

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ  
ФЕДЕРАЦИИ  
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Национальный исследовательский  
Нижегородский государственный университет  
им. Н.И. Лобачевского (ННГУ)»

**Институт информационных технологий, математики и механики**

**ОТЧЕТ**

по научно-исследовательской работе

на тему:

**«Изучение синхронизации ансамбля элементов под действием  
тормозящей связи на модели ФитцХью–Нагумо»**

**Выполнил:**

студент группы 381903\_2 Варварин  
Евгений

**Проверил:**

заведующий каф. ТУДС доктор  
физико–математических наук Осипов  
Григорий Владимирович

Нижний Новгород  
2022

# Содержание

<b>1</b>	<b>Введение</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Модель</b>	<b>4</b>
<b>3</b>	<b>Отрицательная тормозящая связь</b>	<b>5</b>
<b>4</b>	<b>Положительная малая связь</b>	<b>8</b>
4.1	Четное число элементов . . . . .	8
4.2	Нечетное число элементов . . . . .	11
4.3	Циклопный режим . . . . .	16

# 1. Введение

Целью данной научной работы является изучение синхронизации ансамбля ансамбля элементов, где каждый элемент представлен нелинейной динамической системой ФитцХью–Нагумо. Все элементы соединены друг с другом тормозящей связью по принципу "Каждый с каждым".

## 2. Модель

В качестве модели отдельного нейрона была использована феноменологическую модель Бонхоффера-Ван дер Поля (первые два уравнения), воспроизводящую периодическую генерацию потенциалов действия, при воздействии постоянного внешнего стимула:

$$\begin{cases} \tau_1 \frac{dx_i(t)}{dt} = x_i(t) - \frac{x_i^3(t)}{3} - y_i(t) - z_i^1(t)(x_i(t) - \nu^{inh}) - z_i^2(t)(x_i(t) - \nu^{ex}) + S_i \\ \frac{dy_i(t)}{dt} = x_i(t) - by_i(t) + a \\ \tau_2 \frac{dz_i^1(t)}{dt} = \sum_j (g_{ij}^{inh} F(x_j)) - z_i^1 \\ \tau_3 \frac{dz_i^2(t)}{dt} = \sum_j (g_{ij}^{ex} F(x_j)) - z_i^2 \end{cases} \quad (1)$$

где  $x_i$  переменная, описывающая динамику мембранного потенциала,  $y_i$  - совокупность действия ионных токов. Третье и четвертое уравнения описывают взаимодействие между элементами в ансамбле. Переменная  $z_i^1$  ответственна за синаптическую тормозную связь между нейронами,  $z_i^2$  - за синаптическую возбуждающую связь между нейронами.  $S_i$  параметры в модели, отвечающие внешним стимулам, прикладываемым к нейронам,  $\nu^{inh}$  и  $\nu^{ex}$  - потенциалы реверсии тормозных и возбуждающих синапсов.  $g_{ij}^{inh}$ ,  $g_{ij}^{ex}$  матрицы коэффициентов, определяющих силу и топологию тормозных и возбуждающих связей в нейронной сети.  $F(x_i)$  функция Хэвисайда.

Значения параметров, неизменных во всех численных экспериментах были следующими:  $a = 0.7$ ,  $b = 0.8$ ,  $\tau_1 = 0.08$ ,  $\tau_2 = 3.1$ ,  $\tau_3 = 1.15$ ,  $\nu^{inh} = -1.5$  и  $\nu^{ex} = +1.5$

В данном исследовании мы рассматривали воздействие только воздействие только тормозящей связи (т.е. приняли  $z_i^2(t) = 0$ ), следовательно, система примет вид:

$$\begin{cases} \tau_1 \frac{dx_i(t)}{dt} = x_i(t) - \frac{x_i^3(t)}{3} - y_i(t) - z_i^1(t)(x_i(t) - \nu^{inh}) + S_i \\ \frac{dy_i(t)}{dt} = x_i(t) - by_i(t) + a \\ \tau_2 \frac{dz_i^1(t)}{dt} = \sum_j (g_{ij}^{inh} F(x_j)) - z_i^1 \end{cases} \quad (2)$$

Все элементы воздействуют друг на друга с одинаковой силой, равной значению параметра  $G_{inh}$  - основного изучаемого параметра в наших исследованиях. Чтобы оценить поведение системы были использованы параметры порядка  $R_1$  и  $R_2$ . Они вычисляются следующим способом:

$$R_1 = \frac{1}{N} \left| 1 + \sum_{j=2}^N e^{i2\pi \frac{\Delta t_i}{T}} \right| \quad (3)$$

$$R_2 = \frac{1}{N} \left| 1 + \sum_{j=2}^N e^{i4\pi \frac{\Delta t_i}{T}} \right| \quad (4)$$

### 3. Отрицательная тормозящая связь

В данном разделе была рассмотрена отрицательная тормозящая связь ( $G_{inh} < 0$ ) для разного количества элементов (4, 5 и 7 элементов). В ходе численных экспериментов было обнаружено, что при таких условиях на  $G_{inh}$  система может демонстрировать два различных состояния:

1. Состояние, которое происходит при малой по модулю связи ( $|G_{inh}|$ ).

