Linear Regression

By Dr. Nzamba Bignoumba

$y = -ax + b$

Average training duration: 4 hours 00 minute

Outline

Machine learning overview	→	15 min
Linear regression: theory	→	45 min
Linear regression: use case	→	01.30 h
Model deployment	→	01.30 h

Machine learning overview

IA

Que pouvons nous faire avec ?

Natural Language Processing
Computer Vision
Signal Processing
⋮

Machine learning overview

Synthèse du contenu d'un ou plusieurs documents
Traduction d'une langue à une autre
Génération du code
⋮

OpenAI-ChatGPT
DeepSeek
GitHub Copilot
Cursor | Codex

Natural Language Processing
Computer Vision
Signal Processing
⋮

Génération d'images & d'illustrations
Classification d'images médicales
Classification d'images agricoles
Génération de vidéos
⋮

Midjourney
Canva
Aidoc
IA Agri
AgriHyphen AI

Prévisions météorologiques
Prévisions de maladies et de mortalité
Prévisions boursières
Prévisions de consommation d'électricité
Détection d'anomalies (cybersécurité)
⋮

AWS SageMaker – DeepAR
Nixtla-TimeGPT
Meta-Prophet
Zindi Africa
Amini

Machine learning overview

IA

Que pouvons nous faire avec ?

Natural Language Processing
Computer Vision
Signal Processing
⋮

Avec quels types d'algorithmes?

Machine Learning

Deep Learning

Machine learning overview

K-NN

Logistic Regression

K-Means

Support Vector Machines

Decision Trees

Gradient Boosting Machines

Random Forest

Linear Regression

Principal Component Analysis

...

Machine Learning

Deep Learning

Generative Adversarial Neural Network

Varational Autoencoder

Feed Forward Neural Network

State Space Model

Word Embeddings

Autoencoder

Graph Neural Network

Neural Ordinary Differential Equations

Diffusion Model

Neural Radiance Field

Recurrent Neural Network

Normalizing Flows

Transformer

...

Machine learning overview

IA

Que pouvons nous faire avec ?

Natural Language Processing Computer Vision Signal Processing
⋮

Avec quels types d'algorithmes?

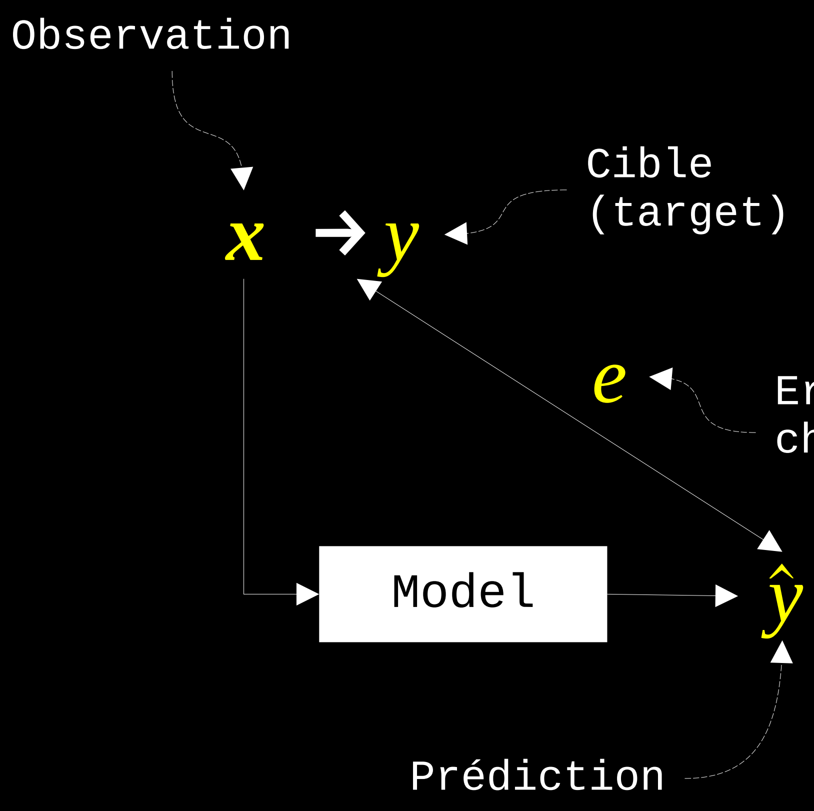
Machine Learning

Deep Learning

Comment fonctionnent-ils ?

