

Chapitre 2 : Présentation des problèmes traités et quelques idées sur quelques méthodes

1. Généralités
2. EDP's traités en cours
3. Illustration de quelques méthodes

1. Généralités

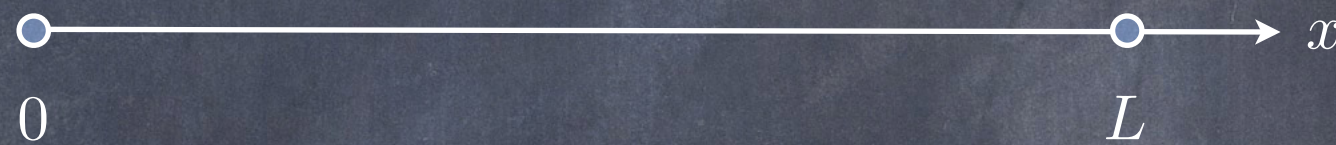
1.1 Temps et espace

Dans ce cours à recherche à résoudre des problèmes qui dépendent de l'espace et du temps. Le temps t s'écoulera le plus souvent dans le sens physique. On peut traiter des problèmes à un et deux ou plusieurs dimensions d'espace, dans des domaines \mathcal{D} ouverts ou fermés.

Quelques exemples de domaines beaucoup utilisés dans ce cours :

Segment 1D

$$\mathcal{D} : x \in [0, L]$$



Rectangle 2D

$$\mathcal{D} : x \in [0, L_x]$$

$$y \in [0, L_y]$$



Chaque domaine à un bord, noté $\delta\mathcal{D}$ qui se situe à l'infinie pour des domaines ouverts.
On notera \vec{n} la normale unitaire sortante du bord d'un domaine fermé

Quelques exemples, beaucoup utilisés en cours :

