Глава 3 (Сазанович Владислав M3339)

In [36]:
```
import numpy as np
import math
import matplotlib.pyplot as plt
import scipy
import scipy.stats
import hashlib
import time
import copy

from numpy.linalg import matrix_rank
from tqdm import tqdm
```

In [37]:
```
n = 25
k = 10
d = 15
```

In [38]:
```
# Вспомогательны фунции: факториал и сочетания
def fact(n):
    cur = 1
    for i in range(1, n + 1):
        cur *= i
    return cur

def comb(n, k):
    return fact(n) / (fact(k) * fact(n - k))
```

Границы

In [39]:
```
def satisfyHemming(n, k, d):
    return 2**k <= 2**n / (np.sum([comb(n, i) for i in range(
0, (d - 1) // 2 + 1)]))

def satisfyVHilbert(n, k, d):
    return 2**(n-k) > np.sum([comb(n - 1, i) for i in range(0
, d - 1)])

def satisfyGraismer(n, k, d):
    return n >= np.sum([np.ceil(d / (2**i)) for i in range(0,
k)])
```

Функции для поиска k или d удовлетворяющих границе

Processing math: 100%

In [40]:
```
# given n and d, find min k : (n, k, d) satisfy border
def findK(n, d, border, name=None, ret=True):
    for k in range(0, n):
        if not border(n, k, d):
            if not (name is None):
                print("{} n = {} d = {}: k = {}".format(name,
n, d, k - 1))
            if ret:
                return k - 1
            else:
                return
    return 0
```

In [41]:
```
# given n and k, find min d : (n, k, d) satisfy border
def findD(n, k, border, name=None, ret=True):
    for d in range(1, n):
        if not border(n, k, d):
            if not (name is None):
                print("{} n = {} k = {}: d = {}".format(name,
n, k, d - 1))
            if ret:
                return d - 1
            else:
                return
    return 0
```

Задание 1

Коды Хемминга

$n = 2^r - 1, k = 2^r - r - 1, d = 3$

Граница Хемминга:

$2^k <= \frac{2^n}{\sum_{i=0}^{t} C_n^i}$

$\sum_{i=0}^{t} C_n^i <= 2^r$

$C_n^0 + C_n^1 <= 2^r$

$2^r = 2^r$

Проверим:

Processing math: 100%

In [42]:
```
def satisfyHemmingWithEq(n, k, d):
    t = (d - 1) // 2
    return 2**k == 2**n / (np.sum([comb(n, i) for i in range(
0, t + 1)]))

for r in range(1, 10):
    print(satisfyHemmingWithEq(2**r - 1, 2**r - r - 1, 3))
```

```
True
True
True
True
True
True
True
True
True
```

Код Голея

$n = 23, k = 12, d = 7$

Достаточно просто проверить:

In [43]:
```
satisfyHemmingWithEq(23, 12, 7)
```

Out[43]:
```
True
```

Задание 2

Коды к дуальным кодам Хемминга

$n = 2^r - 1, k = r, d = 2^{r-1}$

$\delta = \frac{d}{n} = \frac{2^{r-1}}{2^r - 1} \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 1/2$

Processing math: 100%

Граница Хемминга

$R \leq 1 - h(\frac{\delta}{2}),\ h(x) = x\ log_2(x) - (1 - x)\ log_2(1 - x)$

$R \leq 1 - h(\frac{1}{4}) = \frac{1}{4} * (- 2) - \frac{3}{4} * (log_2(3) - 2) = 1 + \frac{log_2(3)}{4}$

$R \leq 1.4$

$\frac{r}{2^r - 1} \leq 1.4$

При больших r код не лежит на границе Хемминга

Граница Варшамова-Гилберта

$R_{VG} = 1 - h(\delta) = 1 - h(\frac{1}{2}) = 1 - (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}) = 0$

При больших r:

$R = \frac{r}{2^r - 1} \rightarrow 0$ => При больших r код лежит на границе Варшамова-Гилберта

Граница Плоткина

$k \leq n - 2d$

$d \leq \frac{n - k}{2}$

$2^{r-1} \leq \frac{2^r - r - 1}{2}$

При больших r коды дуальные к кодам Хемминга будут лежать на границе Плоткина.