Supervised
Non-Supervised
Semi-Supervised

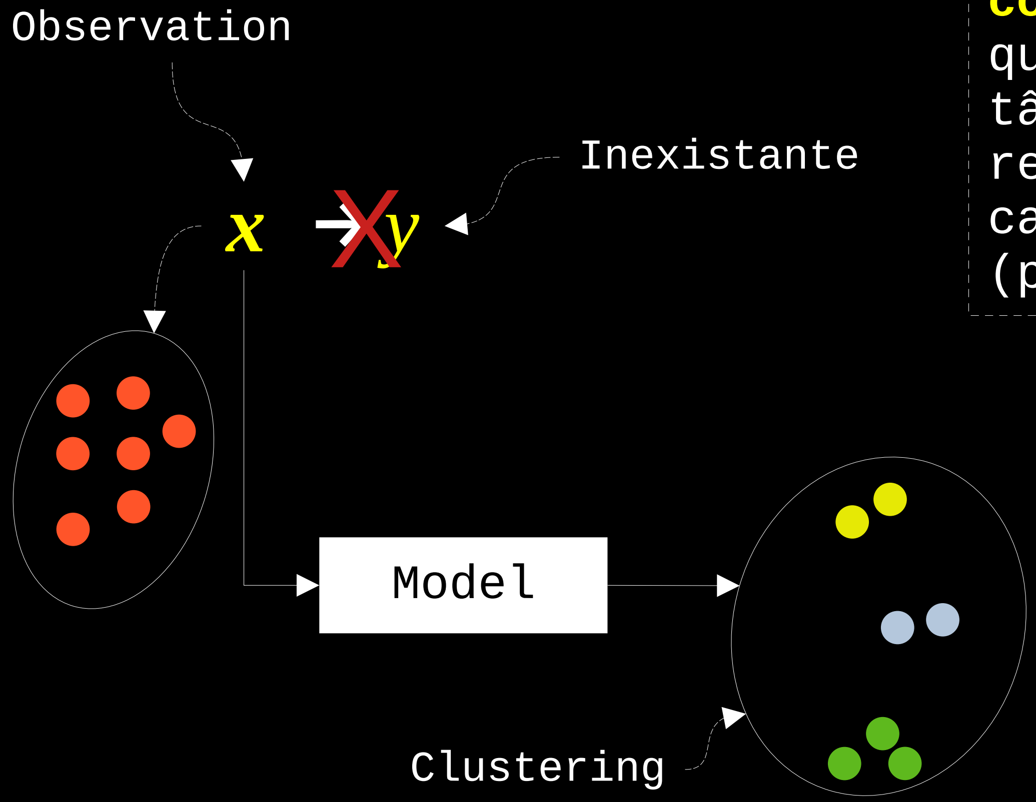
Machine learning overview



Nous disposons des données **Xs** et des des cibles correspondantes **ys**. Le modèle utilisera **X** pour prédire une valeur **ŷ**, **modèle(X)=ŷ**. **ŷ** sera ensuite comparée à **y** pour calculer l’erreur **e** faite par le modèle, **|y-ŷ|=e**. Cette erreur servira à **ajuster les paramètres** du modèle afin qu'il puisse prédire une valeur **ŷ** très proche de **y**.

- Supervised
- Non-Supervised
- Semi-Supervised

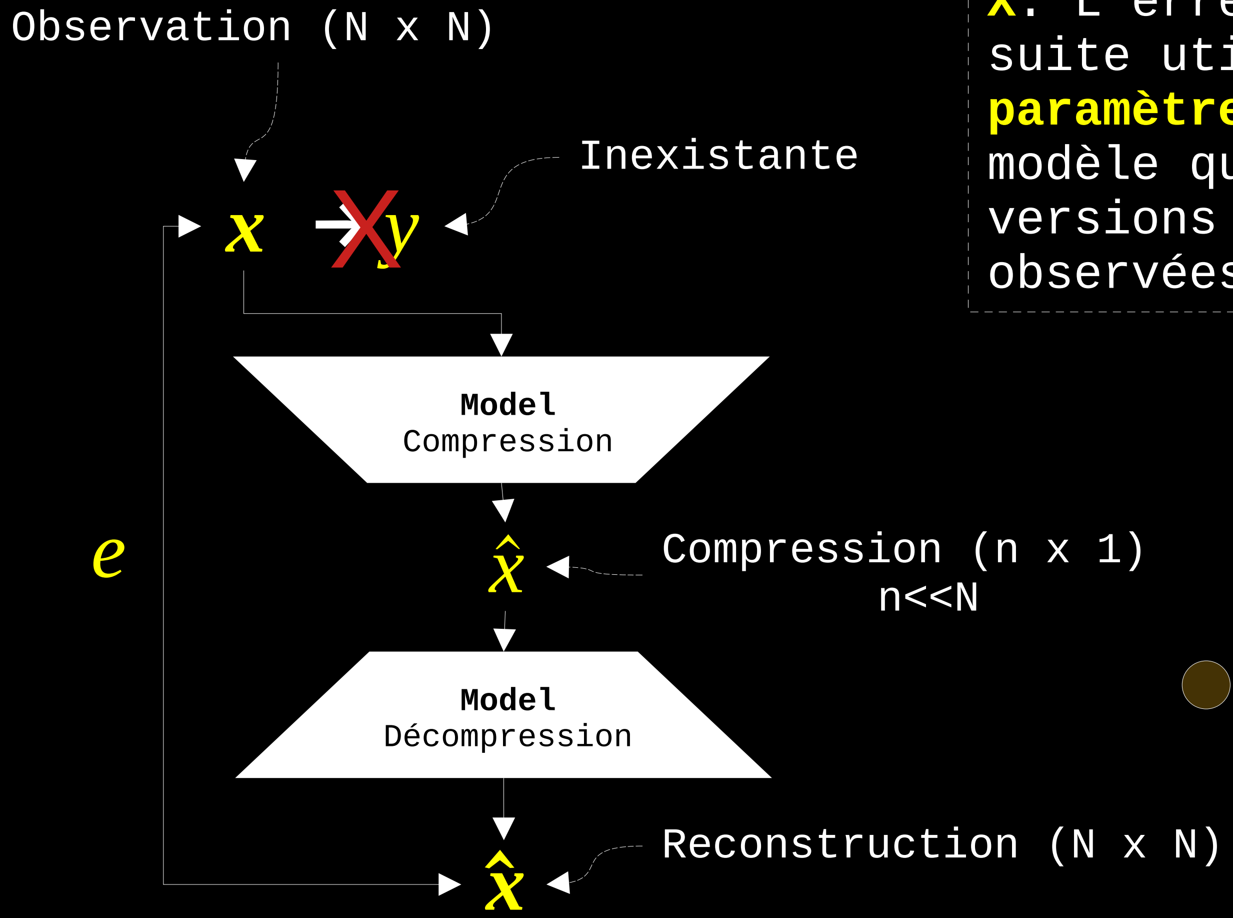
Machine learning overview



Nous ne disposons que des données **Xs**. Aucune cible **y** correspondante n'est disponible. Le modèle exploitera les **similarités** des données et leur **cooccurrence** pour effectuer la tâche qui lui est assignée. Par exemple, la tâche de clustering, qui consiste à regrouper des données présentant des caractéristiques similaires (patterns).

Supervised
Non-Supervised
Semi-Supervised

Machine learning overview



Nous ne disposons que des données **Xs**. Le modèle prend une observation **X** en entréé, **model(X)=X̂,** et compare sa prédiction **X̂** à cette même obervation **X**. L'erreur **|X-X̂|=e**, sera par la suite utilisée pour **ajuster les paramètres** du modèle. Exemple : un modèle qui apprend à créer des versions compressée des données observées.