Segment 1D

δD : 2 points

Gauche : $x = 0$

Droite : $x = L$



Rectangle 2D

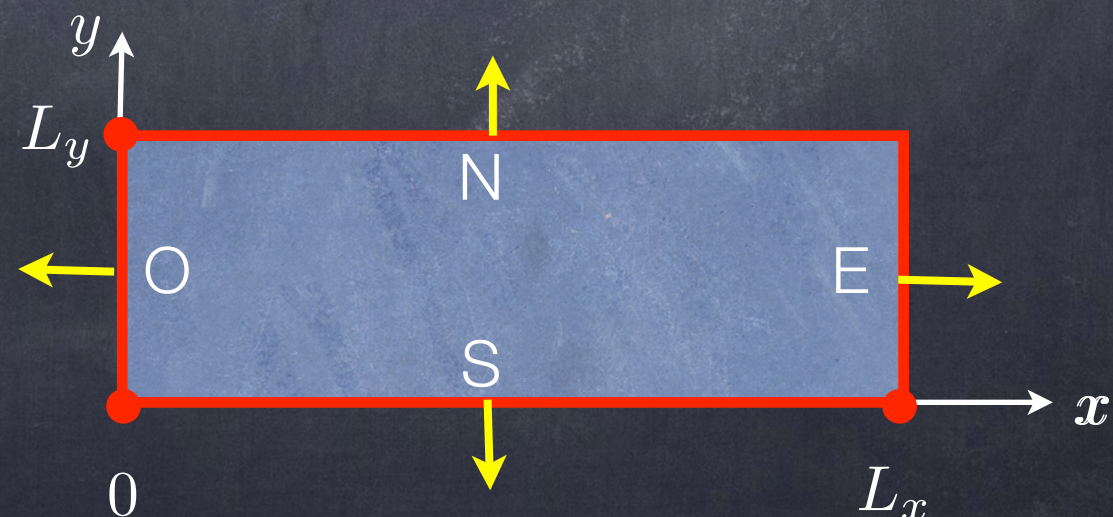
δD : Union de 4 segments

Sud : $(x, 0)$, $\forall x \in [0, L_x]$

Nord : (x, L_y) , $\forall x \in [0, L_x]$

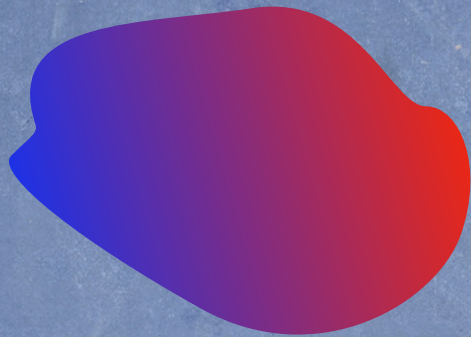
Ouest : $(0, y)$, $\forall y \in [0, L_y]$

Est : (L_x, y) , $\forall y \in [0, L_y]$



1.2 Grandeurs physiques représentées par des champs continus

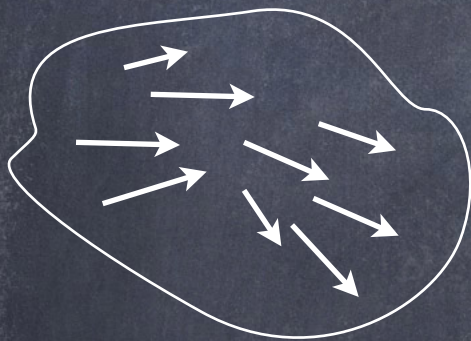
focus ici



Un champ scalaire f associe à chaque endroit de l'espace et pour tout temps un nombre, un scalaire

$$(t, \vec{x}) \mapsto f(t, \vec{x})$$

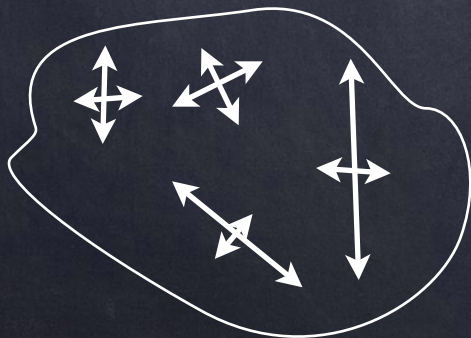
exemples : température T
concentration C
fonction d'onde Ψ



Un champ vectoriel \vec{f} associe à chaque endroit de l'espace et pour tout temps un vecteur

$$(t, \vec{x}) \mapsto \vec{f}(t, \vec{x})$$

exemples : vitesse \vec{u}
champ électrique \vec{E}



Un champ tensoriel $\vec{\vec{f}}$ associe à chaque endroit de l'espace et pour tout temps un tenseur

$$(t, \vec{x}) \mapsto \vec{\vec{f}}(t, \vec{x})$$

exemples : déformation $\vec{\vec{\epsilon}}$
contrainte $\vec{\vec{\sigma}}$

1.3 Equations d'évolution à l'intérieur du domaine

$$\forall \vec{x} \in \mathcal{D}$$

La physique/mécanique nous donne les équations d'évolution de ces grandeurs physiques. Quelques exemples

Electro Mag : $\nabla^2 \Phi = -\frac{\rho_e}{\epsilon}$ potentiel électrique autour d'une densité de charge

Thermique : $\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{\rho C_p} \nabla^2 T + Q$ équation de diffusion pour la température

Méca fluide : $\rho \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \vec{u} \right) = -\nabla P + \eta \nabla^2 \vec{u} + \vec{f}$ équation de Navier-Stokes pour le champ de vitesse et pression + la conservation de masse
 $\nabla \cdot \vec{u} = 0$

Mécanique Q : $i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi + V(\vec{x}, t) \Psi$ équation de Schrödinger pour la fonction d'onde

Le plus souvent, il s'agit d'équations différentielles partielles (EDP)

Très souvent elles font apparaître des opérateurs différentiels tels que gradient, divergence, laplacien, rotationnel. Dans ce cours, on aura besoin du

Gradient $\vec{\nabla} f$

Le gradient d'un champ scalaire f est défini par la relation

$$df = \vec{\nabla} f \cdot d\vec{r}$$

Spécifiant un système de coordonnées on identifie toujours l'expression du gradient.

coordonnées cartésiennes :
$$\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{e}_z$$

Laplacien $\Delta f = \nabla^2 f$

Le Laplacien d'un champ scalaire f est défini par la divergence du gradient de f .

