高等数学D公式及结论速查

目录

**带有[\*]的为拓展内容或书本上未给出的推论以及二级结论，使用时可能需要说明或证明**

[高等数学D公式及结论速查 1](#_Toc153809076)

[目录 1](#_Toc153809077)

[极限与连续 5](#_Toc153809078)

[一、数列的极限 5](#_Toc153809079)

[1.数列 5](#_Toc153809080)

[2.下标函数 5](#_Toc153809081)

[3.收敛与发散 5](#_Toc153809082)

[4.数列的极限的定义 5](#_Toc153809083)

[5.数列有界性和单调性的定义 5](#_Toc153809084)

[6.单调有界数列的极限存在性定理 5](#_Toc153809085)

[二、函数的极限 5](#_Toc153809086)

[1.x→x0时函数f(x)的极限 5](#_Toc153809087)

[2.x→∞时函数f(x)的极限 6](#_Toc153809088)

[3.左极限与右极限的定义 6](#_Toc153809089)

[4. x→x0时函数极限存在的充要条件（1） 6](#_Toc153809090)

[5. 与的定义 6](#_Toc153809091)

[6.x→∞时函数极限存在的充要条件 6](#_Toc153809092)

[三、无穷小量与无穷大量 7](#_Toc153809093)

[1.无穷小量的定义 7](#_Toc153809094)

[2. x→x0时函数极限存在的充要条件（2） 7](#_Toc153809095)

[3.无穷小量的性质 7](#_Toc153809096)

[4.无穷小量的比较 7](#_Toc153809097)

[5.无穷大量的定义 7](#_Toc153809098)

[6.无穷小量与无穷大量的关系 8](#_Toc153809099)

[7.等价无穷小量表 8](#_Toc153809100)

[四、极限的性质与运算法则 8](#_Toc153809101)

[1.极限的性质 8](#_Toc153809102)

[2.极限的四则运算法则 8](#_Toc153809103)

[3.[\*]最高次数相同的多项式之商的极限运算的推论 9](#_Toc153809104)

[4.极限存在性定理（夹逼定理） 9](#_Toc153809105)

[5.及其相关推论 9](#_Toc153809106)

[6.无穷小量与变量的积与商运算定理 10](#_Toc153809107)

[7.及其相关推论 10](#_Toc153809108)

[五、函数的连续性 10](#_Toc153809109)

[1.变量的改变量 10](#_Toc153809110)

[2.函数连续的定义 10](#_Toc153809111)

[3.函数连续的等价定义 10](#_Toc153809112)

[4.左连续与右连续，函数连续的充要条件 10](#_Toc153809113)

[5.函数在区间内（上）连续 10](#_Toc153809114)

[6.函数间断点的定义 11](#_Toc153809115)

[7.函数间断点的分类 11](#_Toc153809116)

[8.连续函数的性质 11](#_Toc153809117)

[9.最值定理 11](#_Toc153809118)

[10.介值定理 12](#_Toc153809119)

[11.零值定理 12](#_Toc153809120)

[导数与微分 12](#_Toc153809121)

[一、导数的基本概念 12](#_Toc153809122)

[1.导数的定义 12](#_Toc153809123)

[2.左导数和右导数 12](#_Toc153809124)

[3.函数在区间内（上）可导 13](#_Toc153809125)

[4.导函数的定义 13](#_Toc153809126)

[5.导数的几何意义 13](#_Toc153809127)

[6.函数的可导性与连续性的关系 13](#_Toc153809128)

[二、求导法则 13](#_Toc153809129)

[1.函数线性组合的导数 13](#_Toc153809130)

[2.函数积的导数 14](#_Toc153809131)

[3.函数商的导数 14](#_Toc153809132)

[4.反函数的导数 14](#_Toc153809133)

[5.复合函数的求导法则 14](#_Toc153809134)

[6.求复合函数导数的链式规则 14](#_Toc153809135)

[7.基本导数公式 14](#_Toc153809136)

[三、隐函数的导数与高阶导数 15](#_Toc153809137)

[1.显函数与隐函数的定义 15](#_Toc153809138)

[2.求隐函数导数的方法 15](#_Toc153809139)

[3.高阶导数的定义 15](#_Toc153809140)

[四、微分 16](#_Toc153809141)

[1.微分的定义 16](#_Toc153809142)

[2.函数可微的条件 16](#_Toc153809143)

[3.微分的基本公式 16](#_Toc153809144)

[4.微分的运算法则 17](#_Toc153809145)

[5.微分形式的不变性 17](#_Toc153809146)

[6.微分的近似计算公式 17](#_Toc153809147)

[7.绝对误差与相对误差 17](#_Toc153809148)

[五、导数概念在经济学中的应用 17](#_Toc153809149)

[1.边际成本 17](#_Toc153809150)

[2.边际收入 18](#_Toc153809151)

[3.边际利润 18](#_Toc153809152)

[4.弹性的定义 18](#_Toc153809153)

[5.弹性函数 19](#_Toc153809154)

[6.需求价格弹性的定义与经济意义 19](#_Toc153809155)

[7.需求价格弹性的单位弹性、高弹性与低弹性 19](#_Toc153809156)

[中值定理与导数的应用 19](#_Toc153809157)

[一、中值定理 19](#_Toc153809158)

[1.罗尔（*Rolle*）定理 19](#_Toc153809159)

[2.拉格朗日（*Lagrange*）中值定理（微分中值定理） 19](#_Toc153809160)

[3.拉格朗日中值公式及其等价形式 20](#_Toc153809161)

[4.拉格朗日中值定理的推论 20](#_Toc153809162)

[5.柯西（*Cauchy*）中值定理 20](#_Toc153809163)

[二、洛必达（*L’Hospital*）法则 20](#_Toc153809164)

[1.未定式的定义 20](#_Toc153809165)

[2.型未定式的洛必达法则 20](#_Toc153809166)

[3.型未定式的洛必达法则在x→∞时的推论 21](#_Toc153809167)

[4.型未定式的洛必达法则 21](#_Toc153809168)

[5.其他型未定式的求极限方法 21](#_Toc153809169)

[三、导数在函数上的应用 21](#_Toc153809170)

[1.函数单调性判别定理 21](#_Toc153809171)

[2.极值与极值点的定义 22](#_Toc153809172)

[3.极值点的必要条件 22](#_Toc153809173)

[4.驻点的定义，驻点与极值点的关系 22](#_Toc153809174)

[5.极值点第一判别法 22](#_Toc153809175)

[6.极值点第二判别法 22](#_Toc153809176)

[7.求连续函数最值的方法 22](#_Toc153809177)

[8.函数最值点与极值点的关系定理 22](#_Toc153809178)

[9.曲线凸性的定义 22](#_Toc153809179)

[10.曲线凸性的判定定理 23](#_Toc153809180)

[11.拐点的定义 23](#_Toc153809181)

[12.渐近线的定义 23](#_Toc153809182)

[13.渐近线的分类 23](#_Toc153809183)

[14.求曲线斜渐近线的公式 23](#_Toc153809184)

[15.函数作图的基本步骤 23](#_Toc153809185)

[不定积分 24](#_Toc153809186)

[一、不定积分的概念与性质 24](#_Toc153809187)

[1.原函数的定义 24](#_Toc153809188)

[2.原函数的性质定理 24](#_Toc153809189)

[3.不定积分的定义 24](#_Toc153809190)

[4.不定积分的几何意义 24](#_Toc153809191)

[5.不定积分的基本性质 24](#_Toc153809192)

[二、不定积分的计算方法 25](#_Toc153809193)

[1.基本积分公式（直接积分法） 25](#_Toc153809194)

[2.第一换元积分公式（凑微分法） 25](#_Toc153809195)

[3.第一换元法的常见凑微分类型 26](#_Toc153809196)

[4.第二换元积分公式 26](#_Toc153809197)

[5.第二换元法的运用规律 26](#_Toc153809198)

[6.由换元法得出的其他积分公式 27](#_Toc153809199)

[7.分部积分公式 27](#_Toc153809200)

[三、有理函数的积分 27](#_Toc153809201)

[1.有理函数的定义 27](#_Toc153809202)

[2.部分分式 28](#_Toc153809203)

[3.求有理函数不定积分的一般步骤 28](#_Toc153809204)

[定积分 28](#_Toc153809205)

[一、定积分的概念与性质 28](#_Toc153809206)

[1.分划与分划的模 28](#_Toc153809207)

[2.定积分的定义 28](#_Toc153809208)

[3.定积分的几何意义 29](#_Toc153809209)

[4.定积分的基本性质 29](#_Toc153809210)

[二、微积分基本定理 30](#_Toc153809211)

[1.积分上限函数（变上限积分） 30](#_Toc153809212)

[2.原函数存在性定理 30](#_Toc153809213)

[3.[\*]原函数存在性定理的推论 30](#_Toc153809214)

[4.被积函数为周期函数时原函数存在性定理的推论 31](#_Toc153809215)

[5.微积分学基本定理（牛顿-莱布尼兹[*Newton – Leibniz*]公式） 31](#_Toc153809216)

[三、定积分的计算方法 31](#_Toc153809217)

[1.定积分的换元积分公式 31](#_Toc153809218)