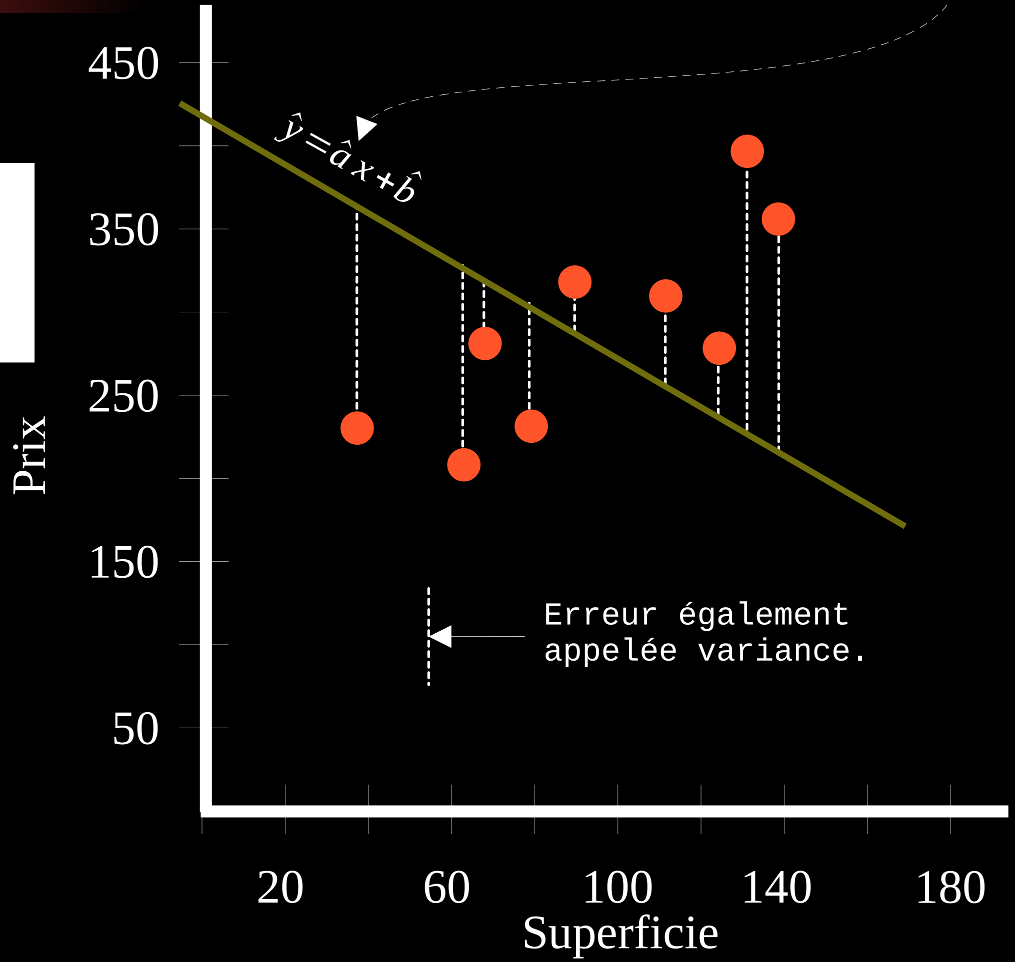
Supervised
Non-Supervised
Semi-Supervised

Theory

Model→ Linear Regression= $\hat{y}=\hat{a}\,x+\hat{b}$

$\hat{a}<0\,,\hat{b}\simeq 425$

Graphique des prix (en XAF) de location des maisons en fonction de leur superficie (en m²).



L'entraînement consiste à trouver les valeurs **â** et **b̂** qui minimisent au maximum l'erreur (**E**).

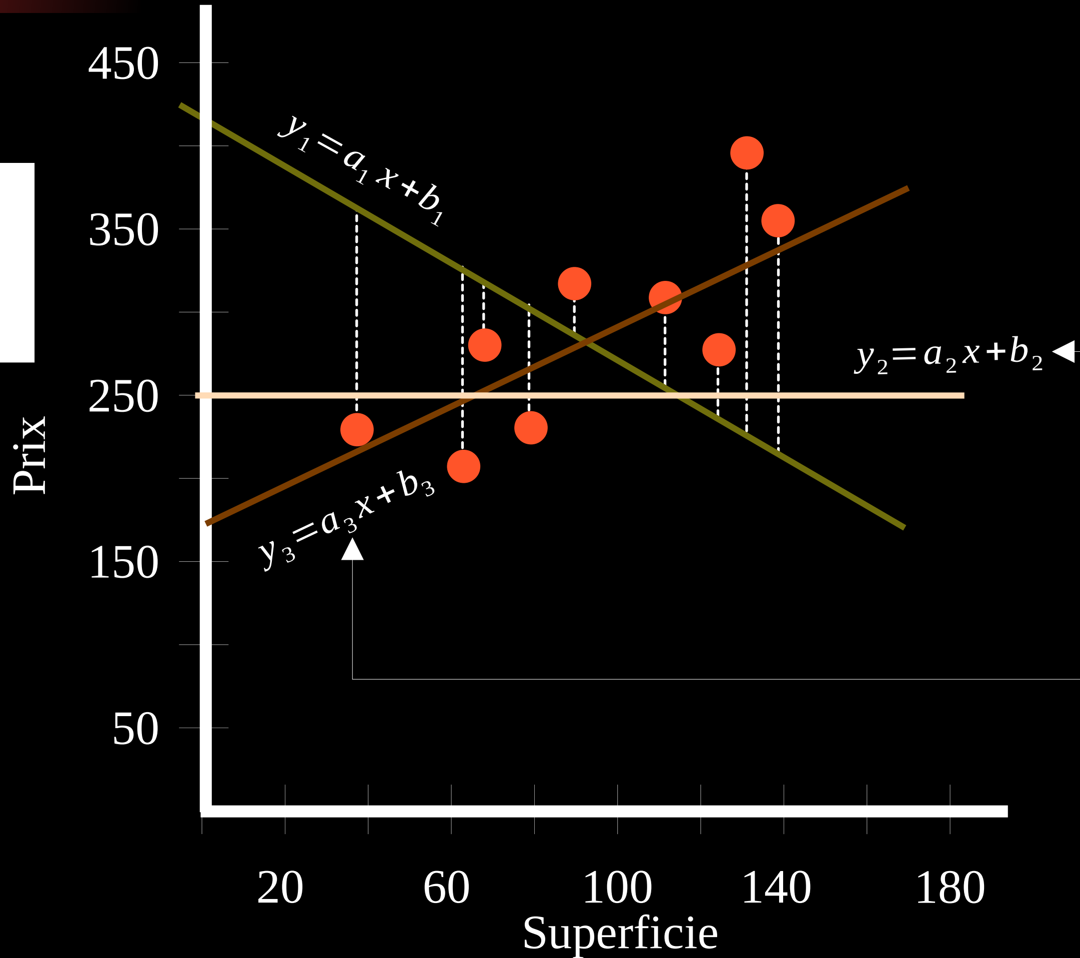
$$E = \vert + \vert + \vert + \cdots \vert$$