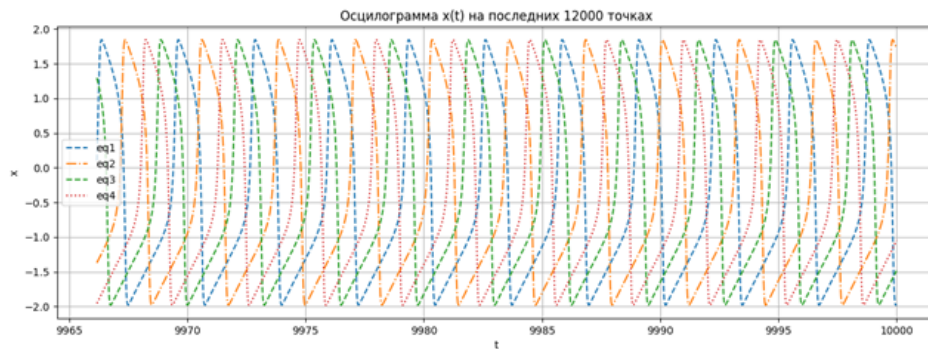


Рис. 1: Осциллограмма для 4 элементов при малой отрицательной связи

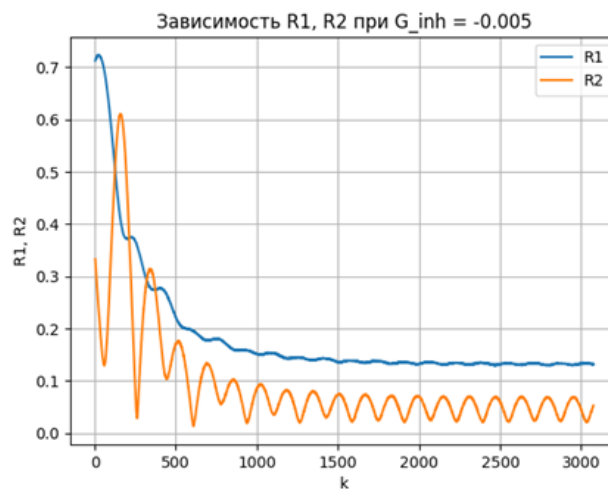


Рис. 2: График зависимости параметров  $R_1$ ,  $R_2$  от времени.

2. Состояние, наблюдаемое при относительно большой по модулю связи.

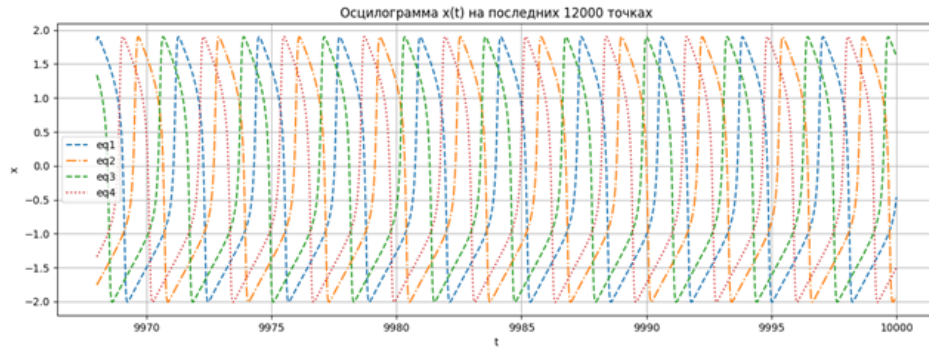


Рис. 3: Осциллограмма для 4 элементов при большой отрицательной связи

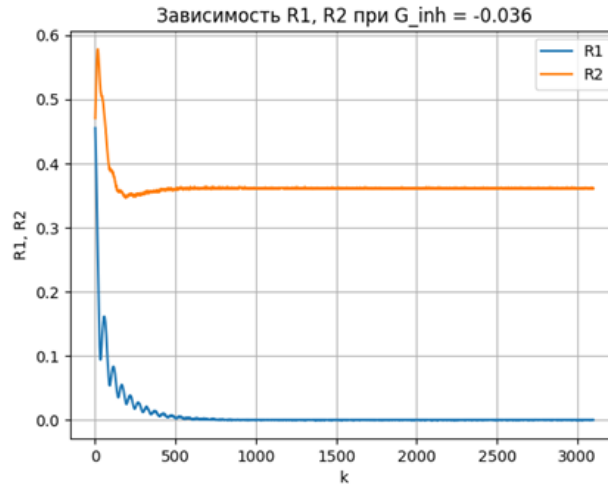


Рис. 4: График зависимости параметров  $R_1$ ,  $R_2$  от времени.