[2.被积函数具有奇偶性时换元积分公式的推论 31](#_Toc153809219)

[3.定积分的分部积分公式 31](#_Toc153809220)

[四、定积分的应用 32](#_Toc153809221)

[1.一般的平面图形面积的计算公式 32](#_Toc153809222)

[2.平行截面面积为已知的立体的体积公式 32](#_Toc153809223)

[3.旋转体的体积 32](#_Toc153809224)

[4.已知总产量变化率求总产量的函数 32](#_Toc153809225)

[五、反常积分初步 33](#_Toc153809226)

[1.无穷限的反常积分及其敛散性的定义 33](#_Toc153809227)

[2.无穷限的反常积分的几何意义 33](#_Toc153809228)

[3.无穷限的反常积分在计算时的表示 33](#_Toc153809229)

[4.无界函数的反常积分（瑕积分）及其敛散性的定义 34](#_Toc153809230)

[5.[\*]瑕积分的二级公式 34](#_Toc153809231)

[6.*Γ*函数的定义 34](#_Toc153809232)

[7.*Γ*函数的性质 34](#_Toc153809233)

[微分方程初步 35](#_Toc153809234)

[一、微分方程的基本概念 35](#_Toc153809235)

[1.微分方程的定义 35](#_Toc153809236)

[2.微分方程的阶及*n*阶微分方程 35](#_Toc153809237)

[3.微分方程的解 35](#_Toc153809238)

[4.微分方程特解的条件与问题 35](#_Toc153809239)

[二、一阶微分方程 36](#_Toc153809240)

[1.一阶微分方程的一般形式 36](#_Toc153809241)

[2.可分离变量方程及其解 36](#_Toc153809242)

[3.齐次微分方程及其解 36](#_Toc153809243)

[4.一阶线性微分方程的定义 37](#_Toc153809244)

[5.一阶线性微分方程的通解与常数变易法 37](#_Toc153809245)

[6.伯努利（*Bernoulli*）方程 38](#_Toc153809246)

[三、二阶线性微分方程 38](#_Toc153809247)

[1.二阶线性微分方程的定义 38](#_Toc153809248)

[2.线性相关与线性无关 38](#_Toc153809249)

[3.二阶线性微分方程解的基本定理 38](#_Toc153809250)

[4.二阶常系数线性方程的定义 39](#_Toc153809251)

[5.二阶常系数齐次线性方程的通解 39](#_Toc153809252)

极限与连续

一、数列的极限

1.数列

无穷多个数按照下列顺序排列：*u*1，*u*2，…，*un*，…

称为**数列**，记为{*un*}，其中*un*称为数列的**通项**或**一般项**；正整数*n*称为*un*的**下标**.

2.下标函数

对于给定的数列{*un*}，由于其各项的取值由其下标所唯一确定，故数列{*un*}可视为定义在自然数集*N*上的函数：

并称为**下标函数**.

3.收敛与发散

设有数列{*un*}和常数*A*，若当*n*→∞时，*un*无限趋近于常数*A*，则称*A*为数列{*un*}的**极限**，或称数列{*un*}收敛于*A*，记为

或

如果数列{*un*}有极限，则称{*un*}是**收敛**的，否则称{*un*}是**发散**的.

4.数列的极限的定义

设有数列{*un*}和常数*A*. 如果对于任意给定的*ε*＞0，存在正整数*N*，使得当*n*＞*N*时，总有不等式

成立，则称**常数***A***为数列**{*un*}**的极限**.

5.数列有界性和单调性的定义

设有数列{*un*}.

1. 如果|*un*|≤*M*（*n*∈*N*，*M*＞0），则称数列{*un*}是有界的.
2. 如果*un*≤*un*+1（*n*∈*N*），则称数列{*un*}是单调增加的.
3. 如果*un*≥*un*+1（*n*∈*N*），则称数列{*un*}是单调减少的.

6.单调有界数列的极限存在性定理

单调有界数列必有极限.

二、函数的极限

1.x→x0时函数f(x)的极限

设有函数*f*(*x*)和常数*A*. 如果对于任意给定的*ε*＞0，必存在*δ*＞0，使当0＜|*x*-*x*0|＜*δ*时，总有不等式

成立，则称**常数***A***为***x*→*x*0**时函数***f*(*x*)**的极限**，记为

或

2.x→∞时函数f(x)的极限

设有函数*f*(*x*)和常数*A*. 如果对于任意给定的*ε*＞0，存在*X*＞0，使当|*x*|＞*X*时，总有不等式

成立，则称**常数***A***为***x*→∞**时函数***f*(*x*)**的极限**，记为

或

3.左极限与右极限的定义

一般地，当自变量*x*从*x*0的左侧（或右侧）趋近*x*0时，函数*f*(*x*)无限趋近常数*A*，则称常数*A*为*x*→*x*0-（或*x*→*x*0+）时函数*f*(*x*)的左极限（或右极限），记为

有时也简记为

4. x→x0时函数极限存在的充要条件（1）

函数极限存在且等于*A*的充分必要条件是，左极限和右极限都存在且都等于*A*，即有

5. 与的定义

若当*x*沿*x*轴的正向（或负向）趋向无穷时，函数*f*(*x*)无限趋近于常数*A*，则称常数*A*为*x*→+∞（或*x*→-∞）时函数*f*(*x*)的极限，记为

6.x→∞时函数极限存在的充要条件

函数极限存在且等于*A*的充分必要条件是，极限和都存在且都等于*A*，即有

三、无穷小量与无穷大量

1.无穷小量的定义

极限为零的变量称为**无穷小量**（简称**无穷小**）.

**注：**

1. 此定义中所说的极限，包括数列极限和六种形式的函数极限.
2. 无穷小量是相对于自变量的某一变化过程而言的. 例如，当*x*→∞时，1/*x*是无穷小量；而当*x*→1时，1/*x*就不是无穷小量了.
3. 无穷小量不是很小很小的正数，而是在自变量的某个变化过程中，其极限为零的变量.
4. 数零符合无穷小量的定义（因lim0=0），因此数零可视为无穷小量，但无穷小量不一定是零.

2. x→x0时函数极限存在的充要条件（2）

的充分必要条件是，函数*f*(*x*)在*x*0的某空心邻域内可以表示为常数*A*与无穷小量*α*之和，即有

其中*α*为*x*→*x*0时的无穷小量.

这个定理说明：“*f*(*x*)以*A*为极限”与“*f*(*x*)与*A*之差是无穷小量”是两个等价的说法.

3.无穷小量的性质

**性质1：**有限个无穷小量的和或差仍为无穷小量.

**性质2：**有限个无穷小量之积仍为无穷小量.

**性质3：**无穷小量与有界变量之积仍为无穷小量.

**性质4：**无穷小量除以极限不为零的变量，其商仍为无穷小量.

4.无穷小量的比较

设*α*和*β*是关于自变量同一变化趋势下的两个无穷小量，且

1. 如果*A*=0，则称*α***是比***β***高阶的无穷小量**（或*β*是比*α*低阶的无穷小量）.
2. 如果*A*≠0，则称*α***与***β***是同阶的无穷小量**. 特别地，如果*A*=1，则称*α***与***β***是等价的无穷小量**，并记为*α*~*β*.

5.无穷大量的定义

在自变量的某一变化趋势下，若函数*f*(*x*)的绝对值无限地增大，则称*f*(*x*)为无穷大量，记为

当*f*(*x*)＞0时，也记为：

当*f*(*x*)＜0时，也记为：

**注：**

1. 关于无穷大量的定义，对数列也适用. 例如，.
2. 无穷大量是相对于自变量的某一变化趋势而言的. 比如，*x*→0时1/*x*是无穷大量，而*x*→1时1/*x*就不是无穷大量.

6.无穷小量与无穷大量的关系

1. 若，则.
2. 若，且，则.

7.等价无穷小量表

当*x*→0时

四、极限的性质与运算法则

1.极限的性质

**性质1（唯一性）：**若极限lim *f*(*x*)存在，则极限值唯一.（对数列极限也成立）

以下性质只对*x*→*x*0的情形叙述，其他形式的极限也有类似的结果.

**性质2（有界性）：**若极限存在，则函数*f*(*x*)在*x*0的某空心邻域内有界.

**性质3（保号性）：**若，且*A*＞0（或*A*＜0），则在*x*0的某空心邻域内恒有*f*(*x*)＞0（或*f*(*x*)＜0）.

**性质4：**若，且在*x*0的某空心邻域内恒有*f*(*x*)≥0（或*f*(*x*)≤0），则*A*≥0（或*A*≤0）.

**性质5：**若，，且在*x*0的某空心邻域内恒有*f*(*x*)≥*g*(*x*)，则*A*≥*B*.

2.极限的四则运算法则

**①极限的和、差、积的运算定理**

如果极限lim *f*(*x*)和lim *g*(*x*)都存在，则极限lim [*f*(*x*)±*g*(*x*)]和极限lim [*f*(*x*)*g*(*x*)]也都存在，且有

**②极限的商的运算定理**

设极限lim *f*(*x*)和lim *g*(*x*)都存在，则极限lim *g*(*x*)≠0，则极限也存在，且有

**③极限的四则运算的推论**

**推论1：**设lim *f*(*x*)存在，*C*为常数，则有

**推论2：**设极限lim *f*1(*x*)、lim *f*2(*x*)…lim *fn*(*x*)都存在，*a*1、*a*2…*an*为常数，则有

**推论3：**设极限lim *f*(*x*)存在，*n*为正整数，则有

**推论4：**设lim *f*(*x*)存在，且lim *f*(*x*)≠0，则

3.[\*]最高次数相同的多项式之商的极限运算的推论

一般地，设

则有

4.极限存在性定理（夹逼定理）

设在*x*0的某空心邻域(*x*0-*δ*0, *x*0)∪(*x*0, *x*0+*δ*0)（其中*δ*0＞0）内恒有

且有.

