

UNIVERSITÉ DE PAU

MASTER 1 MMS

Analyse numérique
La méthode des différences finies

SÉBASTIEN TORDEUX ET VICTOR PÉRON

2020/2021

Table des matières

I	La méthode des différences finies	5
1	Discrétisation des équations différentielles ordinaires d'évolution	6
1.1	Position du problème et réduction d'ordre	6
1.2	Théorème d'existence et unicité	7
1.3	Les schémas à un pas	9
1.4	Etude de a -stabilité	10
1.5	Stabilité d'un schéma numérique (cas général)	12
1.6	Consistance d'un schéma numérique	12
1.7	Convergence d'un schéma numérique	13
2	La méthode des différences finies pour les problèmes aux limites statiques	15
2.1	Différences finies en dimension 1	15
2.2	Quelques exemples de différences finies	16
2.2.1	Différence finie décentrée à droite	16
2.2.2	Différences finies décentrées à gauche	16
2.2.3	Différence finie centrée	17
2.2.4	Le schéma à trois points	17
2.3	Discrétisation des problèmes de type elliptique en dimension 1	18
2.3.1	Position du problème	18
2.3.2	Discrétisation de l'équation principale	19
2.3.3	Discrétisation des condition aux limites	19
2.3.4	Formulation vectorielle	20
2.3.5	Méthode du point fantôme ou virtuel	22
2.4	Discrétisation des problèmes de type elliptique en dimension 2	23
2.4.1	Définition du problème continu	23
2.4.2	Différences finies en dimension 2	25
2.4.3	Approximation de l'équation principale	27
2.4.4	Approximation des conditions aux limites	28
2.4.5	Formulation vectorielle	28
2.4.6	Un exemple de problème à discrétiser, formulation non éliminée	30
2.4.7	Technique du point virtuel ou fantôme	32
2.4.8	Un exemple de formulation éliminée avec points virtuels	34
3	Discrétisation des problèmes aux limites d'évolution	39
3.1	Discrétisation de l'équation de réaction-advection-diffusion en dimension un d'espace	39

3.1.1	Semi-discrétisation en espace	40
3.1.2	Formulation éliminée	42
3.1.3	Discrétisation en temps	43
3.2	Discrétisation de l'équation des ondes	43
3.2.1	Semi-discrétisation en espace	44
3.2.2	Formulation éliminée	45
3.2.3	Schéma à un pas	45
3.2.4	Schéma à deux pas	46
3.3	Analyse de stabilité de Von-Neumann	46
3.3.1	La transformation de Fourier	46
3.3.2	Principe de l'analyse de Von Neumann	47
3.3.3	Discrétisation de l'équation de diffusion par le schéma d'Euler explicite	48
3.3.4	Application à l'équation de diffusion discrétisé par le schéma d'Euler implicite	48
3.3.5	Application à l'équation des ondes (schéma saute-mouton)	49
3.3.6	Application à l'équation des ondes discrétisées par une méthode des trapèzes implicites	50

Première partie

La méthode des différences finies

Chapitre 1

Discrétisation des équations différentielles ordinaires d'évolution

1.1 Position du problème et réduction d'ordre

Une équation différentielle ordinaire (EDO) est une équation différentielle ayant la forme

$$y^{(p)}(t) = f(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(p-1)}(t)). \quad (1.1)$$

avec $y : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction inconnue et $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}$. On dit que (1.1) est une EDO d'ordre p . Dans ce chapitre, nous nous intéressons plus précisément à la discrétisation des problèmes de Cauchy qui sont des problèmes aux données initiales

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Chercher } y : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R} \text{ de classe } C^p \text{ tel que} \\ y^{(p)}(t) = f(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(p-1)}(t)), \quad \forall t \geq 0, \\ y(0) = \alpha_0, \\ y'(0) = \alpha_1, \\ \dots \\ y^{(p-1)}(t) = \alpha_{p-1}. \end{array} \right. \quad (1.2)$$

Ces problèmes de Cauchy d'ordre p mettant en jeu des fonctions à valeurs scalaires peuvent prendre la forme d'une EDO vectorielle d'ordre 1. En effet, en notant

$$Y(t) = (y(t), y'(t), \dots, y^{(p-1)}(t))^T \quad (1.3)$$

nous avons

$$Y'(t) = \begin{bmatrix} y'(t) \\ y^{(2)}(t) \\ \dots \\ y^{(p-1)}(t) \\ y^{(p)}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y'(t) \\ y^{(2)}(t) \\ \dots \\ y^{(p-1)}(t) \\ f(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(p-1)}(t)) \end{bmatrix} \quad (1.4)$$

En notant $\alpha = (y(0), y'(0), \dots, y^{(p-1)}(0))^T$ et $F : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^p$ la fonction définie par

$$F(t, \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \dots \\ u_{p-2} \\ u_{p-1} \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_{p-1} \\ f(t, u_0, u_1, \dots, u_{p-1}) \end{bmatrix}, \quad (1.5)$$

le problème (1.2) s'écrit

$$\begin{cases} \text{Chercher } Y : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^p \text{ de classe } C^1 \text{ tel que} \\ Y'(t) = F(t, Y(t)), \quad \forall t \geq 0, \\ Y(0) = \alpha. \end{cases} \quad (1.6)$$

Nous allons après avoir étudié l'existence et l'unicité des EDO vectorielles d'ordre 1, nous allons présenter les schémas numériques à un pas, puis en effectuer l'analyse.

1.2 Théorème d'existence et unicité

Theoreme 1.1 (Cauchy-Lipschitz-Picard) Si $\alpha \in \mathbb{R}^p$, $F : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^p$ est continue et vérifie

$$\exists L > 0 \quad \forall t > 0, \quad \forall U, V \in \mathbb{R}^p, \quad \|F(t, U) - F(t, V)\| \leq L\|U - V\| \quad (1.7)$$

alors le problème (1.6) admet une unique solution.

Preuve. Soit $\mathcal{L} : C^0([0, +\infty[, \mathbb{R}^p) \longrightarrow C^0([0, +\infty[, \mathbb{R}^p)$ l'application définie par

$$\mathcal{L}V(t) = \alpha + \int_0^t F(s, V(s))ds \quad (1.8)$$

Remarquons que Y est solution de (1.6) ssi Y est point fixe de \mathcal{L} .

(i) Pour démontrer l'**existence** d'une solution de (1.6), nous allons démontrer, pour tout $T \geq 0$, l'existence et l'unicité d'un point fixe de \mathcal{L} dans l'espace de Banach

$$X_k^T = \{V \in C^0([0, T], \mathbb{R}^p) : \|V\|_{X_k^T} < +\infty\} \quad (1.9)$$

avec

$$\|V\|_{X_k^T} = \sup_{t \in [0, T]} \|e^{-kt}V(t)\|. \quad (1.10)$$

Comme T est borné, l'application \mathcal{L} est continue sur X_k^T . Montrons que \mathcal{L} est contractante sur X_k^T pour $k > L$

$$\|e^{-kt}(\mathcal{L}U(t) - \mathcal{L}V(t))\| = \|e^{-kt} \int_0^t F(s, U(s)) - F(s, V(s))ds\| \quad (1.11)$$

D'après (1.7), il suit l'inégalité

$$\begin{aligned}
\|e^{-kt}(\mathcal{L}U(t) - \mathcal{L}V(t))\| &\leq L e^{-kt} \int_0^t e^{ks} e^{-ks} \|U(s) - V(s)\| ds \\
&\leq L e^{-kt} \left(\int_0^t e^{ks} ds \right) \|U - V\|_{X_k^T} \\
&\leq L e^{-kt} \left(\int_{-\infty}^t e^{ks} ds \right) \|U - V\|_{X_k^T} \\
&\leq \frac{L}{k} \|U - V\|_{X_k^T}
\end{aligned} \tag{1.12}$$

On peut passer au sup sur t . Il suit

$$\|\mathcal{L}U - \mathcal{L}V\|_{X_k^T} \leq \frac{L}{k} \|U - V\|_{X_k^T}. \tag{1.13}$$

Comme $k > L$, l'application \mathcal{L} est bien contractante sur X_k^T . On utilise alors le théorème de point fixe de Picard

$$\exists! Y_T \in X_k^T : \quad \mathcal{L}Y_T(t) = Y_T(t) \quad \forall t \in [0, T]. \tag{1.14}$$

Remarquons que pour $T' > T > 0$, $Y_{T'}|_{[0, T]} \in X_k^T$ et $\mathcal{L}Y_{T'}(t) = Y_{T'}(t)$ pour tout $t \in [0, T]$. Par unicité, on a l'identité suivante

$$\forall T' > T > 0 \quad Y_{T'}(t) = Y_T(t) \quad \forall t \in [0, T] \tag{1.15}$$

Il suit que

$$\forall T \geq t \quad Y_T(t) = Y_t(t). \tag{1.16}$$

Ceci nous permet de définir la fonction $Y \in C^0([0, +\infty[, \mathbb{R}^p)$ définie par

$$Y : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}^p \quad t \longmapsto Y(t) = Y_t(t). \tag{1.17}$$

qui vérifie (1.8) et donc (1.6).

(ii) Pour montrer l'**unicité**, nous considérons deux solutions Y_1 et Y_2 de (1.6). Comme Y_1 et Y_2 sont des points fixes de \mathcal{L} on a

$$Y_1(t) - Y_2(t) = \int_0^t F(s, Y_1(s)) - F(s, Y_2(s)) ds \tag{1.18}$$

Il suit

$$\|Y_1(t) - Y_2(t)\| \leq L \int_0^t \|Y_1(s) - Y_2(s)\| ds \tag{1.19}$$

En notant $\psi(t) = \exp(-Lt) \int_0^t \|Y_1(s) - Y_2(s)\| ds$, on a l'équation

$$\psi'(t) \leq 0, \quad \psi(0) = 0 \quad \text{et} \quad \psi(t) \geq 0 \quad \implies \psi(t) = 0. \tag{1.20}$$

On peut conclure à l'unicité $Y_1 = Y_2$.

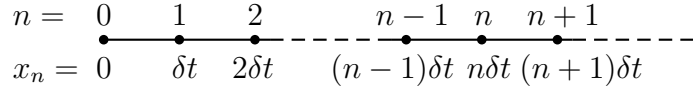


FIGURE 1.1 – Une grille uniforme de pas δt

Remarque 1.1 Dans la preuve du théorème de Cauchy-Lipschitz-Picard nous avons introduit la forme intégrale du problème (1.6). L'utilisation de cette formulation est fréquente. On se souviendra que le problème (1.6) est équivalent à sa forme intégrale

$$\begin{cases} \text{Chercher } Y : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^n \text{ de classe } C^0 \text{ qui vérifie} \\ Y(t) - Y(t') = \int_{t'}^t F(s, Y(s)) ds \\ Y(0) = \alpha. \end{cases} \quad (1.21)$$

1.3 Les schémas à un pas

On introduit une grille uniforme en temps, voir figure 1.1, définie par ses sommets $t_n = n\delta t$, avec $n \in \mathbb{N}$. On note Y_n l'approximation de $Y(t_n)$.

$$Y_n \simeq Y(t_n). \quad (1.22)$$

Un schéma à un pas est une méthode numérique permettant de calculer Y_{n+1} à partir de Y_n

$$Y_{n+1} = \phi(t_n, \delta t, Y_n) \quad (1.23)$$

avec $\phi : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^p$.

La plupart des schémas est basée sur l'approximation de la forme intégrale (1.21) écrite pour $t = t_{n+1}$ et $t' = t_n$ et sur une formule d'intégration numérique du second membre

$$Y(t_{n+1}) = Y(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} g(t) dt \quad \text{avec } g(t) = F(t, Y(t)). \quad (1.24)$$

Le schéma d'Euler explicite. On utilise ici une méthode des rectangles à gauche pour calculer l'aire séparant le graphe de g pour t allant de t_n à t_{n+1} , voir figure 1.2,

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} g(s) ds \simeq \delta t g(t_n) = \delta t F(t_n, Y(t_n)). \quad (1.25)$$

On en déduit le schéma d'Euler explicite

$$Y_{n+1} = Y_n + \delta t F(t_n, Y_n). \quad (1.26)$$

Le schéma d'Euler implicite. On utilise ici une méthode des rectangles à droite

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} g(s) ds \simeq \delta t g(t_{n+1}) = \delta t F(t_{n+1}, Y(t_{n+1})). \quad (1.27)$$

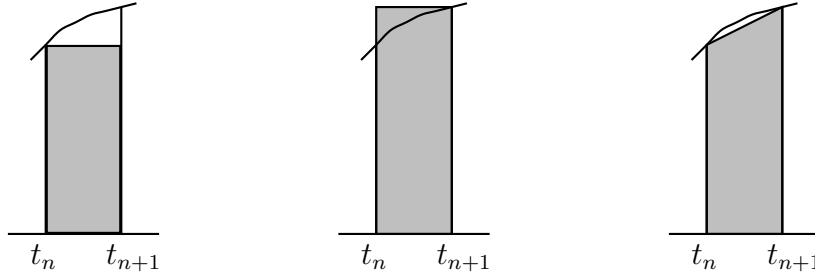


FIGURE 1.2 – Les méthodes d’intégration numérique : rectangle à gauche, rectangle à droite, trapèze

On aboutit au schéma

$$Y_{n+1} = Y_n + \delta t F(t_{n+1}, Y_{n+1}) \iff Y_{n+1} - \delta t F(t_{n+1}, Y_{n+1}) = Y_n. \quad (1.28)$$

Le schéma des trapèzes implicites. La formule d’intégration est celle des trapèzes

$$\begin{cases} \int_{t_n}^{t_{n+1}} g(s) ds \simeq \frac{\delta t}{2} g(t_{n+1}) + \frac{\delta t}{2} g(t_n) \\ = \frac{\delta t}{2} F(t_n, Y(t_n)) + \frac{\delta t}{2} F(t_{n+1}, Y(t_{n+1})). \end{cases} \quad (1.29)$$

On aboutit au schéma

$$Y_{n+1} = Y_n + \frac{\delta t}{2} F(t_n, Y_n) + \frac{\delta t}{2} F(t_{n+1}, Y_{n+1}). \quad (1.30)$$

C’est à dire

$$Y_{n+1} - \frac{\delta t}{2} F(t_{n+1}, Y_{n+1}) = Y_n + \frac{\delta t}{2} F(t_n, Y_n). \quad (1.31)$$

Le schéma des trapèzes explicites. Ce schéma consiste à reprendre (1.30) en remplaçant Y_{n+1} dans le second membre par \bar{Y}_{n+1} une approximation calculée à l’aide d’une méthode d’Euler explicite

$$\begin{cases} \bar{Y}_{n+1} = Y_n + \delta t F(t_n, Y_n), \\ Y_{n+1} = Y_n + \frac{\delta t}{2} F(t_n, Y_n) + \frac{\delta t}{2} F(t_{n+1}, \bar{Y}_{n+1}). \end{cases} \quad (1.32)$$

Remarque 1.2 On parle de schéma explicite lorsque le calcul de Y_{n+1} à partir de Y_n s’effectue à l’aide d’une formule explicite. A contrario, lorsque le calcul de Y_{n+1} nécessite la résolution d’un problème on parle de méthode implicite.

Bien entendu pour le même δt , les schémas explicites nécessiteront beaucoup moins de temps de calcul que les schémas implicites.