On peut le calculer dans tout système de coordonnées

coordonnées cartésiennes :
$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

1.4 Conditions aux limites sur le bord du domaine $\forall \vec{x} \in \delta \mathcal{D}$

Sur les bords d'un domaine, on doit appliquer des conditions aux limites ou des conditions de régularité. On les notera CL et on les imagine comme

$$CL : f(t, \vec{x}) = F_{bord}(t, \vec{x})$$

$$\underline{\vec{n}} \cdot \nabla f(t, \vec{x}) = G_{bord}(t, \vec{x}) \quad \forall t \in I_t \quad \forall \vec{x} \in \underline{\delta D}$$

...

On exprime donc des relations qui ne s'appliquent que sur le bord du domaine ou dans les singularités des systèmes de coordonnées.

Le nombre de conditions à donner dépend de la forme du bord et de l'ordre des dérivées spatiales dans l'EDP. Dans ce cours on utilisera trois types de conditions aux limites

DIRICHLET : on fixe la valeur de la fonction sur le bord

NEUMAN : on fixe la valeur de la dérivée normale de f sur le bord

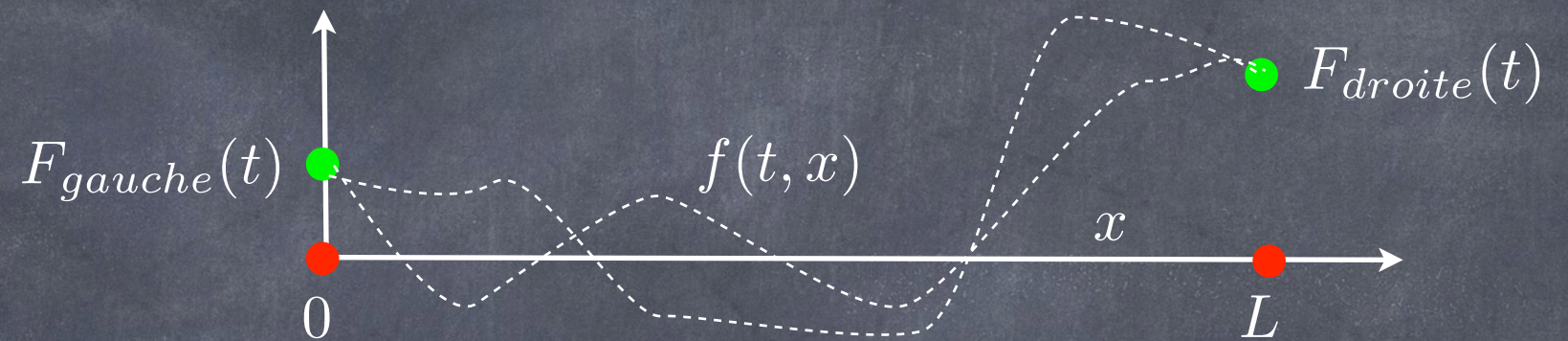
MIXTE (ROBIN) : on fixe une combinaison linéaire de la fonction et de sa dérivée normale