Задание 3

In [44]:
```
findK(n, d, satisfyHemming, "Граница Хемминга", ret=False)
```

```
Граница Хемминга n = 25 d = 15: k = 5
```

In [45]:
```
findK(n, d, satisfyVHilbert, "Граница Варшамова-Гилберта", re
t=False)
```

```
Граница Варшамова-Гилберта n = 25 d = 15: k = 1
```

In [46]:
```
findK(n, d, satisfyGraismer, "Граница Грайсмера", ret=False)
```

```
Граница Грайсмера n = 25 d = 15: k = 2
```

Processing math: 100%

Для $n = 25, d = 15$ возможно построить коды с $1 < k <= 2$.

Задание 4

In [47]:
```
findD(n, k, satisfyHemming, "Граница Хемминга", ret=False)
```

```
Граница Хемминга n = 25 k = 10: d = 10
```

In [48]:
```
findD(n, k, satisfyVHilbert, "Граница Варшамова-Гилберта", re
t=False)
```

```
Граница Варшамова-Гилберта n = 25 k = 10: d = 6
```

In [49]:
```
findD(n, k, satisfyGraismer, "Граница Грайсмера", ret=False)
```

```
Граница Грайсмера n = 25 k = 10: d = 9
```

Для $n = 25, k = 10$ возможно построить коды с $6 < d <= 9$.

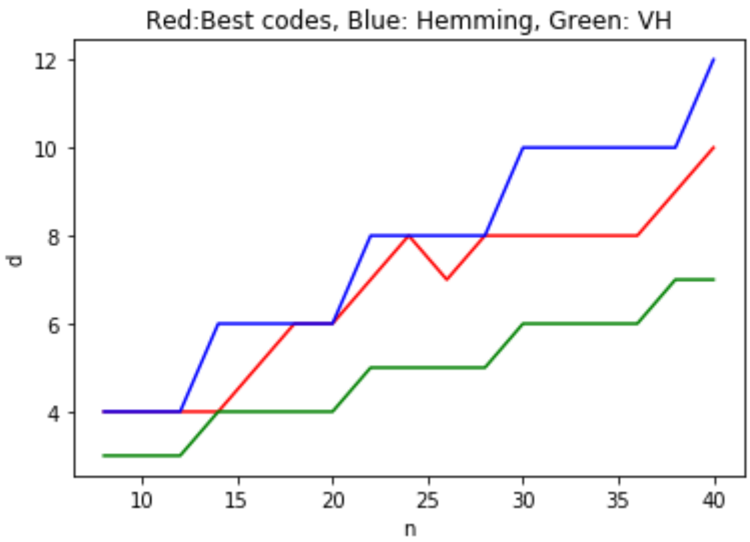
Задание 5

Данные из таблицы для $\frac{k}{n} = \frac{1}{2}$

In [50]:
```
code_n = np.array([8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28,
30, 32, 34, 36, 38, 40])
code_d = np.array([4, 4 , 4 , 4 , 5 , 6 , 6 , 7 , 8 , 7 , 8 ,
8 , 8 , 8 , 8 , 9 , 10])
```

Processing math: 100%

In [51]:
```
def getHemmingD(n):
    res_d = []
    for i in range(0, len(n)):
        res_d.append(findD(n[i], n[i] // 2, satisfyHemming))
    return np.array(res_d)

def getVHilbertD(n):
    res_d = []
    for i in range(0, len(n)):
        res_d.append(findD(n[i], n[i] // 2, satisfyVHilbert))
    return np.array(res_d)

plt.plot(code_n, code_d, 'r')
plt.plot(code_n, getHemmingD(code_n), 'b')
plt.plot(code_n, getVHilbertD(code_n), 'g')

plt.xlabel('n')
plt.ylabel('d')
plt.title('Red:Best codes, Blue: Hemming, Green: VH')

plt.show()
```