$$E=\left(e_1+e_2+\ldots+e_9\right)/I$$

I=9, est le nombre de points.

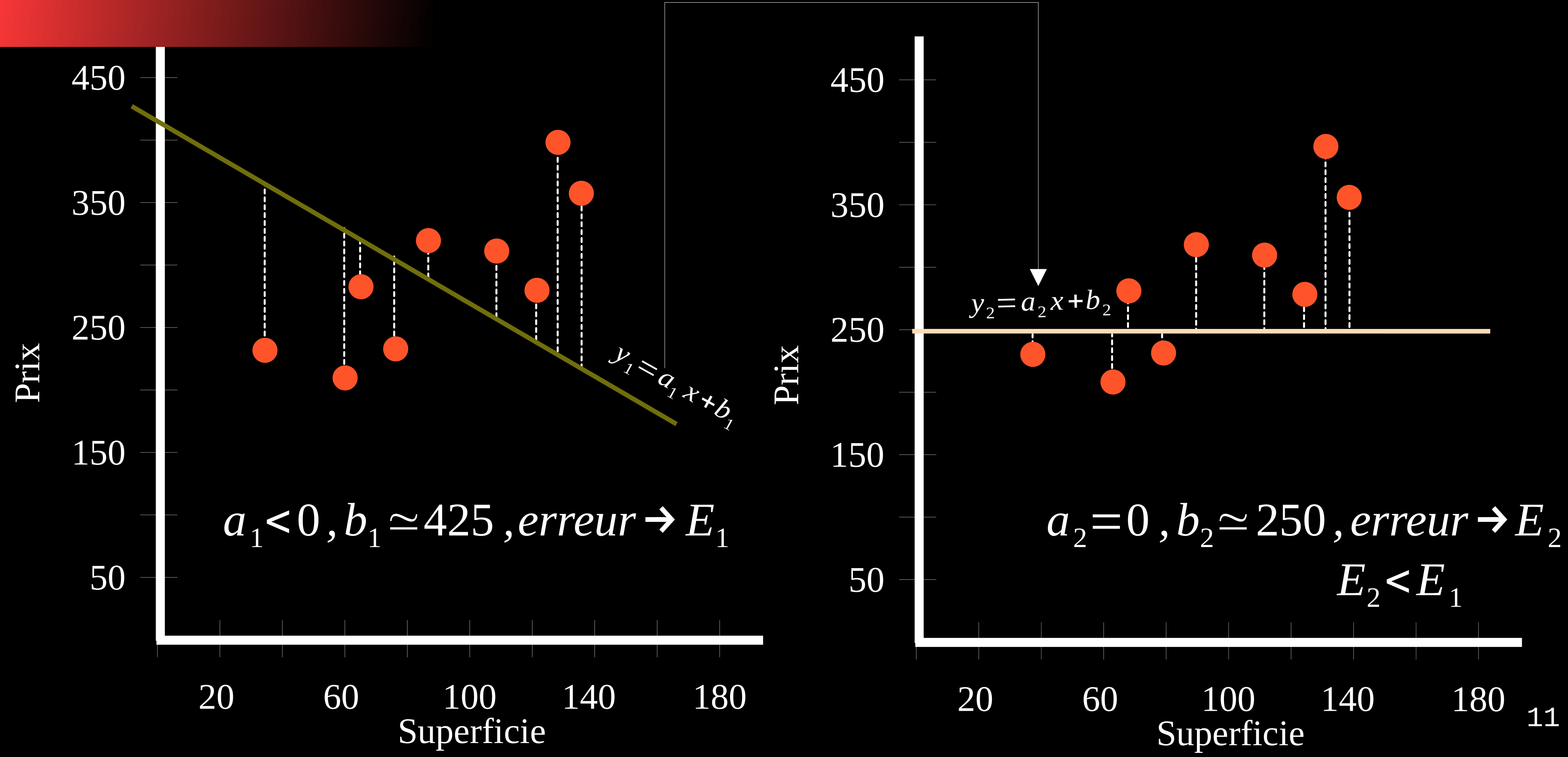
Theory

Graphique des prix (en XAF) de location des maisons en fonction de leur superficie (en m²).