Exemple pour un domaine = segment 1D

CL DIRICHLET

$$\underline{f(t, \vec{x}) = F_{bord}(t, \vec{x})}$$

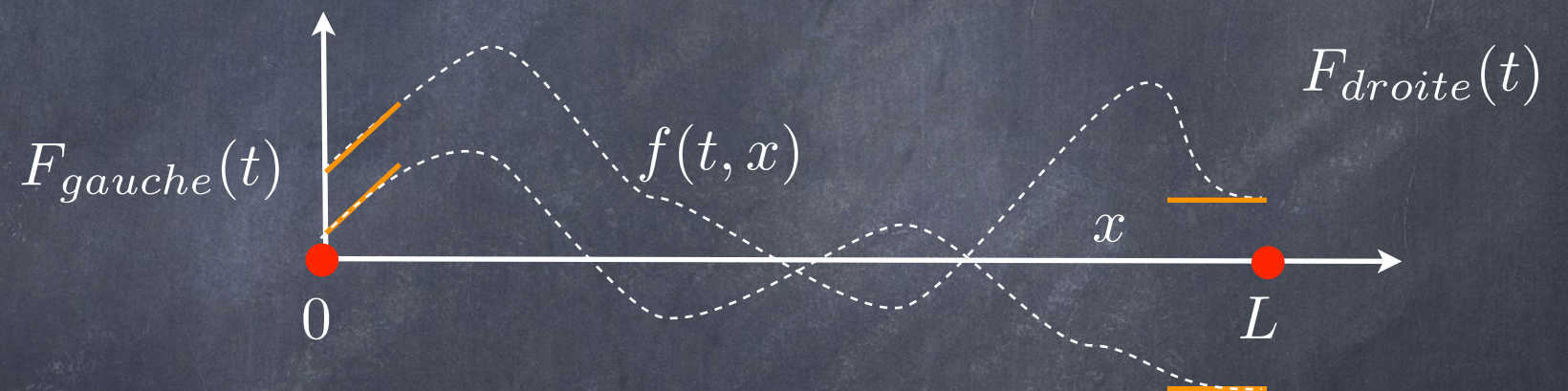
$$\forall t \in I_t \quad \forall \vec{x} \in \delta D$$



CL NEUMAN

$$\underline{\vec{n} \cdot \nabla f(t, \vec{x}) = G_{bord}(t, \vec{x})}$$

$$\forall t \in I_t \quad \forall \vec{x} \in \delta D$$



CL MIXTE

$$\alpha(t, \vec{x}) f(t, \vec{x}) + \beta(t, \vec{x}) \vec{n} \cdot \nabla f(t, \vec{x}) = H_{bord}(t, \vec{x})$$

$$\forall t \in I_t \quad \forall \vec{x} \in \delta D$$

graphe
difficile

1.5 Conditions initiales $\forall \vec{x} \in \mathcal{D}$

Si le problème dépend du temps, on fera souvent évoluer un système à partir d'une ou plusieurs conditions initiales (CI). Il s'agit de relations qui fixent la valeur du champ et des $p-1$ premières dérivées temporelles à tout endroit du domaine

$$CI : f(0, \vec{x}) = f_0(\vec{x}) \quad \forall \vec{x} \in \mathcal{D}$$

$$\frac{\partial f}{\partial t}(0, \vec{x}) = g_0(\vec{x}) \quad \forall \vec{x} \in \mathcal{D}$$

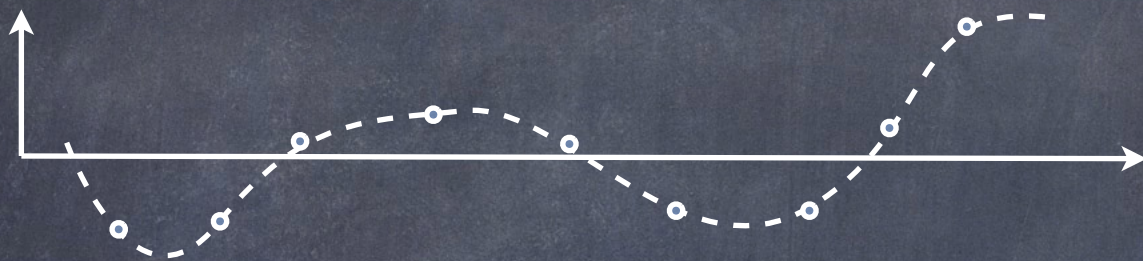
...