1.4 Etude de a -stabilité

Soit $a > 0$ un paramètre. L’étude de a -stabilité consiste à étudier les propriétés d’un schéma numérique

$$y_{n+1} = \phi(t_n, \delta t, y_n) \text{ et } y_0 = \alpha. \quad (1.33)$$

sur le problème suivant

$$\begin{cases} \text{Chercher } y \text{ de classe } C^1 \text{ qui vérifie} \\ y'(t) + ay(t) = 0 \quad t \geq 0, \\ y(0) = \alpha. \end{cases} \quad (1.34)$$

dont la solution $y(t) = \alpha \exp(-at)$ est décroissante en valeur absolue.

On dira qu'un schéma est a -stable si la suite y_n est décroissante en valeur absolue et instable sinon. Notons qu'ici $F(t, y) = F(y) = -ay$.

a -stabilité du schéma d'Euler explicite. Reprenons le schéma (1.26)

$$y_{n+1} = y_n - a\delta t y_n = (1 - a\delta t)y_n \quad (1.35)$$

Notons que $a\delta t > 0$. La suite y_n est une suite géométrique de raison $1 - a\delta t$. Pour que le schéma soit a -stable il faut que cette raison soit inférieure 1 en valeur absolue. Il suit que le schéma est stable si $a\delta t < 2$ et instable sinon.

a -stabilité du schéma d'Euler implicite. Reprenons le schéma (1.28)

$$(1 + a\delta t)y_{n+1} = y_n \quad (1.36)$$

La raison de la suite y_n est $(1 + a\delta t)^{-1}$. Cette raison est toujours inférieure à 1 en valeur absolue. Le schéma d'Euler implicite est inconditionnellement stable.

a -stabilité du schéma des Trapèzes implicites. Reprenons le schéma (1.30)

$$\left(1 + \frac{a\delta t}{2}\right)y_{n+1} = \left(1 - \frac{a\delta t}{2}\right)y_n \quad (1.37)$$

La raison de la suite y_n est $\frac{1-a\delta t/2}{1+a\delta t/2}$. Cette raison est toujours inférieure à 1 en valeur absolue. Le schéma d'Euler implicite est inconditionnellement stable.

a -stabilité du schéma des Trapèzes explicites. Reprenons le schéma (1.32)

$$\begin{cases} \bar{y}_{n+1} = y_n - a\delta t y_n = (1 - a\delta t)y_n, \\ y_{n+1} = y_n - \frac{a\delta t}{2} y_n - \frac{a\delta t}{2} \bar{y}_{n+1}. \end{cases} \quad (1.38)$$

Après simplification on a

$$y_{n+1} = \left(1 - a\delta t + \frac{(a\delta t)^2}{2}\right)y_n \quad (1.39)$$

La raison de la suite y_n est $1 - a\delta t + \frac{(a\delta t)^2}{2}$ qui est inférieur à 1 en valeur absolue si $a\delta t < 2$. Comme pour le schéma d'Euler explicite, le schéma est a -stable si $a\delta t < 2$ et instable sinon.

Remarque 1.3 *Les schémas implicites sont en général plus robuste que les schémas explicites du point de vue leur stabilité. Ils auront moins tendance à être sujet à des phénomènes d'explosion numérique.*

1.5 Stabilité d'un schéma numérique (cas général)

Nous nous intéressons à la résolution d'une équation donnée de la forme

$$Y'(t) = F(t, Y(t)) \quad \text{pour } t \geq 0. \quad (1.40)$$

par un schéma à un pas de la forme

$$Y_{n+1} = \phi(t_n, \delta t, Y_n). \quad (1.41)$$

Soit $N \in \mathbb{N}$. Nous considérons deux suites $(Y_n^1)_{n \geq N}$ et $(Y_n^2)_{n \geq N}$ définies par le même schéma numérique et leurs données initiales Y_N^1 et Y_N^2 .

$$\begin{cases} Y_{n+1}^1 = \phi(t_n, \delta t, Y_n^1) \text{ pour } n \geq N \text{ avec } Y_N^1 \text{ donné,} \\ Y_{n+1}^2 = \phi(t_n, \delta t, Y_n^2) \text{ pour } n \geq N \text{ avec } Y_N^2 \text{ donné.} \end{cases} \quad (1.42)$$

On dit que le schéma est stable pour l'EDO (1.40) si

$$\begin{aligned} \exists C > 0 : \quad \forall n \geq N \quad \forall \delta t > 0 \quad \forall Y_N^1 \in \mathbb{R}^p \text{ et } Y_N^2 \in \mathbb{R}^p \text{ et} \\ Y_n^1, Y_n^2 \text{ définis par (1.42)} \quad \|Y_n^1 - Y_n^2\| \leq C \|Y_N^1 - Y_N^2\| \end{aligned} \quad (1.43)$$

Cette propriété traduit le fait qu'à deux conditions initiales proches correspondent deux approximations numériques proches.

Remarque 1.4 *En fait la a-stabilité n'est rien d'autre que la stabilité d'un schéma numérique pour l'équation $y'(t) + ay(t) = 0$*

1.6 Consistance d'un schéma numérique

L'erreur de consistance estime l'erreur commise par le schéma au temps t_n . Elle est définie par

$$\delta_n = Y(t_{n+1}) - \phi(t_n, \delta t, Y(t_n)). \quad (1.44)$$

avec $Y(t)$ la solution du problème

$$Y'(t) = F(t, Y(t)) \quad \text{pour } t \geq 0 \quad \text{et} \quad Y(0) = \alpha. \quad (1.45)$$

On dit que le schéma est consistant et d'ordre m si

$$\exists C > 0 : \quad \forall \delta t > 0 \quad \forall n \geq 0 \quad \|\delta_n\| \leq C (\delta t)^{m+1} \quad (1.46)$$

Passons à un exemple de calcul d'ordre de consistance d'un schéma numérique. Nous considérons le problème

$$\begin{cases} \text{Chercher } y : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R} \text{ de classe } C^1 \text{ tel que} \\ y'(t) = \sin(y(t)) \quad \text{pour } t \geq 0, \\ y(0) = \alpha. \end{cases} \quad (1.47)$$

Nous approchons y à l'aide de la méthode d'Euler explicite

$$y_{n+1} = \phi(t_n, \delta t, y_n) \text{ avec } \phi(t_n, \delta t, y_n) = y_n + \delta t \sin(y_n). \quad (1.48)$$

Remarquons que la solution exacte y est de classe C^∞ puis que $|y'(t)| \leq 1$ et $|y''(t)| = |y'(t) \cos(u(t))| \leq 1$. Calculons maintenant l'erreur de consistance

$$\begin{aligned} \delta_n &= y(t_{n+1}) - \phi(t_n, \delta t, y(t_n)) \\ &= y(t_{n+1}) - \left(y(t_n) + \delta t \sin(y(t_n)) \right) \\ &= y(t_{n+1}) - \left(y(t_n) + \delta t y'(t_n) \right). \end{aligned} \quad (1.49)$$

D'après la formule de Taylor avec reste intégrale

$$\delta_n = \int_{t_n}^{t_{n+1}} (t_{n+1} - t) y''(t) dt \quad (1.50)$$

Nous pouvons alors majorer pour conclure

$$|\delta_n| \leq \int_{t_n}^{t_{n+1}} (t - t_n) dt = \frac{(t_{n+1} - t_n)^2}{2} = \frac{\delta t^2}{2}. \quad (1.51)$$

Le schéma est donc consistant d'ordre 1.

1.7 Convergence d'un schéma numérique

On approche la solution de

$$\begin{cases} \text{Chercher } Y : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}^p \text{ de classe } C^1 \text{ tel que} \\ Y'(t) = F(t, Y(t)) \quad \text{pour } t \geq 0, \\ Y(0) = \alpha. \end{cases} \quad (1.52)$$

par un schéma numérique à un pas

$$Y_{n+1} = \phi(t_n, \delta t, Y_n) \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (1.53)$$

On dit que ce schéma converge à l'ordre m pour $t \leq T$ s'il existe $C : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ continue tel que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall \delta t > 0 \quad \|Y(t_n) - Y_n\| \leq C(t_n) \delta t^m. \quad (1.54)$$

Theoreme 1.2 (Principe de Lax) *Si un schéma est stable et consistant d'ordre m alors il converge d'ordre m .*

Preuve. Pour tout $n \geq p$, nous notons $(Y_n^p)_{n \geq p}$ la suite définie par

$$Y_p^p = Y(t_p) \text{ et pour } n \geq p \quad Y_{n+1}^p = \phi(t_n, \delta t, Y_n^p) \quad (1.55)$$

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $t_n \leq T$. Il nous faut estimer $e_n = Y_n - Y(t_n)$ que nous décomposons sous la forme

$$E_n = Y_n^n - Y_n^0 = Y_n^n - Y_n^{n-1} + Y_n^{n-1} - \dots - Y_n^1 + Y_n^1 - Y_n^0 \quad (1.56)$$

D'après l'inégalité triangulaire on a

$$\|E_n\| \leq \|Y_n^n - Y_n^{n-1}\| + \dots + \|Y_n^k - Y_n^{k-1}\| + \dots + \|Y_n^1 - Y_n^0\|. \quad (1.57)$$

Remarquons que les suites $(Y_n^k)_{n \geq k}$ et $(Y_n^{k-1})_{n \geq k}$ vérifient toutes deux

$$Y_{n+1}^k = \phi(t_n, \delta t, Y_n^k) \text{ et } Y_{n+1}^{k-1} = \phi(t_n, \delta t, Y_n^{k-1}) \quad (1.58)$$

et sont initialisées par

$$Y_k^k = Y(t_k) \quad \text{et} \quad Y_k^{k-1} = \phi(t_{k-1}, \delta t, Y(t_{k-1})) \quad (1.59)$$

Comme le schéma est stable, on a

$$\|Y_n^k - Y_n^{k-1}\| \leq C \|Y(t_k) - \phi(t_{k-1}, \delta t, Y(t_{k-1}))\| \quad (1.60)$$

D'autre part, comme le schéma est d'ordre m on a

$$\|Y_n^k - Y_n^{k-1}\| \leq C (\delta t)^{m+1}. \quad (1.61)$$

On obtient en sommant n fois cette inégalité comme $t_n = n\delta t$

$$\|E_n\| \leq C' n (\delta t)^{m+1} \leq C' t_n (\delta t)^m. \quad (1.62)$$

Chapitre 2

La méthode des différences finies pour les problèmes aux limites statiques

2.1 Différences finies en dimension 1

La plupart des fonctions ne peuvent pas être représentées par des formules analytiques. Il est donc impossible de calculer leurs dérivées, même avec un code de calcul formel. La méthode des différences finies propose un moyen de calculer une approximation numérique des valeurs des dérivées d'une fonction.

On se place sur le segment $[0, L]$ que l'on discrétise à l'aide de la grille définie par ses sommets

$$x_n = nh \quad \text{avec } n \in \llbracket 0, N \rrbracket \text{ et } Nh = L. \quad (2.1)$$

On dit que h est le pas de la grille. L'écart h entre x_n et x_{n+1} étant constant, on parle de grille uniforme. On considère une fonction régulière $u : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$ et on note u_n la valeur de u en x_n

$$u_n = u(x_n). \quad (2.2)$$

Une différence finie à p points est une combinaison linéaire de p u_n . Elles ont pour vocation d'approcher les dérivées de u au point x_n .

Soit Du une différence finie. On dit que Du approche $u^{(l)}(x_n)$ à l'ordre q si il existe $C > 0$ et $h_0 > 0$

$$\forall h \in [0, h_0] \quad \|Du - u^{(l)}(x_n)\| \leq Ch^q. \quad (2.3)$$

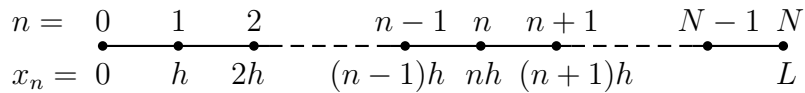


FIGURE 2.1 – Une grille uniforme de pas h

2.2 Quelques exemples de différences finies

2.2.1 Différence finie décentrée à droite

A partir de la définition de la dérivée

$$u'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h) - u(x)}{h}, \quad (2.4)$$

on introduit pour approcher $u'(x_n)$ la différence finie décentrée à droite

$$\frac{u_{n+1} - u_n}{h}. \quad (2.5)$$

Calculons l'ordre en h de cette approximation Comme $[0, L]$ est compact, notons que la fonction $u \in C^\infty([0, L])$ ainsi que ses dérivées sont bornées en valeur absolue. On note $\|v\|_\infty$ le maximum de $|v(x)|$. Pour tout $x \in [0, L]$ on a

$$|u(x)| \leq \|u\|_\infty, \quad |u'(x)| \leq \|u'\|_\infty, \quad |u''(x)| \leq \|u''\|_\infty. \quad (2.6)$$

Nous allons utiliser le développement de Taylor pour déterminer l'ordre de la différence finie. Comme $u_{n+1} = u(x_{n+1}) = u(x_n + h)$ on a

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= u(x_n) + hu'(x_n) + \frac{h^2}{2}u''(x_n) + \frac{h^3}{6}r(h), \\ u_n &= u(x_n). \end{aligned} \quad (2.7)$$

avec $|r(h)| \leq \|u^{(3)}\|_\infty$. En soustrayant il suit

$$\frac{u_{n+1} - u_n}{h} = u'(x_n) + \frac{h}{2}u''(x_n) + \frac{h^2}{6}r(h). \quad (2.8)$$

On conclut donc que dès que $u''(x_n) \neq 0$, la différence finie décentrée à droite $\frac{u_{n+1} - u_n}{h}$ est une approximation d'ordre 1 de $u'(x_n)$. Cette approximation est au moins d'ordre 2 si $u''(x_n) = 0$;

2.2.2 Différences finies décentrées à gauche

L'idée est très similaire. On approche $u'(x_n)$ par

$$\frac{u_n - u_{n-1}}{h}. \quad (2.9)$$

Calcul de l'ordre. Comme $u_{n-1} = u(x_{n-1}) = u(x_n - h)$, un développement de Taylor nous fournit

$$\begin{aligned} u_n &= u(x_n), \\ u_{n-1} &= u(x_n) - hu'(x_n) + \frac{h^2}{2}u''(x_n) + \frac{h^3}{6}r(h), \end{aligned} \quad (2.10)$$

avec $|r(h)| \leq \|u^{(3)}\|_\infty$. En formant la différence finie nous montrons que $\frac{u_n - u_{n-1}}{h}$ est une approximation d'ordre 1 de $u'(x_n)$ si $u''(x_n) \neq 0$.

$$\frac{u_n - u_{n-1}}{h} = u'(x_n) - \frac{h}{2}u''(x_n) + \frac{h^2}{6}r(h). \quad (2.11)$$

2.2.3 Différence finie centrée

Afin d'améliorer l'approximation de $u'(x_n)$, nous définissons une différence finie bénéficiant de plus de symétrie que les deux précédentes

$$\frac{u_{n+1} - u_{n-1}}{2h}. \quad (2.12)$$

Calcul de l'ordre On écrit le développement de Taylor à un ordre suffisant afin de faire apparaître l'ordre optimal de la différence finie

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= u(x_n) + hu'(x_n) + \frac{h^2}{2}u''(x_n) + \frac{h^3}{3!}u^{(3)}(x_n) + \frac{h^4}{4!}u^{(4)}(x_n) + \frac{h^5}{5!}r(h), \\ u_{n-1} &= u(x_n) - hu'(x_n) + \frac{h^2}{2}u''(x_n) - \frac{h^3}{3!}u^{(3)}(x_n) + \frac{h^4}{4!}u^{(4)}(x_n) + \frac{h^5}{5!}r(h), \end{aligned}$$

avec la fonction générique r vérifiant $|r(h)| \leq \|u^{(5)}\|_\infty$. En formant la différence finie puis en simplifiant on a

$$\frac{u_{n+1} - u_{n-1}}{2h} = u'(x_n) + \frac{h^2}{3!}u^{(3)}(x_n) + \frac{h^4}{5!}r(h). \quad (2.13)$$

On a obtenu que la différence finie est d'ordre 2 si $u^{(3)}(x_n) \neq 0$ et d'ordre au moins 4 sinon.