则极限存在，且有

5.及其相关推论

以下恒等式可以通过几何方法推出：

由此可以推出|sin *x*|≤|*x*|，（x∈R）和|*x*|≤|tan *x*|，（|*x*|＜π/2）.

根据以上恒等式，利用夹逼定理，可以推出

由此可以继续推出，一般地，当*x*→0时

6.无穷小量与变量的积与商运算定理

设*α*和*β*都是关于自变量某一变化趋势下的无穷小量，且*α*~*β*. 又设和都存在. 则极限和都存在，且

7.及其相关推论

令*α*=1/*x*，则*x*→∞时，*α*→0，于是有

五、函数的连续性

1.变量的改变量

设变量*u*从初值*u*0改变到终值*u*1，则称终值与初值之差*u*1-*u*0为变量*u*的**改变量**（**增量**），记为*Δu*=*u*1-*u*0.

2.函数连续的定义

设函数*y*=*f*(*x*)在*x*0的某邻域内有定义. 如果自变量在*x*0处的改变量*Δx*趋于零时，函数的相应改变量*Δy*也趋于零，即有

则称**函数***f*(*x*)**在点***x*0**处连续**，表现在图形上是指，当*Δx*→0时，曲线*y*=*f*(*x*)上的定点*M*(*x*, *f*(*x*))无线趋近于该曲线上的定点*M*0(*x*0, *f*(*x*0)).

3.函数连续的等价定义

设函数*y*=*f*(*x*)在*x*0的某邻域内有定义. 如果有

则称函数*f*(*x*)在点*x*0处连续，称*x*0为*f*(*x*)的连续点.

4.左连续与右连续，函数连续的充要条件

当时，称函数*f*(*x*)在点*x*0处**左连续**；当时，称函数*f*(*x*)在点*x*0处**右连续**. 函数*f*(*x*)在点*x*0处连续的充分必要条件是，函数*f*(*x*)在点*x*0处既左连续又右连续.

5.函数在区间内（上）连续

如果函数*f*(*x*)在开区间(*a*, *b*)内每一点都连续，则称函数*f*(*x*)**在开区间**(*a*, *b*)**内连续**；如果函数*f*(*x*)在开区间(*a*, *b*)内连续，并在左端点*a*处右连续，在右端点*b*处左连续，则称函数*f*(*x*)**在闭区间**[*a*, *b*]**上连续**.

6.函数间断点的定义

一般地，如果函数*f*(*x*)在某点*x*0不满足以下三个连续性条件中的任何一个条件：

1. *f*(*x*)在*x*0处有定义；
2. 存在；
3. .

那么我们就称点*x*0为*f*(*x*)的**间断点**.

7.函数间断点的分类

**①第一类间断点**

如果*x*0是*f*(*x*)的间断点，且*f*(*x*)在点*x*0处的左、右极限皆存在，则称*x*0为*f*(*x*)的**第一类间断点**.

**可去间断点**

一般地，如果*x*0是*f*(*x*)的第一类间断点，且，则称*x*0为*f*(*x*)的**可去间断点**.

**跳跃间断点**

否则，如果*x*0是*f*(*x*)的第一类间断点，且，则称*x*0为*f*(*x*)的**跳跃间断点**.

**②第二类间断点**

如果*x*0是*f*(*x*)的间断点，且*f*(*x*)在点*x*0处的左、右极限至少有一个不存在，则称*x*0为*f*(*x*)的**第二类间断点**.

**无穷间断点**

如果*x*0是*f*(*x*)的第二类间断点，且*f*(*x*)在点*x*0处的左、右极限至少有一个是∞，则称*x*0为*f*(*x*)的**无穷间断点**.

**非无穷第二类间断点**

否则，称*x*0为*f*(*x*)的**非无穷第二类间断点**.

8.连续函数的性质

**①连续函数的四则运算**

设函数*f*(*x*)和*g*(*x*)在*x*0处连续，则函数*f*(*x*)±*g*(*x*)，*f*(*x*)*g*(*x*)在*x*0处连续；且当*g*(*x*0)≠0时，函数*f*(*x*)/*g*(*x*)在*x*0处也连续.

**推论：**有理分式函数、正切函数tan *x*、余切函数cot *x*、正割函数sec *x*、余割函数csc *x*等，在它们的定义域内皆连续.

**②复合函数的连续性**

设函数*f*(*u*)在*u*0处连续，*u*=*φ*(*x*)在*x*0处连续，且*φ*(*x*)=*u*0，则复合函数*y*=*f*[*φ*(*x*)]在*x*0处连续.

**推论：**连续函数经有限次四则运算和有限次复合得到的函数，在其定义区间内连续.

**③反函数的连续性**

设函数*y*=*f*(*x*)在区间[*a*, *b*]上单调、连续，且*f*(*a*)=*α*，*f*(*b*)=*β*. 则其反函数*y*=*f*-1(*x*)在区间[*α*, *β*]（或[*β*, *α*]）上单调、连续.

**推论：**arcsin *x*、arccos *x*、arctan *x*、arccot *x*在它们各自的定义域内连续.

**④初等函数的连续性**

初等函数在其定义区间内连续.

9.最值定理

设函数*f*(*x*)在闭区间[*a*, *b*]上连续，则*f*(*x*)在[*a*, *b*]上必能取得最大值和最小值. 即在[*a*, *b*]上至少存在两点*ξ*1和*ξ*2，使对任意的*x*∈[*a*, *b*]，恒有

由最值定理可知，闭区间上的连续函数一定是有界函数.

10.介值定理

设函数*f*(*x*)在闭区间[*a*, *b*]上连续，且*f*(*x*)在[*a*, *b*]上的最大值和最小值分别记为*M*和*m*，则对介于*m*和*M*之间的任何实数*C*（即*m*＜*C*＜*M*），至少存在一点*ξ*∈(*a*, *b*)，使得

11.零值定理

设函数*f*(*x*)在闭区间[*a*, *b*]上连续，且*f*(*a*)与*f*(*b*)异号（即*f*(*a*)*f*(*b*)＜0），则至少存在一点*ξ*∈(*a*, *b*)，使得

导数与微分

一、导数的基本概念

1.导数的定义

设函数*y*=*f*(*x*)在点*x*0的某邻域内有定义. 当自变量在*x*0处取得改变量*Δx*（*Δx*≠0）时，函数相应地取得改变量

如果极限

存在，则称函数*f*(*x*)在*x*0处**可导**，*x*0为*f*(*x*)的**可导点**，并称此极限值为*f*(*x*)在*x*0处的**导数**，记为*f’*(*x*0). 即

导数*f’*(*x*0)也可记为

如果令*x*=*x*0+*Δx*，则当*Δx*→0时，*x*→*x*0，于是，导数*f’*(*x*0)的定义又可表示为

如果上述极限不存在，则称函数*f*(*x*)在*x*0处**不可导**或**没有导数**，*x*0为*f*(*x*)的**不可导点**. 特别当上述极限为无穷大时，此时导数不存在，有时也称函数*f*(*x*)在*x*0处的导数为无穷大.

2.左导数和右导数

讨论函数*f*(*x*)在*x*0处的导数时，分别计算左极限和右极限，如果这两个极限皆存在，则分别称*f*(*x*)在*x*0处的**左导数**和**右导数**，并分别记为*f’*-(*x*0)和*f’*+(*x*0)，即

根据函数极限与其左、右极限的关系可知，导数*f’*(*x*0)与其左、右导数*f’*-(*x*0)和*f’*+(*x*0)的关系为

3.函数在区间内（上）可导

如果函数*y*=*f*(*x*)在开区间(*a*, *b*)内每一点都可导，则称*f*(*x*)**在**(*a*, *b*)**内可导**. 如果函数*y*=*f*(*x*)在开区间(*a*, *b*)内可导，且在点*a*有右导数*f’*+(*a*)，在*b*点有左导数*f’*-(*b*)，则称*f*(*x*)**在闭区间**[*a*, *b*]**上可导**.