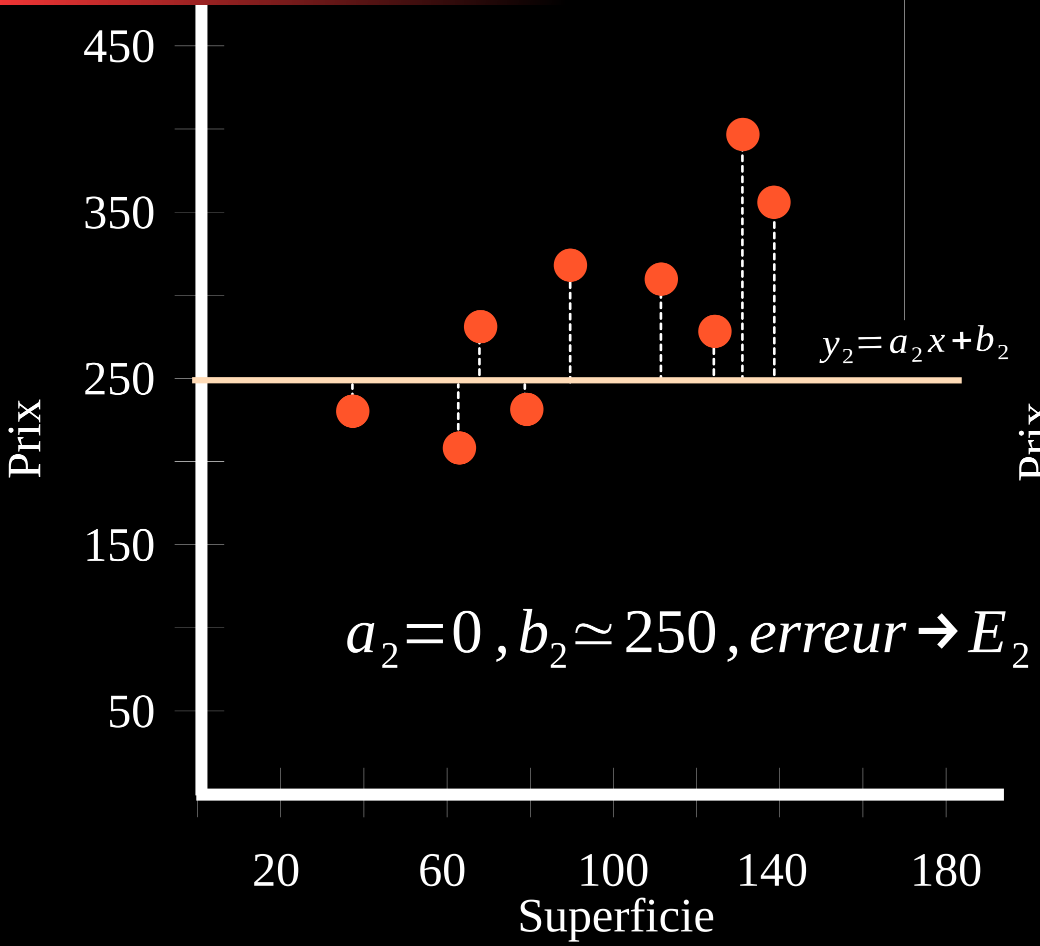
Modèles candidats (fonctions linéaires) pour mininimiser l'erreur.

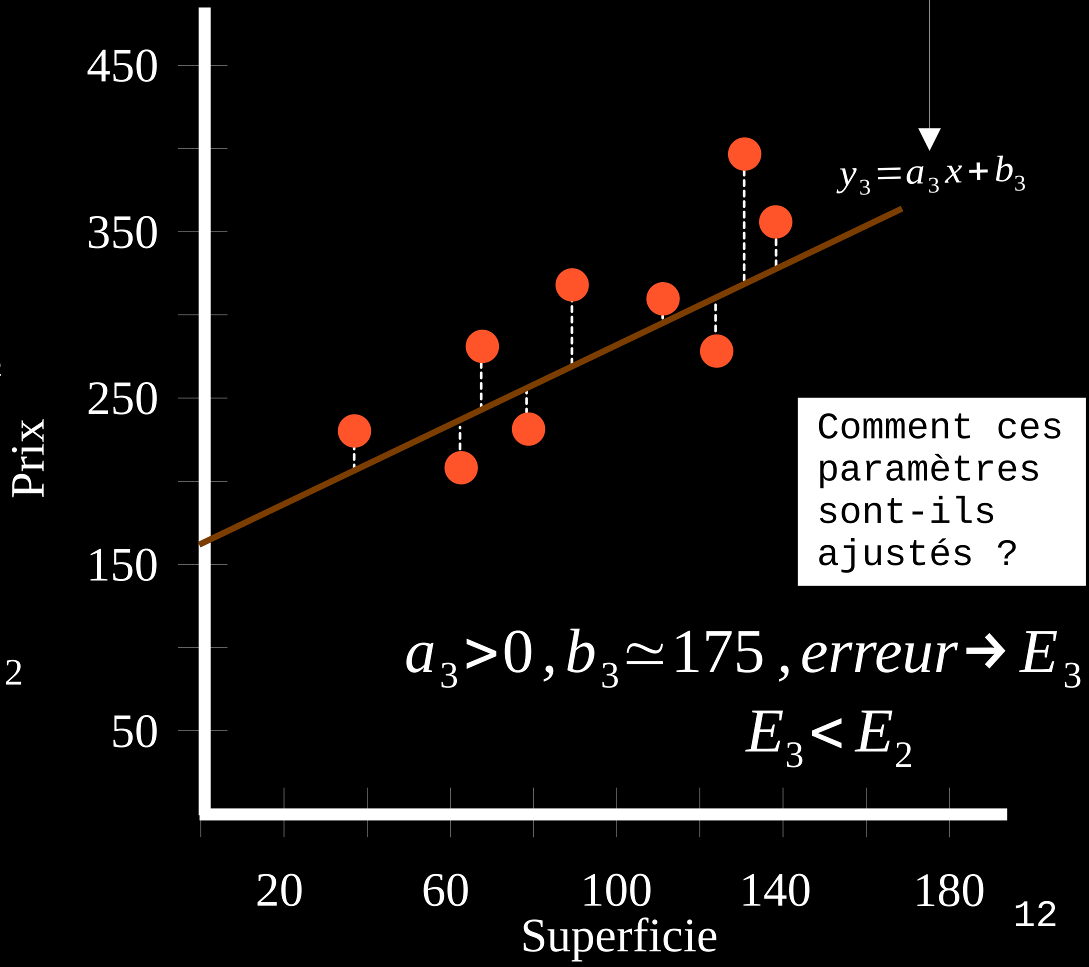
Amélioration du modèle après n entraînements.



