Chapitre 4 : Méthode des différences finies (2D)

1. Problèmes stationnaires 2D
2. Problèmes instationnaires 2D

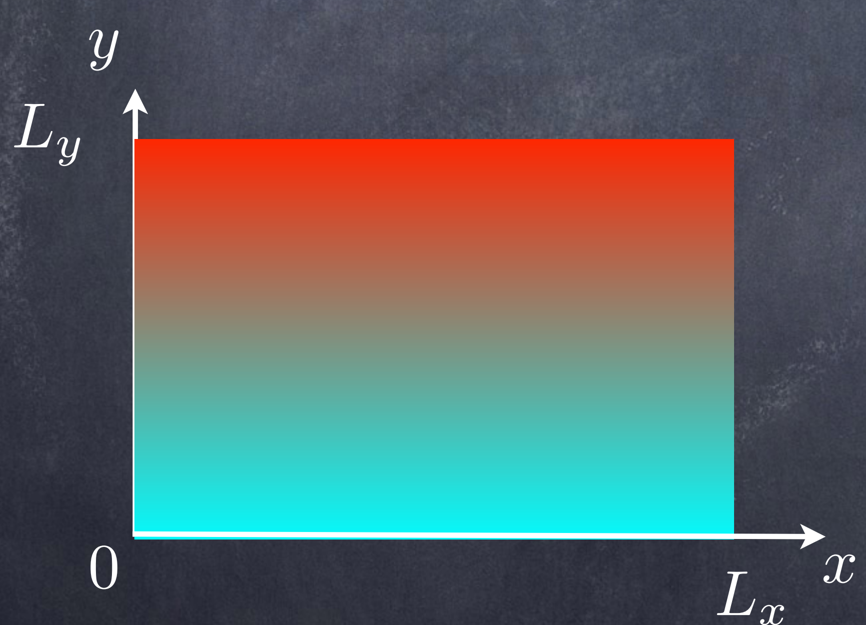
1 Problèmes stationnaires

1.1 Poisson 2D + CL Dirichlet

PAS 1 : Définition du problème continu

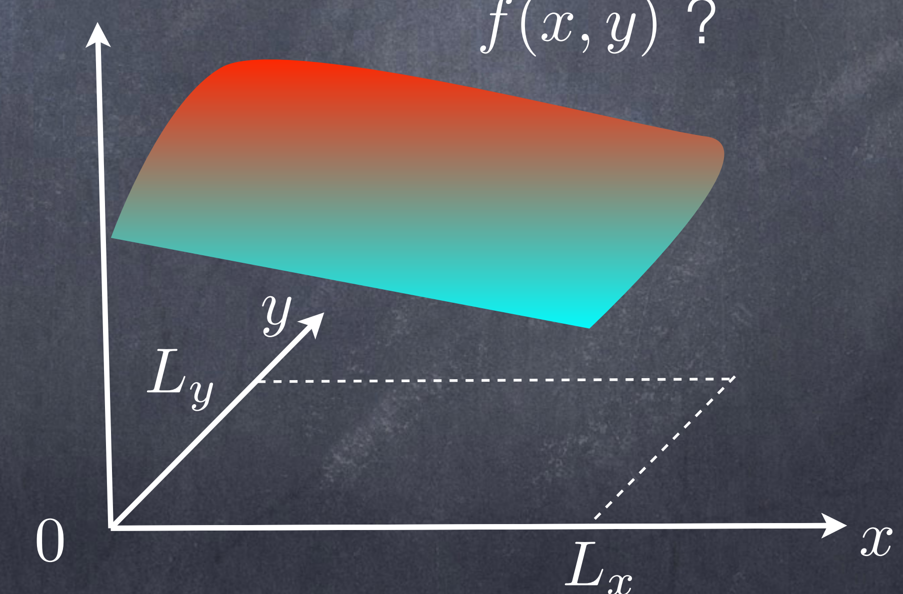
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = g \qquad \begin{array}{l} x \in [0, L_x] \\ y \in [0, L_y] \end{array}$$

CL:
$$\begin{array}{ll} f(x,0) = C_{sud}(x) & \\ f(x,L) = C_{nord}(x) & x \in [0, L_x] \\ f(0,y) = C_{est}(y) & \\ f(L,y) = C_{ouest}(y) & y \in [0, L_y] \end{array}$$



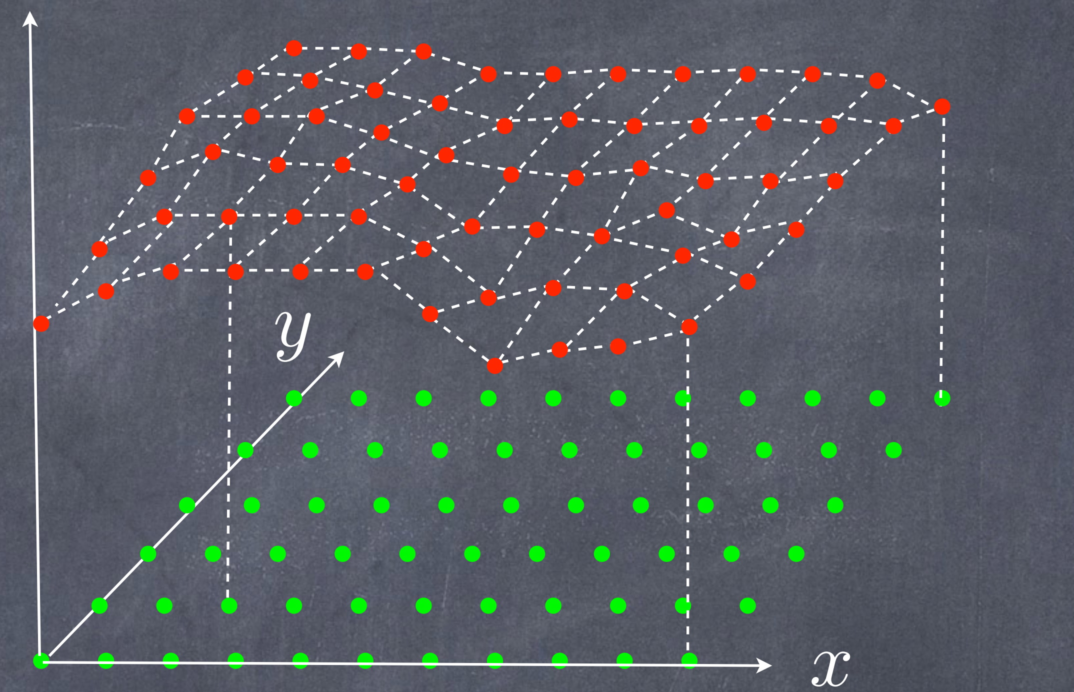
$f(x,y)$?