2.2.4 Le schéma à trois points

On approche ici $u''(x_n)$ par la différence finie

$$\frac{u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}}{h^2} \quad (2.14)$$

Cette différence finie s'obtient à l'aide d'un raisonnement formel qui consiste à emboîter deux différences finies

$$\begin{aligned} u''(x_n) &\simeq \frac{1}{h} \left(u'(x_n + h/2) - u'(x_n - h/2) \right) \\ &\simeq \frac{1}{h} \left(\frac{u(x_n + h) - u(x_n)}{h} - \frac{u(x_n) - u(x_n - h)}{h} \right) \\ &\simeq \frac{u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}}{h^2} \end{aligned} \quad (2.15)$$

Calcul de l'ordre de cette différence finie On utilise encore une fois le développement de Taylor de la fonction u autour du point x_n

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= u(x_n) + hu'(x_n) + \frac{h^2}{2}u''(x_n) + \frac{h^3}{3!}u^{(3)}(x_n) + \frac{h^4}{4!}u^{(4)}(x_n) + \frac{h^5}{5!}u^{(5)}(x_n) + \frac{h^6}{6!}r(h), \\ u_n &= u(x_n), \end{aligned}$$

$$u_{n-1} = u(x_n) - hu'(x_n) + \frac{h^2}{2}u''(x_n) - \frac{h^3}{3!}u^{(3)}(x_n) + \frac{h^4}{4!}u^{(4)}(x_n) - \frac{h^5}{5!}u^{(5)}(x_n) + \frac{h^6}{6!}r(h),$$

avec la fonction générique r vérifiant $|r(h)| \leq \|u^{(6)}\|_\infty$.

$$\frac{u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}}{h^2} = u''(x_n) + \frac{2h^2}{4!}u^{(4)}(x_n) + 2\frac{h^4}{6!}r(h) \quad (2.16)$$

La différence finie à trois points est une approximation d'ordre 2 de $u''(x_n)$ si $u^{(4)}(x_n) \neq 0$. Elle est au moins d'ordre 4 si $u^{(4)}(x_n) = 0$.

2.3 Discrétisation des problèmes de type elliptique en dimension 1

2.3.1 Position du problème

Soit $L > 0$. Nous notons par $x \mapsto a(x)$, $x \mapsto b(x)$, $x \mapsto c(x)$ et $x \mapsto f(x)$ des fonctions de la droite réelle de classe C^∞ avec $a(x) > a_0 > 0$. Soient α, β, γ et δ des réels.

On considère le problème de chercher $u \in C^\infty([0, L])$ vérifiant

$$Pu(x) = f(x) \quad \forall x \in [0, L] \quad L_G u = \alpha \text{ et } L_D u = \beta \quad (2.17)$$

avec P , L_G et L_D des opérateurs différentiels définis par

$$\left\{ \begin{array}{ll} Pu(x) = a(x)u''(x) + b(x)u'(x) + c(x)u(x), \\ L_G u = u(0), & \text{(condition de Dirichlet)} \\ \text{ou } u'(0), & \text{(condition de Neumann)} \\ \text{ou } u'(0) + \gamma u(0) \text{ avec } \gamma \in \mathbb{R}, & \text{(condition de Fourier)} \\ L_D u = u(L), & \text{(condition de Dirichlet)} \\ \text{ou } u'(L), & \text{(condition de Neumann)} \\ \text{ou } u'(L) + \delta u(L) \text{ avec } \delta \in \mathbb{R}. & \text{(condition de Fourier)} \end{array} \right. \quad (2.18)$$

On parle d'équation principale pour l'équation $Pu = f$ et de conditions à la limite pour $L_G u = \alpha$ et $L_D u = \beta$.

Définition 2.1 On dit que $u \mapsto a(x)u''$ est la partie principale de l'opérateur P . D'autre part, on parle d'opérateur elliptique si $a(x) > a_0 > 0$.

Nous allons dans ce chapitre proposer des méthodes d'approximation de la solution du problème (2.17).

Theoreme 2.1 Rappelons que a, b, c et f sont des fonctions C^∞ . Dans le cas où $a(x) > a_0 > 0$, le problème (2.17) admet une unique solution (on dit aussi "est bien posé") ssi on a

$$\left(Pv(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad L_G v = 0 \quad \text{et} \quad L_D v = 0 \right) \implies v = 0. \quad (2.19)$$

Nous allons dans la suite calculer une approximation de la fonction u à l'aide de la méthode des différences finies. Nous ne pouvons pas calculer (à l'aide d'un ordinateur) toutes les valeurs de la fonction u (les ordinateurs ne peuvent traiter qu'un nombre fini d'opérations). Nous introduisons donc la grille définie par ses sommets x_n

$$x_n = nh \text{ avec } n \in \llbracket 0, N \rrbracket \text{ et } Nh = L. \quad (2.20)$$

On approche ensuite la valeur de la fonction u en x_n par u_n

$$u_n \simeq u(x_n) \quad (2.21)$$

Nous avons donc à déterminer $N + 1$ inconnues u_n . Afin d'avoir un système d'équations bien posé nous avons besoin de $N + 1$ équations. Enfin, on note

$$f_n = f(x_n), \quad a_n = a(x_n), \quad b_n = b(x_n), \quad c_n = c(x_n). \quad (2.22)$$

2.3.2 Discrétisation de l'équation principale

Plaçons nous en $0 < x_n < L$, ie. $1 < n < N - 1$. Nous allons approcher l'équation

$$Pu(x_n) = f(x_n) \quad (2.23)$$

C'est à dire

$$a(x_n)u''(x_n) + b(x_n)u'(x_n) + c(x_n)u(x_n) = f(x_n). \quad (2.24)$$

On approche les dérivées u' et u'' de u par des différences finies. Nous utilisons des différences finies centrées pour u' et u'' (différence finie à trois points)

$$a_n \left(\frac{u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}}{h^2} \right) + b_n \left(\frac{u_{n+1} - u_{n-1}}{2h} \right) + c_n u_n = f_n. \quad (2.25)$$

On obtient après avoir rangé les inconnues par indice croissant

$$\left(\frac{a_n}{h^2} - \frac{b_n}{2h} \right) u_{n-1} + \left(-\frac{2a_n}{h^2} + c_n \right) u_n + \left(\frac{a_n}{h^2} + \frac{b_n}{2h} \right) u_{n+1} = f_n. \quad (2.26)$$

2.3.3 Discrétisation des condition aux limites

On se place ici en $n = 0$ c'est à dire $x_n = 0$. Remarquons que la grille ne contient pas de points à gauche de x_n . Il n'est donc pas possible de considérer une différence finie centrée pour approcher $u'(0)$. Nous devons donc utiliser une différence finie décentrée à droite

$$u'(0) \simeq \frac{u_1 - u_0}{h} \quad (2.27)$$

Nous avons trois types possibles de conditions à la limite.

— **Condition de Dirichlet :** $u(0) = \alpha$. C'est la plus facile à discrétiser. Elle s'écrit tous simplement

$$u_0 = \alpha. \quad (2.28)$$

— **Condition de Neumann :** $u'(0) = \alpha$.

$$\frac{u_1 - u_0}{h} = \alpha \text{ c'est à dire } -\frac{1}{h}u_0 + \frac{1}{h}u_1 = \alpha. \quad (2.29)$$

— **Condition de Fourier :** $u'(0) + \gamma u(0) = \alpha$.

$$\frac{u_1 - u_0}{h} + \gamma u_0 = \alpha \text{ c'est à dire } \left(\gamma - \frac{1}{h} \right) u_0 + \frac{1}{h} u_1 = \alpha \quad (2.30)$$

On se place en $n = N$ c'est à dire $x_n = L$. Nous ne disposons pas cette fois de points de grille à droite de x_n . Il nous faut pour approcher $u'(L)$ une différence finie décentrée à gauche

$$u'(L) \simeq \frac{u_N - u_{N-1}}{h}. \quad (2.31)$$

Il nous faut encore pouvoir discrétiser les trois types de condition à la limite

— **Condition de Dirichlet :** $u(L) = \beta$.

$$u_N = \beta. \quad (2.32)$$

— **Condition de Neumann :** $u'(L) = \beta$.

$$\frac{u_N - u_{N-1}}{h} = \alpha \text{ c'est à dire } -\frac{1}{h}u_{N-1} + \frac{1}{h}u_N = \beta. \quad (2.33)$$

— **Condition de Fourier :** $u'(L) + \delta u(L) = \beta$.

$$\frac{u_N - u_{N-1}}{h} + \delta u_N = \alpha \text{ c'est à dire } -\frac{1}{h}u_{N-1} + \left(\delta + \frac{1}{h}\right)u_N = \beta. \quad (2.34)$$

2.3.4 Formulation vectorielle

Forme non éliminée Les $N + 1$ valeurs $u(x_n)$ de la solution de (2.17) ont été approchées par les u_n . Nous avons discrétisé l'équation principale et les conditions aux limites et obtenu un système de $N + 1$ équations affines reliant ces u_n . Nous mettons maintenant ces équations sous la forme

$$AU = \ell \quad (2.35)$$

avec $A \in \mathbb{R}^{(N+1) \times (N+1)}$, $U \in \mathbb{R}^{N+1}$ et $\ell \in \mathbb{R}^{N+1}$.

- La première ligne ($n=0$) de (2.35) contient, suivant la condition à la limite en $x = 0$, soit (2.28), soit (2.29), soit (2.30).
- les lignes centrales ($n = 1$ à $N - 1$) contiennent (2.26).
- La dernière ligne ($n = N$) de (2.35) contient suivant la condition à la limite soit soit (2.32), soit (2.33), soit (2.34).

Exemple. Nous allons exhiber la matrice A et le terme source ℓ du problème suivant

$$\begin{cases} -u''(x) + u(x) = 1, & x \in [0, L], \\ u(0) = 2, \\ u'(L) = 3. \end{cases} \quad (2.36)$$

La discrétisation sur une grille uniforme prend la forme suivante

$$\begin{cases} u_0 = 2, \\ -\frac{u_{n-1} - 2u_n + u_{n+1}}{h^2} + u_n = 1, & \text{pour } n = 1 \text{ à } N - 1, \\ \frac{u_N - u_{N-1}}{h} = 3, \end{cases} \quad (2.37)$$

ou sous forme ordonnée

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ -\frac{1}{h^2}u_{n-1} + \left(\frac{2}{h^2} + 1\right)u_n - \frac{1}{h^2}u_{n+1} = 1, & \text{pour } n = 1 \text{ à } N - 1, \\ -\frac{1}{h}u_{N-1} + \frac{1}{h}u_N = 3. \end{cases} \quad (2.38)$$

Nous identifions maintenant avec (2.35) qui s'écrit sous sa forme développée

$$\sum_{i=0}^N A_{n,i} u_i = \ell_n, \quad \text{pour } n = 0 \text{ à } N. \quad (2.39)$$

On obtient donc

$$U = \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ u_{N-1} \\ u_N \end{bmatrix}, \quad \ell = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad (2.40)$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ -\frac{1}{h^2} & \frac{2}{h^2} + 1 & -\frac{1}{h^2} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & -\frac{1}{h^2} & \frac{2}{h^2} + 1 & -\frac{1}{h^2} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -\frac{1}{h^2} & \frac{2}{h^2} + 1 & -\frac{1}{h^2} \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & -\frac{1}{h} & \frac{1}{h} \end{bmatrix}. \quad (2.41)$$

Il ne nous reste plus qu'à inverser la matrice A pour déterminer l'approximation numérique de u .

Forme éliminée Remarquons que la première ligne et la dernière ligne de A n'ont pas du tout la même structure que les lignes centrales de cette matrice. Afin de corriger cette propriété, qui peut être gênante lors de l'inversion numérique nous éliminons les inconnues u_0 et u_N par de simple opérations algébriques. Reprenons les deux premières lignes de (2.38)

$$\begin{cases} u_0 = 2, \\ -\frac{1}{h^2}u_0 + (\frac{2}{h^2} + 1)u_1 - \frac{1}{h^2}u_2 = 1. \end{cases} \quad (2.42)$$

En éliminant u_0 , on a

$$(\frac{2}{h^2} + 1)u_1 - \frac{1}{h^2}u_2 = 1 + \frac{2}{h^2}. \quad (2.43)$$

De même à partir des deux dernières lignes de (2.38)

$$\begin{cases} -\frac{1}{h^2}u_{N-2} + (\frac{2}{h^2} + 1)u_{N-1} - \frac{1}{h^2}u_N = 1, \\ -\frac{1}{h}u_{N-1} + \frac{1}{h}u_N = 3, \end{cases} \quad (2.44)$$

on élimine u_N

$$-\frac{1}{h^2}u_{N-2} + (\frac{1}{h^2} + 1)u_{N-1} = 1 + \frac{3}{h}. \quad (2.45)$$

On obtient donc la formulation éliminée $A'U' = \ell'$

$$U' = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_{N-1} \end{bmatrix}, \quad \ell' = \begin{bmatrix} 1 + \frac{2}{h^2} \\ \vdots \\ 1 + \frac{3}{h} \end{bmatrix}, \quad (2.46)$$

$$A' = \begin{bmatrix} \frac{2}{h^2} + 1 & -\frac{1}{h^2} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -\frac{1}{h^2} & \frac{2}{h^2} + 1 & -\frac{1}{h^2} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & -\frac{1}{h^2} & \frac{2}{h^2} + 1 & -\frac{1}{h^2} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & -\frac{1}{h^2} & \frac{1}{h^2} + 1 \end{bmatrix}. \quad (2.47)$$

Remarquons qu'après élimination la matrice A est symétrique.

2.3.5 Méthode du point fantôme ou virtuel

Les différences finies, utilisées lors de la dernière section, ont approché à l'ordre 2 l'équation principale et seulement à l'ordre 1 la condition à la limite. La méthode du point fantôme ou virtuel consiste à prolonger à tout \mathbb{R} la solution du problème (2.17)

$$Pu(x) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad L_G u = \alpha \text{ et } L_D u = \beta \quad (2.48)$$

puis de la discrétiser en utilisant une différence finie centrée lorsque la condition à la limite contient une dérivée. On devra dans ce cas ajouter un point de grille. Pour être plus concret, reprenons notre exemple.