Ici p , le nombre de CI's = l'ordre de la plus haute dérivée temporelle présente dans l'EDP.

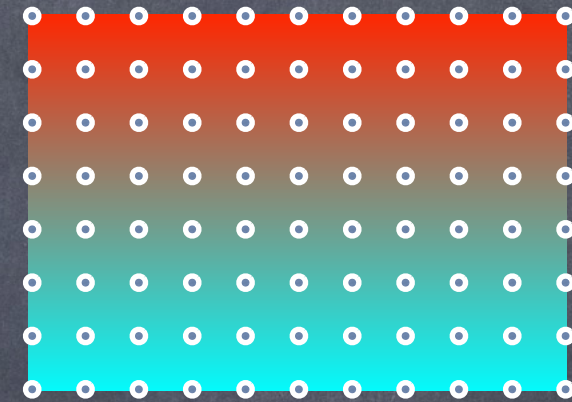
2. Quelques idées sur quelques méthodes

2.1 Méthode des différences finies

Les fonctions continues sont remplacées par des valeurs nodales :



$$f(x) \rightarrow f(x_i) = f_i$$



$$f(x, y) \rightarrow f(x_i, y_j) = f_{ij}$$

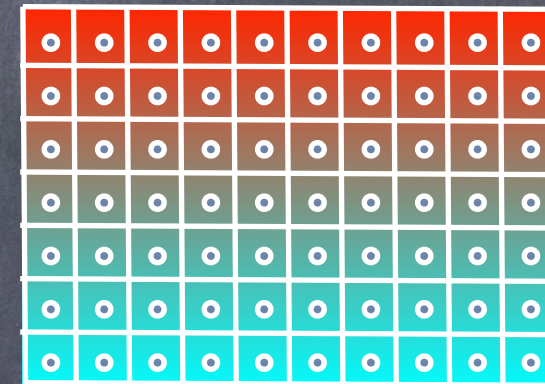
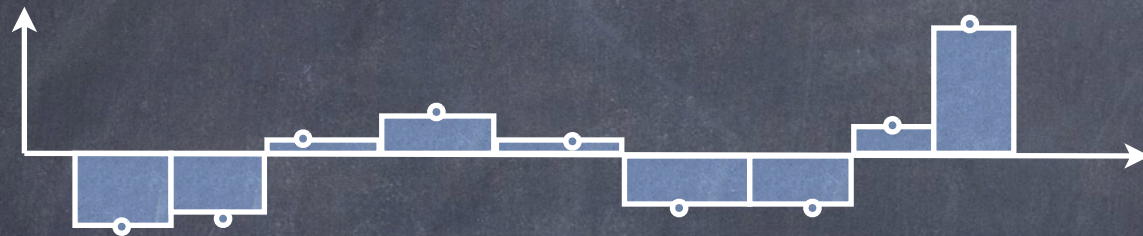
A partir des EDP et des conditions aux limites, on écrira N équations algébriques, un pour chaque point. On approchera les dérivées par des différences finies (voir chapitre 1), ce qui mettra en relation les valeurs de points voisins.

Avantage : la méthode la plus simple.

Désavantage : qu'est-ce qui se passe entre les points ??
précision ?

2.2 Méthode des volumes finies

La fonction continue est approchée par une fonction constante par morceau = constant par cellule.



$$f(x) \rightarrow f_i, \quad x \in [x_i, x_{i+1}]$$

$$f(x, y) \rightarrow f_{ij}, \quad x \in [x_i, x_{i+1}], \quad y \in [y_i, y_{i+1}]$$

A partir des EDP, on écrira N équations algébriques qui mettent en relation les N cellules. La philosophie = 1 équation par cellule. On n'utilise pas de formules différences finies, mais ça ressemble beaucoup.