Vision code couleur



Vision surface

PAS 2 : Introduction d'un maillage & valeurs nodales des champs



maillage de $N = (M_x + 1)(M_y + 1)$ points

- $0 = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{M_x} = L_x$
  $0 = y_0 < y_1 < y_2 < \ldots < y_{M_y} = L_y$

N valeurs nodales de f, recherchées

- $f_{0,0}\ ,\ f_{0,1}\ ,\ f_{0,2}\ ,\ \cdots\ ,\ f_{0,M_y}$
  $f_{1,0}\ ,\ f_{1,1}\ ,\ f_{1,2}\ ,\ \cdots\ ,\ f_{1,M_y}$
  ...
  $f_{M_x,0}\ ,\ f_{M_x,1}\ ,\ f_{M_x,2}\ ,\ \cdots\ ,\ f_{M_x,M_y}$

$$f_{i,j} = f(x_i, y_j)$$

$$\frac{\partial^2 f_{i,j}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_i, y_j)$$

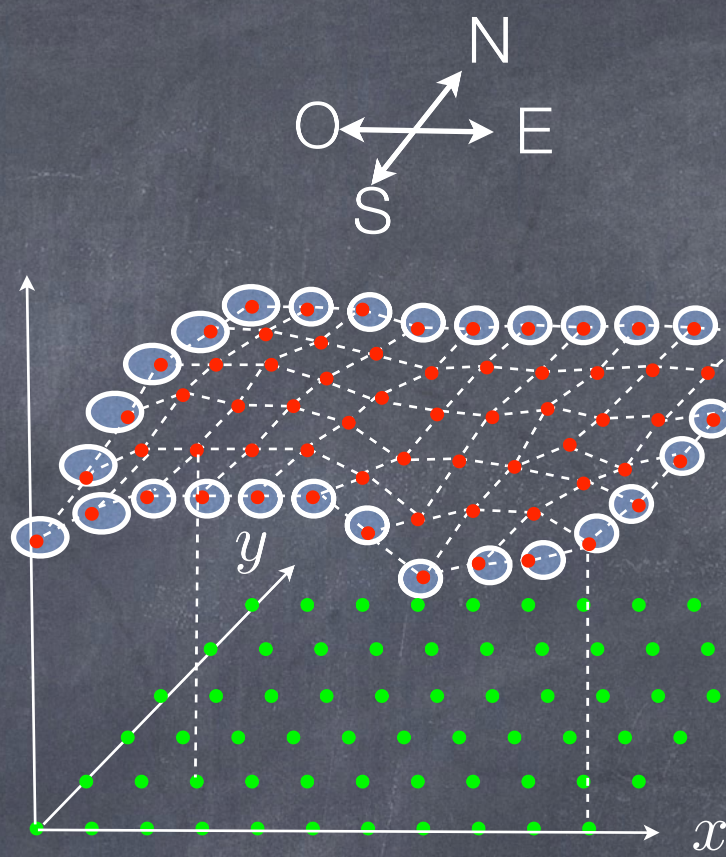
$$\frac{\partial^2 f_{i,j}}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_i, y_j)$$

N valeurs nodales de g, connues

- $g_{i,j} = g(x_i, y_j)$

En 2 dimensions, il faut tout de suite gérer un grand nombre de variables. = **DIFFICULTE**

PAS 3 : Ecrire le problème discrétisé



Eqs pour les points de bords

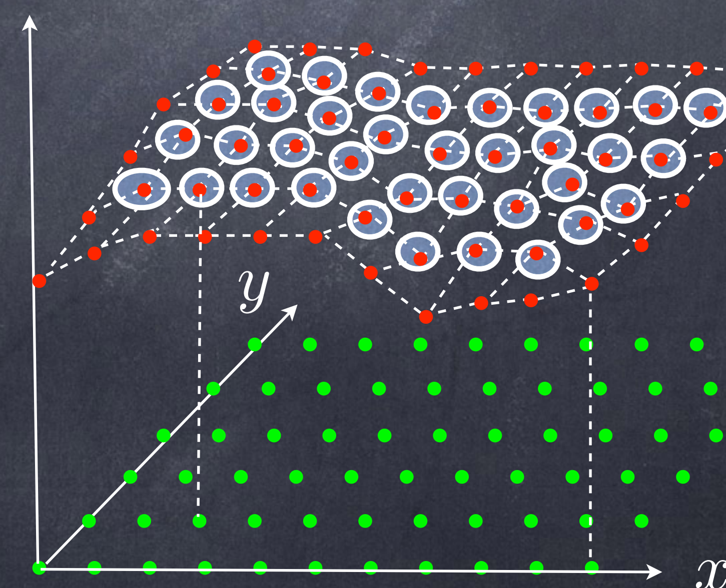
$$f_{0,j} = C_{ouest}(y_j) \qquad f_{i,0} = C_{sud}(x_i)$$

$$f_{M_x,j} = C_{est}(y_j) \qquad f_{i,M_y} = C_{nord}(x_i)$$

$$j = 0, \ldots, M_y \qquad i = 1, \ldots, M_x - 1$$

$$\boxed{N_{bord} = 2M_x + 2M_y \quad \text{eqs}}$$

Eqs pour les points intérieurs

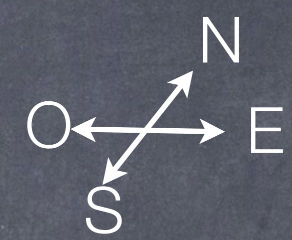


$$\frac{\partial^2 f_{i,j}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f_{i,j}}{\partial y^2} = g_{i,j}$$