4.导函数的定义

设*f*(*x*)在(*a*, *b*)内可导，则对于任意的*x*∈(*a*, *b*)，都存在唯一确定的导数值*f’*(*x*)与之对应. 因此，*f’*(*x*)是*x*的函数，称为*f*(*x*)的**导函数**，简称为**导数**. 导函数*f’*(*x*)也可记为

5.导数的几何意义

如果函数*y*=*f*(*x*)在点*x*0处可导，则其导数*f’*(*x*)的几何意义是，*f’*(*x*0)为曲线*y*=*f*(*x*)在点(*x*0, *f*(*x*0))处的切线斜率. 特别地，若*f’*(*x*0)=0，则曲线*y*=*f*(*x*)在点(*x*0, *f*(*x*0))的切线平行于*OX*轴；若*f’*(*x*0)不存在，且*f’*(*x*0)=∞，则曲线*y*=*f*(*x*)在点(*x*0, *f*(*x*0))的切线垂直于*OX*轴. 于是，曲线*y*=*f*(*x*)在点(*x*0, *y*0)处的**切线方程**为

特别当*f’*(*x*0)=0时，切线方程为

当*f’*(*x*0)=∞时，切线方程为

而曲线*y*=*f*(*x*)在点(*x*0, *y*0)处的**法线方程**为

6.函数的可导性与连续性的关系

函数*y*=*f*(*x*)在*x*0处可导，则必在*x*0处连续. 函数连续是函数可导的必要不充分条件.

二、求导法则

1.函数线性组合的导数

设函数*u*(*x*)和*v*(*x*)在点*x*处可导，*a*与*b*为常数，则*u*(*x*)和*v*(*x*)的线性组合函数*y*= *au*(*x*)+*bv*(*x*)在点*x*处也可导，且有

特别地，当*a*=*b*=1时，得函数和的求导公式

当*a*=1，*b*=-1时，得函数差的求导公式

当*b*=0时，得常数与函数之积的求导公式

2.函数积的导数

设函数*u*(*x*)和*v*(*x*)在点*x*处可导，则函数*y*= *u*(*x*)*v*(*x*)在点*x*处也可导，且有

3.函数商的导数

设函数*u*(*x*)和*v*(*x*)在点*x*处可导，且*v*(*x*)≠0，则函数在点*x*处也可导，且有

特别地，如果*u*(*x*)=1，则有

4.反函数的导数

设函数*x*=*φ*(*y*)在某区间内单调且连续，又在该区间内某点*y*0处有导数*φ’*(*y*0)≠0，则其反函数*y*=*f*(*x*)在*y*0的对应点*x*0（*x*0=*φ*(*y*0)）处有导数，且

5.复合函数的求导法则

设函数*u*=*φ*(*x*)在点*x*0处有导数*φ’*(*x*0)，函数*y*=*f*(*u*)在点*u*0=*φ*(*x*0)处有导数*f’*(*u*0). 则复合函数*y*=*f*[*φ*(*x*)]在点*x*0处可导，且

6.求复合函数导数的链式规则

只要*φ’*(*x*)、*f’*(*u*)（*u*=*φ*(*x*)）存在，则复合函数*y*=*f*[*φ*(*x*)]的导数必存在，且有{*f*[*φ*(*x*)]}*’*=*f’*(*u*)*φ’*(*x*)，即

称上式为求复合函数导数的**链式规则**. 它表明，复合函数对自变量的导数等于函数对中间变量的导数乘以中间变量对自变量的导数.

7.基本导数公式

以下公式中，*c*、*α*、*a*为常数，且*a*＞0，*a*≠1.

三、隐函数的导数与高阶导数

1.显函数与隐函数的定义

可以明显地表示成*y*=*f*(*x*)形式的函数被称为**显函数**.

一般地，设

为含有两个未知数*x*和*y*的方程. 如果存在函数*y*=*f*(*x*)（不论这个函数是否能表示成显函数），将其代入所设方程，使方程变为恒等式：

其中*Df*为非空实数集. 则称函数*y*=*f*(*x*)是由方程*Φ*(*x*, *y*)=0所确定的一个**隐函数**.

2.求隐函数导数的方法

将方程*Φ*(*x*, *y*)=0看成恒等式*Φ*(*x*, *y*(*x*))≡0，然后对等式两端求关于*x*的导数，并将*y’*通过*x*和*y*表达出来.

3.高阶导数的定义

一般地，如果函数*y*=*f*(*x*)的导函数*f’*(*x*)在*x*处可导，则称导函数*f’*(*x*)在点*x*处的导数为函数*y*=*f*(*x*)的**二阶导数**，记为

类似地定义*y*=*f*(*x*)的**三阶导数**为二阶导数的导数，记为

如果函数*y*=*f*(*x*)的*n*-1阶导函数存在且可导，则称*y*的*n*-1阶导数的导数为函数*y*=*f*(*x*)的***n*阶导数**，记为

*n*阶导数在*x*0处的值记为

二阶和二阶以上的导数统称为**高阶导数**. 如果函数*y*=*f*(*x*)的*n*阶导数存在，则称*f*(*x*)为***n*阶可导**.

四、微分

1.微分的定义

设有函数*y*=*f*(*x*). 如果对自变量在点*x*的改变量*Δx*，函数的改变量*Δy*=*f*(*x*+*Δx*)-*f*(*x*)可以表示成

其中*A*与*Δx*无关，*α*是*Δx*→0时的无穷小量. 则称函数*y*=*f*(*x*)在点*x***可微**，并称*Δy*的线性主部*AΔx*为函数*y*=*f*(*x*)在点*x*处的**微分**，记为d*y*或d*f*(*x*)，即

由定义可知，当函数*y*=*f*(*x*)在点*x*可微时，只要|*Δx*|充分小，就有*Δy*≈d*y*. 如果*A*≠0，则有

即当*Δx*→0时，只要*A*≠0，*Δy*与d*y*是等价无穷小量.

如果改变量*Δy*不能表示成*Δy*=*AΔx*+*αΔx*的形式，则称函数*y*=*f*(*x*)在点*x*处不可微或微分不存在.

我们约定，自变量的改变量*Δx*为自变量的微分d*x*，即*Δx*=d*x*. 于是，函数的微分可写成

2.函数可微的条件

（1）若函数*f*(*x*)在点*x*可导，则*f*(*x*)在点*x*可微，且

（2）若函数*f*(*x*)在点*x*可微（d*f*(*x*)=*A*d*x*），则*f*(*x*)在点*x*可导，且

由此可知，函数*f*(*x*)在点*x*可微的充要条件是*f*(*x*)在点*x*可导；函数的微分d*y*必能表示成d*y*=d*f*(*x*)=*f’*(*x*)d*x*；而导数*f’*(*x*)可表示成函数微分d*y*与自变量微分d*x*的商，即. 因此，导数又称为**微商**.

3.微分的基本公式

4.微分的运算法则

设函数*u*=*u*(*x*)，*v*=*v*(*x*)皆可微，则有

5.微分形式的不变性

对于函数*y*=*f*(*u*)，不论*u*是自变量还是另一变量*x*的函数*u*=*φ*(*x*)，*f*(*u*)的微分形式d*y*=*f’*(*u*)d*u*总保持不变. 我们称微分的这一性质为**微分形式的不变性**.

6.微分的近似计算公式

设函数*y*=*f*(*x*)在点*x*0可微，则由微分定义可知，当|Δx|很小时，可用d*y*近似代替*Δy*，从而得到如下近似计算公式

该公式可用来计算*Δy*的近似值，常用于误差估计.

该公式用来计算*f*(*x*0+*Δx*)的近似值.

由此，可知当|*x*|很小时，有以下近似公式：

7.绝对误差与相对误差

对于可微函数*y*=*f*(*x*)，当根据测量值*x*计算*y*的值时，如果已知测量值*x*的绝对误差限*δx*＞0，即

则根据近似公式|*Δy*|≈|d*y*|，可求得*y*的绝对误差限*δy*与相对误差限（*y*≠0）的近似值. 它们分别为

通常将绝对误差限和相对误差限分别简称为**绝对误差**和**相对误差**.

五、导数概念在经济学中的应用

1.边际成本

在经济学中，边际成本定义为产量增加一个单位时所增加的总成本.

设某产品产量为*x*时所需的总成本为*C*=*C*(*x*)，称*C*(*x*)为**总成本函数**，简称**成本函数**.

当总成本函数*C*(*x*)可导时，其变化率

表示该产品产量为*x*时的**边际成本**，即边际成本是总成本函数关于产量的导数.

**经济意义：***C’*(*x*)近似等于产量为*x*时再生产一个单位产品所需增加的成本，这是因为

2.边际收入

在经济学中，边际收入定义为多销售一个单位产品所增加的销售总收入.

设某产品销售量为*x*时的总收入为*R*=*R*(*x*)，称*R*(*x*)为**总收入函数**，简称**收入函数**.

当总收入函数*R*(*x*)可导时，其变化率

称为销售量为*x*时该产品的**边际收入**.

**经济意义：***R’*(*x*)近似等于销售量为*x*时再销售一个单位产品所增加（或减少）的收入.

3.边际利润

设某产品销售量为*x*时的总利润为*L*=*L*(*x*)，称*L*(*x*)为（总）**利润函数**. 当*L*(*x*)可导时，称*L’*(*x*)为销售量为*x*时的**边际利润**.

由于总利润为总收入与总成本之差，由导数运算法则可知，边际利润为边际收入与边际成本之差，即

**经济意义：***L’*(*x*)近似等于销售量为*x*时再多销售一个单位产品所增加（或减少）的利润.

4.弹性的定义

设函数*y*=*f*(*x*)在点*x*0（*x*0≠0）的某邻域内有定义，且*f*(*x*0)≠0. 如果极限

存在，则称此极限值为函数*y*=*f*(*x*)在点*x*0处的**点弹性**，记为；而称比值

为函数*y*=*f*(*x*)在点*x*0与点*x*0+*Δx*之间的**弧弹性**.