Theory

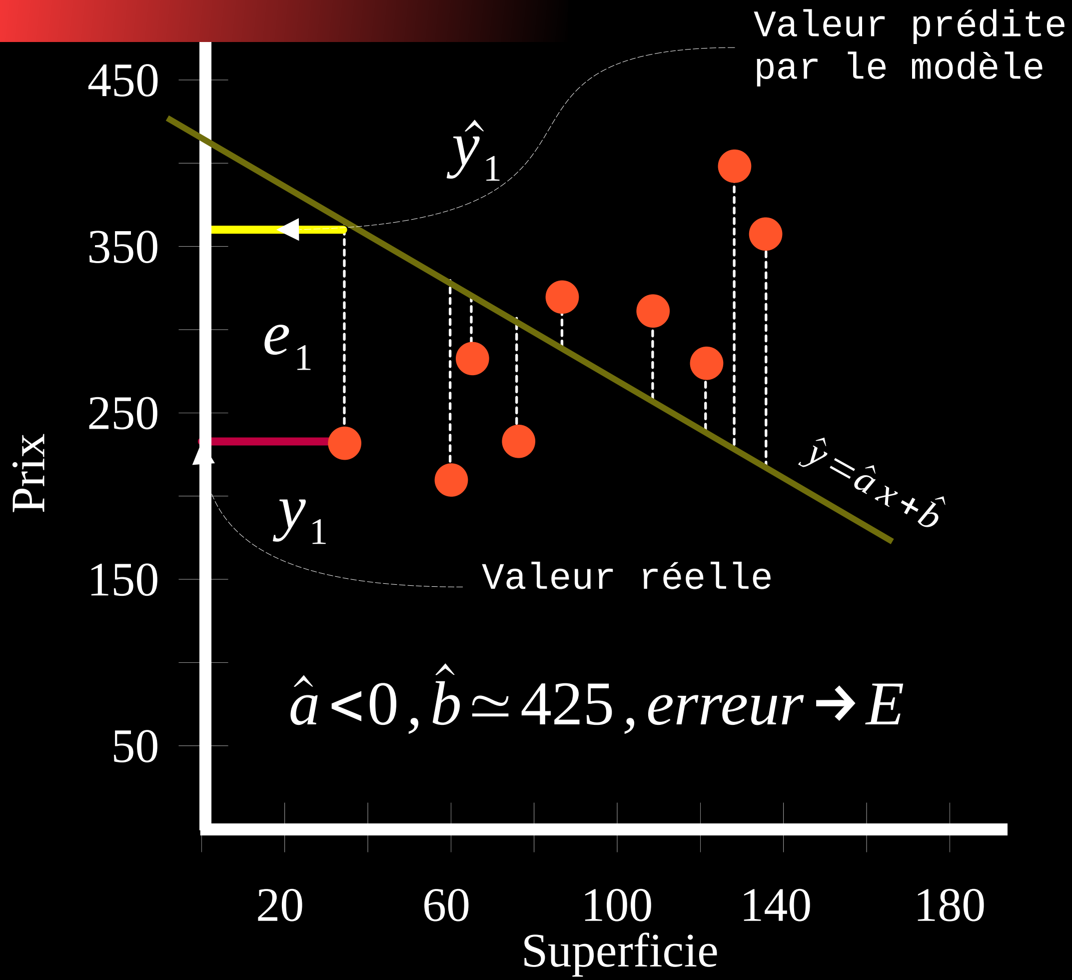
Amélioration du modèle après n+k entraînements.





Comment ces paramètres sont-ils ajustés ?

Theory



$$e_1=(y_1-\hat{y}_1)^2=[y_1-(\hat{a}x_1+\hat{b})]^2$$

$$E=(e_1+e_2+\ldots+e_9)/I=\frac{1}{I}\sum_{i=1}^{I} e_i$$

E est appellée **Mean Squared Error (MSE)** et I=9, est le nombre de points

$$E=\frac{1}{I}\sum_{i=1}^{I}[y_i-(\hat{a}x_i+\hat{b})]^2$$

Comment minimiser l’erreur E?

En trouvant les valeurs optimales de â et b̂ qui minimise cette erreur.

Dérivons E pour trouver les paramètres optimaux.