$$i = 1, \ldots, M_x - 1$$
$$j = 1, \ldots, M_y - 1$$

$$\boxed{N_{int} = (M_x - 1)(M_y - 1) = N - N_{bord} \quad \text{eqs}}$$

PAS 3 : Ecrire le problème discrétisé

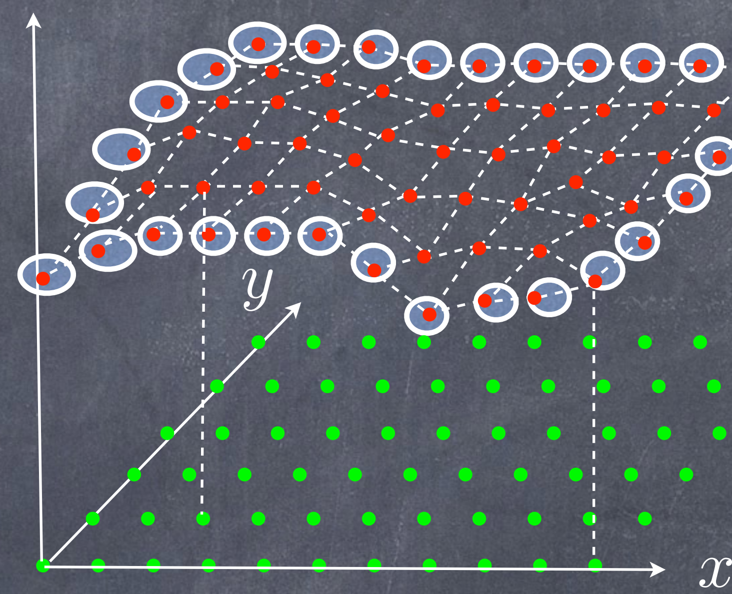


Eqs pour les points de bords

$$f_{0,j} = C_{ouest}(y_j) \qquad f_{i,0} = C_{sud}(x_i)$$

$$f_{M_x,j} = C_{est}(y_j) \qquad f_{i,M_y} = C_{nord}(x_i)$$

$$j = 0, \ldots, M_y \qquad i = 1, \ldots, M_x - 1$$

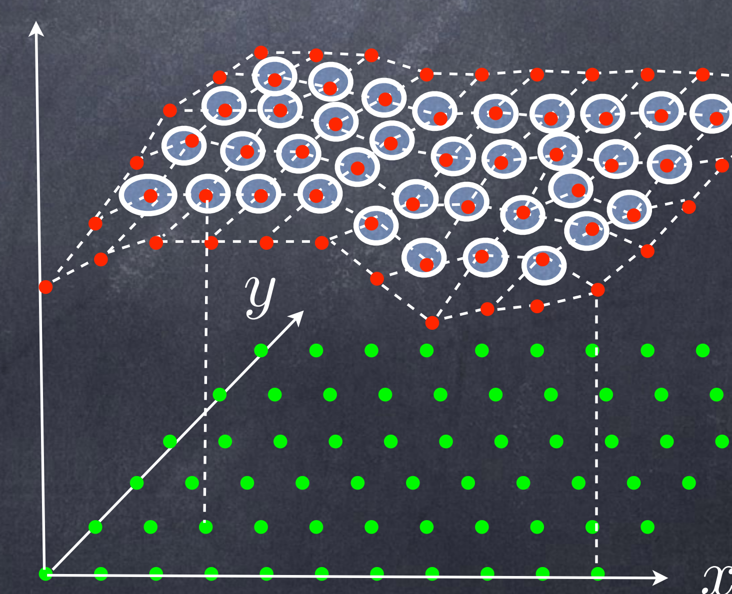


$$\boxed{N_{bord} = 2M_x + 2M_y \quad \text{eqs}}$$

Eqs pour les points intérieurs (maillage uniforme)

$$\frac{f_{i-1,j} - 2f_{i,j} + f_{i+1,j}}{\delta x^2} + \frac{f_{i,j-1} - 2f_{i,j} + f_{i,j+1}}{\delta y^2} = g_{i,j}$$

$$i = 1, \ldots, M_x - 1$$
$$j = 1, \ldots, M_y - 1$$



$$\boxed{N_{int} = (M_x - 1)(M_y - 1) = N - N_{bord} \quad \text{eqs}}$$

PAS 4 : Ecriture matricielle = DIFFICULTE

Avec $N = (M_x + 1) \times (M_y + 1)$ = le nombre de valeurs nodales, on vise à obtenir l'écriture suivante

Cette matrice contiendra **les coefficients des équations algébriques**, sur les points de bord et les points intérieurs

grand système linéaire !

Ce vecteur colonne contiendra **toutes les valeurs nodales** $f_{i,j}$

=

Ce vecteur colonne contiendra **les valeurs aux bords et sources** $g_{i,j}$

$\mathbf{A}$ matrice taille N x N

$\mathbf{f}$ vecteur N x 1

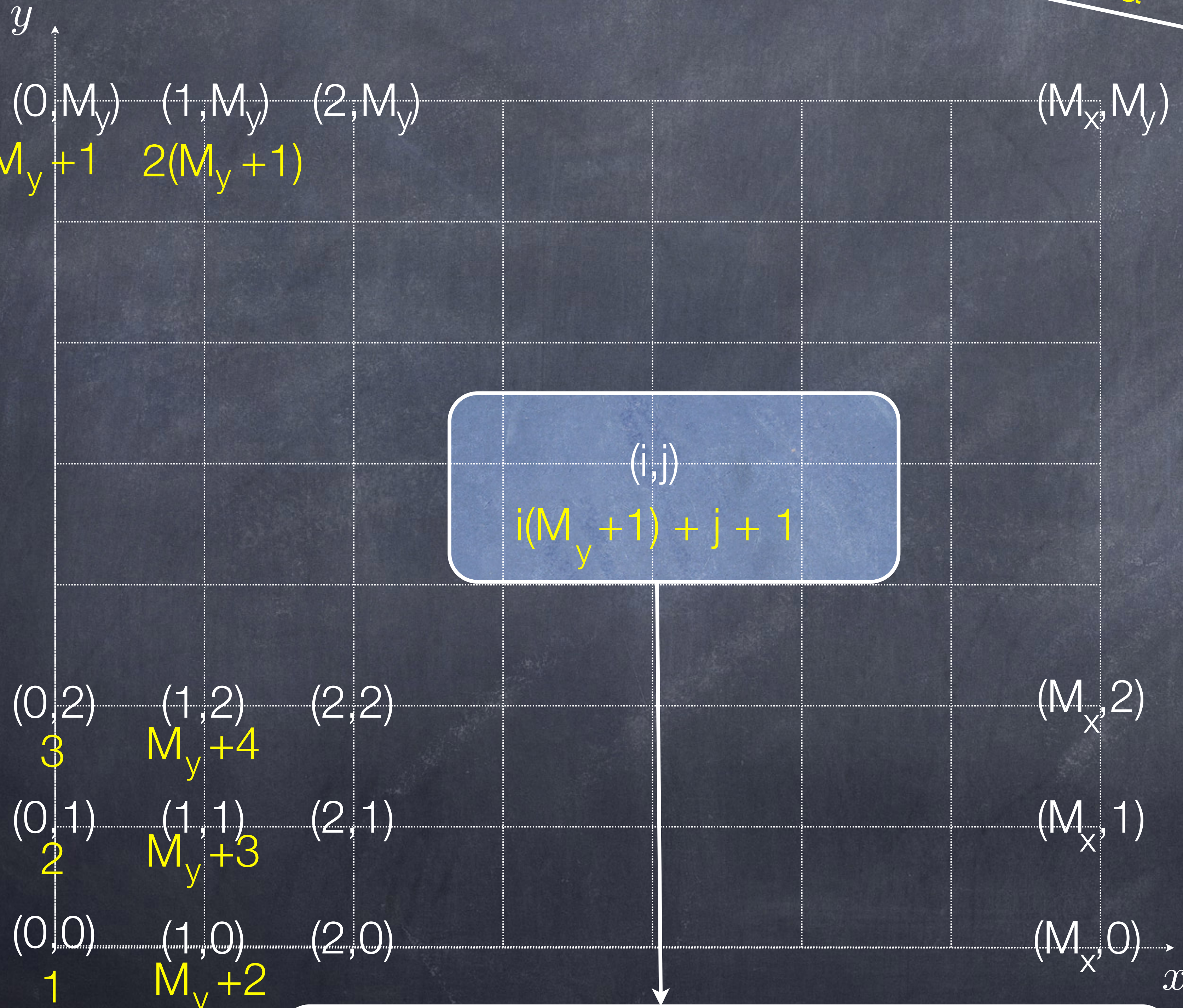
$\mathbf{g}$ vecteur N x 1

<u>toutes ?</u>
Ceci nécessite une nouvelle numérotation des points

Les valeurs nodales $f_{i,j}$ sont numérotées par deux indices
mais se trouveront donc toutes dans un grand vecteur colonne $\mathbf{f}$