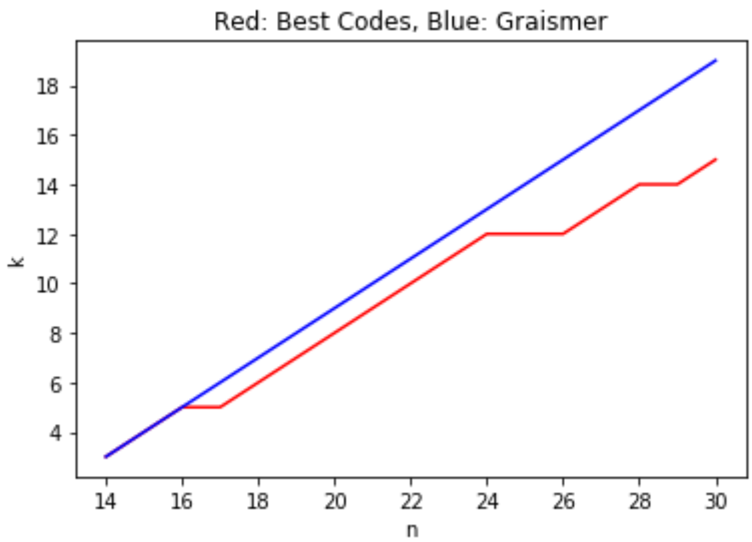


Задание 7

Processing math: 100%

In [52]:
```
best_n = np.array([14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24
, 25, 26, 27, 28, 29, 30])
best_k = np.array([3 , 4 , 5 , 5 , 6 , 7 , 8 , 9 , 10, 11, 12
, 12, 12, 13, 14, 14, 15])

def getGraismerK(n):
    res_k = []
    for i in range(0, len(n)):
        res_k.append(findK(n[i], 8, satisfyGraismer))
    return np.array(res_k)

print(best_k)
print(getGraismerK(best_n))

plt.plot(best_n, best_k, 'r')
plt.plot(best_n, getGraismerK(best_n), 'b')

plt.xlabel('n')
plt.ylabel('k')
plt.title('Red: Best Codes, Blue: Graismer')

plt.show()
```

```
[ 3  4  5  5  6  7  8  9 10 11 12 12 12 13 14 14 15]
[ 3  4  5  6  7  8  9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19]
```



Задание 8

Напишем простой алгоритм по построению таких кодом. Будем постепенно пытаться добавлить новый случайный вектор и проверять ЛНЗ ли он со всеми возможными комбинациями из $d-1$ вектора.

Processing math: 100%

In [53]:
```
# Helpers for lists
def first_or_default(arr, default):
    if len(arr) == 0:
        return default
    return arr[0]

def first_not_zero(row):
    return first_or_default(np.where(row > 0)[0], len(row))

def last_or_default(arr, default):
    if len(arr) == 0:
        return default
    return arr[-1]

def last_not_zero(row):
    return last_or_default(np.where(row > 0)[0], len(row))
```

In [54]:
```
# Hashing of x
def get_hash(x): # x is np array
    return hashlib.sha1(x).hexdigest()
```

Напишем функцию которая будет смотреть ЛНЗ ли набор векторов. (Преобразуем Гауссом -> Считаем ранг)

In [55]:
```
# Sort by first non zero
def sort(H):
    return sorted(H, key=lambda row: first_not_zero(row))
```

Processing math: 100%

In [56]:
```
# Applies Gaussian transformation and calculates rank for bin
ary matrix
def rank(H):
    for i in range(len(H)):
        H = sort(H)
        col_i = first_not_zero(H[i])
        if col_i == -1:
            break

        for j in range(i + 1, len(H)):
            col_j = first_not_zero(H[j])
            if col_j == -1:
                break
            if col_i == col_j:
                H[j] = (H[j] - H[i] + 2) % 2

    for i in range(len(H) - 1, 0, -1):
        col_i = first_not_zero(H[i])
        if col_i == -1:
            continue

        for j in range(i + 1, len(H)):
            col_j = first_not_zero(H[j])
            if col_j == -1:
                continue
            if col_i == col_j:
                H[j] = (H[j] - H[i] + 2) % 2

    rank = 0
    for i in range(len(H)):
        if first_or_default(np.where(H[i] > 0)[0], None) is n
ot None:
            rank += 1
    return rank
```

In [57]:
```
def is_lineary_independent(H):
    return rank(np.array(H)) == len(H)
```

In [58]:
```
# Check
HH = np.array([
    [0, 1, 0, 0, 0, 0],
    [1, 0, 1, 0, 0, 0]
])

print(is_lineary_independent([*HH, [0, 1, 1, 0, 0, 0]]))
print(is_lineary_independent([*HH, [1, 1, 1, 0, 0, 0]]))
```

```
True
False
```

Рекурсивно генерируем все возможные упорядоченные комбинации из $d - 1$.

