3.3.2节实验报告

211840196 张博阳

摘要

本实验报告对3.3.2节提出的问题进行了数值实验，分别使用全显格式、全隐格式和CN格式对周期边值问题进行了求解，并对数值解进行了误差分析。

1 问题陈述

考虑周期边值问题

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} \\ u(x,t) = u(x+2\pi,t), \quad (x,t) \in \mathbb{R} \times [0,1] \\ u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

其中$u_0(x) = u_0^{(i)}(x), i = 1,2$，$u_0^{(1)}(x)$是间断函数

$$u_0^{(1)}(x) = \begin{cases} 1, \quad x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ 0, \quad x \in \left[-\pi, -\frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right] \end{cases}$$

$u_0^{(2)}(x)$是导数间断的连续函数

$$u_0^{(2)}(x) = \pi - |x|, \quad x \in [-\pi, \pi]$$

对上述问题，固定网比$\mu = 0.4$，分别利用全显格式，全隐格式和CN格式，进行数值模拟，计算其最终时刻误差L_2模与误差阶。

2 格式的程序设计

对于热传导方程齐次周期边值问题的线性双层格式，均可写为

$$B_1 u^{n+1} = B_0 u^n$$

其中u_n为J维向量。对于全显格式

$$B_1 = I$$

$$B_0 = \begin{bmatrix} 1-2\mu a & \mu a & & & \mu a \\ \mu a & 1-2\mu a & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \mu a \\ \mu a & & & \mu a & 1-2\mu a \end{bmatrix} = \text{ptridiag}\{\mu a, 1-2\mu a, \mu a\}$$

对于全隐格式

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1+2\mu a & -\mu a & & & -\mu a \\ -\mu a & 1+2\mu a & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & -\mu a \\ -\mu a & & & -\mu a & 1+2\mu a \end{bmatrix} = \text{ptridiag}\{-\mu a, 1+2\mu a, -\mu a\}$$

$$B_0 = I$$

对于CN格式

$$B_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}+\mu a & -\frac{1}{2}\mu a & & & -\frac{1}{2}\mu a \\ -\frac{1}{2}\mu a & \frac{1}{2}+\mu a & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & -\frac{1}{2}\mu a \\ -\frac{1}{2}\mu a & & & -\frac{1}{2}\mu a & \frac{1}{2}+\mu a \end{bmatrix} = \text{ptridiag}\{-\frac{1}{2}\mu a, \frac{1}{2}+\mu a, -\frac{1}{2}\mu a\}$$

$$B_0 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}-\mu a & \frac{1}{2}\mu a & & & \frac{1}{2}\mu a \\ \frac{1}{2}\mu a & \frac{1}{2}-\mu a & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \frac{1}{2}\mu a \\ \frac{1}{2}\mu a & & & \frac{1}{2}\mu a & \frac{1}{2}-\mu a \end{bmatrix} = \text{ptridiag}\{\frac{1}{2}\mu a, \frac{1}{2}-\mu a, \frac{1}{2}\mu a\}$$

计算出右端向量后，利用Sherman-Morrison公式解循环三对角线性方程组即可实现时间推进。

3 实验结果和数据讨论

利用Fourier级数方法，问题的真解为

$$u^{(1)}(x,t) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n\pi} e^{-n^2 t}\cos(nx)$$

$$u^{(2)}(x,t) = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4\sin^2\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n^2\pi} e^{-n^2 t}\cos(nx)$$

3.1 全显格式

J	$u_0 = u_0^{(1)}$		$u_0 = u_0^{(2)}$	
	误差	误差阶	误差	误差阶
18	0.070691184165142		9.516450685149100e-04	
36	0.035068156760164	1.011368706867869	2.209013314810101e-04	2.107021482750239
72	0.017471651701085	1.005145600761598	6.119404981949514e-05	1.851938829613794
144	0.008721112611955	1.002431895079183	3.355653316092938e-05	0.866797706059126
288	0.004357139541173	1.001130883659627	3.113077189045240e-05	0.108252324755212

3.2 全隐格式

J	$u_0 = u_0^{(1)}$		$u_0 = u_0^{(2)}$	
	误差	误差阶	误差	误差阶
18	0.070497869834098		0.009581607562645	
36	0.035044814005542	1.008378698220213	0.002355477958212	2.024247893896323
72	0.017468782833143	1.004421877879651	5.851302131711442e-04	2.009190213119203
144	0.008720758215217	1.002253610699342	1.489742043041568e-04	1.973695171771822
288	0.004357096478469	1.001086514773134	4.786330905838536e-05	1.638070494781345

3.3 CN格式

J	$u_0 = u_0^{(1)}$		$u_0 = u_0^{(2)}$	
	误差	误差阶	误差	误差阶
18	0.070544987124860		0.004331275707373	
36	0.035050564558861	1.009105887723245	0.001069609350932	2.017708026898790
72	0.017469490567238	1.004600143858659	2.675597101065143e-04	1.999151190817265
144	0.008720845195000	1.002297669985149	7.326001953173807e-05	1.868762896464711
288	0.004357106769506	1.001097496465550	3.518821729232728e-05	1.057933659648913

从误差上看，三种数值格式均给出了两个初值条件下相容的数值解，但$u_0^{(1)}$的误差阶符合预期，$u_0^{(2)}$的误差阶不符合预期，呈现出快速下降态势。注意到$u_0^{(2)}$组的误差远小于$u_0^{(1)}$，误差阶快速下降的原因可归结为机器精度的影响。