On choisit la convention suivante
pour la nouvelle numérotation

ce qui mène à



$$\begin{bmatrix} f_{0,0} \\ f_{0,1} \\ \dots \\ f_{0,M_y} \\ \hline f_{1,0} \\ f_{1,1} \\ \dots \\ f_{1,M_y} \\ \hline \\ \hline f_{M_x,0} \\ f_{M_x,1} \\ \dots \\ f_{M_x,M_y} \end{bmatrix}$$

$\mathbf{f}$ vecteur colonne N x 1

savoir où se trouve l'élément (i,j) dans
le vecteur $\mathbf{f}$ sera **crucial** pour programmer

On obtient alors $a = 1/\delta x^2$ $b = 1/\delta y^2$ $c = -2/\delta x^2 - 2/\delta y^2$

eq pt 1 eq pt 2 ... eq pt M_y+1	ouest ouest ... ouest	1 1 ⋱ 1 1					$f_{0,0}$ $f_{0,1}$ ... f_{0,M_y}		C_0^{ouest} C_1^{ouest} ... $C_{M_y}^{ouest}$
eq pt M_y+2 ... eq pt 2(M_y+1)	sud intérieur ... intérieur nord	0 a ⋱ a 0	1 b c b ⋱ ⋱ ⋱ b c b 1	0 a ⋱ a 0			$f_{1,0}$ $f_{1,1}$ ... f_{1,M_y}		C_1^{sud} $g_{1,1}$ ... g_{1,M_y} C_1^{nord}
...	...		⋱	⋱	⋱			=	...
	sud intérieur ... intérieur nord			0 a ⋱ a 0	1 b c b ⋱ ⋱ ⋱ b c b 1	0 a ⋱ a 0			$C_{M_x}^{sud}$ $g_{M_x,1}$ ... g_{M_x,M_y} $C_{M_x}^{nord}$
eq pt N	est est ... est					1 1 ⋱ 1 1	$f_{M_x,0}$ $f_{M_x,1}$ ... f_{M_x,M_y}		C_0^{est} C_1^{est} ... $C_{M_y}^{est}$

A matrice taille N x N

f vecteur

g vecteur

$N = (M_x + 1) \times (M_y + 1)$

PAS 5 : Programmation

Il suffit de définir la matrice A et le vecteur g, afin de pouvoir calculer la solution f à l'aide de l'ordinateur. On utilisera f =A\g en Matlab et des bibliothèques d'algorithmes ailleurs.

= pareil qu'en 1D

Difficulté est ici de savoir comment programmer ces matrices et ce vecteur de manière correcte. Ceci demande de l'organisation et il faut réfléchir en avance comment le faire.

Le mieux est de parcourir tout les points de maillage, par une double boucle et de remplir la matrice au fur et à mesure. On programmera deux fois la même chose

Méthode 1: Matrices pleines

On représente des matrices, comme des matrices. Tous les éléments, même les zéros.

+ Facile à coder mais nombre de points limité

Méthode 2: Matrices creuses **sparse**

On représente des matrices, pas comme des matrices. Seulement les éléments non-nuls et leurs indices de lignes et colonnes

- Facile à coder mais grand nombre de points possible

VALIDATION ?

$$a = 1/\delta x^2 \qquad b = 1/\delta y^2 \qquad c = -2/\delta x^2 - 2/\delta y^2$$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{c|c|c|c|c}
\begin{matrix}1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1\end{matrix} & & & & \\ \hline
\begin{matrix}0 & & & \\ & a & & \\ & & \ddots & \\ & & & a \\ & & & & 0\end{matrix} & \begin{matrix}1 & & & \\ b & c & b & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & b & c & b \\ & & & 1\end{matrix} & \begin{matrix}0 & & & \\ & a & & \\ & & \ddots & \\ & & & a \\ & & & & 0\end{matrix} & & \\ \hline
 & \ddots & \ddots & \ddots & \\ \hline
 & & \begin{matrix}0 & & & \\ & a & & \\ & & \ddots & \\ & & & a \\ & & & & 0\end{matrix} & \begin{matrix}1 & & & \\ b & c & b & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & b & c & b \\ & & & 1\end{matrix} & \begin{matrix}0 & & & \\ & a & & \\ & & \ddots & \\ & & & a \\ & & & & 0\end{matrix} \\ \hline
 & & & & \begin{matrix}1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1\end{matrix}
\end{array}\right]}_{\mathbf{A}}
\underbrace{\left[\begin{array}{c}
f_{0,0} \\ f_{0,1} \\ \ldots \\ f_{0,M_y} \\ \hline
f_{1,0} \\ f_{1,1} \\ \ldots \\ f_{1,M_y} \\ \hline
\\ \\ \hline
\\ \hline
f_{M_x,0} \\ f_{M_x,1} \\ \ldots \\ f_{M_x,M_y}
\end{array}\right]}_{\mathbf{f}}
=
\underbrace{\left[\begin{array}{c}
C_0^{ouest} \\ C_1^{ouest} \\ \ldots \\ C_{M_y}^{ouest} \\ \hline
C_1^{sud} \\ g_{1,1} \\ \ldots \\ g_{1,M_y} \\ C_1^{nord} \\ \hline
\ldots \\ \hline
C_{M_x}^{sud} \\ g_{M_x,1} \\ \ldots \\ g_{M_x,M_y} \\ C_{M_x}^{nord} \\ \hline
C_0^{est} \\ C_1^{est} \\ \ldots \\ C_{M_y}^{est}
\end{array}\right]}_{\mathbf{g}}$$

$$L_x = 6$$
$$L_y = 10$$

$$f(x, y) = \cos x + \cos y$$
$$g(x, y) = -\cos x - \cos y$$

$$C_{nord}(x) = \cos x + \cos L_y$$
$$C_{sud}(x) = \cos x + 1$$
$$C_{ouest}(y) = 1 + \cos y$$
$$C_{est}(y) = \cos L_x + \cos y$$