A gauche, nous devons approcher une condition de Dirichlet. La discrétisation de $u(0) = 2$ s'écrit

$$u_0 = 2. \quad (2.49)$$

Cette discrétisation est exacte. Nous n'avons pas besoin de rajouter un point de grille. A droite afin de pouvoir discrétiser la condition à la limite $u'(L) = 3$ à l'aide d'une différence finie centrée autour de 0 nous introduisons le point de grille

$$x_{N+1} = L + h. \quad (2.50)$$

Nous approchons $u(x_{N+1})$ par u_{N+1} . La condition $u'(L) = 3$ s'écrit

$$\frac{u_{N+1} - u_{N-1}}{2h} = 3. \quad (2.51)$$

Afin de fermer le système nous devons discrétiser l'équation principale en x_n pour $n = 1$ à N .

$$-\frac{u_{n-1} - 2u_n + u_{n+1}}{h^2} + u_n = 1 \quad \text{pour } n = 1 \text{ à } N. \quad (2.52)$$

Dans le cas d'une **formulation non éliminée avec point virtuel** on a

$$U = \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ u_{N-1} \\ u_N \\ u_{N+1} \end{bmatrix}, \quad \ell = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \quad (2.53)$$

,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ -\frac{1}{h^2} & \frac{2}{h^2} + 1 & -\frac{1}{h^2} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & -\frac{1}{h^2} & \frac{2}{h^2} + 1 & -\frac{1}{h^2} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -\frac{1}{h^2} & \frac{2}{h^2} + 1 & -\frac{1}{h^2} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -\frac{1}{2h} & 0 & \frac{1}{2h} \end{bmatrix}. \quad (2.54)$$

Pour une **formulation éliminée avec point virtuel**, il nous faut éliminer u_0 et u_{N+1} . Pour u_0 , le calcul a déjà été effectué auparavant. Pour u_{N+1} , on a

$$\begin{cases} -\frac{u_{N-1} - 2u_N + u_{N+1}}{h^2} + u_N = 1, \\ \frac{u_{N+1} - u_{N-1}}{2h} = 3. \end{cases} \quad (2.55)$$

Il suit après élimination

$$-\frac{1}{h^2}u_{N-1} + \left(\frac{1}{h^2} + \frac{1}{2}\right)u_N = \frac{1}{2} + \frac{3}{h}. \quad (2.56)$$

On peut alors identifier les matrices et les vecteurs

$$U' = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_{N-1} \\ u_N \end{bmatrix}, \quad \ell = \begin{bmatrix} 1 + \frac{2}{h^2} \\ \vdots \\ \frac{1}{2} + \frac{3}{h} \end{bmatrix}, \quad (2.57)$$

$$A = \begin{bmatrix} \frac{2}{h^2} + 1 & -\frac{1}{h^2} & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ -\frac{1}{h^2} & \frac{2}{h^2} + 1 & -\frac{1}{h^2} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -\frac{1}{h^2} & \frac{2}{h^2} + 1 & -\frac{1}{h^2} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & -\frac{1}{h^2} & \frac{1}{h^2} + \frac{1}{2} \end{bmatrix}. \quad (2.58)$$

2.4 Discrétisation des problèmes de type elliptique en dimension 2

2.4.1 Définition du problème continu

On se place sur le rectangle $\Omega = [0, L_x] \times [0, L_y]$, voir figure 2.2. Ce rectangle a 4 côtés

$$\begin{cases} \Gamma_g &= \{0\} \times [0, L_y], & (\text{g comme gauche}) \\ \Gamma_d &= \{L_x\} \times [0, L_y], & (\text{d comme droit}) \\ \Gamma_b &= [0, L_x] \times \{0\}, & (\text{b comme bas}) \\ \Gamma_h &= [0, L_x] \times \{L_y\}, & (\text{h comme haut}) \end{cases} \quad (2.59)$$

Dans ce cours nous considérons la résolution numérique de problèmes scalaires aux dérivées partielles ayant la forme suivante

$$\begin{cases} Pu(x) = f(x) \text{ pour } x \in \Omega, \\ L_g u(x) = f_g(x) \text{ pour } x \in \Gamma_g, \\ L_d u(x) = f_d(x) \text{ pour } x \in \Gamma_d, \\ L_b u(x) = f_b(x) \text{ pour } x \in \Gamma_b, \\ L_h u(x) = f_h(x) \text{ pour } x \in \Gamma_h, \end{cases} \quad (2.60)$$

avec

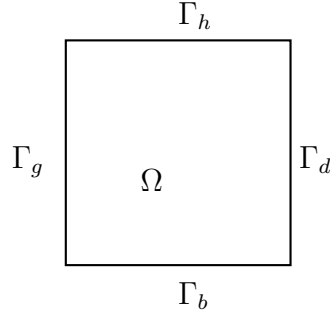


FIGURE 2.2 – Le domaine de calcul 2D

— P un opérateur différentiel en espace ayant la forme

$$Pu(x) = - \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \alpha_{i,j} \partial_i \partial_j u(x) + \sum_{i=1}^2 \beta_i \partial_i u(x) + \gamma u(x). \quad (2.61)$$

où $\alpha_{i,j}$, β_i et γ sont des réels tels que $\alpha_{i,j} = \alpha_{j,i}$. On dit que A est un opérateur elliptique si

$$\exists C > 0 : \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \alpha_{i,j} \xi_i \xi_j \geq C \sum_{i=1}^2 \xi_i^2. \quad (2.62)$$

L'opérateur P peut se mettre sous la forme plus compacte

$$Pu(x) = -\operatorname{div} \left(\alpha \operatorname{grad} u \right)(x) + \beta \cdot \operatorname{grad} u(x) + \gamma u(x) \quad (2.63)$$

avec

$$\alpha = \begin{bmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \beta = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} \quad (2.64)$$

— L_g, L_d, L_b, L_h un opérateur différentiel défini sur les traces d'une fonction u sur $\partial\Omega$. Ces opérateurs peuvent être soit de Dirichlet, soit de Neumann, soit de Fourier

Condition de Dirichlet

$$\begin{aligned} L_g u(x) &= u(x), \\ L_d u(x) &= u(x), \\ L_b u(x) &= u(x), \\ L_h u(x) &= u(x). \end{aligned} \quad (2.65)$$

Condition de Neumann

$$\begin{aligned}
L_g u(x) &= - \sum_{j=1}^2 \alpha_{1,j} \partial_j u(x), \\
L_d u(x) &= \sum_{j=1}^2 \alpha_{1,j} \partial_j u(x), \\
L_b u(x) &= - \sum_{j=1}^2 \alpha_{2,j} \partial_j u(x) \\
L_h u(x) &= \sum_{j=1}^2 \alpha_{2,j} \partial_j u(x).
\end{aligned} \tag{2.66}$$

Cette condition s'écrit aussi plus succinctement

$$L_a u(x) = n_a \cdot (\alpha \operatorname{grad} u(x)), \quad \text{avec } a = g, d, b \text{ ou } h. \tag{2.67}$$

avec n la normale sortante au domaine

$$\begin{cases} n_g = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} & \text{sur } \Gamma_g, & n_d = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} & \text{sur } \Gamma_d, \\ n_b = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} & \text{sur } \Gamma_b, & n_h = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} & \text{sur } \Gamma_d. \end{cases} \tag{2.68}$$

Condition de Fourier

$$\begin{aligned}
L_g u(x) &= - \sum_{j=1}^2 \alpha_{1,j} \partial_j u(x) + \delta_g u(x), \quad \text{avec } \delta_g \in \mathbb{R}, \\
L_d u(x) &= \sum_{j=1}^2 \alpha_{1,j} \partial_j u(x) + \delta_d u(x), \quad \text{avec } \delta_d \in \mathbb{R}, \\
L_b u(x) &= - \sum_{j=1}^2 \alpha_{2,j} \partial_j u(x) + \delta_b u(x) \quad \text{avec } \delta_b \in \mathbb{R}, \\
L_h u(x) &= \sum_{j=1}^2 \alpha_{2,j} \partial_j u(x) + \delta_h u(x), \quad \text{avec } \delta_h \in \mathbb{R}.
\end{aligned} \tag{2.69}$$

ou encore

$$L_a u(x) = n_a \cdot (\alpha \operatorname{grad} u(x)) + \delta_a u(x), \quad \text{avec } a = g, d, b \text{ ou } h. \tag{2.70}$$

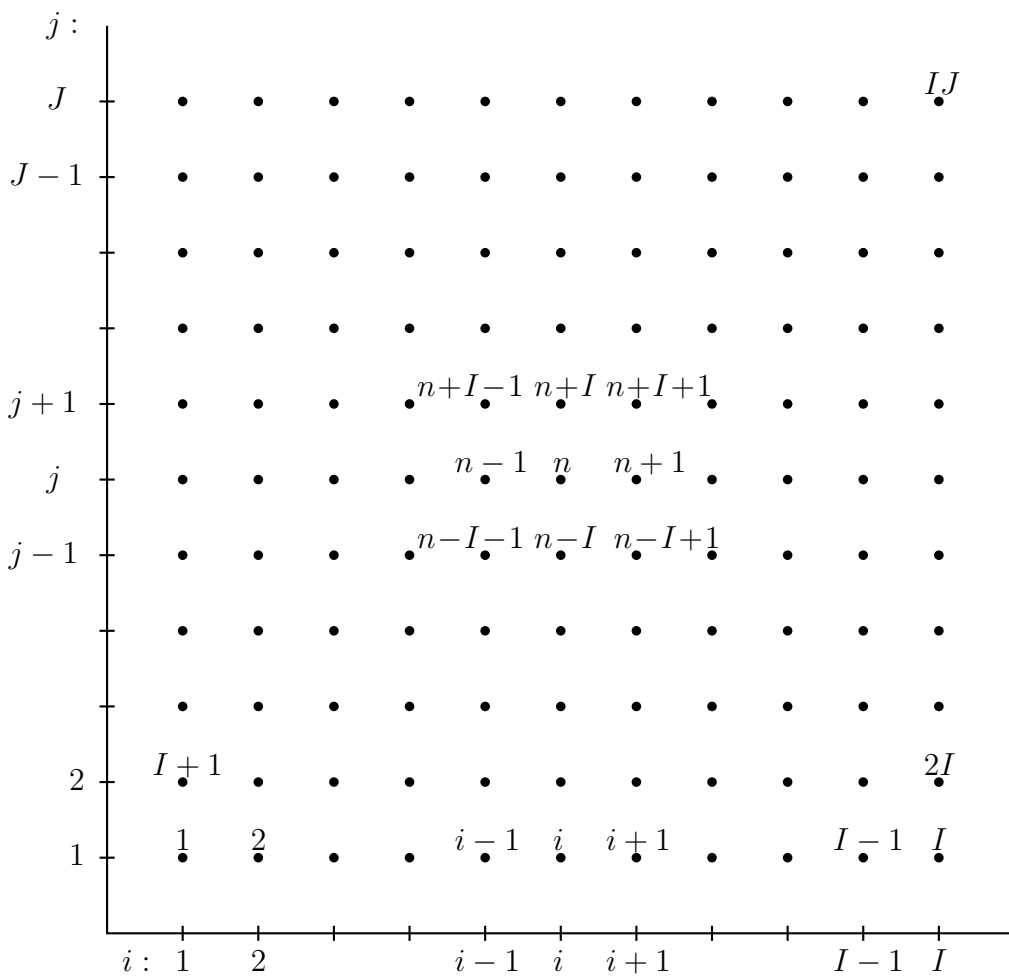
— f, f_g, f_d, f_b, f_h des fonctions de classe C^∞ définies sur $\Omega, \Omega_g, \Omega_d, \Omega_b, \Omega_h$.

Pour la première ligne de (2.60) on parle d'équation principale. Pour les lignes suivantes, on parle de conditions à la limite.

2.4.2 Différences finies en dimension 2

Nous introduisons une grille uniforme définie par ses sommets de coordonnées

$$x_i = i h_x \text{ et } y_j = j h_y \text{ avec } i \in \llbracket 1, I \rrbracket \text{ et } j \in \llbracket 1, J \rrbracket. \tag{2.71}$$



Nous notons $u_{i,j}$ les valeurs d'une fonction $u \in C^\infty(\Omega)$ au point (x_i, y_j) . Nous appelons différences finies à p points les combinaisons linéaires de p $u_{i,j}$. Ces différences finies ont pour vocation d'approcher les dérivées partielles de u au point (x_i, y_j) .

Approximation des dérivées premières

Pour approcher la dérivée partielle suivant x (resp. y), il suffit de fixer y (resp. x) et d'utiliser les différences finies 1D. On a donc

— Différences finies **décentrées à droite et en haut** à 2 points d'ordre 1

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}(x_i, y_j) &\simeq \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{h_x}, \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x_i, y_j) &\simeq \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{h_y}. \end{aligned} \quad (2.72)$$

— Différences finies **décentrées à gauche et en bas** à 2 points d'ordre 1

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}(x_i, y_j) &\simeq \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{h_x}, \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x_i, y_j) &\simeq \frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{h_y}. \end{aligned} \quad (2.73)$$

— Différences finies **centrées** à 2 points d'ordre 2

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}(x_i, y_j) &\simeq \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2h_x}, \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x_i, y_j) &\simeq \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2h_y}. \end{aligned} \quad (2.74)$$

Approximation des dérivées secondes

Les dérivées partielles $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ et $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ s'obtiennent aisément à partir de la différence finie à 3 points en dimension 1.

Différences finies **centrées à 3 points** d'ordre 2 :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, y_j) \simeq \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h_x^2}, \quad (2.75)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_i, y_j) \simeq \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{h_y^2}, \quad (2.76)$$

L'approximation de la dérivée seconde croisée s'obtient en emboîtant des différences finies centrées

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(x_i, y_j) &\simeq \frac{\partial_x u(x_i, y_{j+1})}{2h_y} - \frac{\partial_x u(x_i, y_{j-1})}{2h_y}, \\ &\simeq \frac{u(x_{i+1}, y_{j+1}) - u(x_{i-1}, y_{j+1})}{4h_x h_y} - \frac{u(x_{i+1}, y_{j-1}) - u(x_{i-1}, y_{j-1})}{4h_x h_y}. \end{aligned} \quad (2.77)$$

On aboutit à la différence finie **centrée à 4 points** d'ordre 2

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(x_i, y_j) \simeq \frac{u_{i+1,j+1} - u_{i-1,j+1} - u_{i+1,j-1} + u_{i-1,j-1}}{4h_x h_y}. \quad (2.78)$$

Les $u_{i,j}$ sont au nombre de $N = IJ$. Nous allons écrire donc N équations linéaires les reliant afin de les déterminer.

2.4.3 Approximation de l'équation principale

Nous approchons l'équation principale en chaque point intérieur $i \in \llbracket 2, I-1 \rrbracket$ et $j \in \llbracket 2, J-1 \rrbracket$

$$-\sum_{k=1}^2 \sum_{l=1}^2 \alpha_{k,l} \partial_k \partial_l u(x_{i,j}) + \sum_{k=1}^2 \beta_k \partial_k u(x_{i,j}) + \gamma u(x_{i,j}) = f(x_{i,j}) \quad (2.79)$$

par des différences finies centrées (afin d'obtenir un schéma d'ordre 2)

$$\begin{aligned} &-\alpha_{1,1} \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h_x^2} - \alpha_{2,2} \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{h_y^2} \\ &- 2\alpha_{1,2} \frac{u_{i+1,j+1} - u_{i-1,j+1} - u_{i+1,j-1} + u_{i-1,j-1}}{4h_x h_y} \\ &+ \beta_1 \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2h_x} + \beta_2 \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2h_y} + \gamma u_{i,j} = f_{i,j}. \end{aligned} \quad (2.80)$$

type de frontière	approximation de $\frac{\partial u}{\partial x}$	approximation de $\frac{\partial u}{\partial y}$
coin haut gauche	$\frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{h_x}$	$\frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{h_y}$
coin haut droit	$\frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{h_x}$	$\frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{h_y}$
coin bas gauche	$\frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{h_x}$	$\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{h_y}$
coin bas droit	$\frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{h_x}$	$\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{h_y}$
bord gauche	$\frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{h_x}$	$\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2h_y}$
bord droit	$\frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{h_x}$	$\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2h_y}$
bord bas	$\frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2h_x}$	$\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{h_y}$
bord haut	$\frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2h_x}$	$\frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{h_y}$

TABLE 2.1 – Approximation des dérivées premières au coin

2.4.4 Approximation des conditions aux limites

Les points du bord sont soit des coins soit des points intérieurs à Γ_g , Γ_d , Γ_b , Γ_h . Pour approcher les dérivées partielles apparaissant dans les conditions à la limite on utilise dès que possible une différence finie centrée. Si ce n'est pas possible, on utilise une différence finie décentrée à droite ou à gauche, voir table 2.1.

