Résolution de l'équation de Stokes

1 Les équations avec conditions aux limites

On s'intéresse à la résolution de l'écoulement bidimensionnel. Les inconnues sont le champ de vitesse $\vec{u} = (u_x, u_y)$ et le champ de pression P. Les équations qui gouvernent ces deux champs sont l'équation de Stokes (vectorielle) et l'équation de conservation de la masse (scalaire). Elles s'écrivent :

$$\vec{0} = \eta\,\Delta\vec{u} - \vec{\nabla}P \qquad \text{et} \qquad \operatorname{div}\vec{u} = 0$$

Dans un écoulement qui va d'un bord gauche à un bord droit d'un tuyau (droit ou déformé), avec des conditions de pression en entrée et en sortie, et en supposant que le champ de vitesse est périodique sur la longueur, le système d'équations va donc être

$$\begin{cases}
\eta\,\Delta u_x - \dfrac{\partial P}{\partial x} = 0 & \text{dans le domaine} \\[2ex]
\eta\,\Delta u_y - \dfrac{\partial P}{\partial y} = 0 & \text{dans le domaine} \\[2ex]
\dfrac{\partial u_x}{\partial x} + \dfrac{\partial u_y}{\partial y} = 0 & \text{dans le domaine} \\[2ex]
u_x = 0 & \text{sur les bords latéraux (haut et bas) du domaine} \\
u_y = 0 & \text{sur les bords latéraux (haut et bas) du domaine} \\
P = P_1 & \text{sur le bord gauche du domaine} \\
P = P_2 & \text{sur le bord droit du domaine} \\[2ex]
u_x(0,y) = u_x(L,y) & \text{périodicité entre les bords gauche et droit du domaine} \\
u_y(0,y) = u_y(L,y) & \text{périodicité entre les bords gauche et droit du domaine} \\[2ex]
\dfrac{\partial u_x}{\partial x}(0,y) = \dfrac{\partial u_x}{\partial x}(L,y) & \text{périodicité entre les bords gauche et droit du domaine} \\[2ex]
\dfrac{\partial u_y}{\partial x}(0,y) = \dfrac{\partial u_y}{\partial x}(L,y) & \text{périodicité entre les bords gauche et droit du domaine}
\end{cases}$$

Par ailleurs, la conservation de la masse sur les bords du domaine où la vitesse s'annule impose que la **dérivée normale de la vitesse normale** à la frontière du domaine s'annule. En effet, on peut écrire la divergence comme la somme des dérivées normale et tangentielle. Or la dérivée tangentielle de la vitesse tangentielle est nulle car la vitesse est toujours nulle sur le bord. D'où :

$$\mathrm{div}\,\vec{u} = \frac{\partial u_n}{\partial n} + \frac{\partial u_t}{\partial t} = 0 \qquad \text{donc} \qquad \frac{\partial u_n}{\partial n} = 0$$

2 Nombres d'inconnues et d'équations

Si l'on considère par exemple un tube rectangulaire maillé avec N points le long de l'axe de l'écoulement (axe Ox) et M points le long de l'axe transverse (axe Oy), alors le nombre total de points du maillage est $N \times M$. Comme il y a trois inconnues scalaires par point (u_x, u_y, P), le nombre total d'inconnues est $3 \times N \times M$.

On compte maintenant le nombre d'équations. Les équations à l'intérieur du domaine ne portent que sur $(N-2)$ points dans le sens de la longueur (on enlève les bords gauche et droit) et $(M-2)$ points dans le sens de la largeur (on enlève les bords haut et bas). Les équations aux limites ne portent que sur les points de bord (gauche, droit, haut, bas). En face de chaque type d'équation se trouve le nombre d'équations correspondantes. Ceci donne :

- équation de Stokes scalaire pour u_x : $(N-2) \times (M-2)$
- équation de Stokes scalaire pour u_y : $(N-2) \times (M-2)$
- équation de conservation de la masse : $(N-2) \times (M-2)$
- équation $u_x = 0$ en haut et en bas : $2 \times N$
- équation $u_y = 0$ en haut et en bas : $2 \times N$
- équation $P = P_1$ à gauche : M
- équation $P = P_2$ à droite : M
- périodicité de u_x et de sa dérivée par rapport à x : $2 \times (M-2)$
- périodicité de u_y et de sa dérivée par rapport à x : $2 \times (M-2)$
- annulation de la dérivée normale de u_n en haut et en bas : $2 \times (N-2)$

Le nombre total d'équations est donc :

$$\begin{aligned} N_{eq} &= 3(N-2)(M-2) + 2N + 2N + 2M + 4(M-2) + 2(N-2) \\ &= 3NM - 6N - 6M + 12 + 6N + 6M - 12 = 3NM \end{aligned}$$

On a bien autant d'équations que d'inconnues.

! Attention, la condition sur la dérivée normale de u_n ne concerne que u_y dans le cas du tuyau droit, mais peut concerner u_x dans les parties où le bord est vertical, ou bien une combinaison linéaire des deux si le bord est incliné.