Méthode 1: Matrices pleines

code poisson2D_full.m

+ validation

Méthode 2: Matrices creuses

code poisson2D_sparse.m

+ validation

2 Diffusion-advection 2D : le problème de mélange

PAS 1 : Définition du problème continu

On considère f(x,y,t) par exemple la concentration d'un polluant. Si on met ce polluant dans un milieu fluide en mouvement, ce champ f évoluera en satisfaisant un problème de diffusion-advection

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla f = \alpha \Delta f \qquad x \in [0, L_x] \qquad y \in [0, L_y] \qquad t \in [0, T]$$

terme d'advection

terme de diffusion

On reconnait le coefficient de diffusion $\alpha > 0$

Le champ de vitesse est supposé stationnaire et incompressible

$$\vec{u} = u(x,y)\vec{e}_x + v(x,y)\vec{e}_y \qquad \text{t.q.} \qquad \nabla \cdot \vec{u} = 0$$

Comme en TP, on choisit de définir la vitesse à l'aide d'une fonction de courant

$$\Psi = A_f \sin\left(\frac{\pi p}{L_x} x\right) \sin\left(\frac{\pi q}{L_y} y\right)$$

avec $p, q \in \mathbb{N}_0$ et $A_f = U / \max\left(\frac{\pi p}{L_x}, \frac{\pi q}{L_y}\right)$

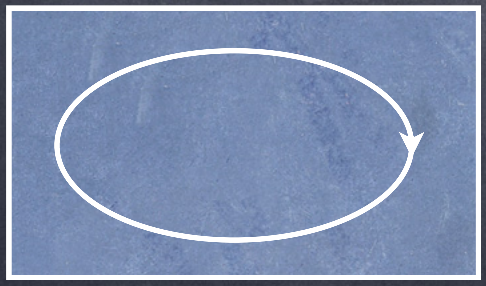
Ceci donne

$$u(x,y) = \frac{\partial \Psi}{\partial y} = \left(\frac{\pi q}{L_y}\right) A_f \sin\left(\frac{\pi p}{L_x} x\right) \cos\left(\frac{\pi q}{L_y} y\right)$$

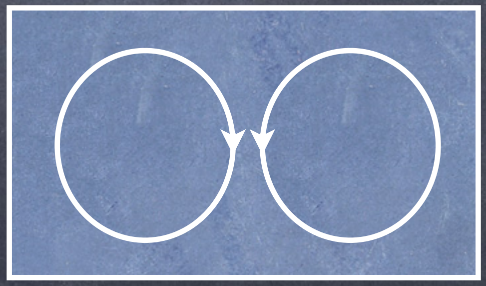
$$v(x,y) = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} = -\left(\frac{\pi p}{L_x}\right) A_f \cos\left(\frac{\pi p}{L_x} x\right) \sin\left(\frac{\pi q}{L_y} y\right)$$

qui définit un écoulement incompressible, qui tient dans la boite (vitesse normale nulle aux bords) et dont la vitesse maximale est égale à U.

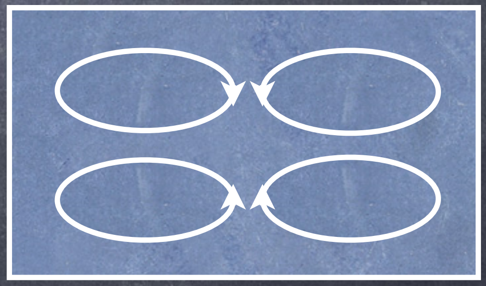
Quelques exemples



p = q = 1



p = 2 , q = 1



p = 2 , q = 2

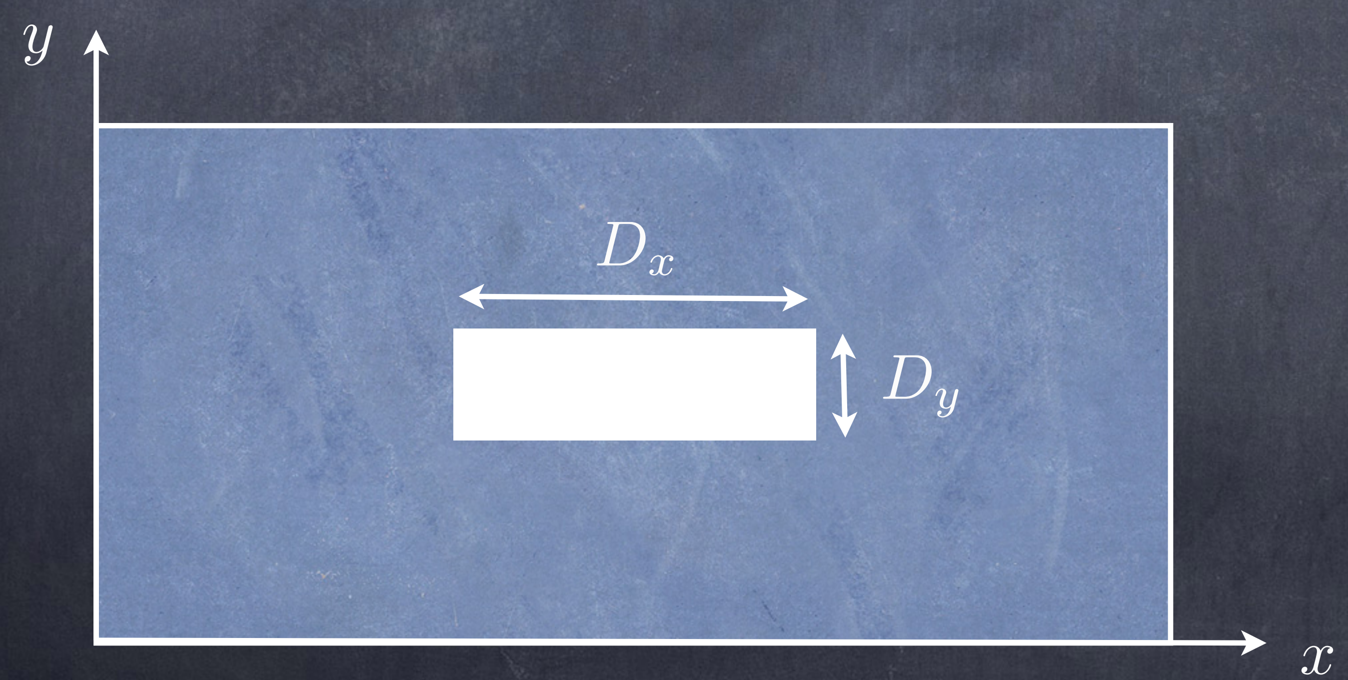
Les paramètres p et q dénombrent la quantité de cellules dans chaque direction

Sur les bords on suppose que la fonction f y est zéro, afin de garder la situation la plus simple que possible. On aura donc

$$CL \ : \quad \begin{array}{l} f(x,0)=0 \\ f(x,L_y)=0 \end{array} \quad x \in [0, L_x] \qquad \begin{array}{l} f(0,y)=0 \\ f(L_x,y)=0 \end{array} \quad y \in [0, L_y]$$

On utilisera une condition initiale particulière, qui fait référence à une tâche de polluant centré dans le domaine et de forme rectangulaire.