Оба этих режима на осциллограммах похожи на splay state (синхронный установившийся режим, который характеризуется нахождением всех элементов на одинаковом удалении от соседних в любой момент времени), однако при splay state должно выполняться  $R_1 = R_2 = 0$ , а это, как видно из рисунков, не выполняется ни в одном из случаев. Далее были проведены попытки обнаружить момент, в который первый режим переходит во второй.

На графиках из Рис.5 видно, что в каждом из случаев переходный момент достигается при немного разных значениях параметра  $G_{inh}$  и зависит от конкретных начальных условий.

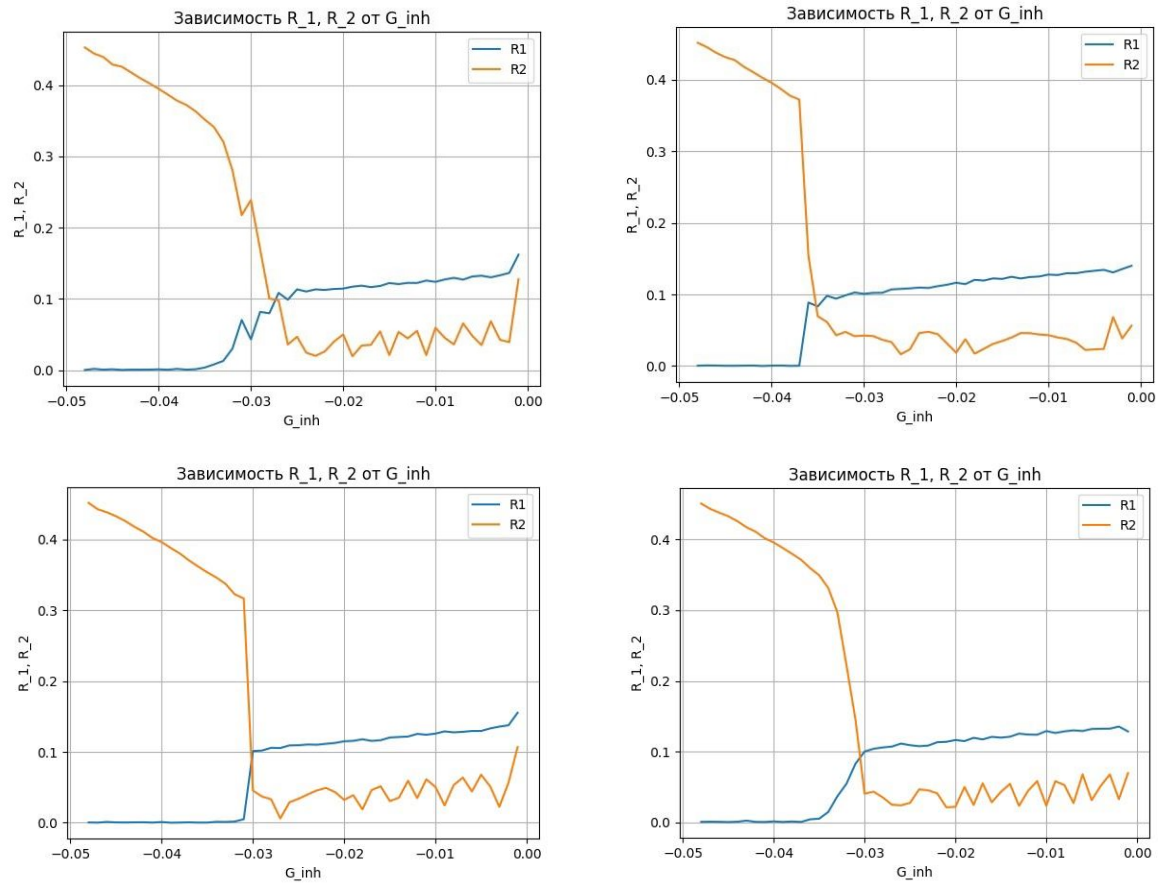


Рис. 5: Графики зависимости  $R_1$ ,  $R_2$  от  $G_{inh} < 0$  при разных НУ

Таким образом мы определили, что при отрицательной величине связи  $G_{inh}$  может наблюдаться 2 различных режима, которые определяются значением параметра тормозящей связи и начальными условиями.

Результаты предоставлены для четырех элементов, однако это выполняется и для 5 и 7 элементов.

## 4. Положительная малая связь

### 4.1. Четное число элементов

При положительной связи большое значение играет то, четное число элементов взято или нет. Для четного числа элементов при малой положительной связи (сила связи такая, при которой ни один элемент не подавляется) система демонстрирует два устойчивых режима, определяемые только начальными условиями:

1. Синфазный синхронный режим (Или режим "4" для четырех элементов). Все элементы синхронизированы и движутся с одинаковой фазой.