Les quatre coins appartiennent à deux bords (le coin bas droit appartient à la fois à Γ_b et Γ_d) il faut donc sélectionner quelle condition à la limite discrétiser. On peut appliquer les règles de la table 2.2 (en respectant les signes apparaissant dans les définition de L_g , L_d , L_b , L_d).

2.4.5 Formulation vectorielle

L'algèbre sur les matrices n'étant pas pratique d'utilisation nous allons faire correspondre à chaque tableau de valeurs $u_{i,j}$ le vecteur $(U_n)_{n \in \llbracket 1, N \rrbracket}$ défini par

$$U_n = u_{i,j} \quad (2.81)$$

avec $n \in \llbracket 1, N \rrbracket$ relié de manière bijective au couple $(i, j) \in \llbracket 1, I \rrbracket \times \llbracket 1, J \rrbracket$ par

$$n = i + (j - 1)I. \quad (2.82)$$

Cond. bord 1 $P_1u(x) = f_1(x)$	Cond. bord 2 $P_2u(x) = f_2(x)$	Equation à discrétiser
Dirichlet	Dirichlet	$P_1u(x) = f_1(x)$
Dirichlet	Neumann	$P_1u(x) = f_1(x)$
Dirichlet	Fourier	$P_1u(x) = f_1(x)$
Neumann	Neumann	$\frac{P_1u(x) + P_2u(x)}{2} = \frac{f_1(x) + f_2(x)}{2}$
Neumann	Fourier	$\frac{P_1u(x) + P_2u(x)}{2} = \frac{f_1(x) + f_2(x)}{2}$
Fourier	Fourier	$\frac{P_1u(x) + P_2u(x)}{2} = \frac{f_1(x) + f_2(x)}{2}$

TABLE 2.2 – Equation à discrétiser au coin

On a alors le tableau de correspondance

$$\left\{ \begin{array}{ll} u_{i-1,j-1} = U_{n-I-1}, & \text{si } i > 1 \text{ et } j > 2, \\ u_{i,j-1} = U_{n-I}, & \text{si } i > 1 \text{ et } j > 2, \\ u_{i+1,j-1} = U_{n-I+1}, & \text{si } i > 1 \text{ et } j > 2, \\ u_{i-1,j} = U_{n-1}, & \text{si } j > 1, \\ u_{i,j} = U_n, & \\ u_{i+1,j} = U_{n+1}, & \text{si } j < J, \\ u_{i-1,j+1} = U_{n+I-1}, & \text{si } i > 1 \text{ et } j < J, \\ u_{i,j+1} = U_{n+I}, & \text{si } j < J, \\ u_{i+1,j+1} = U_{n+I+1}, & \text{si } i < I \text{ et } j < J. \end{array} \right. \quad (2.83)$$

On écrit alors l'ensemble des équations discrétisées sous la forme

$$AU = F \quad (2.84)$$

avec $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$, $U = (U_n)_{1 \leq n \leq N}$ et $F \in \mathbb{R}^N$. Bien entendu on peut utiliser des formulations **éliminées** ou **non éliminées**.

2.4.6 Un exemple de problème à discrétiser, formulation non éliminée

Nous cherchons à approcher la solution du problème

$$\left\{ \begin{array}{ll} x \in [0, 1], \quad y \in [0, 1], & \\ -\Delta u(x, y) + \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + u(x, y) = x, & \text{(équation principale)} \\ u(0, y) = 0, & \text{(bord gauche)} \\ -\frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) + u(x, 0) = 0, & \text{(bord bas)} \\ \frac{\partial u}{\partial x}(1, y) = 0, & \text{(bord droit)} \\ u(x, 1) = x. & \text{(bord haut)} \end{array} \right. \quad (2.85)$$

Discrétisation de l'équation principale. Nous considérons les (i, j) qui vérifient $1 < i < I$ et $1 < j < J$. La discrétisation du laplacien $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ est basée sur celle des deux dérivées secondes

$$-\Delta u(x_i, y_j) = -\frac{u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}}{h^2} - \frac{u_{i,j-1} - 2u_{i,j} + u_{i,j+1}}{h^2}. \quad (2.86)$$

On aboutit au schéma à **5 points**

$$\begin{aligned} -\frac{1}{h^2}u_{i,j-1} + \left(-\frac{1}{h^2} - \frac{1}{2h}\right)u_{i-1,j} + \left(\frac{4}{h^2} + 1\right)u_{i,j} \\ + \left(-\frac{1}{h^2} + \frac{1}{2h}\right)u_{i+1,j} - \frac{1}{h^2}u_{i,j+1} = x_i. \end{aligned} \quad (2.87)$$

On peut maintenant passer à la formulation vectorielle en faisant correspondre l'indice n au couple (i, j)

$$\begin{aligned} -\frac{1}{h^2}U_{n-I} + \left(-\frac{1}{h^2} - \frac{1}{2h}\right)U_{n-1} + \left(\frac{4}{h^2} + 1\right)U_n \\ + \left(-\frac{1}{h^2} + \frac{1}{2h}\right)U_{n+1} - \frac{1}{h^2}U_{n+I} = x_i. \end{aligned} \quad (2.88)$$

Discrétisation du bord gauche Nous nous plaçons en $i = 1$ et $1 < j < J$ et nous devons discrétiser la condition $u(0, y) = 0$.

$$u_{i,j} = 0. \quad (2.89)$$

Avec l'indice n cela devient

$$U_n = 0 \quad (2.90)$$

Discrétisation du bord bas. Le bord bas correspond à $1 < i < I$ et $j = 1$. Nous discrétisons la condition à la limite $-\partial_y u(x, 0) + u(x, 0) = 0$

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{h} + u_{i,j} = 0. \quad (2.91)$$

C'est à dire

$$-\frac{1}{h}U_{n+I} + \left(\frac{1}{h} + 1\right)U_n = 0 \quad (2.92)$$

Discrétisation du bord droit Le bord droit correspond à $i = I$ et $1 < j < J$. Il nous faut discrétiser la condition $\partial_x u(1, y) = 0$

$$\frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{h} = 0. \quad (2.93)$$

Grâce à l'indice n cela devient

$$\frac{U_n - U_{n-1}}{h} = 0. \quad (2.94)$$

Discrétisation du bord haut. On est ici en $1 < i < I$ et $j = J$. On discrétise la condition $u(x, 1) = x$

$$u_{i,j} = x_i. \quad (2.95)$$

A l'aide de l'indice n cela devient

$$U_n = x_i \quad (2.96)$$

Discrétisation du coin bas gauche. On est ici en $i = 1$ et $j = 1$. Au coin bas gauche, les conditions aux limites des bords gauche et droit coexistent. En respectant les règles de la table 2.2 on doit discrétiser la condition $u(0, 0) = 0$

$$u_{i,j} = 0 \text{ c'est à dire } U_n = 0. \quad (2.97)$$

Discrétisation du coin bas droit. On est ici en $i = I$ et $j = 1$. On discrétise la moyenne entre les deux conditions à la limite $\partial_x u(1, 0) - \partial_y u(1, 0) + u(1, 0) = 0$

$$\frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{2h} - \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{2h} + \frac{u_{i,j}}{2} = 0 \text{ c'est à dire } -\frac{1}{2h}U_{n-1} + \frac{1}{h}U_n - \frac{1}{2h}U_{n+I} = 0. \quad (2.98)$$

Discrétisation du coin haut droit. On est ici en $i = I$ et $j = J$. On discrétise la condition de Dirichlet $u(1, 1) = 1$

$$u_{i,j} = 1 \text{ c'est à dire } U_n = 1. \quad (2.99)$$

Discrétisation du coin haut gauche. On est ici en $i = 1$ et $j = J$. On discrétise la condition de Dirichlet $u(0, 0) = 0$

$$u_{i,j} = 0 \text{ c'est à dire } U_n = 0. \quad (2.100)$$

Construction de la matrice A et du terme source b . Nous notons $n = n(i, j) = i + (j - 1)I$. La matrice et le terme source sont définis par $A_{n,m} = 0$ sauf pour les valeurs suivantes

$$(2.88) \implies \forall (i, j) \in \llbracket 2, I - 1 \rrbracket^2 \quad \left\{ \begin{array}{l} A_{n,n-I} = -\frac{1}{h^2}, \\ A_{n,n-1} = -\frac{1}{h^2} - \frac{1}{2h}, \\ A_{n,n} = \frac{4}{h^2} + 1, \\ A_{n,n+1} = -\frac{1}{h^2} + \frac{1}{2h}, \\ A_{n,n+I} = -\frac{1}{h^2}, \\ b_n = x_i. \end{array} \right. \quad (2.101)$$

$$(2.90) \implies i = 1 \text{ et } 1 < j < I \quad \left\{ \begin{array}{l} A_{n,n} = 1, \\ b_n = 0. \end{array} \right. \quad (2.102)$$

$$(2.92) \implies 1 < i < I \text{ et } j = 1 \quad \begin{cases} A_{n,n} = \frac{1}{h} + 1, \\ A_{n,n+I} = -\frac{1}{h}, \\ b_n = 0. \end{cases} \quad (2.103)$$

$$(2.94) \implies i = I \text{ et } 1 < j < I \quad \begin{cases} A_{n,n-1} = -\frac{1}{h}, \\ A_{n,n} = \frac{1}{h}, \\ b_n = 0. \end{cases} \quad (2.104)$$

$$(2.96) \implies 1 < i < I \text{ et } j = I \quad \begin{cases} A_{n,n} = 1, \\ b_n = 0. \end{cases} \quad (2.105)$$

$$(2.97) \implies i = 1 \text{ et } j = 1 \quad \begin{cases} A_{n,n} = 1, \\ b_n = 0. \end{cases} \quad (2.106)$$

$$(2.98) \implies i = I \text{ et } j = 1 \quad \begin{cases} A_{n,n-1} = -\frac{1}{2h}, \\ A_{n,n} = \frac{1}{h} + \frac{1}{2}, \\ A_{n,n+I} = -\frac{1}{2h}, \\ b_n = 0. \end{cases} \quad (2.107)$$

$$(2.99) \implies i = I \text{ et } j = I \quad \begin{cases} A_{n,n} = 1, \\ b_n = 1. \end{cases} \quad (2.108)$$

$$(2.100) \implies i = 1 \text{ et } j = I \quad \begin{cases} A_{n,n} = 1, \\ b_n = 0. \end{cases} \quad (2.109)$$

2.4.7 Technique du point virtuel ou fantôme

Elle consiste à ajouter une rangée de points dès que cette rangée permet d'utiliser un différence finie centrée puis d'associer à chaque point une équation à discrétiser. On se référera à la table 2.3. On discrétise d'autre part l'équation principale en tout point intérieur, une condition à la limite pour chaque point extérieur sauf au coin Neumann-Neumann, Neumann-Fourier ou Fourier-Fourier où on effectue le plus souvent la discrétisation suivante.

$$\begin{aligned} (\text{coin bas gauche}) \quad & u_{0,0} + u_{1,1} = u_{1,0} + u_{0,1} \\ (\text{coin bas droit}) \quad & u_{I+1,0} + u_{I,1} = u_{I,0} + u_{I-1,1} \\ (\text{coin haut droit}) \quad & u_{I+1,J} + u_{I,J+1} = u_{I,J} + u_{I+1,J+1} \\ (\text{coin haut gauche}) \quad & u_{0,J} + u_{1,J+1} = u_{1,J} + u_{0,J+1} \end{aligned} \quad (2.110)$$

Cette n'est nécessaire que dans le cas de la présence d'une dérivée croisée dans l'équation principale.

Au niveau de la formulation vectorielle, on utilise en général une formulation éliminée qui permet de ne pas considérer les points fantômes dans la résolution du système linéaire.

- Bord 2
- Bord 1
- Condition de Dirichlet
- Condition de Neumann ou de Fourier
- Points de grille originaux
- * Points de grille virtuels
- ou * Discrétisation de la condition de bord 1
- ou * Discrétisation de la condition de bord 2
- * Condition de coin virtuel (2.110)

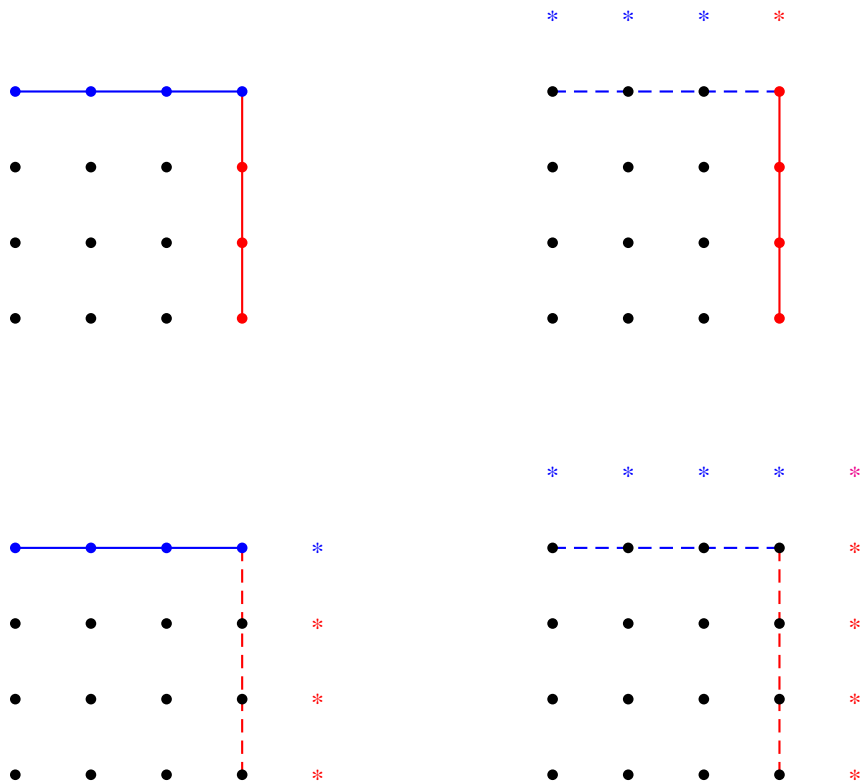


FIGURE 2.3 – Règle d'introduction des points virtuels

2.4.8 Un exemple de formulation éliminée avec points virtuels

Nous considérons la solution du système d'équations aux dérivées partielles

$$\begin{cases} x \in [0, 1] \text{ et } y \in [0, 1], \\ -\Delta u(x, y) = 1, & (\text{équation principale}) \\ u(0, y) = 0, & (\text{bord gauche}) \\ u(x, 0) = 0, & (\text{bord bas}) \\ \partial_x u(0, y) = 1, & (\text{bord droit}) \\ \partial_y u(x, 1) + u(x, 1) = 0. & (\text{bord haut}) \end{cases} \quad (2.111)$$

que nous discrétisons sur une grille régulière avec $h = h_x = h_y$.

$$x_i = ih \quad i \in \llbracket 0, I \rrbracket \text{ et } y_j = ih \quad j \in \llbracket 0, I \rrbracket \text{ avec } Ih = 1. \quad (2.112)$$

On va utiliser pour discrétiser ce problème une formulation vectorielle éliminée, voir figure 2.4.