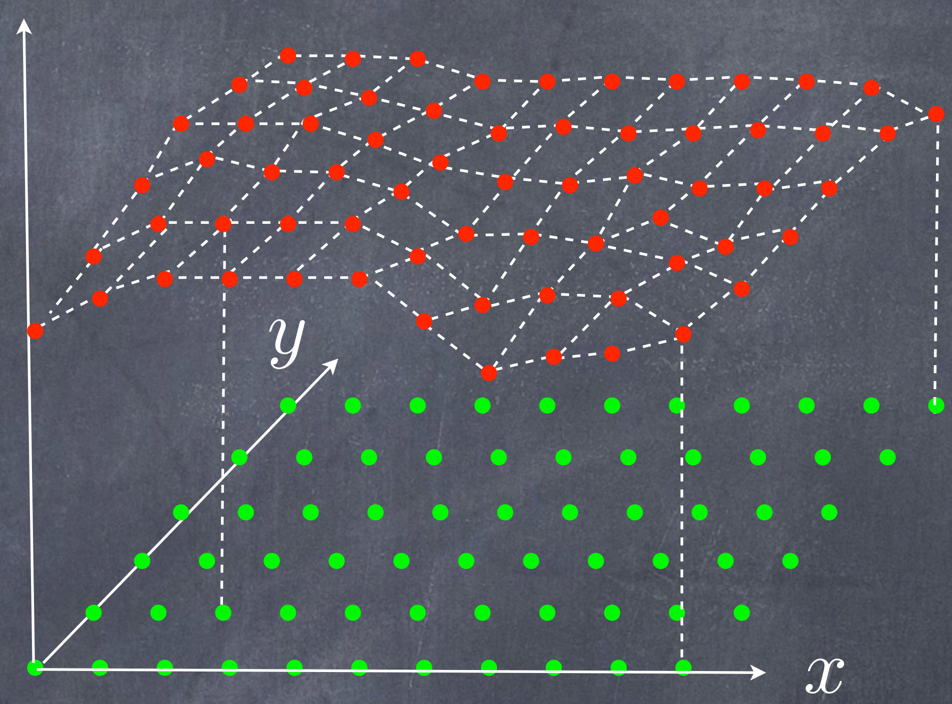
$$CI \ : \ f(x,y,0) = \begin{cases} F & , \quad \text{si } |x-L_x/2| < D_x/2 \ , \ |y-L_y/2| < D_y/2 \\ 0 & , \quad \text{ailleurs} \end{cases}$$



Le problème continue est entièrement défini et dépend des paramètres

$$\begin{array}{c} L_x, L_y \\ U, p, q \\ \alpha \\ F, D_x, D_y \end{array}$$

PAS 2 : Introduction d'un maillage, de temps discrets & valeurs nodales des champs



maillage uniforme en 2D

- $x_i = i\,\delta x \qquad i = 0, \ldots, M_x$
  $y_j = j\,\delta y \qquad j = 0, \ldots, M_y$

$$\delta x = L_x / M_x$$
$$\delta y = L_y / M_y$$

temps discrets

$$t_n = n\,\delta t \qquad n = 0, \ldots, N$$

$$\delta t = T/N$$

valeurs nodales de f, recherchées à tout temps

- $f(x_i, y_j, t_n) = f^n_{i,j}$

notation similaire pour les dérivées partielles

PAS 3 : une équation par point de maillage et par temps

INITIALISATION : fixer l'état à n=0

$$f^0_{i,j} = \begin{cases} F & , \quad \text{si } |i\delta x - L_x/2| < D_x/2 \ , \ |j\delta y - L_y/2| < D_y/2 \\ 0 & , \quad \text{sinon} \end{cases}$$

$$i = 0, \ldots, M_x$$
$$j = 0, \ldots, M_y$$

AVANCEMENT TEMPOREL :

sur les bords on écrit directement

$$f^{n+1}_{0,j} = 0 \qquad f^{n+1}_{i,0} = 0$$
$$f^{n+1}_{M_x,j} = 0 \qquad f^{n+1}_{i,M_y} = 0$$

$$i = 0, \ldots, M_x$$
$$j = 0, \ldots, M_y$$
$$n = 0, \ldots, N-1$$

partout ailleurs on cherche une formule récursive qui permet de calculer l'état à temps n+1 à partir de celui au(x) temps précédents.

On peut choisir plein de schémas numériques différentes, ici on donne un exemple particulier, facile à mettre en oeuvre et assez stable.

On cherche un schéma d'avancement temporel, fidèle à l'EDP

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \underbrace{-u\frac{\partial f}{\partial x} - v\frac{\partial f}{\partial y}}_{\mathcal{A}} + \underbrace{\alpha\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)}_{\mathcal{D}}$$

On choisit de discrétiser les dérivées spatiales à l'aide de formules centrées d'ordre 2. Pour la discrétisation temporelle, on choisit un traitement différent pour les termes d'advection et de diffusion. On utilisera

$$f_{i,j}^{n+1} = f_{i,j}^{n} + \underbrace{\delta t\, \mathcal{A}_{i,j}^{n}}_{Euler\ explicite} + \underbrace{\frac{\delta t}{2}\left(\mathcal{D}_{i,j}^{n+1} + \mathcal{D}_{i,j}^{n}\right)}_{Crank-Nicolson}$$

$$i = 1, \ldots, M_x - 1 \qquad j = 1, \ldots, M_y - 1 \qquad n = 0, \ldots, N - 1$$

avec

$$\mathcal{D}_{i,j}^{m} = \frac{\alpha}{\delta x^2}\left(f_{i-1,j}^{m} - 2f_{i,j}^{m} + f_{i+1,j}^{m}\right) + \frac{\alpha}{\delta y^2}\left(f_{i,j-1}^{m} - 2f_{i,j}^{m} + f_{i,j+1}^{m}\right)$$

$$\mathcal{A}_{i,j}^{n} = -u_{i,j}\left[\frac{1}{2\delta x}(f_{i+1,j}^{n} - f_{i-1,j}^{n})\right] - v_{i,j}\left[\frac{1}{2\delta y}(f_{i,j+1}^{n} - f_{i,j-1}^{n})\right]$$

Pour le terme de diffusion, on utilise un schéma de Crank-Nicolson. Pour le terme d'advection on utilise un schéma de Euler explicite.