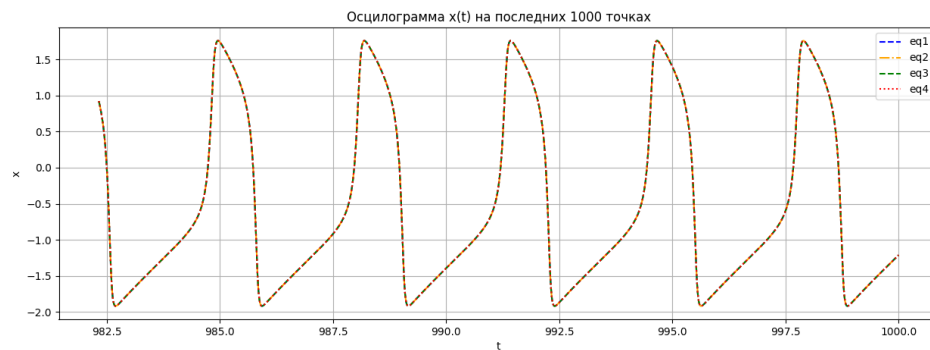


Рис. 6: Осциллограмма синфазного режима

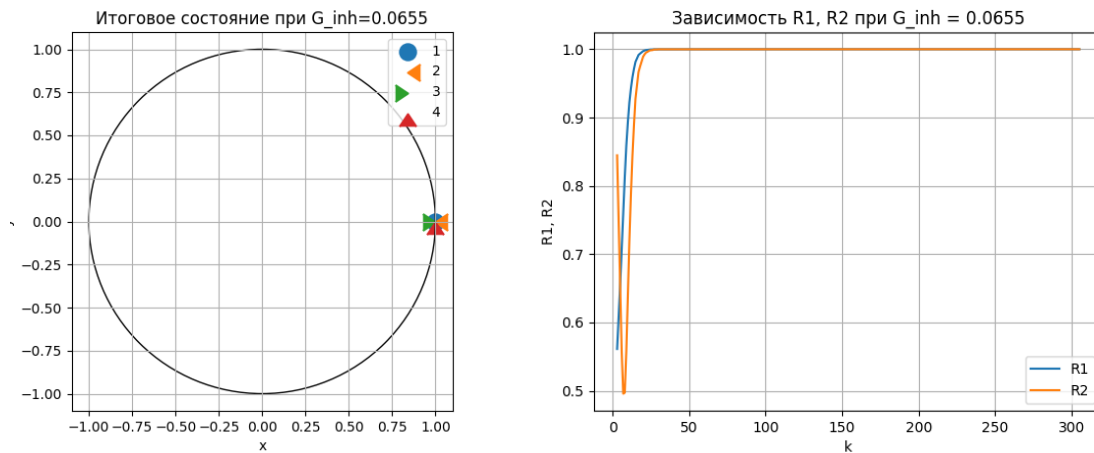


Рис. 7: Расположение элементов в конечный момент времени относительно первого на единичной окружности (слева) и график зависимости параметров порядка от времени при синфазном режиме (справа)



2. Противофазный режим (Или режим "2-2" для четырех элементов). Все элементы делятся на две группы и синхронизированы по фазе относительно своей группы. Группы же находятся в противофазах относительно друг друга.