由定义可知

且当|*Δx*|很小时，有

5.弹性函数

如果函数*y*=*f*(*x*)在区间(*a*, *b*)内可导且*f*(*x*)≠0，则称

为函数*y*=*f*(*x*)在区间(*a*, *b*)内的点弹性函数，简称为**弹性函数**.

6.需求价格弹性的定义与经济意义

设某商品的市场需求量为*Q*，价格为*p*，需求函数*Q*=*Q*(*p*)可导，则称

为该商品的**需求价格弹性**，简称为**需求弹性**，常记为*εp*.

需求弹性*εp*表示某商品需求量*Q*对价格*p*变动的反应程度. 由于需求函数为价格的减函数，故需求函数的弧弹性为负值，从而当*Δx*→0时，需求弧弹性的极限一般也为负值，即需求价格弹性*εp*一般为负值. 这表明，当某商品的价格上涨（或下跌）1%时，其需求量将减少（或增加）约|*εp*|%. 因此，在经济学中，比较商品需求弹性的大小时，是指弹性的绝对值|*εp*|. 当我们说某商品的需求价格弹性大时，是指其绝对值大.

7.需求价格弹性的单位弹性、高弹性与低弹性

1. 当*εp*=-1（即|*εp*|=1时），称为**单位弹性**，此时商品需求量变动的百分比与价格变动的百分比相等. 此时，总收益的改变量*ΔR*是较价格改变量*Δp*高阶的无穷小量，提价或降价对总收益没有明显的影响.
2. 当*εp*＜-1（即|*εp*|＞1时），称为**高弹性**，此时商品需求量变动的百分比高于价格变动的百分比，价格的变动对需求量的影响较大. 此时，降价（*Δp*＜0）可使总收益增加（*ΔR*＞0），薄利多销多收益，提价（*Δp*＜0）将使总收益减少（*ΔR*＞0）.
3. 当-1＜*εp*＜0（即|*εp*|＜1时），称为**低弹性**，此时商品需求量变动的百分比低于价格变动的百分比，价格的变动对需求量的影响不大. 此时，降价使总收益减少，提价使总收益增加.

中值定理与导数的应用

一、中值定理

1.罗尔（*Rolle*）定理

设函数*f*(*x*)在闭区间[*a*, *b*]上连续，在开区间(*a*, *b*)内可导，且在两端点的函数值相等，即*f*(*a*)=*f*(*b*). 则在开区间(*a*, *b*)内至少存在一点*ξ*，使得

**几何意义：**如果连续曲线弧上每一点都有不垂直于*x*轴的切线，并且两端点处纵坐标相等，则在弧上至少有一条切线与*x*轴平行.

2.拉格朗日（*Lagrange*）中值定理（微分中值定理）

设函数*f*(*x*)在闭区间[*a*, *b*]上连续，在开区间(*a*, *b*)内可导. 则在开区间(*a*, *b*)内至少存在一点*ξ*，使得

**几何意义：**如果连续曲线弧上每一点都有不垂直于*x*轴的切线，则至少有一条切线平行于弦*AB*.

3.拉格朗日中值公式及其等价形式

称为**拉格朗日中值公式**. 其有以下等价形式：

在上述前两式中，*b*＞*a*或*b*≤*a*，等式都成立；第三式中的*Δx*可正可负，|*Δx*|可大可小，也可为零.

4.拉格朗日中值定理的推论

**推论1：**

如果函数*f*(*x*)在区间I上可导，则*f*(*x*)≡*C*（*x*∈I）的充分必要条件是*f’*(*x*)≡0（*x*∈I），即

其中*C*为常数.

**推论2：**

如果函数*f*(*x*)与*g*(*x*)在区间I上可导，且恒有

则*f*(*x*)与*g*(*x*)仅相差一个常数，即有

其中*C*为常数.

5.柯西（*Cauchy*）中值定理

设函数*f*(*x*)与*g*(*x*)在闭区间[*a*, *b*]上连续，在开区间(*a*, *b*)内可导，且*g’*(*x*)≠0，x∈(*a*, *b*). 则在开区间(*a*, *b*)内至少存在一点*ξ*，使得

显然，当*g*(*x*)=*x*时，柯西中值定理就转化为拉格朗日中值定理. 可见，柯西中值定理是拉格朗日中值定理的推广.

二、洛必达（*L’Hospital*）法则

1.未定式的定义

当*x*→*a*（或*x*→∞）时，如果函数*f*(*x*)和*g*(*x*)的极限都为零或都趋近于无穷大，则极限可能存在也可能不存在. 通常，称这种类型的极限为未定式，简记为型或型.

2.型未定式的洛必达法则

设函数*f*(*x*)与*g*(*x*)满足条件：

1. 在点*a*的某空心邻域内可导，且*g’*(*x*)≠0.

则有

3.型未定式的洛必达法则在x→∞时的推论

设函数*f*(*x*)与*g*(*x*)满足条件：

1. 存在正数*M*，使当|*x*|＞*M*时，*f*(*x*)与*g*(*x*)可导，且*g’*(*x*)≠0.

则有

4.型未定式的洛必达法则

设函数*f*(*x*)与*g*(*x*)满足条件：

1. 在点*a*的某空心邻域内可导，且*g’*(*x*)≠0.

则有

对于*x*→∞时的情况相似，略.

5.其他型未定式的求极限方法

除了以上两种未定式外，还有0·∞型、∞-∞型、00型、1∞型和∞0型等类型的未定式，需要将其化为型或型未定式，然后再利用洛必达法则或其他方法求解.

三、导数在函数上的应用

1.函数单调性判别定理

设函数*f*(*x*)在[*a*, *b*]上连续，在(*a*, *b*)内可导.

1. 如果在(*a*, *b*)内恒有*f’*(*x*)＞0，则*f*(*x*)在[*a*, *b*]上单调增加；
2. 如果在(*a*, *b*)内恒有*f’*(*x*)＜0，则*f*(*x*)在[*a*, *b*]上单调减少.

将定理中的闭区间换成其他任何区间（包括无穷区间），定理结论仍成立.

2.极值与极值点的定义

设函数*f*(*x*)在点*x*0的某邻域内有定义. 如果对该邻域内的任意点*x*（*x*≠*x*0），均有*f*(*x*)＜*f*(*x*0)（或*f*(*x*)＞*f*(*x*0)），则称*f*(*x*0)是*f*(*x*)的**极大值**（或**极小值**），称*x*0是*f*(*x*)的**极大值点**（或**极小值点**）. 函数的极大值与极小值统称为函数的**极值**，极大值点与极小值点统称为**极值点**.

3.极值点的必要条件

点*x*0是函数*f*(*x*)的极值点的必要条件是：

4.驻点的定义，驻点与极值点的关系

使*f’*(*x*)=0的点，称为函数*f*(*x*)的**驻点**.

函数的极值点必是它的驻点或导数不存在的点. 但是，驻点和导数不存在的点不一定都是极值点.

5.极值点第一判别法

设函数*f*(*x*)在点*x*0的某一空心邻域内可导，且在点*x*0连续.

1. 如果在点*x*0的左邻域内有*f’*(*x*)＞0，在右邻域内有*f’*(*x*)＜0，则*x*0是*f*(*x*)的极大值点；
2. 如果在点*x*0的左邻域内有*f’*(*x*)＜0，在右邻域内有*f’*(*x*)＞0，则*x*0是*f*(*x*)的极小值点；
3. 如果在点*x*0的空心邻域内*f’*(*x*)恒为正或恒为负，则*x*0不是*f*(*x*)的极值点.

6.极值点第二判别法

设*x*0是函数*f*(*x*)的驻点（即*f’*(*x*0)=0），且有二阶导数*f’’*(*x*0)≠0，则

1. 当*f’’*(*x*0)＞0时，*x*0是*f*(*x*)的极小值点；
2. 当*f’’*(*x*0)＜0时，*x*0是*f*(*x*)的极大值点.

7.求连续函数最值的方法

求连续函数*f*(*x*)在闭区间[*a*, *b*]上的最值时，只需分别计算*f*(*x*)在其驻点、导数不存在点，以及端点*a*和*b*处的函数值，然后再加以比较，其中最大者为*f*(*x*)在[*a*, *b*]上的最大值，最小者为*f*(*x*)在[*a*, *b*]上的最小值.

8.函数最值点与极值点的关系定理

设函数*f*(*x*)在闭区间[*a*, *b*]上连续，在开区间(*a*, *b*)内可导，且*x*0是*f*(*x*)在(*a*, *b*)内的唯一驻点. 则当*x*0为*f*(*x*)的极大值点（或极小值点）时，*x*0必同时为*f*(*x*)在[*a*, *b*]上的最大值点（或最小值点）.

将定理中的闭区间[*a*, *b*]改为其他形式的区间时，定理的结论仍成立.

