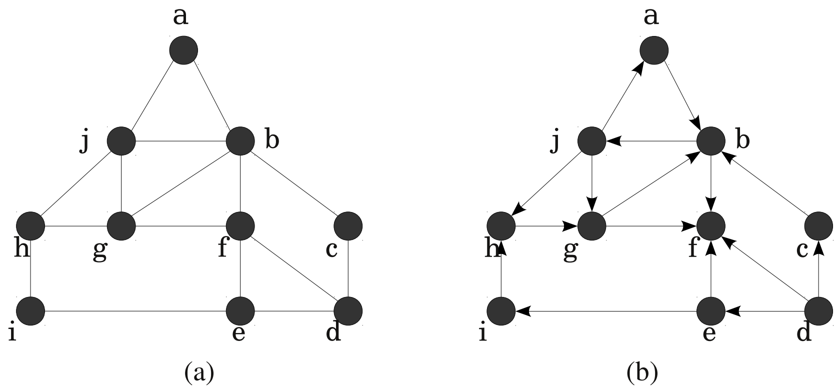


FIGURE 1.

Exercice 2

(1) Quelle est la complexité de l'algorithme du parcours en profondeur ?
(2) Dans un graphe orienté a-t-on un moyen de classer les différents types d'arcs rencontrés :
— arcs liaison
— arcs arrières
— arcs avant et
— arcs transverses
en utilisant les couleurs des sommets (i.e. Blanc, Gris ou Noir et/ou les dates de débuts et de fins.
(3) Modifiez l'algorithme du parcours en profondeur de manière à ce que, lorsque le graphe contient un circuit (ou un cycle), l'algorithme puisse exhiber le circuit.

Exercice 3 Donnez un contre exemple à la proposition suivante :

Dans un graphe orienté s'il existe un chemin entre un sommet u et un sommet v et si $d[u] < d[v]$ alors v est un descendant de u.

Correction :

Le théorème du *"chemin blanc"* vu en cours indique qu'un sommet v est descendant d'un sommet u si au moment où u est traité par le parcours en profondeur (*i.e.* lorsqu'on appelle Visiter-PP sur u) il existe un chemin de u à v dans le graphe composé uniquement de sommets blancs.

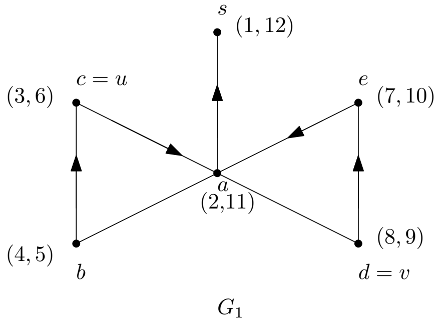
En Figure 2, un contre exemple à la condition énoncé est donné dans le le graphe G_1. Une paire u, v peut être identifiée avec $u = c$ et $v = d$. D'autres paires de sommets satisfont la condition énoncée.

Le parcours en profondeur est effectué en commençant par le sommet s. Une première branche du parcours consiste en l'exploration de a, b et c. Une fois sur c, il n'y a plus de sommet à explorer, nous terminons le traitement de c (*i.e.* il reçoit la date de fin $f[c] = 6$) et nous revenons sur b. La même situation se reproduit. Nous remontons ensuite sur a. Cette fois l'exploration peut recommencer sur la partie d, e.

Dans le cas de ce parcours la date de début de c est égale à 3 et la date de début de d est 8. Il n'y a pourtant pas de relation de parenté entre eux. Comme expliqué ci-avant, c et d sont dans deux branches de l'arbre de parcours en profondeur (*i.e.* l'arbre formé par les arcs de liaisons) et sont donc incomparables.

On peut par contre déterminer quand deux sommets sont en relations de parentés. C'est lorsque l'intervalle, formé de la date de début et de la date de fin, d'un sommet est complètement inclus dans l'intervalle de l'autre. Par exemple l'intervalle de c, $I_c = [3, 6]$ et l'intervalle de a, $I_a = [2, 11]$. Nous avons $I_c \subset I_a$, nous pouvons donc dire que c est un descendant de a. Par contre l'intervalle de d, $I_d = [8, 9]$ est disjoint de I_a et donc ils sont incomparables dans le relation de parenté.