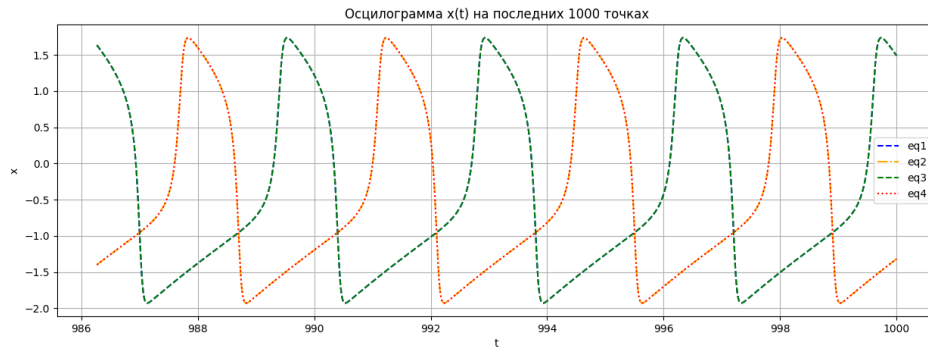


Рис. 8: Осциллограмма противофазного режима

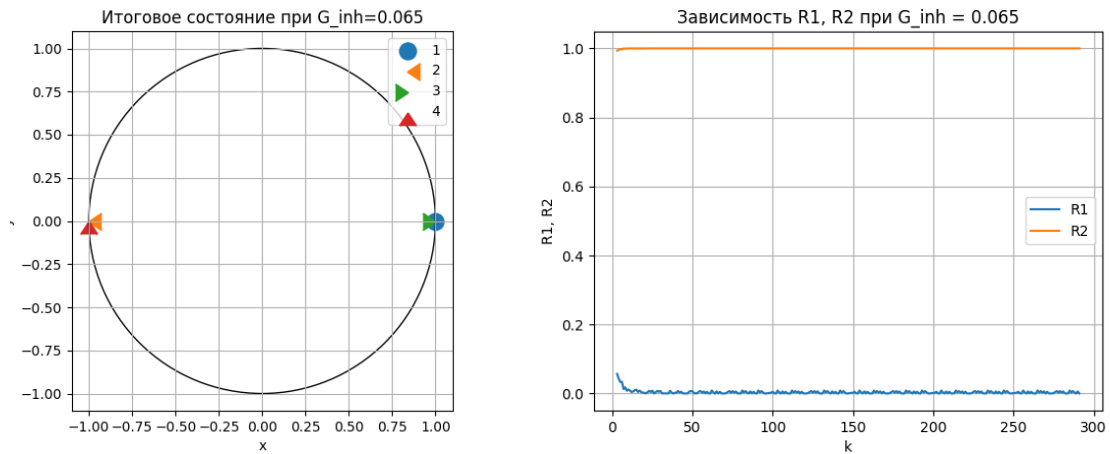


Рис. 9: Расположение элементов в конечный момент времени относительно первого на единичной окружности (слева) и график зависимости параметров порядка от времени при противофазном режиме (справа)

Других устойчивых режимов обнаружено не было. Остальные режимы являются переходными для этих двух.

Было выяснено что при одних начальных условиях при любой силе связи в установленных пределах синфазный и противофазный режимы не изменяются, т.е. не зависят от конкретного значения  $G_{inh}$ , соответственно, реализация конкретного режима зависит только от начальных условий.

При любом значении параметра связи в установленных границах финальные значения параметров  $R_1$  и  $R_2$  одинаковы (изменяется только время переходного процесса) и тип синхронизации также одинаковый. Соответственно, выход на определенный режим не зависит от силы связи и определяется только начальными условиями.

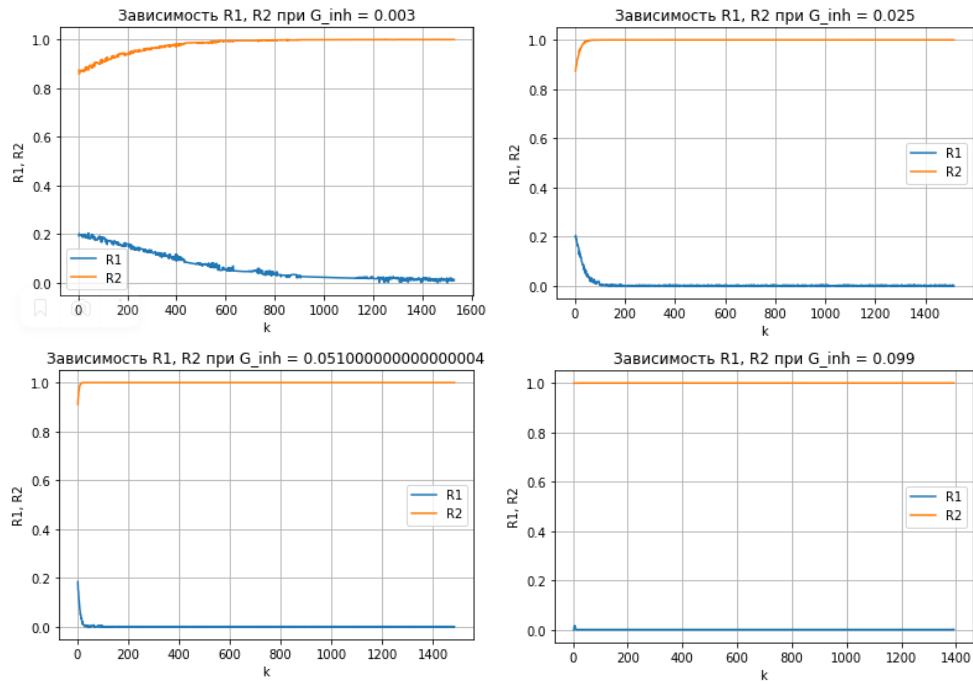


Рис. 10: На примере противофазного режима показано, что реализация режима не зависит от  $G_{inh}$  в установленных пределах

Для всех экспериментов генерировались начальные условия методом случайного выбора точки из промежутка  $-3 \leq x \leq 3$  и  $-3 \leq y \leq 3$ .

Для определения примерного шанса получения одного из этих режимов (для данного способа выбора начальных условий) было применено статистическое исследование путем запуска большого числа экспериментов с разными начальными условиями. Его результаты можно увидеть на рисунке Рис. 12.

```

Статистическое исследование, число экспериментов 1000
Параметр тормозящей связи G_inh = 0.02
4: 874
1-1-1-1: 0
2-2: 126
2-1-1: 0
3-1: 0
undef: 0

Статистическое исследование, число экспериментов 500
Параметр тормозящей связи G_inh = 0.02
4: 419
1-1-1-1: 0
2-2: 81
2-1-1: 0
3-1: 0
undef: 0
Process end. Final time: 9763.110428333282

```

Рис. 11: Статистические результаты для 500 и 1000 элементов

Таким образом мы можем оценить, что при таком способе выбора начальных условий шанс того, что полученный режим будет противофазный около 10 процентов.