Avantage : pas trop dur non plus et conservatif

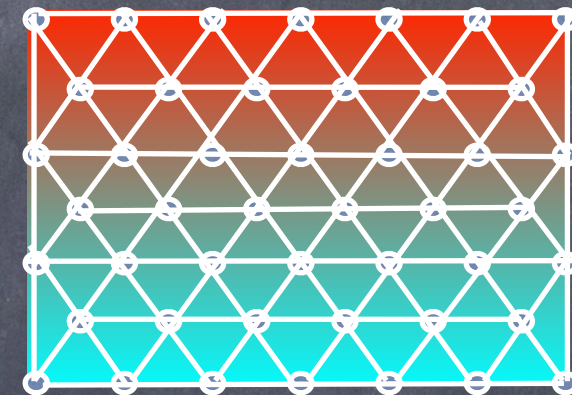
Désavantage : précision améliorable

2.3 Méthode des éléments finies

Les fonctions continues sont remplacées par des fonctions polynomiales par morceau



$$f(x) \rightarrow f_i \Phi_i(x)$$



$$f(x, y) \rightarrow f_{ij} \Phi_{ij}(x, y)$$

Élément = zone où on utilise une même fonction de forme

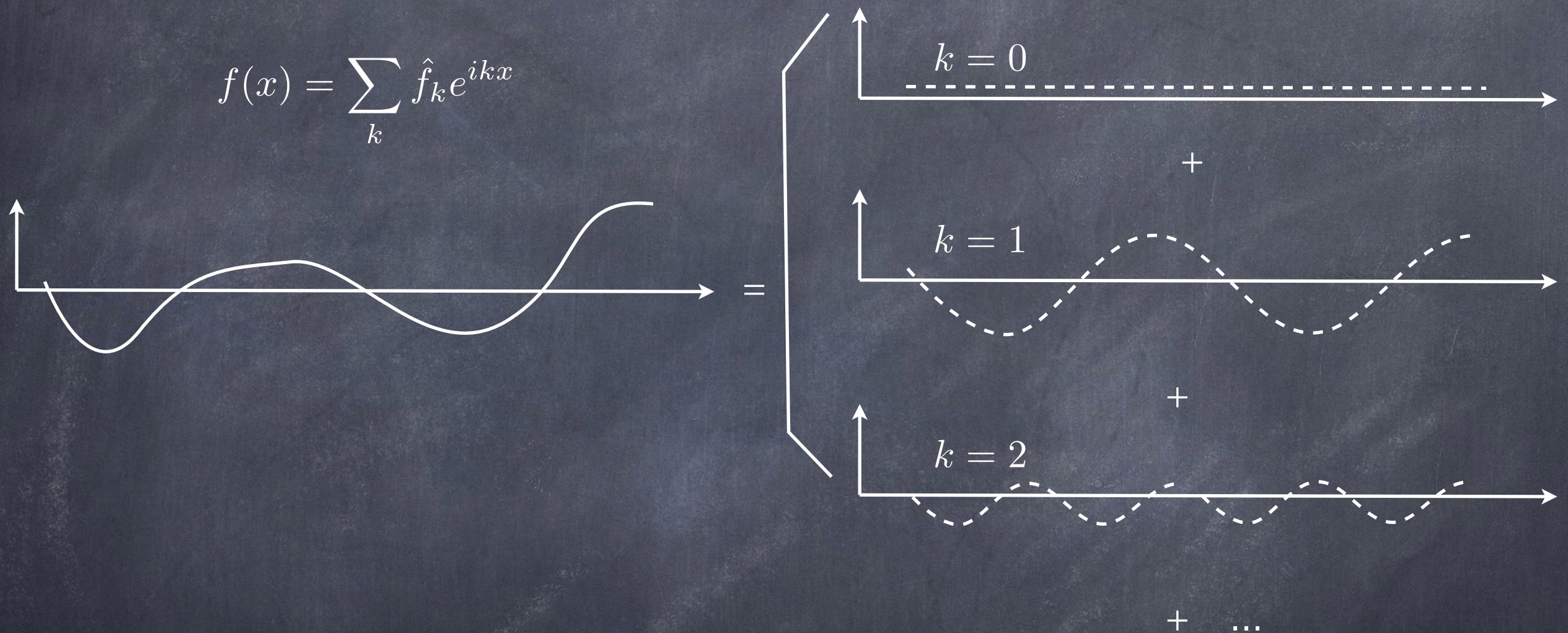
A partir des EDP on écrira N équations algébriques, qui mettent en relation les fonctions de forme qui existent dans chacun des N éléments.