9.曲线凸性的定义

设函数*f*(*x*)在区间(*a*, *b*)内可导，如果曲线*y*=*f*(*x*)上任意一点处的切线都在曲线的上方，则称该曲线为**向上凸的**（亦称为**凸弧**），称区间(*a*, *b*)为该曲线的**上凸区间**或**凸区间**；如果曲线*y*=*f*(*x*)上任意一点处的切线都在曲线的下方，则称该曲线为**向下凸的**（亦称为**凹弧**），称区间(*a*, *b*)为该曲线的下**凸区间**或**凹区间**. 曲线的向上凸或向下凸，统称为曲线的**凸性**.

10.曲线凸性的判定定理

设函数*f*(*x*)在区间(*a*, *b*)内二阶可导，则有

1. 若在(*a*, *b*)内有*f’’*(*x*)＞0，则曲线*y*=*f*(*x*)在(*a*, *b*)内向下凸（用符号︶表示）；
2. 若在(*a*, *b*)内有*f’’*(*x*)＜0，则曲线*y*=*f*(*x*)在(*a*, *b*)内向上凸（用符号︵表示）；

11.拐点的定义

连续曲线上凸弧与凹弧的分界点称为该曲线的**拐点**.

12.渐近线的定义

如果曲线*y*=*f*(*x*)上一动点沿曲线无限远离原点时，无限接近某直线（即该动点与直线的距离趋于零），则称此直线为曲线*y*=*f*(*x*)的**渐近线**.

13.渐近线的分类

**①水平渐近线：**

如果

则称直线*y*=*C*为曲线*y*=*f*(*x*)的水平渐近线.

**②垂直渐近线：**

如果

则称直线*x*=*x*0为曲线*y*=*f*(*x*)的垂直渐近线.

**③斜渐近线：**

如果

其中*a*和*b*为常数，且*a*≠0，则称直线*y*=*ax*+*b*为曲线*y*=*f*(*x*)的斜渐近线.

14.求曲线斜渐近线的公式

如果曲线*y*=*f*(*x*)有斜渐近线*y*=*ax*+*b*，则可得到求曲线*y*=*f*(*x*)的斜渐近线*y*=*ax*+*b*的两组公式：

或

如果两个极限有一个不存在，则*x*→+∞（或*x*→-∞）时，曲线*y*=*f*(*x*)无斜渐近线.

15.函数作图的基本步骤

作函数*y*=*f*(*x*)的图形的基本步骤如下：

1. 确定函数*f*(*x*)的定义域，讨论其奇偶性与周期性；
2. 求出使*f’*(*x*)=0与*f’’*(*x*)=0的点，以及*f’*(*x*)与*f’’*(*x*)不存在的点；
3. 以（2）中所得各点为分点，将函数*f*(*x*)的定义域划分为若干个子区间，并列表讨论*f’*(*x*)与*f’’*(*x*)在各子区间内的符号，从而确定出曲线*y*=*f*(*x*)在各子区间内的升降、凸性和拐点以及函数*f*(*x*)的极值.
4. 讨论函数*y*=*f*(*x*)的渐近线；
5. 描出曲线*y*=*f*(*x*)上的几个特殊点，并作图.

不定积分

一、不定积分的概念与性质

1.原函数的定义

设*f*(*x*)是定义在区间I上的已知函数. 如果存在函数*F*(*x*)，使得

在区间I上恒成立，则称*F*(*x*)是*f*(*x*)在区间I上的一个**原函数**.

2.原函数的性质定理

1. 如果*F*(*x*)是*f*(*x*)在区间I上的一个原函数，则*F*(*x*)+*C*也是*f*(*x*)在区间I上的原函数，其中*C*为任意常数.
2. 如果*F*(*x*)和*G*(*x*)都是*f*(*x*)在区间I上的原函数，则在区间I上它们的差*F*(*x*)-*G*(*x*)恒为常数.

3.不定积分的定义

设*F*(*x*)为*f*(*x*)在区间I上的一个原函数，则f(x)的全体原函数*F*(*x*)+*C*（*C*为任意常数）称为*f*(*x*)在区间I上的**不定积分**，记为∫*f*(*x*)d*x*，即

其中“∫”称为**积分号**，*f*(*x*)称为**被积函数**，*x*称为**积分变量**，*f*(*x*)d*x*称为**被积表达式**，*C*称为**积分常数**. 求已知函数*f*(*x*)的不定积分称为**积分***f*(*x*).

4.不定积分的几何意义

设*F*(*x*)为函数*f*(*x*)的一个原函数，则方程*y*=*F*(*x*)的图形为坐标平面上的一条曲线，称为函数*f*(*x*)的一条积分曲线. 将这条曲线沿*y*轴向上或向下平移长度为|*C*|的距离，将得到*f*(*x*)的另一条积分曲线*y*=*F*(*x*)+*C*. 由于*C*可取任意实数，故可以得到*f*(*x*)的无穷多条积分曲线，它们构成一曲线族，称为积分曲线族. 不定积分就表示这积分曲线族. 由于不论*C*取何值，恒有

故当横坐标相同时，各积分曲线的切线斜率相等，即各切线相互平行.

5.不定积分的基本性质

1. 求不定积分与求导互为逆运算

由此可见，微分运算（以记号d表示）与求不定积分的运算（简称积分运算，以记号∫表示）是互逆的. 当记号∫与d连在一起时，或者抵消，或者抵消后差一常数.

1. 非零常数因子可提到积分号之前：

其中*a*为非零常数.

1. 函数之和（或差）的不定积分等于函数不定积分之和（或差）：
2. 有限个函数线性组合的不定积分等于各函数不定积分的线性组合：

二、不定积分的计算方法

1.基本积分公式（直接积分法）

以下公式中，*C*为任意常数.

2.第一换元积分公式（凑微分法）

设*f*(*u*)、*φ*(*x*)、*φ’*(*x*)都是连续函数，*F*(*u*)为*f*(*u*)的一个原函数，则有第一换元积分公式：

利用该公式的关键在于，将待求不定积分的被积表达式凑成两部分的乘积，一部分是某已知函数*φ*(*x*)的复合函数*f*[*φ*(*x*)]，另一部分是*φ*(*x*)的微分d*φ*(*x*)=*φ’*(*x*)d*x*. 第一换元法的具体求解过程，可用下列等式表示：

3.第一换元法的常见凑微分类型

4.第二换元积分公式

设*f*(*x*)、*φ*(*t*)、*φ’*(*t*)均为连续函数，*x*=*φ*(*t*)的反函数*t*=*φ*-1(*x*)存在且可导，并且*F*(*t*)为函数*f*[*φ*(*t*)]*φ’*(*t*)的一个原函数，则有**第二换元积分公式**：

第二换元法的具体求解过程，可用下列等式表示：

5.第二换元法的运用规律

1. 被积函数中含有无理因子时，应选取变换*x*=*φ*(*t*)消去被积函数中的无理因子. 例如，被积函数中含（*a*≠0，*n*为正整数）因子时，令，即，就可去掉被积函数中的根式.
2. 若被积函数中含有，则令，可去掉根式.
3. 若被积函数中含有，则令，可去掉根式.
4. 若被积函数中含有，则令，可去掉根式.

对于情形（2）~（4），积分过程中，在将*t*代回*x*时，可以利用直角三角形，从而更方便.

6.由换元法得出的其他积分公式

7.分部积分公式

设*u*=*u*(*x*)和*v*=*v*(*x*)均为可导函数，则有**分部积分公式**：

或者

三、有理函数的积分

1.有理函数的定义

有理函数是指由两个多项式函数相除而得到的函数，其一般形式为

其中*n*，*m*为非负整数；*a*0，*a*1，…，*an*-1，*an*和*b*0，*b*1，…，*bm*-1，*bm*为常数，且*a*0≠0，*b*0≠0.

在此式中，总假定分子与分母没有公因子. 若*n*≥*m*，则称其为假分式；若*n*＜*m*，则称其为真分式.

2.部分分式

根据代数学理论，任一真分式总可分解为若干个部分分式之和. 所谓部分分式是指如下四种“最简真分式”：

可以用待定系数法将真分式分解为部分分式之和.

3.求有理函数不定积分的一般步骤

1. 将有理函数分解为多项式与真分式之和；
2. 将真分式分解为部分分式之和；
3. 求多项式与部分分式的不定积分.

理论上可严格证明，一般的四类部分分式的不定积分都是可以积出来的. 因而，有理函数的不定积分总是可以积出来的；换言之，有理函数的原函数一定是初等函数.

定积分

一、定积分的概念与性质

1.分划与分划的模

用一组（例如*n*+1个）分点：

将区间[*a*, *b*]分为*n*个小区间，这组分点就称为区间[*a*, *b*]的一个**分划**，记为*Δ*={*x*0, *x*1, …, *xn*}；将所有小区间中最大的区间长度称为分划*Δ*的模，记为||*Δ*||，即

其中*Δxi*=*xi*-*xi*-1（*i*=1, 2, …, *n*）为第*i*个小区间的长度.

一般地说，||*Δ*||愈小意味着分点愈多，分划愈细密.