## 4.2. Нечетное число элементов

Рассмотрим синфазный и противофазный режимы для нечетного числа элементов:

### 1. Синфазный режим.

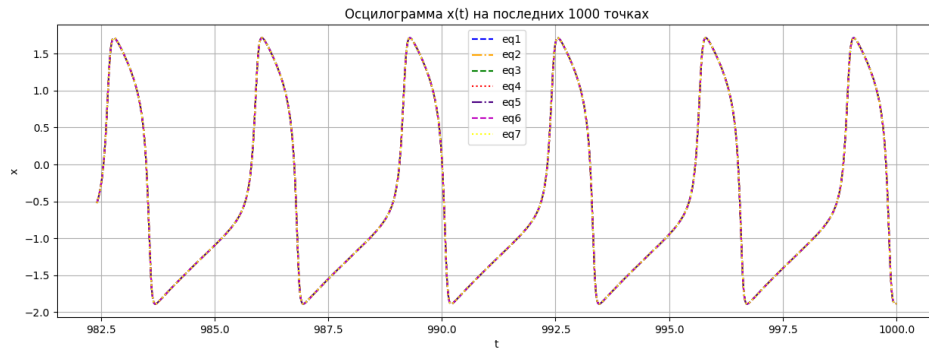


Рис. 12: Осциллограмма синфазного режима

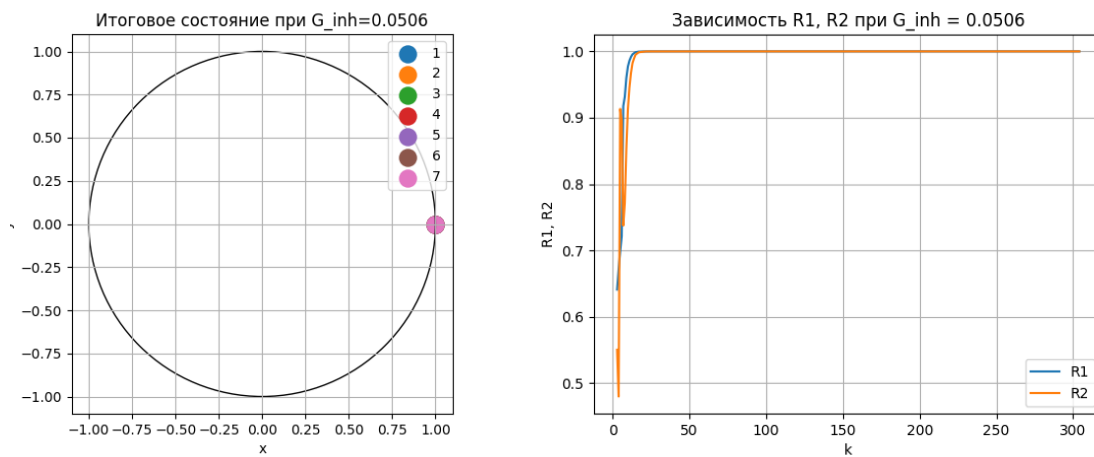


Рис. 13: Расположение элементов в конечный момент времени относительно первого на единичной окружности (слева) и график зависимости параметров порядка от времени при синфазном режиме (справа)