Theory

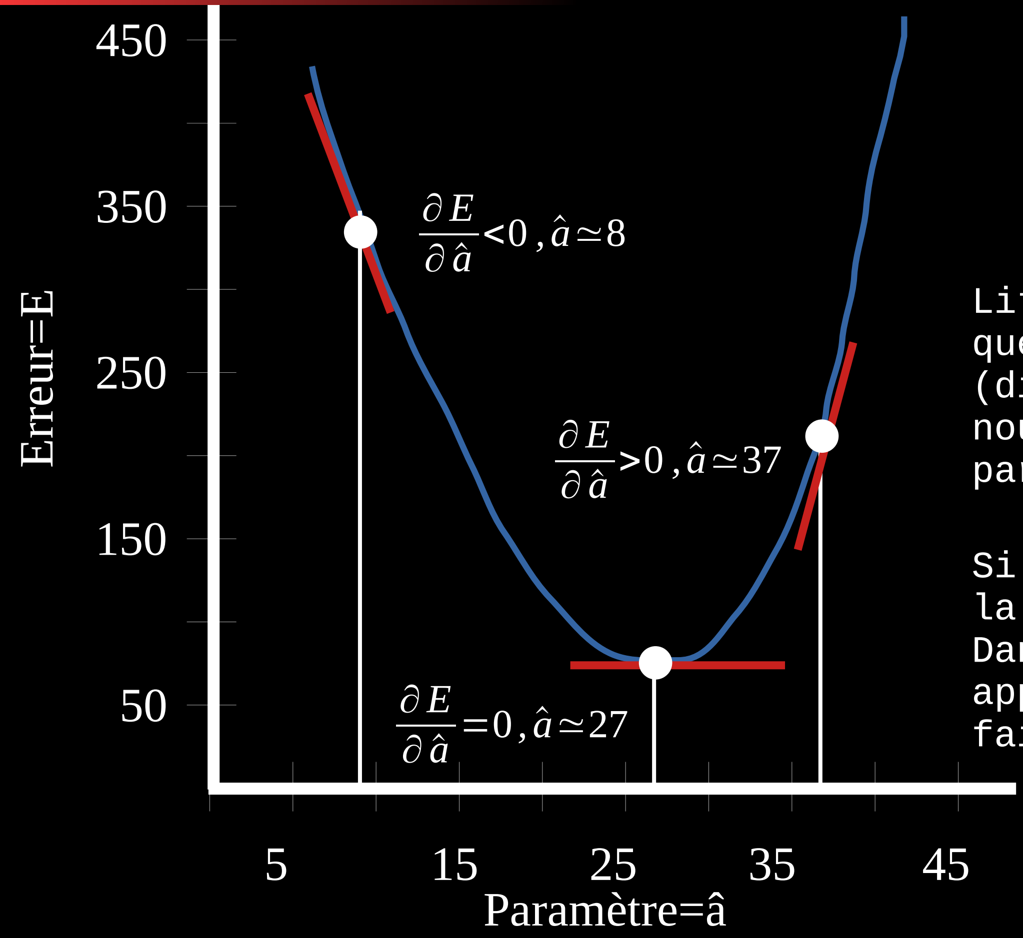
$$E=\frac{1}{I}\sum_{i=1}^{I}[y_i-(\hat{a}x_i+\hat{b})]^2$$

$$[(u-v)^2]'=2(u-v)(u'-v'), u=y_i \text{ and } v=(\hat{a}x_i+\hat{b})$$

$$\frac{\partial E}{\partial \hat{a}}=\frac{1}{I}\sum_{i=1}^{I}2[y_i-(\hat{a}x_i+\hat{b})](-x_i)=\frac{-2}{I}\sum_{i=1}^{I}[y_i-(\hat{a}x_i+\hat{b})](x_i)$$

$$\frac{\partial E}{\partial \hat{b}}=\frac{1}{I}\sum_{i=1}^{I}2[y_i-(\hat{a}x_i+\hat{b})](-1)=\frac{-2}{I}\sum_{i=1}^{I}[y_i-(\hat{a}x_i+\hat{b})]$$

Rappel sur les dérivés des fonctions.



Supposons que nous voulons calculer la dérivé de E au point â=x, formellement on aura:

$$E'(\hat{a}=x)=\frac{\partial E}{\partial \hat{a}}$$

Littéralement, la fonction ci-dessus signifie: quelle est le taux de changement de E (diminution, augmentation, stagnation), lorsque nous sommes au point â. Ce taux est représenté par une droite tangente à la courbe de E.

Si nous voulons minimiser E, nous devons trouver la valeur â qui conduit à cette minimisation. Dans notre exemple, cette valeur est approximativement égale à 27. Ceci doit aussi se faire pour $\hat{b}$.

Calculons la dérivée de E en fonction de â et $\hat{b}$.

Rappel algèbre linéaire.

Addition de vecteurs.

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1+b_1 \\ a_2+b_2 \\ \vdots \\ a_k+b_k \end{bmatrix} \text{ Exemple } \rightarrow \begin{bmatrix} 2.5 \\ 18.0 \\ \vdots \\ 7.5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3.9 \\ 8.1 \\ \vdots \\ 4.2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6.4 \\ 26.1 \\ \vdots \\ 11.7 \end{bmatrix}$$

Produit d'un nombre réel avec un vecteur.

$$X \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Xa_1 \\ Xa_2 \\ \vdots \\ Xa_k \end{bmatrix} \text{ Exemple } \rightarrow 2 \begin{bmatrix} 3.9 \\ 8.1 \\ \vdots \\ 4.2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7.8 \\ 16.2 \\ \vdots \\ 8.4 \end{bmatrix}$$

Rappel algèbre linéaire.

Pour multiplier deux matrices, le nombre de colonnes de la première matrice doit être égal au nombre de lignes de la seconde.

Produit de matrices.

