TP Noté - Résolution de **2-SAT**
2020-2021

1 Présentation

Une formule logique $2-\textsc{Sat}$ est une conjonction de disjonction où chaque clause comporte exactement 2 litéraux. Le but de ce projet est de comprendre et implémenter un algorithme [1, 2] qui permet de décider si une formule est valide.

Le problème est défini sur un ensemble de variable $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ Un littéral est une variable dans sa forme positive x_i ou sa forme négative $\bar{x}_i$.

Une formule $2-\textsc{Sat}$ est un ensemble de clauses $C = \{C_1, C_2, \ldots, C_m\}$ connectées par des ≪*et*≫ logiques. Le "et" logique est noté $\wedge$.

Chaque clause comporte exactement 2 littéraux connectés par un ≪ou≫ logique (noté $\vee$).

Par exemple la formule F suivante :

$$F = (x_1 \vee \bar{x}_2) \wedge (x_3 \vee x_4) \wedge (\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3) \wedge (x_4 \vee \bar{x}_5) \wedge (x_2 \vee \bar{x}_5)$$

Le problème consiste à déterminer s'il existe une assignation pour chaque variable à vrai ou faux de telle manière que l'évaluation de la formule soit vraie. (Dans le cas de F l'affectation suivante : $x_1 := vrai$, $x_2 := faux$, $x_3 := vrai$ et $x_5 := faux$ évalue la formule à Vrai [1]).

a	b	$a \vee b$	$a \wedge b$	$a \Rightarrow b$
0	0	0	0	1
0	1	1	0	1
1	0	1	0	0
1	1	1	1	1

Table 1 – table de vérité des opérateurs $\wedge$, $\vee$ et $\Rightarrow$

1. Remarquons qu'avec cette affectation quelle que soit la valeur de x_4 la formule est évaluée à vrai.

2 Questions

Exercice 1 Soit F une formule 2$-$Sat avec n variables. Quel est le nombre maximum de clauses que peut comporter F ?

Exercice 2 Donnez un exemple de formule 2$-$Sat qui n'est pas satisfaisable.

Exercice 3 Écrivez une fonction qui étant donné une affectation pour les variables détermine si la formule est évaluée à vrai ou faux.

Exercice 4 Étant donné une formule 2$-$Sat, écrivez une fonction qui construit le graphe orienté associé.

Exercice 5 À partir du graphe construit à l'exercice précédent, implémentez l'algorithme de [1] qui détermine si la formule est valide ou pas. Si la formule est valide, la fonction renverra une affectation.

3 Modalités

Ce travail doit être effectué en binôme (au plus un trinôme par groupe). Vous devez **déclarer votre binôme** auprès du chargé de TP. Vous disposez d'**une semaine (7 jours)** à partir de la distribution du sujet pour terminer le travail.

Le rendu se fera sur Moodle, vous déposerez le code et le compte rendu expliquant votre démarche dans le dossier destiné à votre binôme. Une attention particulière sera porté à la présentation et la rédaction du rapport. (*i.e.* Un titre, les membres du projets, un plan, les explications, et un certain nombre de relectures...)

NB : Au delà de la date limite de rendu, il ne sera plus possible de déposer vos travaux.

Références

[1] Bengt Aspvall, Michael F. Plass, and Robert Endre Tarjan. A linear-time algorithm for testing the truth of certain quantified boolean formulas. *Inf. Process. Lett.*, 8(3) :121–123, 1979.

[2] Bengt Aspvall, Michael F. Plass, and Robert Endre Tarjan. Erratum : A linear-time algorithm for testing the truth of certain quantified boolean formulas. *Inf. Process. Lett.*, 14(4) :195, 1982.