Discrétisation de l'équation principale On est ici en $i \in \llbracket 2, I-1 \rrbracket$ et $j \in \llbracket 2, I-1 \rrbracket$ L'équation principale s'écrit après discrétisation

$$\frac{-u_{i,j-1} - u_{i-1,j} + 4u_{i,j} - u_{i+1,j} - u_{i,j+1}}{h^2} = 1. \quad (2.113)$$

Discrétisation de la condition à la limite sur le bord gauche On se place ici en $i = 1$ et $j \in \llbracket 2, I-1 \rrbracket$. On discrétise les équations $-\Delta u(h, y) = 1$ et $u(0, y) = 0$.

$$u_{0,j} = 0. \quad (2.114)$$

En injectant cette expression dans (2.113)

$$-\frac{1}{h^2}u_{1,j-1} + \frac{4}{h^2}u_{1,j} - \frac{1}{h^2}u_{2,j} - \frac{1}{h^2}u_{1,j+1} = 1. \quad (2.115)$$

Discrétisation de la condition à la limite sur le bord bas On se place ici en $i \in \llbracket 2, I-1 \rrbracket$ et $j = 1$. On discrétise $u(x, 0) = 0$ en

$$u_{i,0} = 0. \quad (2.116)$$

Puis en injectant dans (2.113)

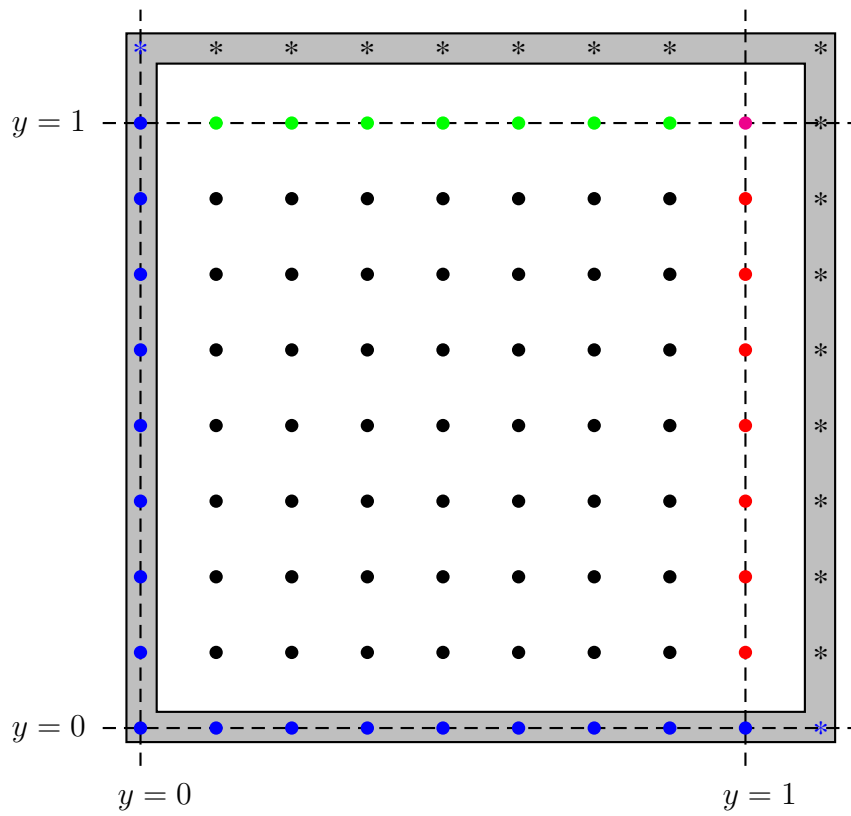
$$-\frac{1}{h^2}u_{i-1,1} + \frac{4}{h^2}u_{i,1} - \frac{1}{h^2}u_{i+1,1} - \frac{1}{h^2}u_{i,2} = 1. \quad (2.117)$$

Discrétisation de la condition à la limite sur le bord droit On est ici en $i = I$ et $j \in \llbracket 2, I-1 \rrbracket$. On discrétise la conditions à la limite $\partial_x u(1, y) = 1$.

$$\frac{1}{2h}u_{I+1,j} - \frac{1}{2h}u_{I-1,j} = 1. \quad (2.118)$$

Après élimination de $u_{I+1,j}$ dans (2.113) on a

$$-\frac{1}{h^2}u_{I,j-1} - \frac{2}{h^2}u_{I-1,j} + \frac{4}{h^2}u_{I,j} - \frac{1}{h^2}u_{I,j+1} = 1 + \frac{2}{h}. \quad (2.119)$$



- * points virtuels
- condition de Neumann et de Fourier
- condition de Fourier
- condition de Neumann
- condition de Dirichlet
- points de grille intérieurs

variables éliminées

FIGURE 2.4 – Les points de grille

Discrétisation de la condition à la limite sur le bord haut On est ici en $i \in \llbracket 2, I-1 \rrbracket$ et $j = I$. On discrétise la condition à la limite $\partial_y u(x, 1) + u(x, 1) = 0$

$$\frac{u_{i,I+1} - u_{i,I-1}}{2h} + u_{i,I} = 0. \quad (2.120)$$

On peut alors éliminer $u_{i,I+1}$

$$-\frac{2}{h^2}u_{i,I-1} - \frac{1}{h^2}u_{i-1,I} + \left(\frac{4}{h^2} + \frac{2}{h}\right)u_{i,I} - \frac{1}{h^2}u_{i+1,I} = 1. \quad (2.121)$$

Discrétisation au coin bas gauche Au voisinage du point $i = 1$ et $j = 1$, on a les conditions de Dirichlet

$$u_{0,1} = 0 \text{ et } u_{1,0} = 0. \quad (2.122)$$

En injectant dans (2.113), on a

$$\frac{4}{h^2}u_{1,1} - \frac{1}{h^2}u_{2,1} - \frac{1}{h^2}u_{1,2} = 1. \quad (2.123)$$

Discrétisation au coin bas droit On se place ici en $i = I$ et $j = 1$ où la fonction u vérifie $u(1, 0) = 0$ et $\partial_x u(1, h) = 1$

$$u_{I,0} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{u_{I+1,1} - u_{I-1,1}}{2h} = 1. \quad (2.124)$$

En injectant dans (2.113), on a

$$-\frac{2}{h^2}u_{I-1,1} + \frac{4}{h^2}u_{I,1} - \frac{1}{h^2}u_{I,2} = 1 + \frac{2}{h}. \quad (2.125)$$

Discrétisation au coin haut droit On est ici en $i = I$ et $j = I$. Nous allons discrétiser les conditions à la limite $\partial_x u(1, 1) = 1$ et $\partial_y u(1, 1) + u(1, 1) = 0$

$$\frac{u_{I+1,I} - u_{I-1,I}}{2h} = 1 \text{ et } \frac{u_{I,I+1} - u_{I,I-1}}{2h} + u_{I,I} = 0. \quad (2.126)$$

En injectant dans (2.113), on a

$$-\frac{2}{h^2}u_{I,I-1} - \frac{2}{h^2}u_{I-1,I} + \left(\frac{4}{h^2} + \frac{2}{h}\right)u_{I,I} = 1 + \frac{2}{h}. \quad (2.127)$$

Discrétisation au coin haut gauche On est ici en $i = 1$ et $j = I$. On discrétise les conditions aux limites $u(0, 1)$ et $\partial_y u(h, 1) + u(h, 1) = 0$.

$$u_{0,I} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{u_{1,I+1} - u_{1,I-1}}{2h} + u_{1,I} = 0. \quad (2.128)$$

On élimine alors $u_{0,I}$ et $u_{1,I+1}$ de (2.113)

$$-\frac{2}{h^2}u_{I,I-1} + \left(\frac{4}{h^2} + \frac{2}{h}\right)u_{I,I} - \frac{1}{h^2}u_{I+1,I} = 1 + \frac{2}{h}. \quad (2.129)$$

Construction de la matrice A et du terme source b . On pose $n = i + (j - 1)I$ et

$$u_{i,j} = U_n. \quad (2.130)$$

Nous mettons le système d'équations (2.113,2.115,2.117,2.119,2.121,2.123,2.125,2.127,2.129) sous la forme

$$AU = b \text{ avec } A \in \mathbb{R}^{N \times N}, \quad U = (U_n)_{n \in \llbracket 1, N \rrbracket}, \quad b \in \mathbb{R}^N \quad (2.131)$$

Remarquons qu'aucun n ne correspond aux rangées $i = 0$ et $j = 0$.

$$(2.113) \implies i \in \llbracket 2, I-1 \rrbracket \text{ et } j \in \llbracket 2, I-1 \rrbracket \left\{ \begin{array}{l} A_{n,n-I} = -\frac{1}{h^2}, \\ A_{n,n-1} = -\frac{1}{h^2}, \\ A_{n,n} = \frac{4}{h^2}, \\ A_{n,n+1} = -\frac{1}{h^2}, \\ A_{n,n+I} = -\frac{1}{h^2}, \\ b_n = 1. \end{array} \right. \quad (2.132)$$

$$(2.115) \implies i = 1 \text{ et } j \in \llbracket 2, I-1 \rrbracket \left\{ \begin{array}{l} A_{n,n-I} = -\frac{1}{h^2}, \\ A_{n,n} = \frac{4}{h^2}, \\ A_{n,n+1} = -\frac{1}{h^2}, \\ A_{n,n+I} = -\frac{1}{h^2}, \\ b_n = 1. \end{array} \right. \quad (2.133)$$

$$(2.117) \implies i \in \llbracket 2, I-1 \rrbracket \text{ et } j = 1 \left\{ \begin{array}{l} A_{n,n-1} = -\frac{1}{h^2}, \\ A_{n,n} = \frac{4}{h^2} + \frac{2}{h}, \\ A_{n,n+1} = -\frac{1}{h^2}, \\ A_{n,n+I} = -\frac{1}{h^2}, \\ b_n = 1. \end{array} \right. \quad (2.134)$$

$$(2.119) \implies i = I \text{ et } j \in \llbracket 2, I-1 \rrbracket \left\{ \begin{array}{l} A_{n,n-I} = -\frac{1}{h^2}, \\ A_{n,n-1} = -\frac{2}{h^2}, \\ A_{n,n} = \frac{4}{h^2}, \\ A_{n,n+I} = -\frac{1}{h^2}, \\ b_n = 1 + \frac{2}{h}. \end{array} \right. \quad (2.135)$$

$$(2.121) \implies i \in \llbracket 2, I-1 \rrbracket \text{ et } j = I \left\{ \begin{array}{l} A_{n,n-I} = -\frac{2}{h^2}, \\ A_{n,n-1} = -\frac{1}{h^2}, \\ A_{n,n} = \frac{4}{h^2} + \frac{2}{h}, \\ A_{n,n+1} = -\frac{1}{h^2}, \\ b_n = 1. \end{array} \right. \quad (2.136)$$

$$(2.123) \implies i = 1 \text{ et } j = 1 \left\{ \begin{array}{l} A_{n,n} = \frac{4}{h^2}, \\ A_{n,n+1} = -\frac{1}{h^2}, \\ A_{n,n+I} = -\frac{1}{h^2}, \\ b_n = 1. \end{array} \right. \quad (2.137)$$

$$(2.125) \implies i = I \text{ et } j = 1 \left\{ \begin{array}{l} A_{n,n-1} = -\frac{2}{h^2}, \\ A_{n,n} = \frac{4}{h^2}, \\ A_{n,n+I} = -\frac{1}{h^2}, \\ b_n = 1 + \frac{2}{h}. \end{array} \right. \quad (2.138)$$

$$(2.127) \implies i = I \text{ et } j = I \left\{ \begin{array}{l} A_{n,n-I} = -\frac{2}{h^2}, \\ A_{n,n-1} = -\frac{2}{h^2}, \\ A_{n,n} = \frac{4}{h^2} + \frac{2}{h}, \\ b_n = 1 + \frac{2}{h}. \end{array} \right. \quad (2.139)$$

$$(2.129) \implies i = 1 \text{ et } j = I \left\{ \begin{array}{l} A_{n,n-I} = -\frac{2}{h^2}, \\ A_{n,n} = \frac{4}{h^2} + \frac{2}{h}, \\ A_{n,n+1} = -\frac{1}{h^2}, \\ b_n = 1. \end{array} \right. \quad (2.140)$$

Chapitre 3

Discrétisation des problèmes aux limites d'évolution

3.1 Discrétisation de l'équation de réaction-advection-diffusion en dimension un d'espace

Nous considérons un problème posé sur le domaine

$$\{(x, t) \in [0, L] : x \in [0, L] \text{ et } t \geq 0\}. \quad (3.1)$$

qui s'écrit sous la forme

$$\begin{cases} \partial_t u(x, t) - Pu(x, t) = f(x, t) & \text{pour } x \in [0, L] \text{ et } t \geq 0 \\ L_G u = \alpha, \quad L_D u = \beta, \\ u(x, 0) = u^0(x) & \text{pour } x \in [0, L]. \end{cases} \quad (3.2)$$

avec P , L_G et L_D des opérateurs différentiels

$$\begin{cases} Pu(x) = a(x)\partial_x^2 u(x) + b(x)\partial_x u(x) + c(x)u(x), \\ L_G u = u(0, t), & \text{(condition de Dirichlet)} \\ \text{ou } \partial_x u(0, t), & \text{(condition de Neumann)} \\ \text{ou } \partial_x u(0, t) + \gamma u(0, t), & \text{(condition de Fourier)} \\ \text{ou } \partial_x u(0, t) + \gamma u(0, t) + \gamma' \partial_t u(0, t), \\ L_D u = u(L, t), & \text{(condition de Dirichlet)} \\ \text{ou } \partial_x u(L, t), & \text{(condition de Neumann)} \\ \text{ou } \partial_x u(L, t) + \delta u(L, t), & \text{(condition de Fourier)} \\ \text{ou } \partial_x u(L, t) + \delta u(L, t) + \delta' \partial_t u(L, t). \end{cases} \quad (3.3)$$

On parle d'équation principale pour la première ligne de (3.2), de conditions aux limites pour la deuxième ligne et de condition initiales pour la dernière ligne.