2 x 2 2 x 3 2 x 3

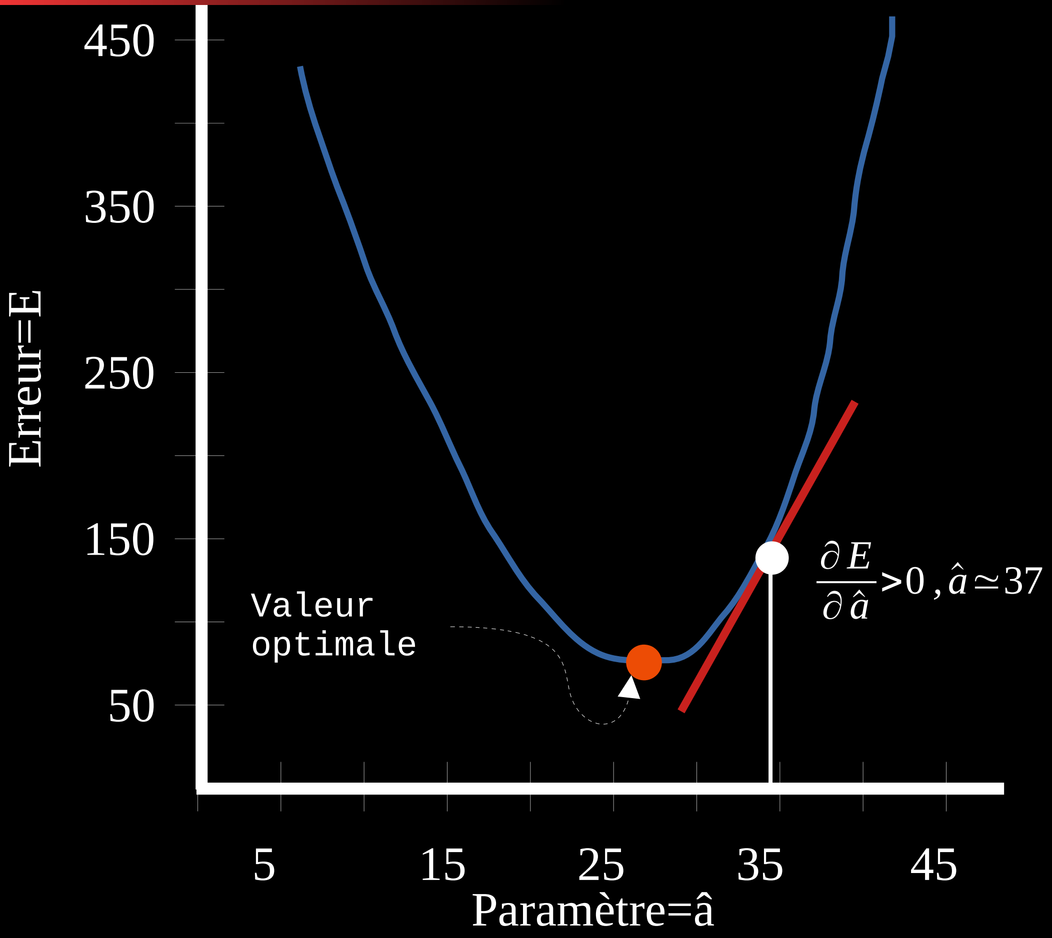
$$\begin{bmatrix} a_1^1 & a_2^1 \\ a_1^2 & a_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1^1 & b_2^1 & b_3^1 \\ b_1^2 & b_2^2 & b_3^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1^1 b_1^1 + a_2^1 b_1^2 & a_1^1 b_2^1 + a_2^1 b_2^2 & a_1^1 b_3^1 + a_2^1 b_3^2 \\ a_1^1 b_1^1 + a_2^1 b_1^2 & a_1^1 b_2^1 + a_2^1 b_2^2 & a_1^1 b_3^1 + a_2^1 b_3^2 \end{bmatrix}$$

Exemple

$$\begin{bmatrix} 2{,}1 & 4{,}3 \\ 1{,}7 & 7{,}0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2{,}5 & 10{,}0 & 13{,}2 \\ 5{,}4 & 4{,}4 & 6{,}5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2{,}1 * 2{,}5 + 4{,}3 * 5{,}4 & 2{,}1 * 10{,}0 + 4{,}3 * 4{,}4 & 2{,}1 * 13{,}2 + 4{,}3 * 6{,}5 \\ 1{,}7 * 2{,}5 + 7{,}0 * 5{,}4 & 1{,}7 * 10{,}0 + 7{,}0 * 4{,}4 & 1{,}7 * 13{,}2 + 7{,}0 * 6{,}5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2{,}1 & 4{,}3 \\ 1{,}7 & 7{,}0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2{,}5 & 10{,}0 & 13{,}2 \\ 5{,}4 & 4{,}4 & 6{,}5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 28{,}47 & 39{,}92 & 55{,}67 \\ 42{,}05 & 47{,}8 & 67{,}94 \end{bmatrix}$$

Theory



La nouvelle valeur de â sera:

$$\hat{a} = \hat{a} - \backepsilon \frac{\partial E}{\partial \hat{a}}$$

$\backepsilon > 0$ Est appelée **learning rate**.
Elle est souvent égale à 0.001

Ce processus d'ajustement appelé **descente de gradient** est répété n fois jusqu'à ce que l'on trouve la valeur optimale de â (ansi que $\hat{b}$) qui minimise E.

Que se passe-t'il si nous avons plusieurs valeurs observées ?

Theory

$$\hat{y}=\hat{a}_1 x_1+\hat{a}_2 x_2+\ldots+\hat{a}_k+x_k+\hat{b}=[x_1, x_2, \ldots, x_k]\begin{bmatrix}\hat{a}_1\\ \hat{a}_2\\ \vdots\\ \hat{a}_k\end{bmatrix}+\hat{b}$$

$$\hat{y}=X\theta+\hat{b} \mid X=[x_1, x_2, \ldots, x_k], \theta=\begin{bmatrix}\hat{a}_1\\ \hat{a}_2\\ \vdots\\ \hat{a}_k\end{bmatrix}$$

$$E=\frac{1}{I}\sum_{i=1}^{I}[y_i-(X_i\theta+\hat{b})]^2$$

$$X=[x_1, x_2, \ldots, x_k] \rightarrow X^T=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_k\end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial E}{\partial \theta}=\frac{1}{I}\sum_{i=1}^{I}2[y_i-(X_i\theta+\hat{b})](-X_i)^T=\frac{-2}{I}\sum_{i=1}^{I}[y_i-(X_i\theta+\hat{b})](X_i)^T$$

Theory

$$X=[x_1,x_2,\ldots,x_k]\rightarrow X^T=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_k\end{bmatrix}$$

$$\alpha_i=[y_i-(X_i\theta+\hat{b})]$$

$$\frac{\partial E}{\partial\theta}=\frac{-2}{I}\sum_{i=1}^{I}[y_i-(X_i\theta+\hat{b})](X_i)^T=\frac{-2}{I}\sum_{i=1}^{I}\alpha_i\begin{bmatrix}x_1^i\\x_2^i\\\vdots\\x_k^i\end{bmatrix}$$

$$\theta=\theta-\ni\frac{\partial E}{\partial\theta}=\theta-\ni\frac{-2}{I}\sum_{i=1}^{I}\alpha_i\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_k\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\hat{a}_1\\\hat{a}_2\\\vdots\\\hat{a}_k\end{bmatrix}-\ni\frac{-2}{I}\sum_{i=1}^{I}\alpha_i\begin{bmatrix}x_1^i\\x_2^i\\\vdots\\x_k^i\end{bmatrix}$$

Use Case

Association Top Sciences

Plus de science pour plus de progrès