Modélisation et Représentations Géométriques
TP - Lissage Laplacien de Maillages

Ricardo Uribe Lobello

24/10/2023

Dans ce TP, nous allons essayer d'implanter une approximation discrète de l'opérateur du Laplace-Beltrami sur un maillage. Ce calcul va nous permettre d'implanter des algorithmes de lissage sur des surfaces. Ces algorithmes seront appliqués sur des maillages gérés par une structure de données de démi-arêtes implanté par la librairie OpenMesh. Vous devrez utiliser le code de base fourni dans le Master 1 et déjà utilisé dans d'autres cours. Des maillages pour tester vos algorithmes vous seront aussi fournis.

1. Implantez l'approximation cotangentielle de l'opérateur de Laplace-Beltrami (LB). Vous avez déjà étudié cet opérateur dans la séance de lissage de maillages. Cet opérateur est dépendant de la connectivité et de la géométrie du maillage et fourni une bonne approximation du Laplacien en continu. Il est défini par l'équation :

$$\Delta f(v) = \frac{1}{2A(v)} \sum_{v_i \in N_1(v)} [\cot \alpha_i + \cot \beta_i][f(v_i) - f(v)]$$

   Avec $A(v)$ l'aire en bleu autour du sommet courant v. **Attention, l'utilisation de cette matrice diagonale de masse ne marche bien que pour des triangulations du type Delaunay.**

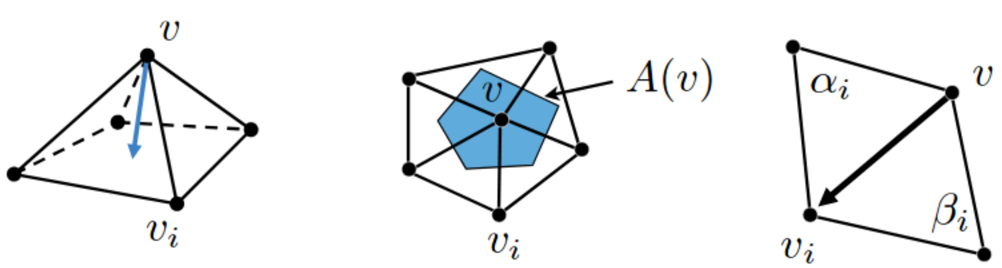

Figure 1: Elements géométriques à considérer pendant la discrétisation de l'opérateur de Laplace-Beltrami.

   Il est aussi possible de créer une estimation du Laplace-Beltrami uniforme. Cela veut dire sans pondération en éliminant les cotangentes et la pondération par rapport à la surface A_i.

2. Construissez maintenant la matrice de Laplace-Beltrami qui contiendra le résultat du calcul de l'opérateur de Laplace-Beltrami pour chaque arête connectant deux sommets dans le maillage. Cette matrice est définie comme $L = DM$ où les éléments de la matrice M(matrice d'adjacence) sont les suivants :

$$m_{i,j} = \left\{ \begin{array}{cc} -\sum_{v_k \in N_1(v_i)} w_{i,k}, & i = j, \\ w_{i,j}, & v_j \in N_1(v_i), \\ 0 & Sinon \end{array} \right\}$$

Et la matrice D est une matrice diagonale contenant les valeurs suivants :

$$d_{i,j} = \left\{ \begin{array}{cc} \frac{1}{2A(v_i)}, & i = j, \\ 0 & Sinon \end{array} \right\}$$

Cette matrice L vous permettra d'utiliser des opérateurs de Laplace-Beltrami (LB) d'ordre supérieur, par exemple, le LB de deuxième ordre est défini par $L^2 = LL$. Ce LB possède des bonnes propriétés pour la continuité des surfaces discrètes s'il est utilisé dans un flou de diffusion.

3. Utilisez l'opérateur de Laplace-Beltrami calculé dans les points précedents et essayez de l'utiliser pour calculer le flou de diffusion sur un maillage bruité. Rappelez vous que le flou de diffusion sur un maillage est défini comme suit :

$$x_i = x_i + h\ \lambda\ \Delta x_i$$

Avec h et λ comme des facteurs de vitesse de convergence dans le lissage. Utilisez différents valeurs de pondération et éxaminez les résultats.

Une fois que vous avez implanté le flou de diffusion avec le Laplace-Beltrami cotangentiel, utilisez maintenant le Laplace-Beltrami uniforme et examinez le résultat par rapport à ce qui est obtenu avec le LB cotangentiel. Vous pouvez aussi essayer d'utiliser le LB de deuxième ordre dans ce flou de diffusion afin de comparer les résultats obtenus.