D'autre part, on parle de

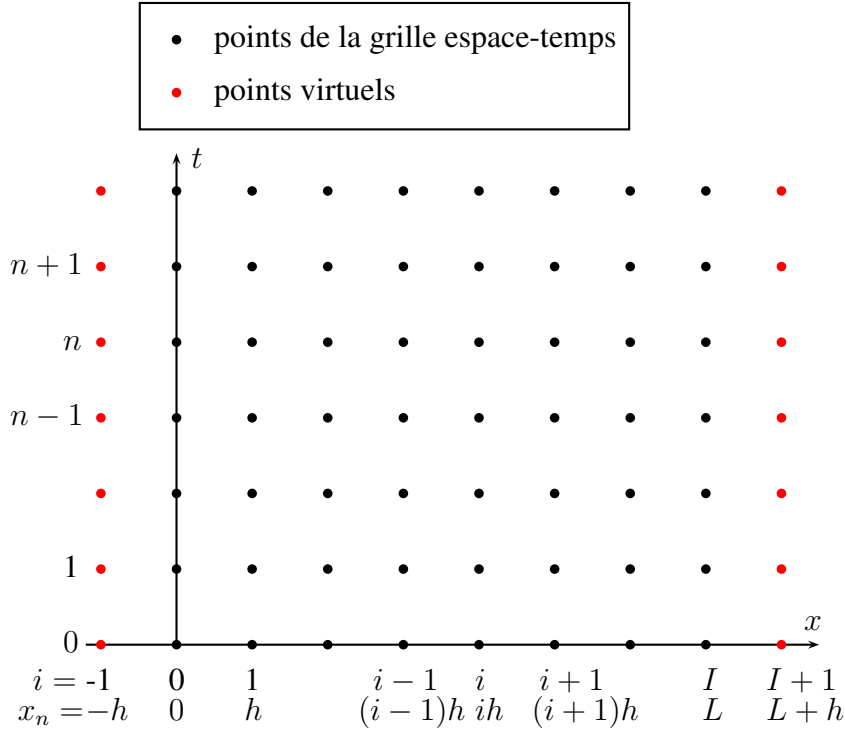


FIGURE 3.1 – grille espace-temps

- terme de diffusion pour $a(x)\partial_x^2 u(x, t)$
- terme d'advection pour $b(x)\partial_x u(x, t)$
- terme de réaction pour $c(x)u(x, t)$

Dans la suite, en chacun des points de la grille espace-temps

$$x_i = ih \text{ et } t_n = n\delta t \text{ avec } i \in \llbracket 0, I \rrbracket \text{ et } n \geq 0 \text{ avec } Ih = L, \quad (3.4)$$

nous allons définir une approximation numérique de la solution u

$$u_i^n \simeq u(x_i, t_n) \quad \text{pour } i \in \llbracket 0, I \rrbracket \text{ et } n \geq 0. \quad (3.5)$$

Les conditions aux limites contenant le terme $\partial_x u(x, t)$ seront souvent prises en compte en introduisant les points virtuels u_{-1}^n et u_{I+1}^n , voir figure 3.1

3.1.1 Semi-discrétisation en espace

Nous discrétisons nos fonction dans la variable d'espace tout en conservant le caractère continu du temps. Nous introduisons les fonctions $u_i(t)$ qui approchent $u(x_i, t)$.

$$u_i(t) \simeq u(x_i, t) \quad \text{pour tout } i \quad (3.6)$$

Les $u_i(t)$ ne seront jamais calculés en pratique mais sont des intermédiaires pour dériver les schémas numériques

Nous allons pour définir les $u_i(t)$ remplacer les dérivées partielles en espace par des différences finies qu'on choisira le plus souvent centrées. Rappelons que les différences finies centrées

sont données par

$$\begin{cases} \partial_x^2 u(x_i, t) \simeq \frac{u_{i+1}(t) - 2u_i(t) + u_{i-1}(t)}{h^2}, \\ \partial_x u(x_i, t) \simeq \frac{u_{i+1}(t) - u_{i-1}(t)}{2h}. \end{cases} \quad (3.7)$$

Exemple 1. On va illustrer la semi-discrétisation en espace sur le problème

$$\begin{cases} x \in [0, L] \text{ et } t \geq 0, \\ \partial_t u(x, t) - \partial_x^2 u(x, t) = 1, \\ u(0, t) = 0 \text{ et } \partial_x u(L, t) + u(L, t) = 0. \\ u(x, 0) = 0. \end{cases} \quad (3.8)$$

Semi-discrétisation en espace. On introduit une grille $x_i = ih$ avec $i \in \llbracket 0, I+1 \rrbracket$ et $Ih = L$ avec un point fantôme à droite afin d'approcher de manière précise $\partial_x u(L, t)$. On commence par approcher l'équation

$$\partial_t u(x_i, t) - \partial_x^2 u(x_i, t) = 1 \quad \forall i \in \llbracket 1, I \rrbracket \quad \forall t \geq 0 \quad (3.9)$$

On obtient le schéma

$$\partial_t u_i(t) - \frac{u_{i+1}(t) - 2u_i(t) + u_{i-1}(t)}{h^2} = 1 \quad \forall i \in \llbracket 1, I \rrbracket \quad \forall t \geq 0. \quad (3.10)$$

Pour la condition à la limite à gauche on a

$$u_0(t) = 0. \quad (3.11)$$

Pour la condition à la limite à droite on a

$$\frac{u_{I+1}(t) - u_{I-1}(t)}{2h} + u_I(t) = 0. \quad (3.12)$$

Exemple 2. On va illustrer la semi-discrétisation en espace sur le problème

$$\begin{cases} u : [0, \pi] \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R} \\ \partial_t u(x, t) - \partial_x^2 u(x, t) + \partial_x u(x, t) = t, \quad x \in [0, \pi], \quad t \geq 0 \\ \partial_t u(0, t) + u(0, t) = 0, \\ \partial_x u(\pi, t) = 1, \\ u(x, 0) = \sin(x), \quad \forall x \in [0, \pi]. \end{cases} \quad (3.13)$$

On introduit une grille $x_i = ih$ avec $i \in \llbracket 0, I+1 \rrbracket$ et $Ih = L$ avec un point fantôme à droite afin d'approcher de manière précise $\partial_x u(\pi, t)$. On obtient le schéma

$$\begin{cases} u'_0(t) + u_0(t) = 0, \\ u'_i(t) + \left(-\frac{1}{h^2} - \frac{1}{2h}\right)u_{i-1}(t) + \frac{2}{h^2}u_i(t) + \left(-\frac{1}{h^2} + \frac{1}{2h}\right)u_{i+1}(t) = t, \\ -\frac{1}{2h}u_{I-1}(t) + \frac{1}{2h}u_{I+1}(t) = 1. \end{cases} \quad (3.14)$$

3.1.2 Formulation éliminée

L'idée ici est de transformer le système d'équations afin de faire apparaître un problème aux données initiales en éliminant toutes les variables associées à aucune dérivée en temps. On aboutit alors à un système d'EDO couplées pouvant se mettre sous la forme d'une EDO vectorielle avec $U(t) = (u_i(t))_i$

$$\begin{cases} U'(t) + AU(t) = F(t), & \forall t \geq 0, \\ U_i(0) = u^0(x_i). \end{cases} \quad (3.15)$$

Reprenons les deux exemples précédents.

Exemple 1. Nous éliminons maintenant $u_0(t) = 0$ et $u_{I+1}(t) = u_{I-1}(t) - 2hu_I(t)$. On peut alors réécrire (3.10) sous la forme d'un système d'EDO

$$\begin{cases} u'_1(t) + \frac{2}{h^2}u_1(t) - \frac{1}{h^2}u_2(t) = 1, \\ u'_i(t) - \frac{1}{h^2}u_{i-1}(t) + \frac{2}{h^2}u_i(t) - \frac{1}{h^2}u_{i+1}(t) = 1 \quad \forall i \in \llbracket 2, I-1 \rrbracket, \\ u'_I(t) - \frac{2}{h^2}u_{I-1}(t) + \left(\frac{2}{h^2} + \frac{2}{h}\right)u_I(t) = 1. \end{cases} \quad (3.16)$$

En notant $U(t) = (u_1(t), u_2(t), \dots, u_I(t))^T$ on a

$$U'(t) + AU(t) = F(t) \quad \forall t \geq 0. \quad (3.17)$$

avec $F(t) = (1, 1, \dots, 1)^T \in \mathbb{R}^I$ et

$$A = \begin{bmatrix} \frac{2}{h^2} & -\frac{1}{h^2} & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ -\frac{1}{h^2} & \frac{2}{h^2} & -\frac{1}{h^2} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & -\frac{1}{h^2} & \frac{2}{h^2} & -\frac{1}{h^2} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & -\frac{1}{h^2} & \frac{2}{h^2} & -\frac{1}{h^2} & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -\frac{1}{h^2} & \frac{2}{h^2} & -\frac{1}{h^2} \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & -\frac{2}{h^2} & \frac{2}{h^2} + \frac{2}{h} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{I \times I} \quad (3.18)$$

Exemple 2. Nous éliminons maintenant $u_{I+1}(t) = u_{I-1}(t) + 2h$. On obtient avec $i \in \llbracket 1, I-1 \rrbracket$

$$\begin{cases} u'_0(t) + u_0(t) = 0, \\ u'_i(t) + \left(-\frac{1}{h^2} - \frac{1}{2h}\right)u_{i-1}(t) + \frac{2}{h^2}u_i(t) + \left(-\frac{1}{h^2} + \frac{1}{2h}\right)u_{i+1}(t) = t, \\ u'_I(t) - \frac{2}{h^2}u_{I-1}(t) + \frac{2}{h^2}u_I(t) = t + \frac{1}{2h} - 1, \end{cases} \quad (3.19)$$

En notant $U(t) = (u_1(t), u_2(t), \dots, u_I(t))$ on a

$$U'(t) + AU(t) = F(t) \quad \forall t \geq 0. \quad (3.20)$$

avec $F(t) = (0, t, t, \dots, t, t + \frac{1}{2h} - 1)^T \in \mathbb{R}^{I+1}$ et $A \in \mathbb{R}^{(I+1) \times (I+1)}$ donnés par

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ -\frac{1}{h^2} - \frac{1}{2h} & \frac{2}{h^2} & -\frac{1}{h^2} + \frac{1}{2h} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & -\frac{1}{h^2} - \frac{1}{2h} & \frac{2}{h^2} & -\frac{1}{h^2} + \frac{1}{2h} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & -\frac{1}{h^2} - \frac{1}{2h} & \frac{2}{h^2} & -\frac{1}{h^2} + \frac{1}{2h} & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -\frac{1}{h^2} - \frac{1}{2h} & \frac{2}{h^2} & -\frac{1}{h^2} + \frac{1}{2h} \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & -\frac{2}{h^2} & \frac{2}{h^2} \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

3.1.3 Discrétisation en temps

Afin d'aboutir au schéma utilisé en pratique, on discrétise l'EDO (3.15) à l'aide d'un schéma numérique. Pour les schémas présentés au chapitre 1, ceci s'écrit avec $F^n = F(t^n)$.

— Euler explicite.

$$U^{n+1} = U^n - \delta t A U^n + \delta t F^n \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (3.22)$$

— Euler implicite.

$$(I + \delta t A) U^{n+1} = U^n + \delta t F^{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (3.23)$$

— Trapèzes implicites. On parle aussi de schéma de Cranck-Nicholson

$$\left(I + \frac{\delta t A}{2}\right) U^{n+1} = \left(I - \frac{\delta t A}{2}\right) U^n + \delta t \frac{F^{n+1} + F^n}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (3.24)$$

3.2 Discrétisation de l'équation des ondes

L'équation des ondes scalaires s'écrit

$$\begin{cases} \text{Chercher } u : [0, L] \times \mathbb{R}^+ \text{ de classe } C^2 \text{ tel que} \\ \partial_t^2 u(x, t) - c^2 \partial_x^2 u(x, t) = 0, \quad \forall x \in [0, L] \text{ et } t \geq 0, \\ L_g u = \alpha \text{ et } L_d u = \beta, \\ u(x, 0) = u^0(x), \quad \partial_t u(x, 0) = v^0(x), \quad \forall x \in [0, L]. \end{cases} \quad (3.25)$$

avec L_G et L_D les opérateurs différentiels qui sont donnés au choix par

$$\left\{ \begin{array}{ll} L_G u = u(0, t), & \text{(condition de Dirichlet)} \\ \text{ou } \partial_x u(0, t), & \text{(condition de Neumann)} \\ \text{ou } \partial_x u(0, t) + \gamma u(0, t), & \text{(condition de Fourier)} \\ \text{ou } \partial_x u(0, t) + \gamma u(0, t) + \gamma' \partial_t u(0, t), & \\ L_D u = u(L, t), & \text{(condition de Dirichlet)} \\ \text{ou } \partial_x u(L, t), & \text{(condition de Neumann)} \\ \text{ou } \partial_x u(L, t) + \delta u(L, t), & \text{(condition de Fourier)} \\ \text{ou } \partial_x u(L, t) + \delta u(L, t) + \delta' \partial_t u(L, t). & \end{array} \right. \quad (3.26)$$

3.2.1 Semi-discrétisation en espace

Comme pour les équations de diffusion, la semi-discrétisation en espace consiste à approcher $u(x_i, t)$ par $u_i(t)$

$$u_i(t) \simeq u(x_i, t). \quad (3.27)$$

Nous approchons alors les dérivées en espace par des différences finies. Passons maintenant à un exemple.

Exemple. Nous souhaitons approcher la solution du problème

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Chercher } u : [0, L] \times \mathbb{R}^+ \text{ de classe } C^2 \text{ tel que} \\ \partial_t^2 u(x, t) - \partial_x^2 u(x, t) = f(x, t), \quad \forall x \in [0, L] \text{ et } t \geq 0, \\ \partial_x u(0, t) = 0 \text{ et } u(L, t) = 0, \\ u(x, 0) = u^0(x), \quad \partial_t u(x, 0) = v^0(x), \quad \forall x \in [0, L]. \end{array} \right. \quad (3.28)$$

Nous introduisons un point fantôme en $x = -h$ afin de prendre en compte la dérivée en $x = 0$. Nous obtenons le système d'EDO

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{h}u_{-1}(t) + \frac{1}{h}u_1(t) = 0, \quad \forall t \geq 0, \\ u_i''(t) - \frac{1}{h^2}u_{i-1}(t) + \frac{2}{h^2}u_i(t) - \frac{1}{h^2}u_{i+1}(t) = f(x, t), \quad \forall i \in [0, I-1] \text{ et } t \geq 0, \\ u_I(t) = 0, \quad \forall t \geq 0, \\ u_i(0) = u^0(x_i), \quad u_i'(0) = v^0(x_i), \quad \forall i \in [0, I]. \end{array} \right. \quad (3.29)$$

3.2.2 Formulation éliminée

Nous éliminons les inconnues de l'équation qui ne sont pas associées à des dérivées en temps. Reprenons l'exemple précédent.

$$\begin{cases} u_0''(t) + \frac{2}{h^2}u_0(t) - \frac{2}{h^2}u_1(t) = f(x_0, t), & \forall t \geq 0, \\ u_i''(t) - \frac{1}{h^2}u_{i-1}(t) + \frac{2}{h^2}u_i(t) - \frac{1}{h^2}u_{i+1}(t) = f(x_i, t), & \forall i \in [1, I-1] \text{ et } t \geq 0, \\ u_{I-1}''(t) - \frac{1}{h^2}u_{I-2}(t) + \frac{2}{h^2}u_{I-1}(t) = f(x_{I-1}, t), & \forall t \geq 0, \\ u_i(0) = u^0(x_i), \quad u_i'(0) = v^0(x_i), & \forall i \in [0, I]. \end{cases} \quad (3.30)$$

Nous introduisons le vecteur $U(t) = (u_1(t), \dots, u_{I-1}(t))$ qui vérifie

$$\begin{cases} U''(t) + AU(t) = F(t), & \forall t \geq 0, \\ U_i(0) = u^0(x_i), \\ U_i'(0) = v^0(x_i). \end{cases} \quad (3.31)$$

avec

$$A = \begin{bmatrix} \frac{2}{h^2} & -\frac{2}{h^2} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -\frac{1}{h^2} & \frac{2}{h^2} & -\frac{1}{h^2} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & -\frac{1}{h^2} & \frac{2}{h^2} & -\frac{1}{h^2} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -\frac{1}{h^2} & \frac{2}{h^2} \end{bmatrix} \quad \text{avec } F(t) = \begin{bmatrix} f(x_0, t) \\ f(x_1, t) \\ \vdots \\ f(x_{I-1}, t) \end{bmatrix}. \quad (3.32)$$

3.2.3 Schéma à un pas

Après discrétisation et élimination l'équation des ondes semi-discrétisée a la forme suivante

$$\begin{cases} U''(t) + AU(t) = F(t) & \forall t \geq 0, \\ U(0) = U^0 \\ U'(0) = V^0 \end{cases} \quad (3.33)$$

Les schémas à un pas sont basés sur la réduction d'ordre de cette EDO. Avec $V(t) = U'(t)$ on a

$$U'(t) = V(t) \quad \text{et} \quad V'(t) = F(t) - AU(t) \quad (3.34)$$

avec les conditions initiales

$$U(0) = U^0 \quad \text{et} \quad V(0) = V^0. \quad (3.35)$$

On introduit alors l'inconnue vectorielle $Y(t) = (U(t), V(t))^T$

$$Y'(t) = BY(t) + G(t) \quad (3.36)$$

avec B la matrice définie par bloc

$$B = \begin{bmatrix} 0 & Id \\ -A & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad G(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ F(t) \end{bmatrix}. \quad (3.37)$$