## 2. Противофазный режим.

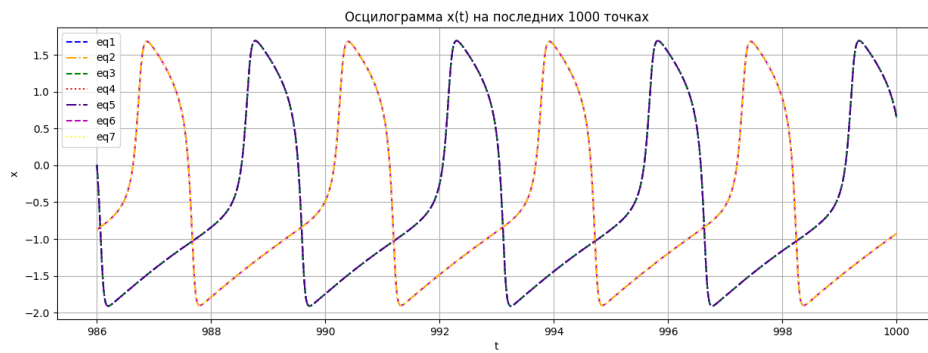


Рис. 14: Осциллограмма противофазного режима

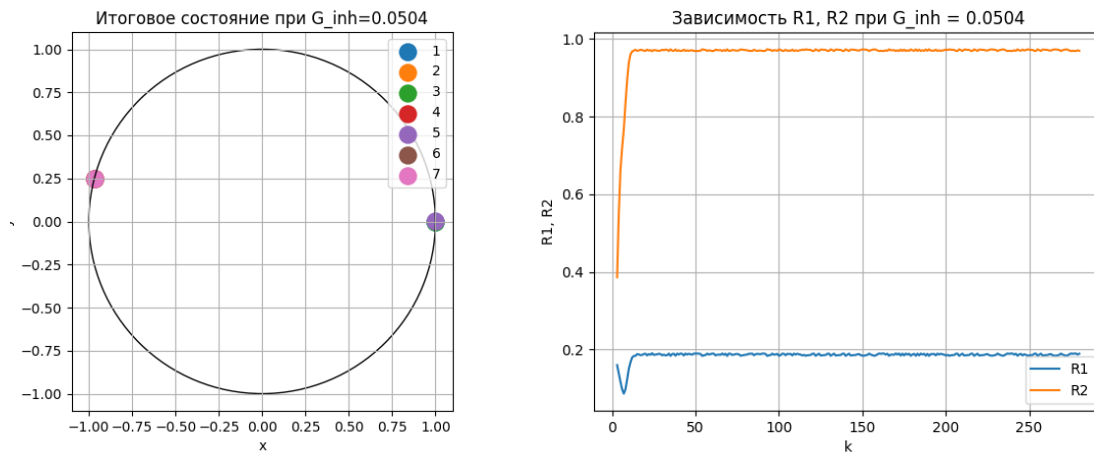


Рис. 15: Расположение элементов в конечный момент времени относительно первого на единичной окружности (слева) и график зависимости параметров порядка от времени при противофазном режиме (справа)

Однако можно заметить, что параметры порядка противофазного режима для 7 элементов отличаются от аналогичных для 4 элементов -  $R_2$  принимает значение меньше единицы, а  $R_1$  сильно больше нуля.

Если проследить за одной конкретной системой с конкретными начальными условиями, то при изменении параметра связи, мы можем наблюдать качественные изменения динамики системы. Для этого возьмем начальные условия, достаточно благоприятные для возникновения противофазного режима:

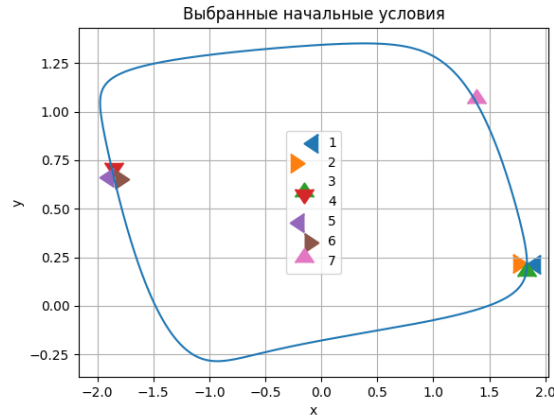


Рис. 16: Выбранные начальные условия

Обратим внимание, что в данном примере (Рис. 17) при  $G_{inh} < 0.0325$  мы получаем финальное состояние типа синфаза. Потом при увеличении связи режим меняется и мы получаем противофазный режим. Далее, увеличивая связь, уже при  $G_{inh} = 0.061$  режим снова становится синфазным. При дальнейшем увеличении параметра связи центральный элемент (розовый треугольник на Рис. 16) будет подавлен. Этот пример дает понять, что наличие противофазного режима зависит от силы связи.