2.定积分的定义

设*f*(*x*)是定义在区间[*a*, *b*]上的已知函数，*Δ*={*x*0, *x*1, …, *xn*}是[*a*, *b*]的任一分划，任取*ξi*∈[*xi*-1, *xi*] （*i*=1, 2, …, *n*），作和

若此和式的极限存在，即极限

存在，且极限值与[*a*, *b*]的分划方法及点*ξi*的取法无关. 则称函数*f*(*x*)在区间[*a*, *b*]上是**可积**的，并称此极限值为函数*f*(*x*)在区间[*a*, *b*]上的**定积分**，记为，即

其中*f*(*x*)称为**被积函数**，[*a*, *b*]称为**积分区间**，*a*称为**积分下限**，*b*称为**积分上限**，*x*称为**积分变量**，和式称为**积分和**.

**注意：**

1. 如果函数*f*(*x*)在区间[*a*, *b*]上可积，则定积分为一常数，它仅与被积函数*f*(*x*)和积分区间[*a*, *b*]有关，而与[*a*, *b*]的分划方法和点*ξi*的取法无关；与积分变量用什么字母表示也无关，即有
2. 当被积函数在积分区间上无界时，我们总可以选取点*ξi*，使积分和的绝对值无限增大，于是积分和的极限不存在. 因此，无界函数是不可积的. 换言之，函数*f*(*x*)有界是*f*(*x*)可积的必要条件. 至于对已给函数*f*(*x*)，其可积的充分条件，要用到“定积分存在性定理”；有限区间上的连续函数是可积的，有限区间上只有有限个间断点的有界函数也是可积的.
3. 在定积分定义中，实际上假定了*a*＜*b*. 如果*b*＜*a*，则规定

这表明，定积分的上限与下限互换时，定积分的值变号.

特别地，当*a*=*b*时，规定

3.定积分的几何意义

如果连续函数*f*(*x*)≥0，*a*＜*b*，则由函数*y*= *f*(*x*)，直线*x*=*a*、*x*=*b*及*x*轴所围成的曲边梯形的面积*S*就是函数*y*= *f*(*x*)在区间[*a*, *b*]上的定积分，即

4.定积分的基本性质

假设下面涉及到的函数均是可积的.

1. 由定积分定义可直接得出
2. 设*α*，*β*为常数，则有
3. 设*a*，*b*，*c*为不相同的常数，则有
4. 设*a*＜*b*，对任意*x*∈[*a*, *b*]，恒有

则有

1. 设*f*(*x*)在[*a*, *b*]上连续，*f*(*x*)≥0，且*f*(*x*)不恒为零，则有
2. 若对任意*x*∈[*a*, *b*]，恒有

则有

1. **积分中值定理：**若*f*(*x*)在[*a*, *b*]上连续，则至少存在一点*ξ*∈[*a*, *b*]，使得

通常，称

为函数*f*(*x*)在区间[*a*, *b*]上的平均值.

二、微积分基本定理

1.积分上限函数（变上限积分）

设函数*f*(*x*)在闭区间[*a*, *b*]上连续，*x*是区间[*a*, *b*]上的任意一点，则*f*(*x*)在区间[*a*, *x*]上也连续，从而定积分存在. 为了不致引起混淆，通常改用字母*t*表示积分变量（这不会改变积分的值）. 于是，上面的定积分可以写成

在该式中，令上限*x*在区间[*a*, *b*]上任意取值，则对应于每一个确定的*x*∈[*a*, *b*]，该式都有一个确定的值与之对应. 因此，该定积分是定义在区间[*a*, *b*]上的函数，称为**积分上限函数**或**变上限积分**，记为*Φ*(*x*)，即

2.原函数存在性定理

若函数*f*(*x*)在区间[*a*, *b*]上连续，则积分上限函数*Φ*(*x*)为*f*(*x*)在[*a*, *b*]上的一个原函数，即有

应用该式时不必限定*x*＞*a*，积分上限*x*可以不大于积分下限*a*. 即对于*x*≤*a*的情形，该式仍成立.

3.[\*]原函数存在性定理的推论

设函数*f*(*x*)连续，*u*(*x*)和*v*(*x*)可导，则可导，且

特别地

4.被积函数为周期函数时原函数存在性定理的推论

设*f*(*x*)是周期为*T*的连续函数，*a*为任意常数，则有

5.微积分学基本定理（牛顿-莱布尼兹[*Newton – Leibniz*]公式）

设函数*f*(*x*)在区间[*a*, *b*]上连续，而*F*(*x*)是*f*(*x*)在区间[*a*, *b*]上的任一原函数，则有

三、定积分的计算方法

1.定积分的换元积分公式

设函数*f*(*x*)在区间[*a*, *b*]上连续，而函数*x*=*φ*(*t*)满足下列条件：

1. *φ*(*t*)是定义在区间[*α*, *β*]上的单调连续函数；
2. *φ*(*α*)=*a*，*φ*(*β*)=*b*；
3. *φ’*(*t*)在[*α*, *β*]上连续.

则有换元积分公式：

如果*α*＞*β*，相应地*φ*(*t*)与*φ’*(*t*)在区间[*β*, *α*]上连续，此时上式仍然成立.

2.被积函数具有奇偶性时换元积分公式的推论

若*f*(*x*)在[-*a*, *a*]上连续. 则有：

3.定积分的分部积分公式

若函数*u’*(*x*)和*v’*(*x*)均在区间[*a*, *b*]上连续，则有定积分分部积分公式：

四、定积分的应用

1.一般的平面图形面积的计算公式

①由曲线*y*=*f*(*x*)，直线*x*=*a*、*x*=*b*与*x*轴所围成的平面图形的面积为

②由两条曲线*y*=*f*(*x*)、*y*=*g*(*x*)与直线*x*=*a*、*x*=*b*所围成的平面图形的面积为

③由曲线*x*=*φ*(*y*)，直线*y*=*c*，*y*=*d*与*y*轴所围成的平面图形的面积为

④由两条曲线*x*=*φ*(*y*)、*x*=*ψ*(*y*)与直线*y*=*c*、*y*=*d*所围成的平面图形的面积为

2.平行截面面积为已知的立体的体积公式

设有一空间立体位于垂直于*x*轴的两平面*x*=*a*与*x*=*b*（*a*＜*b*）之间. 如果该立体被垂直于*x*轴的平面所截的截面面积为*x*的已知函数*S*(*x*)（*a*≤*x*≤*b*），则该立体的体积为

3.旋转体的体积

设*y*=*f*(*x*)在区间[*a*, *b*]上连续，则由曲边梯形*AabB***绕***x***轴旋转**而成的**旋转体**的**体积***Vx*为

类似地，由曲边梯形*CcdD*绕*y*轴旋转而成的旋转体的体积*Vy*为

4.已知总产量变化率求总产量的函数

已知某产品的总产量*Q*的变化率是时间*t*的连续函数*f*(*t*)，即设*Q’*(*t*)=*f*(*t*). 则该产品的总产量函数为

其中*t*0≥0为某个规定的初始时刻. 通常，取*t*0=0，这时*Q*(0)=0，即刚投产时总产量为零.

由上式可知，从*t*0到*t*1（0≤*t*0＜*t*1）这段时间内，总产量的增量为

五、反常积分初步

1.无穷限的反常积分及其敛散性的定义

如果对给定的实数*a*和任意实数*b*（*b*＞*a*），函数*f*(*x*)在[*a*, *b*]上可积，且极限存在，则称无穷限的反常积分**收敛**，并称此极限值为该无穷限的反常积分的积分值，记为

如果上式右端极限不存在，则称无穷限的反常积分**发散**.

类似地，可定义无穷限的反常积分的收敛与发散：若极限存在，则称无穷限的反常积分收敛，否则称其为发散. 收敛时记为

如果对某个函数*c*（例如取*c*=0），两个反常积分与都收敛，则称无穷限的反常积分收敛，并定义

如果与至少有一个发散，则称无穷限的反常积分发散. 此时仅是一个符号，而无任何实际意义.

2.无穷限的反常积分的几何意义

无穷限的反常积分的几何意义是：当*f*(*x*)＞0时，如果反常积分收敛，则其值表示由曲线*y*=*f*(*x*)与直线*x*=*a*、*y*=0所围成的向右无限延伸的平面图形的面积.

3.无穷限的反常积分在计算时的表示

一般说来，计算收敛的无穷限反常积分时，如果*F*(*x*)分别是*f*(*x*)在积分区间[*a*, +∞)，(-∞, *b*]和(-∞, +∞)上的一个原函数，则

4.无界函数的反常积分（瑕积分）及其敛散性的定义

如果被积函数*f*(*x*)在区间[*a*, *b*]上某点的任何邻域内无界，则称积分为**无界函数的反常积分**，又称**瑕积分**，称点*x*0为*f*(*x*)的**瑕点**.

如果对任意小的整数*ε*，函数*f*(*x*)在区间[*a*+*ε*, *b*]上皆可积，在(*a*, *a*+*ε*)内无界，点*a*为*f*(*x*)的瑕点，则当存在时，称反常积分（瑕积分）收敛. 称此极限为无界函数*f*(*x*)的反常积分（瑕积分）的值，并记

如果上述极限不存在，则称反常积分发散.

类似地，当*x*=*b*为*f*(*x*)的唯一瑕点时，定义反常积分

当*x*=*c*（*a*＜*c*＜*b*）为*f*(*x*)的唯一瑕点，且两个反常积分，都收敛时，则称反常积分收敛，且

如果前述两反常积分任何一个发散，则称反常积分发散.

反常积分收敛时，表示极限值，是一个有限数；反常积分发散时，仅是一个符号，没有任何实际意义.