On pourrait être tenté de penser que le problème provient du fait que le sommet a est un sommet d'articulation (aussi appelé sommet déconnectant). Néanmoins, le même phénomène peut se produire sur le graphe G_2 si l'on part de s et que l'on explore en premier le chemin vertical en dessous de s. Les sommets u et v se trouveront dans deux branches différentes.



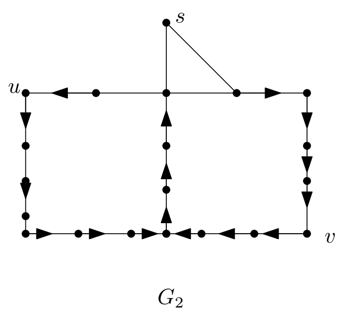


FIGURE 2. Contre exemple : dans G_1 $u = c$ et $v = d$

Exercice 4 Soit $G = (V, E)$ un graphe orienté sans circuit. Nous souhaitons rendre le graphe fortement connexe. Combien d'arcs doit on ajouter ?

Correction :

Nous souhaitons rendre G fortement connexe. Il est donc utile de rappeler qu'un graphe est fortement connexe ssi pour toutes paires de sommets x et y il existe dans G un chemin qui relie x à y et un chemin qui relie y à x. Et nous sommes ici en présence d'un graphe sans circuit, où chaque sommet constitue une composante fortement connexe à lui seul. Nous souhaitons donc faire passer le nombre de composantes fortement connexes de n (*i.e.* le nombre de sommets de G) à 1.

Dans la mesure où nous devons ajouter des arcs. Il convient d'identifier si certains sommets seront plus utiles que d'autres pour cette tâche. Dans un graphe sans circuit, nous pouvons classer les sommets selon trois catégories : les sommets Sources, sommets pour lesquels leur degré entrant est à 0. Les sommets puits, sommets pour lesquels le degré sortant est à 0 et les sommets intermédiaires (*i.e.* sommets qui ont leur degré entrant et leur degré sortant au moins égal à 1). Voir Figure 3.

Un chemin, dans un graphe sans circuit partira toujours d'un sommet Source. Passera possiblement par des sommets Intermédiaires (possiblement aucun) et finira toujours sur un sommet Puits. Il convient donc de relier les sommets Puits aux sommets Sources. Mais il n'est pas nécessaire d'ajouter des arcs aux sommets Intermédiaires.

Il convient maintenant de déterminer comment ajouter les arcs entre les sommets Puits et les sommets Sources et en quelle quantité. Pour ce faire, au niveau des sommets sources, nous allons désigner une *super-Source* qui va être reliée par des arcs aux autres sources, permettant ainsi d'atteindre les autre sources (les arcs rouges dans la Figure 3). Nous procédons de la même manière à un créant un *super-Puits* en ajoutant des arcs des autres puits vers ce *super-Puits* (les arcs en vert dans la Figure 3). Il reste à ajouter un arc allant du *super-Puits* vers la *super-Source*. Nous notons G' le graphe ainsi obtenu .

Si nous notons S l'ensemble des sommets Sources, P l'ensemble des sommets Puits. Le nombre d'arcs ajoutés est $(|S| - 1) + (|P| - 1) + 1$ ce qui est égal à $|S| + |P| - 1$.

Il reste à montrer que le graphe ainsi obtenu est fortement connexe :
Soient a et b deux sommets du graphe original. Notons s (respectivement p) le sommet super-Source (respectivement le sommet super-Puits)

Montrons dans un premier temps qu'il existe un chemin de a vers b. Dans le graphe original il existe un chemin de a vers un sommet puits p'. Ce chemin peut être étendu par p dans G'. Dans le graphe original il existe un chemin d'un sommet source s vers le sommet a. Ce chemin, dans G', peut