Processing math: 100%

In [59]:
```
def can_add_to_H(H, h_cand, d):
    for i in range(len(H)):
        if not recursive_check(H, h_cand, d, [], i):
            return False
    return True

def recursive_check(H, h_cand, lim, CH, c_id):
    if len(CH) >= lim - 1:
        return True

    CH.append(H[c_id])

    nld = is_lineary_independent([*CH, h_cand])

    if not nld: # already not linear independent
        return False

    for i in range(c_id + 1, len(H)):
        nld = recursive_check(H, h_cand, lim, CH, i)
        if not nld:
            return False

    CH.pop()
    return True
```

In [60]:
```
# Check
H1 = np.array([
    [0, 1, 0, 0, 0, 0],
    [1, 0, 1, 0, 0, 0],
    [1, 0, 0, 1, 0, 0],
    [1, 0, 0, 0, 1, 0]
])

print(can_add_to_H(H1, [1, 1, 1, 0, 0, 0], 2))
print(can_add_to_H(H1, [0, 1, 1, 0, 0, 0], 2))


print(can_add_to_H(H1, [1, 1, 1, 0, 0, 0], 3))
print(can_add_to_H(H1, [0, 1, 1, 0, 0, 0], 3))
```

```
True
True
False
True
```

Processing math: 100%

In [61]:
```
# fast generator of first d vectors
def generate_first_d(n, k, d):
    r = n - k
    H = []
    lc_counting  = []
    lc_unique = set()

    zero_v = np.zeros(r).astype(int)
    lc_counting.append(zero_v)
    lc_unique.add(get_hash(zero_v))

    for i in range(d):
        it = 0
        while (True):
            it += 1
            if it > 10:
                break

            cur = np.random.randint(0, 2, size=r, dtype=int)
            cur_h = get_hash(cur)
            if cur_h in lc_unique:
                continue

            H.append(cur)
            lc_unique.add(cur_h)
            lc_counting.append(cur)

            for v in lc_counting:
                temp = (cur + v) % 2
                temp_h = get_hash(temp)

                if temp_h not in lc_unique:
                    lc_unique.add(temp_h)
                    lc_counting.append(temp)
            break
    return H
```

Сам алгоритм:

- Генерируем рандомный вектор
- Рекурисивно генерируем комбинации и проверяем ЛНЗ

Processing math: 100%

In [62]:
```
def get_linear_code_vg(n, k, d):
    r = n - k

    H = generate_first_d(n, k, d)

    it = 10e3
    while len(H) < n:
        it -= 1
        if it == 0:
            return None
        c = np.random.randint(0, 2, size=r, dtype=int)

        if can_add_to_H(H, c, d / 4):
            if can_add_to_H(H, c, d / 2):
                if can_add_to_H(H, c, d):
                    H.append(c)
                else:
                    continue
            else:
                continue
        else:
            continue

    return np.asarray(H).reshape(r, n)
```