PAS 4 : écriture matricielle = le plus dur

On peut obtenir

$$\left[\quad \mathcal{O}_g \quad\right]\left[\ \mathbf{f}^{n+1}\ \right] = \left[\quad \mathcal{O}_d \quad\right]\left[\ \mathbf{f}^{n}\ \right] + \overset{= 0 \text{ ici}}{\cancel{\left[\ \mathbf{g}^{n+1}\ \right]}}$$

matrice gauche	valeurs nodales à temps n+1	matrice droite	valeurs nodales à temps n	~~vecteur forçage~~

Il est nécessaire d’adopter une nouvelle numérotation des points, comme dans le problème de Poisson 2D

(voir transparent 27)

Pour écrire les matrices $\mathcal{O}_g$ et $\mathcal{O}_d$ on introduit des matrices de projection une matrice de diffusion et une matrice d’advection.

$\mathcal{P}$ $\qquad$ $\mathcal{I} - \mathcal{P}$ $\qquad$ $\mathcal{P}\mathcal{D}$ $\qquad$ $\mathcal{P}\mathcal{A}$

$\mathcal{I}-\mathcal{P}$ = matrice de projection sur les points de bord

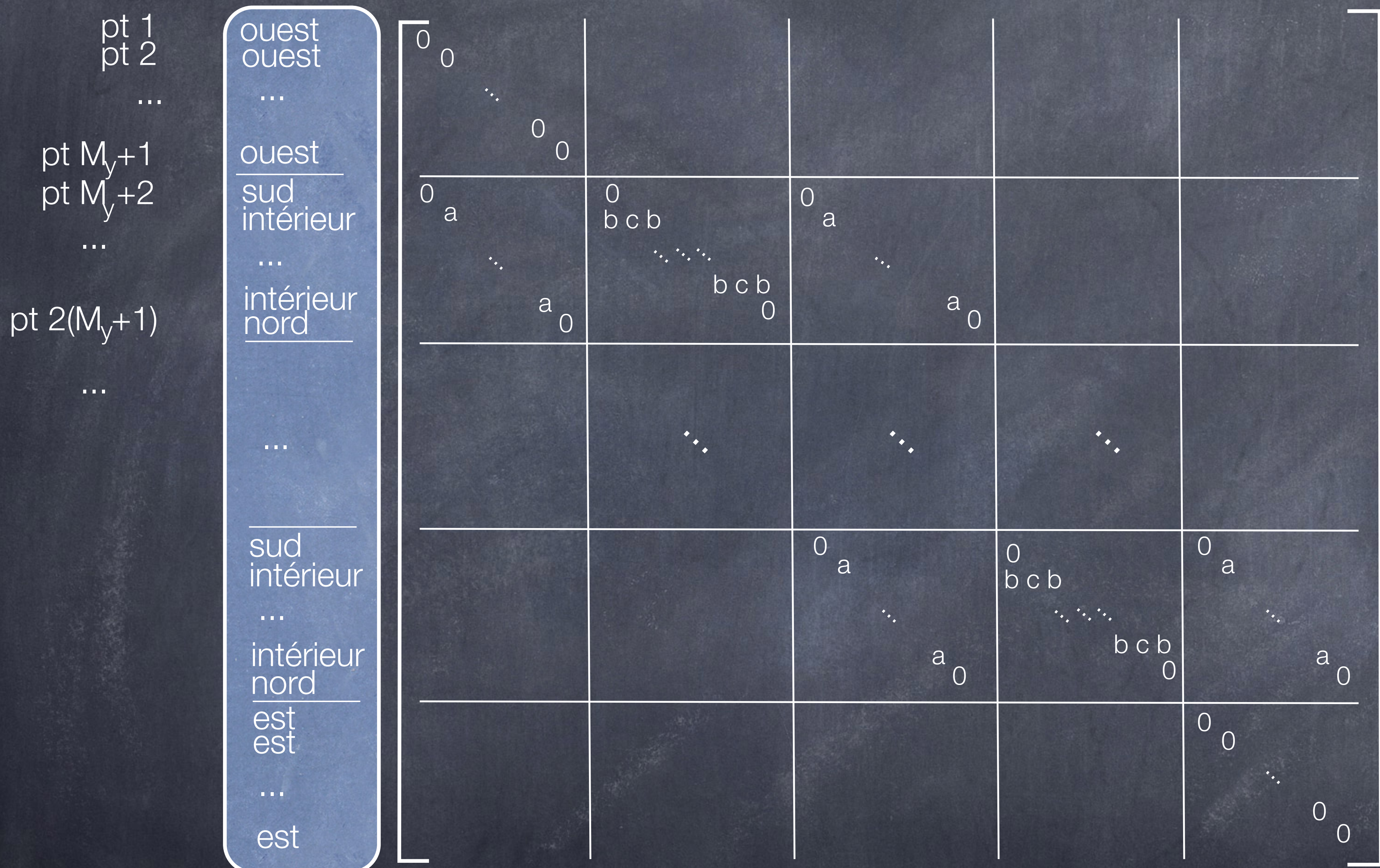
$$
\begin{array}{rl}
\text{pt } 1 & \text{ouest} \\
\text{pt } 2 & \text{ouest} \\
\dots & \dots \\
& \text{ouest} \\
\text{pt } M_y+1 & \text{sud} \\
\text{pt } M_y+2 & \text{intérieur} \\
\dots & \dots \\
& \text{intérieur} \\
\text{pt } 2(M_y+1) & \text{nord} \\
\dots & \dots \\
& \text{sud} \\
& \text{intérieur} \\
& \dots \\
& \text{intérieur} \\
& \text{nord} \\
& \text{est} \\
& \text{est} \\
& \dots \\
& \text{est}
\end{array}
\qquad
\left[\begin{array}{c|c|c|c|c}
\begin{matrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{matrix} & & & & \\
\hline
& \begin{matrix} 1 & & & & \\ & 0 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 0 & \\ & & & & 1 \end{matrix} & & & \\
\hline
& & \ddots & & \\
\hline
& & & \begin{matrix} 1 & & & & \\ & 0 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 0 & \\ & & & & 1 \end{matrix} & \\
\hline
& & & & \begin{matrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{matrix}
\end{array}\right]
$$

$\mathcal{P}$ = matrice de projection sur les points intérieurs

pt 1	ouest
pt 2	ouest
...	...
pt M_y+1	ouest
pt M_y+2	sud
	intérieur
...	...
	intérieur
pt 2(M_y+1)	nord
...	...
	sud
	intérieur
	...
	intérieur
	nord
	est
	est
	...
	est