Avantage : plus précis

Désavantage : + complexe

2.4 Méthodes spectrales

On décompose la fonction sur une base de N fonctions (par exemple Fourier) qui existent dans tout le domaine d'étude et pas seulement sur une portion.



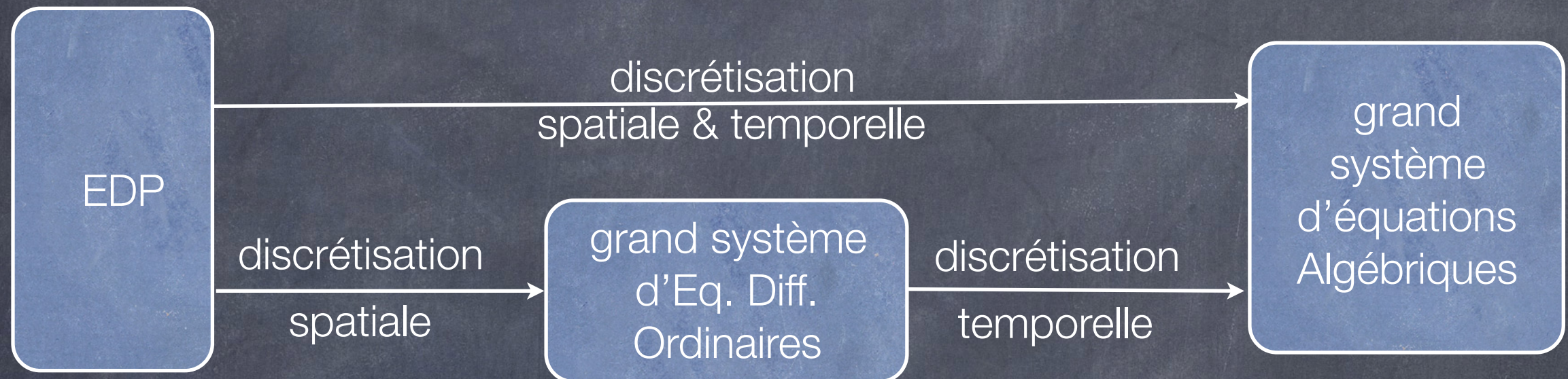
A partir de l'EDP, et utilisant l'orthogonalité des fonctions de base, on trouvera N équations pour les N coefficients d'expansion

Avantage : très précis

Désavantage : + complexe, limité dans le choix du domaine

2.5 Ce qu'ont les méthodes en commun

Quel que soit la méthode utilisée, on aura toujours le schéma suivant



= la “discrétisation” du problème continu

Un ordinateur ne sait pas résoudre directement une EDP. Il faut, par un processus de discrétisation, par une “méthode numérique”, écrire le problème comme un système d'équations algébriques

Les solutions sont obtenues en résolvant des grands systèmes linéaires d'équations algébriques, une seule fois pour un problème stationnaire, un grand nombre de fois pour un problème instationnaire = SIMULATION NUMERIQUE