5.[\*]瑕积分的二级公式

对于瑕积分，当*p*＜1时，其收敛，且

当*p*≥1时，其发散.

6.*Γ*函数的定义

反常积分

是参变量*t*的函数，称为*Γ*函数. *t*＞0时，这个反常积分是收敛的.

7.*Γ*函数的性质

*Γ*函数有如下的重要性质：

特别地，当*t*=*n*为正整数时，有

由上两式，可以证明如下的公式：

由上述第二式可知，对任何*t*＞0，*Γ*(*t*)的计算总可化为对*Γ*(*s*)（*s*∈[1, 2]）的计算. 而*Γ*(*s*)（*s*∈[1, 2]）的值可通过查*Γ*函数表直接得到.

微分方程初步

一、微分方程的基本概念

1.微分方程的定义

含有自变量、未知函数以及未知函数的导数（或微分）的函数方程，称为**微分方程**. 未知函数为一元函数的微分方程，称为**常微分方程**；未知函数为多元函数，从而出现偏导数的微分方程，称为**偏微分方程**.

（以下内容仅涉及常微分方程，故可能将常微分方程简称为微分方程，甚至简称为方程。）

2.微分方程的阶及*n*阶微分方程

微分方程中出现的未知函数的最高阶导数的阶数，称为**微分方程的阶**. *n*阶（常）微分方程的一般形式是

其中*x*为自变量，*y*为未知函数；*F*(*x*, *y*, *y’*, …, *y*(*n*))是*x*, *y*, *y’*, …, *y*(*n*)的已知函数，且*y*(*n*)一定要出现.

如果上式左端的函数*F*为*y*, *y’*, …, *y*(*n*)的线性函数，则称其为*n***阶线性（常）微分方程**，其一般形式为

其中*a*1(*x*)，…，*an*(*x*)和*f*(*x*)均为自变量*x*的已知函数.

不是线性方程的微分方程，统称**为非线性微分方程**.

3.微分方程的解

如果将已知函数*y*=*φ*(*x*)代入*n*阶微分方程的一般形式后，能使其成为恒等式，则称函数*y*=*φ*(*x*)为方程的解；如果由关系式*Φ*(*x*, *y*)=0确定的隐函数*y*=*φ*(*x*)是方程的解，则称*Φ*(*x*, *y*)=0为方程的**隐式解**.

如果含有*n*个（独立的）任意常数*C*1，*C*2，…，*Cn*的函数

或

是*n*阶微分方程的解，则称其为方程的**通解**；在通解中给任意常数*C*1，*C*2，…，*Cn*以确定的值而得到的解，称为方程的**特解**.

4.微分方程特解的条件与问题

通常，为了确定*n*阶微分方程的某个特解，需给出该特解应满足的附加条件，称为**定解条件**. 一般地说，*n*阶微分方程应有*n*个定解条件，才能确定某个具体的特解. *n*阶微分方程的常见定解条件是如下的**初始条件**：

其中*x*0, *y*0, *y*1, …, *yn*-1为*n*+1个给定的常数.

求微分方程满足某个定解条件的解的问题，称为微分方程的**定解问题**；求微分方程满足某个初始条件的解的问题，称为微分方程的**初值问题**.

二、一阶微分方程

1.一阶微分方程的一般形式

最基本的微分方程是一阶微分方程. 一阶微分方程的一般形式是

或

其中*F*(*x*, *y*, *y’*)是*x*, *y*, *y’*的已知函数；*f*(*x*, *y*)是*x*, *y*的已知函数.

2.可分离变量方程及其解

形如

的一阶微分方程，称为**分离变量方程**，而形如

的一阶微分方程，称为**可分离变量方程**. 因为其可改写为

的分离变量方程.

将以上方程两端分别对*x*和对*y*积分，可得其通解，分别为

其中*C*为任意常数.

3.齐次微分方程及其解

形如

的一阶微分方程，称为**齐次微分方程**，简称为**齐次方程**.

求解齐次方程的常用方法是变量变换法，即通过变量变换将其化为分离变量方程然后再求解的方法，令

其中*u*是新的变量. 对*y*=*xu*两边求微分，得

代入原式，得

分离变量，得

积分得

求出上式左端的一个原函数后，再将代入，即可求得原方程的通解.

**注意：**如果常数*a*是方程*f*(*u*)-*u*=0的根，则*y*=*ax*也是原方程的解.

4.一阶线性微分方程的定义

形如

的一阶微分方程，称为**一阶齐次线性方程**，其中*P*(*x*)为*x*的已知函数. 而形如

的一阶微分方程，称为**一阶非齐次线性方程**，其中*P*(*x*)、*Q*(*x*)为*x*的已知函数，且*Q*(*x*)≠0.

一阶齐次线性方程与一阶非齐次线性方程统称为**一阶线性（微分）方程**. 有时也称一阶齐次线性方程为一阶非齐次线性方程的**对应齐次方程**.

5.一阶线性微分方程的通解与常数变易法

一阶齐次线性方程的通解为

其中*C*为任意常数.

一阶非齐次线性方程的通解为

下面运用两种方法求得一阶非齐次线性方程的通解.

**变量变换法**的推导过程是：

设一阶非齐次线性方程的解为

其中*u*=*u*(*x*)、*v*=*v*(*x*)为待定的未知函数. 代入原方程，得

为了确定*u*、*v*，令

则有

对使用一阶齐次线性方程的通解公式，有

代入并积分，得

则一阶非齐次线性方程的通解为

**常数变易法**的推导过程是：

将一阶非齐次线性方程的对应齐次方程的通解中的常数*C*变易为*x*的函数*C*(*x*)，即令一阶非齐次线性方程的解为

其中*C*(*x*)为待定函数，对上式求导，得

将上述*y*和*y’*代入原方程，得

积分得

则一阶非齐次线性方程的通解为

6.伯努利（*Bernoulli*）方程

形如

的方程，称为伯努利方程，其中*n*为常数.

显然，当*n*=0或1时，该方程就化为线性方程. 当*n*≠0且*n*≠1时，利用变量变换法可求出方程的通解：

三、二阶线性微分方程

1.二阶线性微分方程的定义

二阶线性微分方程的一般形式是

其中*a*(*x*), *b*(*x*), *f*(*x*)都是*x*的已知连续函数.

如果*f*(*x*)=0，则上式变为

称其为**二阶齐次线性微分方程**，简称**齐次线性方程**. 相应地，*f*(*x*)≠0时称其为**二阶非齐次线性微分方程**，简称**非齐次线性方程**. 有时也称前者为后者的**对应齐次方程**.

2.线性相关与线性无关

给定定义在区间I上的函数组*y*1(*x*), *y*2(*x*), …, *yk*(*x*)，如果存在不全为零的常数*C*1, *C*2, …, *Ck*，使得等式

在区间I上恒成立，则称函数组*y*1(*x*), *y*2(*x*), …, *yk*(*x*)在区间I上是线性相关的；如果在区间I上，该等式仅当*C*1, *C*2, …, *Ck*全为零时才成立，则称函数组*y*1(*x*), *y*2(*x*), …, *yk*(*x*)在区间I上是线性无关的.

3.二阶线性微分方程解的基本定理

1. 如果*a*(*x*)，*b*(*x*)及*f*(*x*)都是定义在区间I上的连续函数，则对任一*x*0∈I及任意给定的常数*y*0，*y*1，二阶线性方程一定存在定义在区间I上的唯一解*y*=*φ*(*x*)，并满足如下初始条件：
2. 如果函数*y*1=*y*1(*x*)，*y*2=*y*2(*x*)都是齐次线性方程的解，则它们的任意线性组合

都是原方程的解，其中*C*, *C*1, *C*2是任意常数.

1. 二阶齐次线性方程一定存在两个线性无关的解.
2. 如果*y*1=*y*1(*x*)和*y*2=*y*2(*x*)是二阶齐次线性方程的两个线性无关的解，则原方程的通解为

其中*C*1, *C*2是任意常数.

1. 如果是二阶非齐次线性方程的一个特解，*yC*=*yC*(*x*)是其对应齐次方程的通解，则非齐次线性方程的通解为

其中*C*1, *C*2是任意常数.

4.二阶常系数线性方程的定义

二阶常系数线性微分方程的一般形式是

其中*a*、*b*为已知实常数，*f*(*x*)为已知函数. 该方程的对应齐次方程为

5.二阶常系数齐次线性方程的通解

二阶常系数线性微分方程的**特征方程**是

*λ*为常数. 特征方程的解称为**特征根**或**特征值**.

1. **当特征根为相异实根时**

即*Δ*=*a*2-4*b*＞0时，特征方程有两个相异实根，即

此时的两个特解线性无关. 因此，原方程的通解为

其中*C*1、*C*2为任意常数.

1. **当特征根为重根时**

即*Δ*=*a*2-4*b*=0时，重特征根为

此时存在两个特解线性无关. 因此，原方程的通解为

1. **当特征根为共轭复根时**

即*Δ*=*a*2-4*b*＜0时，共轭复根为

记*λ*1、*λ*2的实部与虚部分别为*α*、*β*，即

其中为虚数单位. 此时存在两个特解线性无关. 因此，原方程的通解为