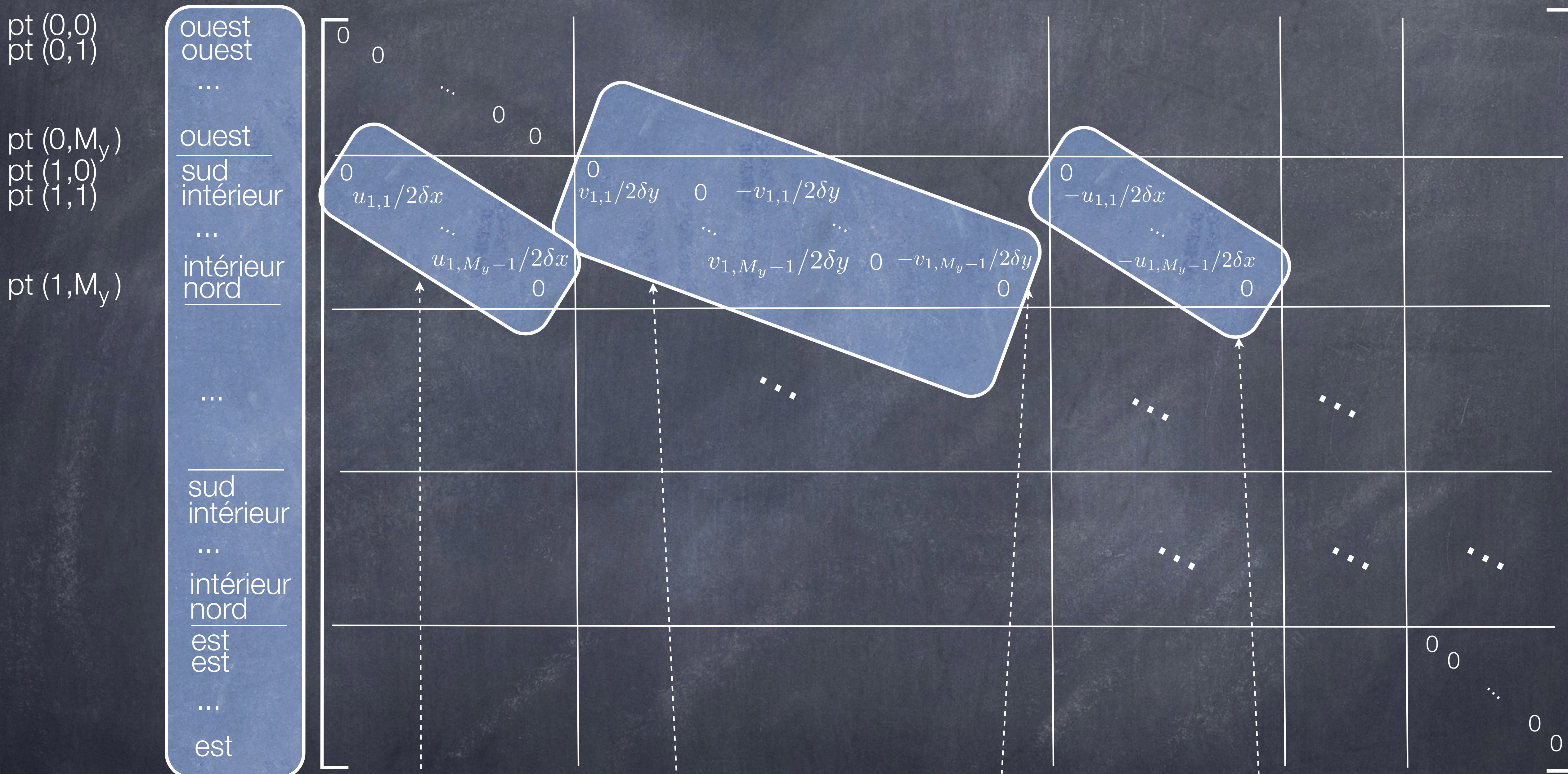
$$
\left[\begin{array}{c|c|c|c|c}
\begin{smallmatrix} 0 & & & & \\ & 0 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 0 & \\ & & & & 0 \end{smallmatrix} & & & & \\ \hline
& \begin{smallmatrix} 0 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 0 \end{smallmatrix} & & & \\ \hline
& & \ddots & & \\ \hline
& & & \begin{smallmatrix} 0 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 0 \end{smallmatrix} & \\ \hline
& & & & \begin{smallmatrix} 0 & & & & \\ & 0 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 0 & \\ & & & & 0 \end{smallmatrix}
\end{array}\right]
$$

$\mathcal{PD}$ = matrice de diffusion (sur les points intérieurs)



$a = 1/\delta x^2$ $\quad b = 1/\delta y^2$ $\quad c = -2/\delta x^2 - 2/\delta y^2$

$\mathcal{PA}$ = matrice d'advection (sur les points intérieurs)



lié au terme

$$\mathcal{A}^n_{i,j} = \left(\frac{u_{i,j}}{2\delta x}\right) f^n_{i-1,j} + \left(\frac{v_{i,j}}{2\delta y}\right) f^n_{i,j-1} + \left(-\frac{v_{i,j}}{2\delta y}\right) f^n_{i,j+1} + \left(-\frac{u_{i,j}}{2\delta x}\right) f^n_{i+1,j}$$

Sur les points de bords

$$(\mathcal{I} - \mathcal{P})\mathbf{f}^{n+1} = 0 \qquad (1)$$

Sur les points intérieurs

$$\mathcal{P}\,\mathbf{f}^{n+1} = \mathcal{P}\,\mathbf{f}^{n} + \delta t\,\mathcal{P}\mathcal{A}\,\mathbf{f}^{n} + \frac{\alpha\delta t}{2}\,\left(\mathcal{P}\mathcal{D}\,\mathbf{f}^{n+1} + \mathcal{P}\mathcal{A}\,\mathbf{f}^{n}\right)$$

soit $$\left(\mathcal{P} - \frac{\alpha\delta t}{2}\mathcal{P}\mathcal{D}\right)\,\mathbf{f}^{n+1} = \left(\mathcal{P} + \frac{\alpha\delta t}{2}\mathcal{P}\mathcal{D} + \delta t\,\mathcal{P}\mathcal{A}\right)\mathbf{f}^{n} \qquad (2)$$

On prend la somme de (1) et (2)

$$\underbrace{\left(\mathcal{I} - \frac{\alpha\delta t}{2}\mathcal{P}\mathcal{D}\right)}_{\mathcal{O}_g}\,\mathbf{f}^{n+1} = \underbrace{\left(\mathcal{P} + \frac{\alpha\delta t}{2}\mathcal{P}\mathcal{D} + \delta t\,\mathcal{P}\mathcal{A}\right)}_{\mathcal{O}_d}\mathbf{f}^{n}$$

Un grand système linéaire à résoudre à chaque pas de temps

PAS 5 : implémentation