In [63]:
```
get_linear_code_vg(20, 10, 4)
```

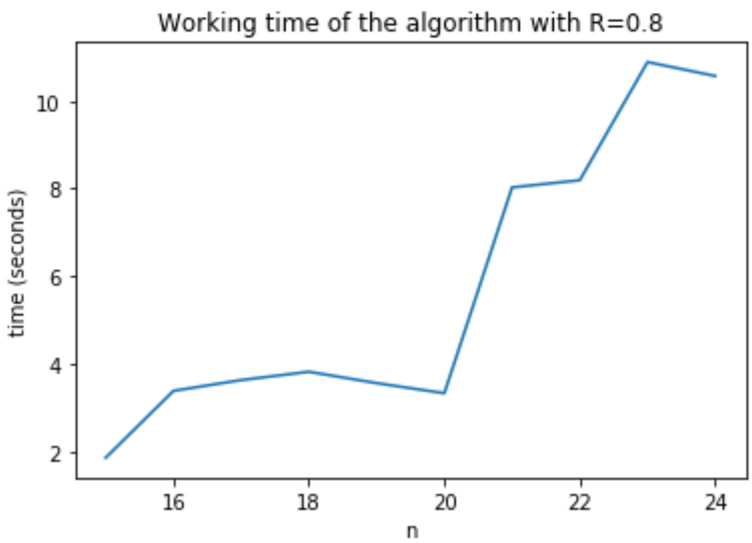
Out[63]:
```
array([[0, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0
, 1, 0],
       [0, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 1
, 1, 1],
       [0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0
, 1, 1],
       [0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 0
, 1, 1],
       [0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0
, 0, 0],
       [1, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1
, 0, 1],
       [0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1
, 1, 0],
       [1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0
, 1, 1],
       [0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 1
, 0, 1],
       [1, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 1
, 0, 1]])
```

Processing math: 100%

In [29]:
```
def test_algo(R):
    algo_time = []
    ns = np.arange(15, 25)
    ks = np.floor(ns * R).astype(int)

    for (n, k) in tqdm(zip(ns, ks)):
        d = findD(n, k, satisfyVHilbert, name=None, ret=True)
        start = time.time()
        code = get_linear_code_vg(n, k, d)
        end = time.time()
        algo_time.append(end - start)

    plt.plot(ns, algo_time)
    plt.ylabel('time (seconds)')
    plt.xlabel('n')
    plt.title('Working time of the algorithm with R={}'.forma
t(R))
    plt.show()
```

In [31]:
```
test_algo(0.8)
```

```
0it [00:00, ?it/s]
10it [00:57,  8.27s/it]
```



Алгоритм работает для кодов небольшой длины $(10 - 30)$ за несколько секунд.

Задание 9

Processing math: 100%

Вдоль диагоналей таблиц числа всегда убывают. Это можно обьяснить тем что скорость кода растет. Например:

$k = 5, n = 9,\ R = 0.55$

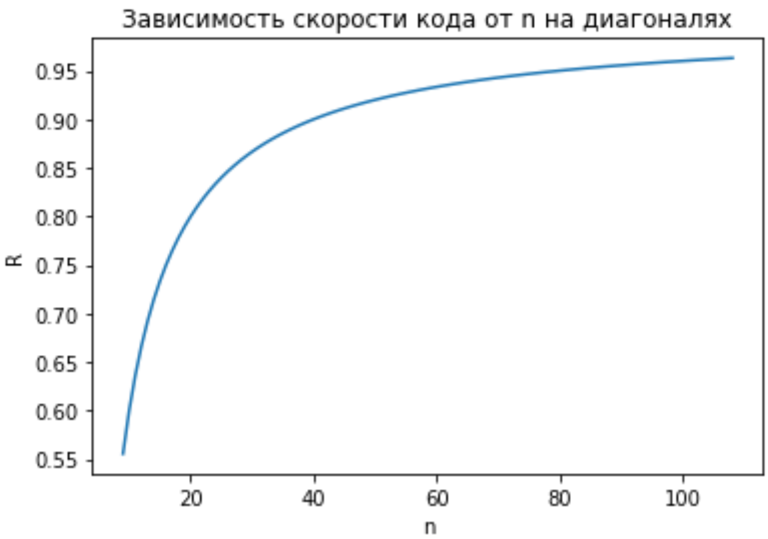
$k = 6, n = 10,\ R = 0.6$

$k = 7, n = 11,\ R = 0.63$

Можно заметить что во второй таблице, числа на диагоналях почти всегда одинаковы, т.к. скорости кодов растут медленней.

In [33]:
```
def draw_R(n_start, k_start, steps):
    n = np.arange(n_start, n_start + steps)
    k = np.arange(k_start, k_start + steps)
    plt.plot(n, k / n)
    plt.xlabel('n')
    plt.ylabel('R')
    plt.title('Зависимость скорости кода от n на диагоналях')
    plt.show()
```

In [35]:
```
draw_R(9, 5, 100)
```



In [ ]:

Processing math: 100%