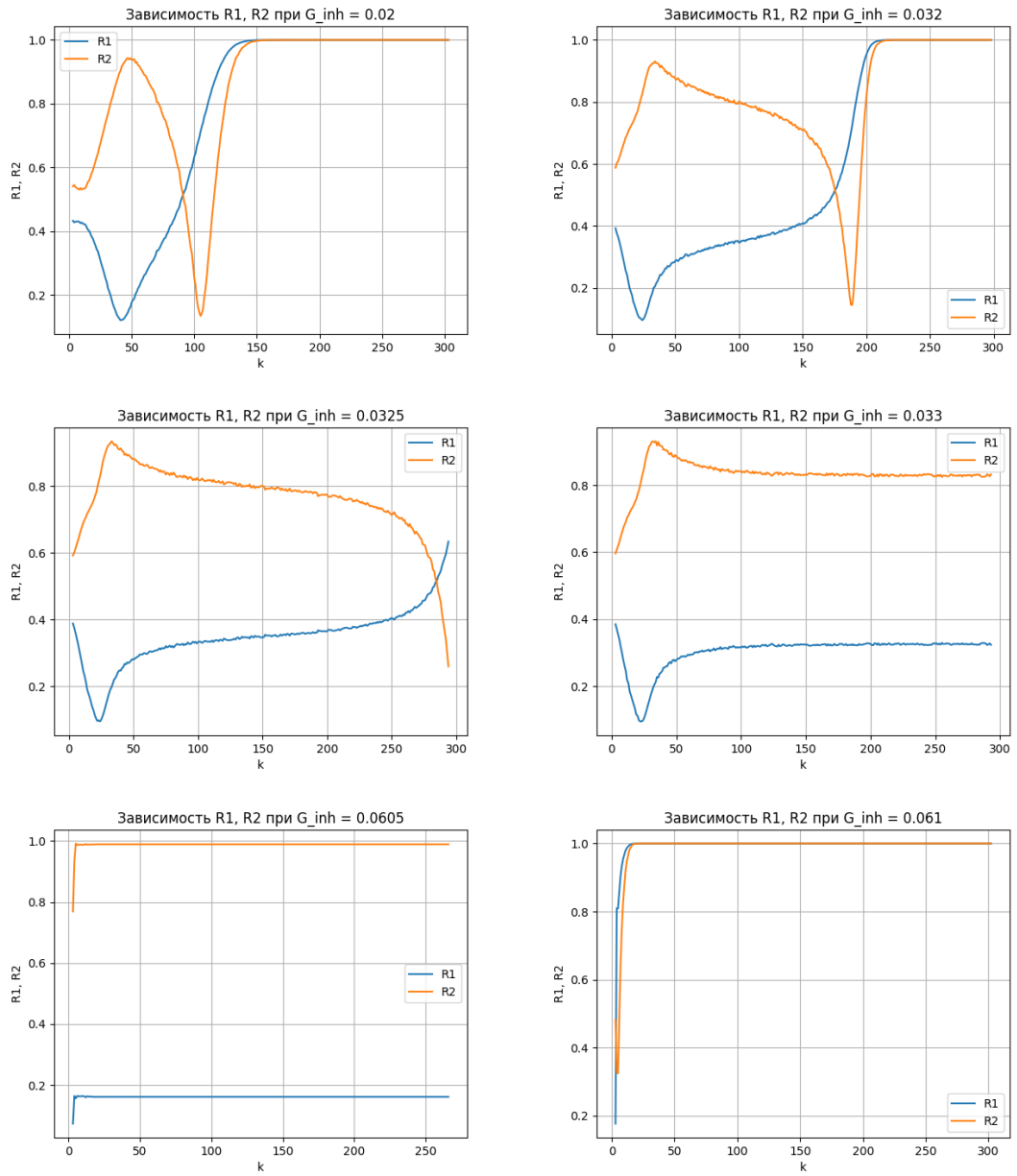


Рис. 17: Изменение графиков  $R_{1,2}(t)$  при увеличении параметра связи  $G_{inh}$

Теперь рассмотрим зависимость от времени интегрирования (Рис. 18). Возьмем начальные условия и значение  $G_{inh}$  такое, при котором ещё наблюдается противофазный режим на большом времени интегрирования.

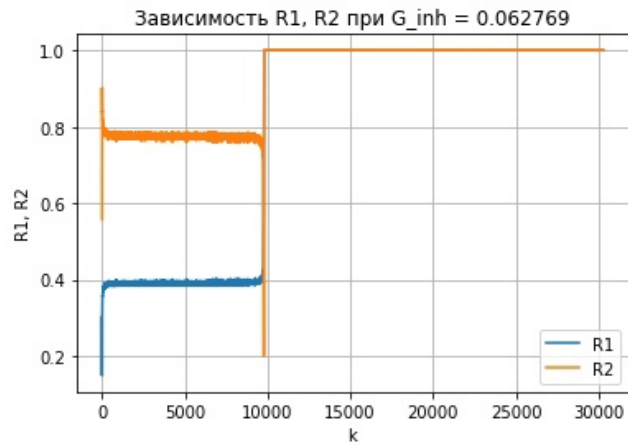


Рис. 18: Противофазный режим на большом времени интегрирования

Можно заметить, что, взяв для этого случая время интегрирования такое же, как в предыдущих случаях, мы приняли бы это за противофазный режим. Однако через достаточно долгое время он переходит в синфазный режим.

В итоге можно предположить, что противофазное состояние системы может быть лишь очень длинным переходным процессом.

### 4.3. Циклопный режим

Для нечетного числа элементов были попытки найти "Циклопный режим". Это такой устойчивый режим для нечетной системы из  $N$  элементов, при котором образуется два кластера  $\text{int}(\frac{N}{2})$  (целая часть от половины элементов) и между ними один оставшийся элемент. На единичной окружности это выглядит

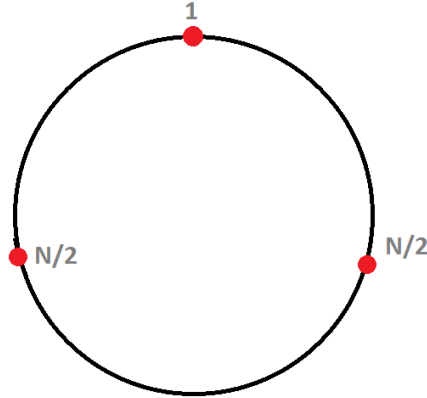


Рис. 19: Циклопный режим на единичной окружности

В ходе численных экспериментов данный режим не был найден.