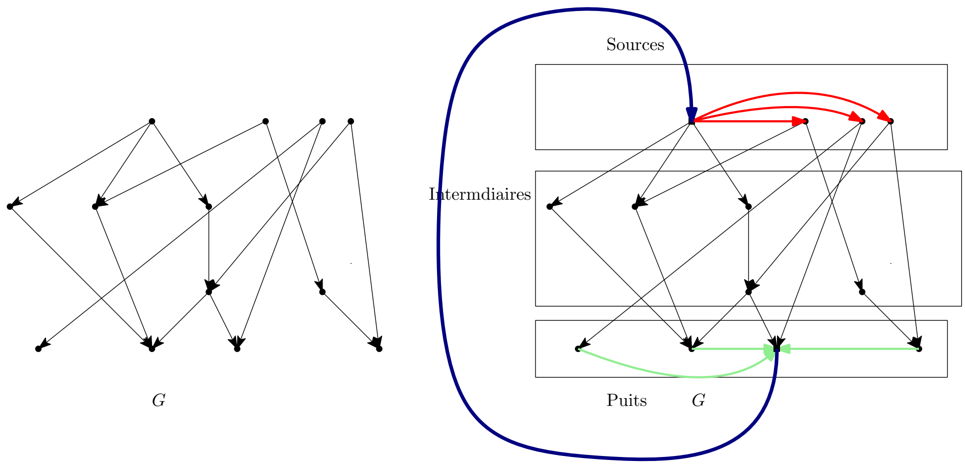


Figure 3. Exemple de graphe sans circuit

être allongée au début par s. Nous obtenons donc dans G' un chemin de la forme $a \rightsquigarrow p' \to p \to s \to s' \rightsquigarrow b$.

Le chemin de b vers a peut être obtenu de la même manière en ayant recours aux sommets p'' et s''.

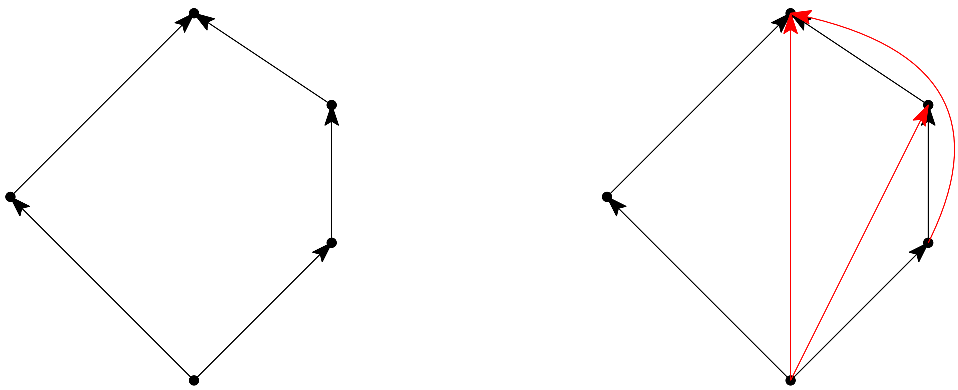
Il est possible d'ajouter seulement $max\{|P|, |S|\}$ arcs, mais pour ce faire nous devons utiliser une notion, appelée couplages, qui n'a pas encore été vue en cours.

Exercice 5 Soit $G = (V, E)$ un graphe orienté sans circuit. Est-ce que le graphe code la relation d'un ordre partiel P ? Nous avons un arc de a vers b ssi $a <_P b$

Correction : Une relation d'ordre, est une relation binaire $\preceq_R$ qui vérifie 3 conditions

(1) Réflexivité : $x \preceq_R x$
(2) Anti-symétrie : $(x \preceq_R y)$ et $(y \preceq_R x) \Rightarrow x = y$
(3) Transitivité : $(x \preceq_R y)$ et $(y \preceq_R z) \Rightarrow x \preceq_R z$

Si on met un arc d'un sommet x vers un sommet y pour signifier que $x \preceq_R y$. Alors un graphe sans circuit respectera les deux premières conditions. Par contre la condition de Transitivité ne sera pas nécessairement respectée. En Figure 4 un graphe sans circuit est représenté et il ne respecte pas la condition de Transitivité. Dans le graphe de droite, les arcs correspondants aux arcs de Transitivité manquants ont été ajoutés.



Un graphe sans circuit Un ordre partiel

FIGURE 4. Un graphe sans circuit et le graphe d'un ordre partiel