3.2.4 Schéma à deux pas

Le schéma à deux pas consiste à chercher une relation de récurrence reliant U^{n+1} , U^n et U^{n-1}

$$\frac{U^{n+1} - 2U^n + U^{n-1}}{\delta t^2} + AU^n = F^n \quad (3.38)$$

On obtient le schéma explicite dit saute-mouton

$$U^{n+1} = 2U^n - U^{n-1} + \delta t^2 (F^n - AU^n) \quad (3.39)$$

L'initialisation de ce schéma nécessite les valeurs de $U^0 = U(0)$ et de $U^1 \simeq U(\delta t)$. Pour définir U^1 , on utilise le développement limité de U en $t = 0$

$$\begin{aligned} U(\delta t) &\simeq U(0) + \delta t U'(0), & (\text{ordre 1}) \\ U(\delta t) &\simeq U(0) + \delta t U'(0) + \frac{(\delta t)^2}{2} U''(0). & (\text{ordre 2}). \end{aligned} \quad (3.40)$$

On obtient les initialisations d'ordre 1 et 2 (rappelons que les valeurs de $U(0)$ et $U'(0)$ sont connues)

$$\begin{aligned} U_i^0 &= u^0(x_i) \quad \text{et} \quad U^1 = U^0 + \delta t V^0, & (\text{ordre 1}) \\ U_i^0 &= u^0(x_i) \quad \text{et} \quad U_i^1 = U^0 + \delta t V^0 + \frac{(\delta t)^2}{2} (F^0 - AU^0), & (\text{ordre 2}) \end{aligned} \quad (3.41)$$

avec $V^0 = (v^0(x_i))_i$

3.3 Analyse de stabilité de Von-Neumann

3.3.1 La transformation de Fourier

On note $L^p(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions mesurables $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ qui vérifient

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^p dx < +\infty \quad (3.42)$$

On note

$$\|f\|_p = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (3.43)$$

La transformation de Fourier est définie sur $L^1(\mathbb{R})$ par

$$\widehat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp(-ikx) dx \quad (3.44)$$

La transformation de Fourier peut être prolongée en un opérateur isométrique de $L^2(\mathbb{R})$

$$\|\widehat{f}\|_2 = \|f\|_2. \quad (3.45)$$

On note τ_a l'opérateur de shift ou translation

$$(\tau_a f)(x) = f(x + a), \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (3.46)$$

L'opérateur τ_a est dans le plan Fourier un opérateur multiplicatif. La transformation de Fourier va donc nous permettre d'analyser finement

$$\left\{ \begin{aligned} \widehat{\tau_a f}(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x+a) \exp(-ikx) dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x+a) \exp(-ik(x+a)) dx \exp(ika) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp(-ik(x)) dx \exp(ika) \\ &= \exp(ika) \widehat{f}(k), \quad \forall f \in L^1(\mathbb{R}). \end{aligned} \right. \quad (3.47)$$

Par densité de $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ dans $L^2(\mathbb{R})$ on a aussi

$$\widehat{\tau_a f}(k) = \exp(ika) \widehat{f}(k). \quad (3.48)$$

3.3.2 Principe de l'analyse de Von Neumann

Cette analyse étudie la stabilité d'un schéma numérique. On considère un problème posé sur tout \mathbb{R} .

On associe au vecteur u_i^n la fonction $w^n(x)$ définie par

$$w^n(x) = u_i^n, \quad \text{pour } x \in [x_i - \frac{h}{2}, x_i + \frac{h}{2}[\quad (3.49)$$

L'étude de Von-Neumann consiste

— dans le cas d'un schéma à un pas à déterminer la relation de récurrence entre \widehat{w}^n et \widehat{w}^{n+1}

$$\widehat{w}^{n+1} = \rho(k) \widehat{w}^n \quad (3.50)$$

puis de déterminer pour quels h et δt

$$|\rho(k)| \leq 1 \quad \forall k \in \mathbb{R}. \quad (3.51)$$

— dans le cas d'un schéma à deux pas à déterminer la relation de récurrence entre \widehat{w}^{n-1} , \widehat{w}^n et \widehat{w}^{n+1}

$$\widehat{w}^{n+1} + a(k) \widehat{w}^n + b(k) \widehat{w}^{n-1} = 0. \quad (3.52)$$

puis de calculer pour quels h et δt

$$|\rho_1(k)| \leq 1 \quad \text{et} \quad |\rho_2(k)| \leq 1 \quad \forall k \in \mathbb{R} \quad (3.53)$$

avec $\rho_1(k)$ et $\rho_2(k)$ les deux racines de

$$\rho^2 + a(k)\rho + b(k) = 0. \quad (3.54)$$

3.3.3 Discrétisation de l'équation de diffusion par le schéma d'Euler explicite

La discrétisation de l'équation de diffusion

$$\partial_t u(x, t) - c \partial_x^2 u(x, t) = 0 \quad (3.55)$$

est basée sur une différence finie centrée en espace et un schéma d'Euler explicite en temps qui prend la forme suivante

$$u_i^{n+1} = u_i^n + c \frac{\delta t}{h^2} (u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n) \quad (3.56)$$

Ceci s'écrit à l'aide des fonctions w^n et w^{n+1} sous la forme

$$w^{n+1} = w^n + c \frac{\delta t}{h^2} (\tau_h w^n - 2w^n + \tau_{-h} w^n) \quad (3.57)$$

En appliquant la transformation de Fourier on obtient

$$\widehat{w}^{n+1} = \left(1 + c \frac{\delta t}{h^2} (\exp(ikh) - 2 + \exp(-ikh)) \right) \widehat{w}^n \quad (3.58)$$

Nous avons obtenu $\rho(k)$ qui vaut

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho(k) = 1 + c \frac{\delta t}{h^2} (\exp(ikh) - 2 + \exp(-ikh)) \\ \quad = 1 + c \frac{\delta t}{h^2} (2 \cos(kh) - 2) \\ \quad = 1 - 4 \frac{c \delta t}{h^2} \sin^2\left(\frac{kh}{2}\right) \end{array} \right. \quad (3.59)$$

Comme $\sin^2(\frac{kh}{2})$ est inférieur à 1 et atteint 1, la condition de stabilité au sens de Von Neumann s'écrit

$$1 - 4 \frac{c \delta t}{h^2} \geq -1, \quad (3.60)$$

c'est à dire

$$\frac{c \delta t}{h^2} \leq \frac{1}{2}. \quad (3.61)$$

C'est une condition très contraignante. En effet le pas de temps doit forcément être plus petit que le carré du pas d'espace.

3.3.4 Application à l'équation de diffusion discrétisé par le schéma d'Euler implicite

Reprenons la discrétisation de (3.55) par un schéma d'Euler implicite qui s'écrit

$$u_i^{n+1} - c \frac{\delta t}{h^2} (u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}) = u_i^n. \quad (3.62)$$

Ceci s'écrit à l'aide des fonctions w^n et w^{n+1} sous la forme

$$w^{n+1} - c \frac{\delta t}{h^2} (\tau_h w^{n+1} - 2w^{n+1} + \tau_{-h} w^{n+1}) = w^n \quad (3.63)$$

En appliquant la transformation de Fourier on obtient

$$\left(1 - c \frac{\delta t}{h^2} \left(\exp(ikh) - 2 + \exp(-ikh) \right) \right) \widehat{w}^{n+1} = \widehat{w}^n \quad (3.64)$$

Nous avons obtenu $\rho(k)$ qui vaut

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\rho(k)} = 1 - c \frac{\delta t}{h^2} \left(\exp(ikh) - 2 + \exp(-ikh) \right) \\ = 1 - c \frac{\delta t}{h^2} \left(2 \cos(kh) - 2 \right) \\ = 1 + 4 \frac{c \delta t}{h^2} \sin^2\left(\frac{kh}{2}\right) \end{array} \right. \quad (3.65)$$

Comme $\sin^2(\frac{kh}{2})$ est positif $\rho(k)$ est inférieur à 1 pour tout k . Le schéma est donc inconditionnellement stable au sens de Von-Neumann.

3.3.5 Application à l'équation des ondes (schéma saute-mouton)

On discrétise l'équation des ondes homogènes

$$\partial_t^2 u(x, t) - c^2 \partial_x^2 u(x, t) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (3.66)$$

par des différences finies à 3 points en espace et en temps

$$\frac{u_i^{n+1} - 2u_i^n + u_i^{n-1}}{(\delta t)^2} - c^2 \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{h^2} = 0 \quad (3.67)$$

Ceci s'écrit à l'aide des fonctions w^{n+1} , w^n et w^{n-1}

$$\frac{w^{n+1} - 2w^n + w^{n-1}}{(\delta t)^2} - c^2 \frac{\tau_h u^n - 2u_i^n + \tau_- h w^n}{h^2} = 0 \quad (3.68)$$

$$\widehat{w}^{n+1} - \left(2 + c^2 \frac{\delta t^2}{h^2} \left(\exp(ikh) - 2 + \exp(-ikh) \right) \right) \widehat{w}^n + \widehat{w}^{n-1} = 0 \quad (3.69)$$

On a donc la suite de Fibonacci

$$\widehat{w}^{n+1} - \left(2 - 4c^2 \frac{\delta t^2}{h^2} \sin^2\left(\frac{kh}{2}\right) \right) \widehat{w}^n + \widehat{w}^{n-1} = 0 \quad (3.70)$$

dont le polynôme caractéristique est donné par

$$\rho^2 - \left(2 - 4c^2 \frac{\delta t^2}{h^2} \sin^2\left(\frac{kh}{2}\right) \right) \rho + 1 = 0 \quad (3.71)$$

Sachant que le produit de ρ_1 et ρ_2 vaut 1. Afin qu'elles soient toutes deux inférieures à 1 en module il faut et suffit que le discriminant de ce polynôme soit négatif

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta = \left(2 - 4c^2 \frac{\delta t^2}{h^2} \sin^2\left(\frac{kh}{2}\right) \right)^2 - 4 \\ = -4c^2 \frac{\delta t^2}{h^2} \sin^2\left(\frac{kh}{2}\right) \left(4 - 4c^2 \frac{\delta t^2}{h^2} \sin^2\left(\frac{kh}{2}\right) \right) \end{array} \right. \quad (3.72)$$

Le discriminant est donc négatif ssi

$$4c^2 \frac{\delta t^2}{h^2} \sin^2\left(\frac{kh}{2}\right) \leq 4 \quad (3.73)$$

Comme $\sin^2(\frac{kh}{2})$ est inférieur à 1 et atteint 1, la condition de stabilité au sens de Von Neumann s'écrit donc

$$c^2 \frac{\delta t^2}{h^2} \leq 1 \quad \text{ou encore} \quad c \frac{\delta t}{h} \leq 1. \quad (3.74)$$

Traditionnellement, on parle de condition CFL (Courant-Friedrichs-Lewy). Cette condition est beaucoup moins contraignante que la condition de stabilité pour le schéma explicite et le problème de diffusion. C'est pourquoi les schémas saute-mouton sera très souvent utilisé en pratique.

3.3.6 Application à l'équation des ondes discrétisées par une méthode des trapèzes implicites

On discrétise l'équation des ondes

$$\partial_t^2 u(x, t) - \partial_x^2 u(x, t) = 0 \quad (3.75)$$

à l'aide d'un schéma à trois pas en espace

$$\partial_t^2 u(i)(t) - \frac{u_{i+1}(t) - 2u_i(t) + u_{i-1}(t)}{h^2} = 0 \quad (3.76)$$

et après réduction d'ordre

$$\begin{cases} \partial_t u_i(t) = v_i(t) \\ \partial_t v_i(t) = \frac{u_{i+1}(t) - 2u_i(t) + u_{i-1}(t)}{h^2} \end{cases} \quad (3.77)$$

d'une méthode des trapèzes implicite en temps

$$\begin{cases} \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\delta t} = \frac{v_i^n + v_i^{n+1}}{2} \\ \frac{v_i^{n+1} - v_i^n}{\delta t} = \frac{u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}}{2h^2} + \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{2h^2} \end{cases} \quad (3.78)$$

On applique alors la transformation de Fourier et on obtient

$$\begin{cases} \frac{\hat{u}^{n+1} - \hat{u}^n}{\delta t} = \frac{\hat{v}^n + \hat{v}^{n+1}}{2} \\ \frac{\hat{v}^{n+1} - \hat{v}^n}{\delta t} = \frac{\exp(ikh) - 2 + \exp(-ikh)}{h^2} \left(\frac{\hat{u}^{n+1} + \hat{u}^n}{2} \right). \end{cases} \quad (3.79)$$

Rappelons que

$$\begin{cases} \exp(ikh) - 2 + \exp(-ikh) = \left(\exp\left(\frac{ikh}{2}\right) - \exp\left(-\frac{ikh}{2}\right) \right)^2 \\ = (2i)^2 \left(\frac{\exp(\frac{ikh}{2}) - \exp(-\frac{ikh}{2})}{2i} \right)^2 \\ = -4 \sin^2\left(\frac{kh}{2}\right) \end{cases} \quad (3.80)$$

On a donc les relations

$$\begin{cases} \widehat{u}^{n+1} - \frac{\delta t}{2} \widehat{v}^{n+1} &= \widehat{u}^n + \frac{\delta t}{2} \widehat{v}^n, \\ \frac{2\delta t \sin^2(\frac{kh}{2})}{h^2} \widehat{u}^{n+1} + \widehat{v}^{n+1} &= -\frac{2\delta t \sin^2(\frac{kh}{2})}{h^2} \widehat{u}^n + \widehat{v}^n \end{cases} \quad (3.81)$$

Il suit

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{\delta t}{2} \\ \frac{2\delta t \sin^2(\frac{kh}{2})}{h^2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widehat{u}^{n+1} \\ \widehat{v}^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{\delta t}{2} \\ -\frac{2\delta t \sin^2(\frac{kh}{2})}{h^2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widehat{u}^n \\ \widehat{v}^n \end{bmatrix}. \quad (3.82)$$

En inversant la matrice à gauche, on a

$$\begin{bmatrix} \widehat{u}^{n+1} \\ \widehat{v}^{n+1} \end{bmatrix} = \frac{\begin{bmatrix} 1 & \frac{\delta t}{2} \\ -\frac{2\delta t \sin^2(\frac{kh}{2})}{h^2} & 1 \end{bmatrix}^2}{1 + \frac{\delta t^2 \sin^2(\frac{kh}{2})}{h^2}} \begin{bmatrix} \widehat{u}^n \\ \widehat{v}^n \end{bmatrix}. \quad (3.83)$$

L'étude de stabilité de Von-Neumann revient à déterminer les s valeurs propres de la matrice

$$\frac{\begin{bmatrix} 1 & \frac{\delta t}{2} \\ -\frac{2\delta t \sin^2(\frac{kh}{2})}{h^2} & 1 \end{bmatrix}^2}{1 + \frac{\delta t^2 \sin^2(\frac{kh}{2})}{h^2}} \quad (3.84)$$

sont inférieures à 1. Son polynôme caractéristique est donné par

$$\left(\lambda - \frac{1}{1 + \frac{\delta t^2 \sin^2(\frac{kh}{2})}{h^2}} \right)^2 + \frac{\frac{\delta t^2 \sin^2(\frac{kh}{2})}{h^2}}{1 + \frac{\delta t^2 \sin^2(\frac{kh}{2})}{h^2}} \quad (3.85)$$

Ses racines sont des complexes conjugués de module 1. Le schéma est donc inconditionnellement stable.